МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ВІННИЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

В.М. Дубчак, Л.І. Новицька

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

ВІННИЦЯ
2022

Рекомендовано Вченою радою Вінницького національного аграрного університету Міністерства освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів III-IV ступенів акредитації (протокол № 6 від 23 грудня 2022 р.).

Дубчак В.М., Новицька Л.І. Математичний аналіз: навчальний посібник. Вінниця: ВНАУ, 2022. 186 с.

Рецензенти:

Петрук В.А.	доктор педагогічних наук, професор кафедри вищої математики ВНТУ
Матвійчук В.А.	доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри електроенергетики, електротехніки та електромеханіки ВНАУ
Теренчук А.Т.	кандидат технічних наук, доцент кафедри біологічної фізики, медичної апаратури та інформатики ВНМУ ім. М.І. Пирогова

Рукопис містить теоретичний матеріал, приклади вирішення типових практичних задач з дисципліни «Математичний аналіз», завдання для самостійної роботи, завдання у тестовій формі при підготовці для самостійної роботи, перелік літературних джерел.

Для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за галуззю знань 12 «Інформаційні технології» спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» освітньо-професійної програми «Комп'ютерні науки».

ISBN 978-617-7417007-0

©В.М. Дубчак, Л.І. Новицька, 2022

ВСТУП

У Законах України «Про освіту», «Про вищу освіту», Національній доктрині розвитку освіти України у XXI столітті зазначено необхідність підвищення професійного та загальнокультурного рівня випускників. Важливим і актуальним сьогодні є створення системи неперервного навчання й виховання для досягнення високих освітніх стандартів, формування інтелектуального потенціалу нації, забезпечення можливостей духовного збагачення особистості.

Вдосконалення навчального процесу, підвищення якості підготовки фахівців у нових умовах розвитку аграрних вищих навчальних закладів вимагають ґрунтовної математичної підготовки. Сучасного інженера неможливо уявити без оволодіння ним знаннями в галузі математичного моделювання виробничих процесів та інформаційних технологій, без уміння аналізувати явища, узагальнювати закономірності, обґрунтовувати власні міркування.

Особливе значення в підготовці фахівців має оволодіння математичними методами, вміння логічного мислення, оскільки інженерна діяльність в економічному секторі пов’язана зі здатністю досягати кінцевого результату через вплив великої кількості випадкових і неконтрольованих факторів. До того ж ці знання необхідні для вимірювання, вивчення, перетворення й прогнозування технологічних явищ в умовах ринкової економіки та нових умовах господарювання в галузях аграрного виробництва.

Зміст

Вступ		**3**
Розділ 1.	Вступ до математичного аналізу	**5**
Розділ 2.	Диференціальне числення	**26**
Розділ 3.	Невизначений інтеграл	**56**
Розділ 4.	Визначений інтеграл	**73**
Розділ 5.	Комплексні числа	**97**
Розділ 6.	Диференціальні рівняння	**108**
Розділ 7.	Ряди	**123**
Розділ 8.	Функції багатьох змінних	**139**
Література		**151**
Додатки		**154**

Розділ 1. Вступ до математичного аналізу
1.1. Поняття функції, її визначення

Означення. *Функцією* $y = f(x)$ називається така відповідність між множинами D і E, коли кожному значенню змінної x із області визначення даної функції відповідає одне й тільки одне значення змінної y.

При цьому вважають, що x – незалежна змінна, або аргумент; y – залежна змінна, або функція; D – область визначення функції; E – множина значень функції.

Розрізняють три способи завдання функцій: аналітичний, графічний, табличний.

Означення. Функція $y = F(u)$, де $u = \varphi(x)$, називається *складною функцією*, або *суперпозицією* функцій $F(u)$ та $\varphi(x)$, і позначається $y = F(\varphi(x))$.

Приклад. $y = 2^{\sin^2 x}$ – складна функція, вона буде суперпозицією трьох функцій: $y = 2^u$, $u = v^2$, $v = \sin x$.

Приклад. $y = \operatorname{tg}(3u)\cdot f(u)$, де $u = 3x+1$, $f(x) = (2x+5)^3$. Оскільки $f(u) = (2u+5)^3$, то

$$y = \operatorname{tg}(3(3x+1))(2(3x+1)+5)^3 = \operatorname{tg}(9x+3)(6x+7)^3.$$

Означення. Нехай функція $y = f(x)$ встановлює відповідність між множинами D та E. Якщо обернена відповідність між множинами E та D буде функцією, то вона буде *оберненою до даної функції* $y = f(x)$, а її позначають $y = f^{-1}(x)$.

Приклад. $f(x) = x^3$, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ – взаємно обернені функції (рис.1.1).

Графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$.

Означення. Функція називається *неявною*, якщо її задано рівнянням $F(x, y) = 0$, яке не вирішене відносно змінної y.

Приклад. Рівняння $y+x+2^y=0$ визначає неявну функцію *y* від *x*.

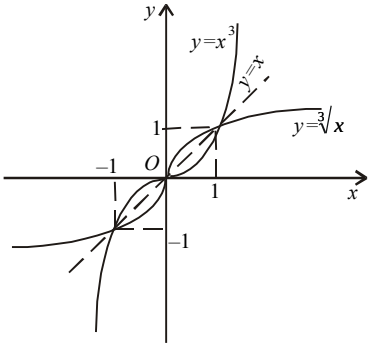


Рис. 1.1. Взаємообернені функції

Означення. Система рівнянь $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ визначає параметричну залежність функції *y* від змінної *x* (*t* – параметр з множини дійсних чисел).

Приклад. Параметрична залежність

$$\begin{cases} x=r\cos t \\ y=r\sin t \end{cases} \quad (0\le t\le 2\pi)$$

визначає коло радіусом *r* з центром початку системи координат О. Підносячи до квадрата параметричні рівняння, отримаємо: $x^2+y^2=r^2$.

Означення. Множина всіх значень аргументу, для яких можливо встановити значення функції, утворює *область визначення даної функції.*

Приклад. Знайти область визначення функції

$$y=\frac{\arcsin\dfrac{x}{2}+\sqrt{1-x^2}}{\lg(1+x)}\,.$$

$$D(y)=\begin{cases}\left|\dfrac{x}{2}\right|\le 1\\ 1-x^2\ge 0\\ x+1>0\\ \lg(x+1)\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x|\le 2\\ |x|\le 1\\ x>-1\\ x+1\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x\le 1\\ x\ne 0.\end{cases}$$

$D(y) = (-1; 0) \cup (0; 1]$ – область визначення. Якщо за умовою задачі x – відстань, це означає, що $x > 0$, тоді $D(y) = (0; 1]$ – задана область визначення.

Означення. Функція $y = f(x)$ називається *парною* (*непарною*), якщо для будь-якого $x \in D$ виконується умова

$$f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x)).$$

Означення. Функція $y = f(x)$ називається *періодичною з періодом T*, якщо для $x \in D$ виконується умова $f(x+T) = f(x-T) = f(x)$, де число T – період даної функції.

Приклад. $y = \operatorname{tg} x$ – періодична функція з мінімальним періодом $T = \pi$, тому що $\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg}(x-\pi) = \operatorname{tg} x$.

Означення. Функція $y = f(x)$ буде *монотонно зростаючою* (*спадною*) на множині D, якщо для всіх $x \in D$ більшому значенню аргументу відповідає більше (менше) значення функції, тобто $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1) (f(x_2) < f(x_1))$.

Приклад. $y = \log_a x$ – монотонно спадна функція при основі a, якщо: $0 < a < 1$, а при $a > 1$ – монотонно зростаюча.

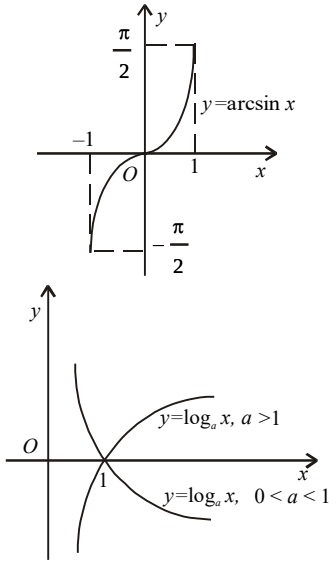


Рис. 1.2. Графіки елементарних функцій

Елементарні функції

Основні з них:

1) степенева $y = x^{\alpha}$;

2) показникова $y = a^{x}$, $a > 0$, $a \neq 1$;

3) логарифмічна $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$;

4) тригонометричні: $y = \cos x$; $y = \sin x$; $y = \operatorname{tg} x$; $y = \operatorname{ctg} x$;

5) обернені тригонометричні: $y = \arcsin x$; $y = \arccos x$; $y = \operatorname{arctg} x$; $y = \operatorname{arcctg} x$.

Приклад. Знайти область визначення функції $y = \dfrac{\ln(1+x)}{x-1}$.

Функція визначена, якщо $x - 1 \neq 0$ та $1 + x > 0$. Отже, областю визначення функції є: $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

Приклад. Знайти область визначення функції

$$y = \sqrt{1-2x} + 3\arcsin\frac{3x-1}{2}.$$

Перший доданок цієї функції $\sqrt{1-2x}$ набуває дійсних значень при умові $1-2x \geq 0,$ а другий – при $-1 \leq \frac{3x-1}{2} \leq 1.$ Розв'язавши дану систему нерівностей, маємо область визначення функції: $\left[-\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}\right]$.

Приклад. Визначити, яка із заданих функцій парна чи непарна:

а) $y = x^2\sqrt[3]{x} + 2\sin x$;

б) $y = 2^x + 2^{-x}$;

в) $y = x^2 + 5x.$

Розв'язання

а) Оскільки

$$f(-x) = (-x)^2\sqrt[3]{-x} + 2\sin(-x) = \left(x^2\sqrt[3]{x} + 2\sin x\right) = -f(x),$$

то функція непарна.

б) Маємо $f(-x) = 2^{-x} + 2^{-(-x)} = 2^{-x} + 2^x = f(x).$

Функція парна.

в) Тут $f(-x) = (-x)^2 + 5(-x) = x^2 - 5x \neq \pm f(x).$

Таким чином, функція не є ні парною, ні непарною.

1.2. Поняття числової послідовності та її границі

Означення. Числова функція $y = f(n)$, область визначення якої є множина чисел натурального ряду, називається *числовою послідовністю* або просто послідовністю і позначається $y = x_n$, надалі це функція порядкового номеру $x_n = f(n),\ n \in N.$

Значення $x_1 = f(1),\ x_2 = f(2),\ \ldots,\ x_n = f(n),\ \ldots$ називаються *членами* цієї числової *послідовності*. Послідовність вважається заданою, якщо відомий *n*-й член цієї послідовності.

Приклад. Записати три перші члени послідовності $x_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$.

Маємо $x_1 = \dfrac{1}{2},\ \ x_2 = \dfrac{3}{2^2},\ \ x_3 = \dfrac{5}{2^3}$.

Приклад. За заданими трьома першими членами послідовності

$$x_1 = 1,\ \ x_2 = -\frac{3}{5\sqrt{2}},\ \ x_3 = \frac{5}{5^2\sqrt{3}}$$

знайти формулу її *n*-го члена.

Задача розв'язується методом підбору з наступною перевіркою $x_n = \dfrac{(-1)^{n-1}(2n-1)}{5^{n-1}\sqrt{n}}$.

Означення. Число a називається *границею послідовності* x_n, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$, яке б мале воно не було, знайдеться такий номер *N*, що для всіх номерів $n > N$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$.

Позначення $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ або $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$.

Означення. Послідовність називається *збіжною*, якщо вона має границю (скінченну). Послідовність, яка не має границі, називається *розбіжною*.

Означення. Послідовність α_n називається *нескінченно малою величиною* (*н. м. в.*), якщо

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0. \qquad (1.1)$$

Приклад. $\alpha_n = \frac{1}{n}$ – н.м.в., бо $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Означення. Послідовність x_n називається *нескінченно великою величиною* (н.в.в.), якщо для будь-якого числа $0 < M < +\infty$, яке б велике воно не було, існує номер *N*, такий, що при всіх $n > N$ виконується нерівність $|x_n| > M$.

Якщо члени н.в.в., починаючи з деякого її номера, всі додатні, то позначають $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$; якщо від'ємні, то $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$, а якщо різних знаків, то $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Наприклад:

1) $x_n = \sqrt{n}$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$;

2) $x_n = -n^2$, $\lim_{n\to\infty} \left(-n^2\right) = -\infty$;

3) $x_n = (-1)^n n$, $\lim_{n\to\infty} (-1)^n n = \infty$.

За своїм означенням, н.в.в. – необмежена, але не кожна необмежена величина є н.в.в., наприклад, послідовність 1, 0, 3, 0, 5, 0, ... з членом $x_n = \frac{1}{2}\left(n + (-1)^{n+1} n\right)$ – величина необмежена, але н.в.в. вона не буде. Справді, не всі члени цієї послідовності, починаючи з деякого її номера, будуть як завгодно великими.

Теорема. **Зв'язок між нескінченно великими та нескінченно малими величинами**

1. Якщо α_n – н.м.в. і $\alpha_n \neq 0$, то обернена до неї послідовність $y_n = \frac{1}{\alpha_n}$ буде н.в.в., і навпаки.

2. Якщо y_n – н.в.в., то обернена до неї $\alpha_n = \dfrac{1}{y_n}$ – н.м.в.

Теорема (властивості границь). Якщо існують границі $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} cy_n = c\lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$ при $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$.

За допомогою цієї теореми можливо виконувати граничний перехід при арифметичних операціях з послідовностями, але тільки в тих випадках, коли послідовності є збіжними.

Приклад. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n^2}} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} 1 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \dfrac{1-0}{2+0} = \dfrac{1}{2}$.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+3n^2-5n+6}{6-2n+7n^2}$.

Розв'язання

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+3n^2-5n+6}{6-2n+7n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(1+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}+\frac{6}{n^3}\right)}{n^2\left(\frac{6}{n^2}-\frac{2}{n}+7\right)} = \infty.$$

1.3. Границя функції

Нехай функція $y = f(x)$ визначена у деякому околі точки $x = a$, за винятком, можливо, самої точки $x = a$.

Означення. Число b називається *границею функції* $f(x)$ при $x \to a$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ завжди

знайдеться інше число $\delta > 0$, таке що при $|x-a| < \delta$ і $x \neq a$ виконується нерівність $|f(x)-b| < \varepsilon$.

Означення. Число b називається *границею функції* $f(x)$, коли $x \to \infty$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $M > 0$, таке що з нерівності $|x| > M$ випливає нерівність $|f(x)-b| < \varepsilon$.

Означення. Функція $f(x)$ називається *нескінченно великою величиною* (*н.в.в.*) при $x \to a$, якщо для будь-якого $M > 0$, яке б велике воно не було, завжди існує інше число $\delta > 0$, таке що з нерівності $0 < |x-a| < \delta$ випливає, що $|f(x)| > M$.

Означення. Функція $f(x)$ називається *нескінченно малою величиною* (*н.м.в.*) при $x \to a$, якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

Розглянемо поняття односторонніх границь для функції $y = f(x)$.

Односторонні границі функції

Якщо при $x \to a (x < a)$ функція має границю, то ця границя називається *лівосторонньою границею функції в точці* $x = a$.

Якщо при $x \to a$ $(x > a)$ функція має границю, то ця границя називається *правосторонньою границею* функції в точці $x = a$.

Теорема. Для існування $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ необхідно і достатньо виконання умови

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{a+0} f(x) = b.$$

Приклад. Довести, що $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ не існує.

Розв'язання

Розглянемо односторонні границі:

а) ліворуч $\lim\limits_{x\to -0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}=\left|\begin{matrix}x\to -0\\ \dfrac{1}{x}\to -\infty\end{matrix}\right|=-\dfrac{\pi}{2};$

б) праворуч $\lim\limits_{x\to +0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}=\left|\begin{matrix}x\to +0\\ \dfrac{1}{x}\to +\infty\end{matrix}\right|=+\dfrac{\pi}{2}.$

Отже, $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ не існує, тому що односторонні границі хоча й існують, але між собою не рівні.

Розкриття невизначеностей виду $\left[\dfrac{0}{0}\right], \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right], [\infty-\infty].$

1. Невизначеність виду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ **для раціональних функцій.**

Теорема (Безу). Остача від ділення многочлена $P_n(x)$ на двочлен типу $(x - a)$ дорівнює значенню многочлена при $x=a$, тобто $P_n(a)$.

Наслідок. Якщо число a – корінь многочлена $P_n(x)$, тобто $P_n(a)=0,$ то многочлен $P_n(x)$ ділиться без остачі на двочлен $(x - a)$.

Приклад. Розкласти на множники многочлен

$$P_3(x)=x^3-2x^2+6x-5.$$

Розв'язання

Оскільки $P_3(1)=0\Rightarrow x=1$ – корінь $P_3(x)\Rightarrow P_3(x)$ ділиться без остачі на $x - 1$. Виконуючи ділення многочленів, дістаємо:

$$\begin{array}{r|l} x^3-2x^2+6x-5 & x-1 \\ \hline -\,x^3-x^2 & x^2-x-5 \\ \hline -x^2+6x & \\ -\,-x^2+x & \\ \hline 5x-5 & \\ -\,5x-5 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Отже,

$$P_3(x)=x^3-2x^2+6x-5=(x-1)(x^2-x+5).$$

Розглянемо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$, де $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – такі многочлени, що $P_n(a)=0,\ Q_m(a)=0.$

За наслідком теореми Безу чисельник і знаменник діляться без остачі на $(x-a)$ при $x\neq a.$ Тому маємо:

$$\lim_{x\to a}\frac{P_n(a)}{Q_m(a)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)P_{n-1}(x)}{(x-a)Q_{m-1}(x)}=\lim_{x\to a}\frac{P_{n-1}(x)}{Q_{m-1}(x)}.$$

Степінь многочлена як у чисельнику, так і в знаменнику зменшилась на одиницю. Якщо після виконання нового граничного переходу знову маємо невизначеність $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, то попередні дії повторюють.

Приклад.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2+6x-5}{x^2-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2-x+5)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x+5}{x+1}=\frac{1-1+5}{1+1}=\frac{5}{2}.$$

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$.

Розв'язання

Тут чисельник та знаменник дробу прямують до нуля при $x\to 3$ (невизначеність вигляду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$). Оскільки

$$\frac{x^2-9}{x^2-3x}=\frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)}=\ =\frac{x+3}{x}\ \text{ при } x\neq 3,\ \text{тоді}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x}=2.\ \text{Звідки}\ \lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}=2.$$

2. Невизначеність виду $\left[\frac{0}{0}\right]$ для ірраціональних функцій.

Для розв'язування прикладів у цьому випадку доцільно звільнятись від ірраціональності у чисельнику або знаменнику дробу. Для такого звільнення від радикалів використовуємо відповідні формули скороченого множення, заміну змінної та ін.

Приклад.

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 5}\frac{\left(\sqrt{x-1}-2\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{x-1-4}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}=\frac{1}{4}.$$

3. Невизначеність виду $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. У цьому випадку чисельник і знаменник доцільно поділити на найбільшу степінь змінної.

Приклад.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{x}+x+1}{2\sqrt{x^3+x}-10x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x\sqrt{x}+x+1}{x\sqrt{x}}}{\frac{2\sqrt{x^3+x}-10x}{x\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}{2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{10}{\sqrt{x}}}=\frac{1}{2}.$$

4. Невизначеність виду $[\infty-\infty]$.

Ця невизначеність зводиться до невизначеностей $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$; наприклад, зведенням виразу до спільного знаменника, множенням на спряжений алгебраїчний вираз тощо.

Приклад.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=[\infty-\infty]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}=\frac{2}{1+1}=1.$$

Визначні границі

Перша визначна границя $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. (1.2)

Границі – наслідки першої визначної границі:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1.$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}=1.$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\operatorname{tg}x}=1.$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}=\dfrac{a}{b}.$

Приклад.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

Друга визначна границя $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$. (1.3)

Границі – наслідки другої визначної границі:

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}=e^{ab}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

Приклад.

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{\sin 2x}{x\sin 2x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left((1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}}\right)^{\frac{\sin 2x}{x}}=\left|\begin{array}{l}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}}\xrightarrow[x\to 0]{}e\\ \frac{\sin 2x}{x}\xrightarrow[x\to 0]{}2\end{array}\right|=e^2.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x-1}=\left[\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)^{2x-1}=\left[1^{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}\cdot\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\left(1+\frac{-2}{x}\right)^{2x}\left(1+\frac{3}{x}\right)}=\frac{e^{3\cdot 2}\cdot 1}{e^{-2\cdot 2}\cdot 1}=e^{10}.$$

1.4. Еквівалентні нескінченно малі величини

Означення. Нескінченно малі величини (н.м.в.) $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ (функції) називаються н.м.в. одного порядку малості при $x \to a$, якщо $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \text{const} \neq 0.$

Приклад. Н.м.в. $\alpha(x) = x$ та $\beta(x) = \sin 2x$ є н.м.в. *одного порядку* при $x \to 0$, бо

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin 2x} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Означення. Н.м.в. $\alpha(x)$ називається н.м.в. *вищого порядку малості* порівняно з н.м.в. $\beta(x)$ при $x \to a$, якщо $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0.$

Приклад. Н.м.в. $\alpha(x) = x^n (n > 1)$ є вищого порядку малості порівняно з н.м.в. $\beta(x) = x$ при $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^n}{x} = \lim_{x\to 0} x^{n-1} = 0.$$

Означення. Дві н.м.в. $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються *еквівалентними нескінченно малими* при $x \to a$, якщо $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$

Зауваження. При дослідженні границь відношення н.м.в. доцільно замінювати еквівалентними функціями.

Таблиця еквівалентних нескінченно малих функцій

$\sin x \sim x,\ x \to 0;$ $\qquad$ $e^x - 1 \sim x,\ x \to 0;$

$tgx \sim x,\ x \to 0;$

$\arcsin x \sim x,\ x \to 0;$ $\qquad a^x - 1 \sim x \ln a,\ x \to 0;$

$arctgx \sim x,\ x \to 0;$ $\qquad \lg(1+x) \sim x \lg e,\ x \to 0;$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2},\ x \to 0;$$

$$(1+x)^k - 1 \sim kx,\ x \to 0,\ k > 0.$$

Звідки випливає, наприклад, що при $x \to 0$ справедливо $e^{3x} - 1 \sim 3x$; $\sin 5x \sim 5x$ та ін.

Приклад. Знайти

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 5x} - e^{\sin x}}{\ln(1+3x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x}\left(e^{\sin 5x - \sin x} - 1\right)}{\ln(1+3x)} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x \to 0 \\ \ln(1+3x) \sim 3x; \\ e^{\sin 5x - \sin 5x} - 1 \sim \sin 5x - \sin x; \\ e^{\sin x} \to 1 \end{array} \right| = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x - \sin x}{3x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin 2x \cdot \cos 3x}{3x} = \left| \begin{array}{c} x \to 0 \\ \sin 2x \sim 2x \\ \cos 3x \to 1 \end{array} \right| = \lim_{x\to 0} \frac{2 \cdot 2x}{3x} = \frac{4}{3}.$$

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+3x\sin x)}{\operatorname{tg}(x^2)}$.

Розв'язання

Замінимо чисельник та знаменник дробу відповідними еквівалентними н.м.в.:

$\ln(1+3x\sin x) \sim 3x\sin x, \operatorname{tg}(x^2) \sim x^2$, тоді

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x\sin x)}{\operatorname{tg}(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{3x\sin x}{x^2} = 3\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 3.$$

1.5. Поняття неперервності функції. Класифікація точок розриву

Означення. Функція $y = f(x)$ називається *неперервною в точці* $x = x_0$, якщо обидві односторонні границі функції зліва й справа в цій точці існують, рівні між собою і дорівнюють значенню функції в цій точці, тобто:

$$\begin{pmatrix} f(x) \text{ — неперервна} \\ \text{при } x = x_0 \end{pmatrix} := \left(\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0) \right).$$

Означення. Функція називається *неперервною на деякому проміжку числової осі*, якщо вона неперервна у кожній точці даного проміжку.

Приклад. Дослідити на неперервність функцію

$y = \sin x \quad x \in R$.

Розв'язання

Візьмемо довільне $x_0 \in R$, надамо x_0 приросту Δx, тоді приріст функції Δy буде

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right).$$

Розглянемо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta x \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) \right) = 0.$$

При $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta x$ – н.м.в.;

$\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \to 1$; $\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)$ – величина обмежена

$$\left(\left|\cos\left(\frac{\Delta x}{2} + x_0\right)\right| \le 1\right),$$

отже, добуток $\Delta y = \Delta x \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(\frac{\Delta x}{2} + x_0\right)$ є н.м.в.

Таким чином, з $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0$. Отже, функція $y = \sin x$ неперервна на всій числовій осі.

Властивості неперервних функцій

Теорема 1. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні в точці $\boldsymbol{x = x_0}$, то в цій точці будуть також неперервними функції

$f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$; за умови, що $g(x_0) \neq 0$.

Теорема 2. Якщо функція $y = F(u)$ – неперервна для $u \in U$, а функція $u = \varphi(x)$ – неперервна для $x \in X$, а значення функції $\varphi(x) \in U$, то функція $y = F(\varphi(x))$ – також неперервна для $x \in X$.

Приклад. Дослідити на неперервність функції $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

Розв'язання

Оскільки $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, то функцію $y = \cos x$ можемо вважати складеною функцією від функцій:

$y = \sin u, \quad u = \frac{\pi}{2} - x.$ Отже, за теоремою 2 функція $y = \cos x$ – неперервна, коли $x \in R$.

Наслідок. Із теореми 1 випливає, що функція $y = \mathrm{tg}x$ – неперервна $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n \right)$, а функція $y = \mathrm{ctg}x$ – неперервна $\forall x \in (\pi n, \pi + \pi n) n \in Z$, як відношення неперервних функцій $y = \sin x$ та $y = \cos x$.

***Теорема 3* (*Коші*).** Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a;\ b]$ і на його кінцях набуває значення різних знаків (наприклад $f(a) > 0, \quad f(b) < 0$), тоді на інтервалі $(a;\ b)$ завжди існуватиме така точка $x = c$, що $f(c) = 0$.

Теорема 4 (Вейєрштрасса). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a;\ b]$, то вона набуває на цьому проміжку свого найбільшого та найменшого значень.

Класифікація точок розриву функцій

Означення. Функція $y = f(x)$ називається *розривною в точці* $x = x_0$, якщо порушується хоча б одна з умов неперервності, тобто порушення будь-якої рівності

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Розрізняють точки *розривів 1-го* і *2-го роду*.

Означення. Точка $x = x_0$ називається *точкою розриву 1-го роду* (розрив неусувний) для функції $y = f(x)$, якщо

односторонні границі функції у цій точці існують, але не рівні між собою, тобто $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$.

Означення. Точка $x = x_0$ називається *точкою розриву 2-го роду* для функції $y = f(x)$, якщо в цій точці не існує хоча б одна із односторонніх границь.

Означення. Точка $x = x_0$ називається *точкою розриву 1-го роду* (розрив усунений) для функції $y = f(x)$, якщо односторонні границі функції в цій точці існують, рівні між собою, але не дорівнюють значенню функції в цій точці або функція у цій точці не існує, тобто

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x_0).$$

Приклад. Дослідити на неперервність функцію $y = 2^{\frac{1}{x-1}}$.

Розв'язання

Область визначення цієї функції $D = (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$. На кожному з інтервалів області визначення функція є неперервною. Обчислимо односторонні границі:

$$\lim_{x\to 1-0} y = \lim_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = \left| \begin{array}{l} x \to 1-0 (x<1) \\ x-1 \to -0 \\ \dfrac{1}{x-1} \to -\infty \\ 2^{-\infty} \to \dfrac{1}{2^{+\infty}} \to +0 \end{array} \right| = +0;$$

$$\lim_{x\to 1+0} y = \lim_{x\to 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = \left| \begin{array}{l} x \to 1+0 (x>1) \\ x-1 \to +0 \\ \dfrac{1}{x-1} \to +\infty \\ 2^{\frac{1}{x-1}} \to +\infty \end{array} \right| = +\infty.$$

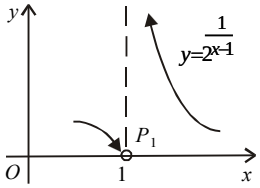


Рис. 1.3. Точки розриву

Отже, $x = 1$ – точка розриву 2-го роду, тому що одна з односторонніх границь (правостороння) не існує. Графік функції $y = 2^{\frac{1}{x-1}}$ в околиці точки розриву показано на рис. 1.3.

Приклад. Дослідити на неперервність функцію $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}$.

Розв'язання

Область визначення цієї функції $D(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$. На кожному з інтервалів області визначення функція неперервна. Обчислимо ліву та праву односторонню границі:

$$\lim_{x\to -0} y = \lim_{x\to -0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2} = \left| \begin{array}{c} x \to -0 \\ x^2 \to +0 \\ \dfrac{1}{x^2} \to +\infty \end{array} \right| = \frac{\pi}{2} - 0;$$

$$\lim_{x\to +0} y = \lim_{x\to +0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2} = \left| \begin{array}{c} x \to +0 \\ x^2 \to +0 \\ \dfrac{1}{x^2} \to +\infty \end{array} \right| = \frac{\pi}{2} - 0.$$

Отже, точка $x = 0$ є точкою розриву функції 1-го роду (розрив усунений), тому що односторонні границі

існують і рівні між собою, при цьому функція для $x = 0$ не існує.

Приклад. Показати, що при $x = 4$ функція $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x-4}$ має розрив.

Розв'язання

Якщо $x \to 4-0$, то $\frac{1}{x-4} \to -\infty, \lim\limits_{x\to 4-0} y = -\frac{\pi}{2}$. Якщо $x \to 4+0$, то $\frac{1}{x-4} \to +\infty, \lim\limits_{x\to 4+0} y = \frac{\pi}{2}$. Таким чином, при $x \to 4$ функція має ліву та праву скінченні границі, і ці границі різні. Звідки, $x = 4$ є точкою розриву 1-го роду.

Приклад. Показати, що при $x = 5$ функція $y = \frac{x^2-25}{x-5}$ має розрив.

Розв'язання

У точці $x = 5$ функція має невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$. В інших точках дріб скорочується на $(x - 5)$, оскільки $x - 5 \neq 0$. Звідси, при $x \neq 5$ $y = x + 5$. Односторонні границі рівні, оскільки

$$\lim_{x\to 5-0} y = \lim_{x\to 5+0} y = 10.$$

Таким чином, при $x = 5$ функція має усунений розрив. Його можливо усунути, якщо вважати, що при $x = 5$ $y = 10$.

Розділ 2. Диференціальне числення

2.1. Похідна функції

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на деякій множині $(a; b)$. Візьмемо значення $x \in (a;b)$ і надамо аргументу

нескінченно малого приросту Δx. Тоді функція набуватиме приросту $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$. Похідна по х позначається як

$$y',\ \ y'_x,\ \ \frac{dy}{dx},\ \ f'(x),\ \ \frac{df(x)}{dx}.$$

Означення. Похідною функції $y = f(x)$ *по аргументу* x називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли цей приріст аргументу прямує до нуля:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (2.1)$$

Знаходження похідної функції називається *диференціюванням* цієї функції.

Приклад. Задана функція $y = x^2$. Знайти похідну в точках $x = 3$ і $x = -4$.

Розв'язання

Надамо аргументу x приросту Δx, тоді функція набуде приросту

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2 + x^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2.$$

Складемо відношення приросту функції до приросту аргументу $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$, відшукаємо границю $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$. Таким чином, $f'(x) = 2x$.

Похідна в точці $x = 3$ $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$, а похідна при $x = -4$ буде $f'(-4) = 2 \cdot (-4) = -8$.

Приклад. Знайти за означенням похідну функції $y = \sin x$.

Розв'язання

Користуючись відомою з курсу тригонометрії формулою

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

знайдемо приріст функції в довільній точці x і обчислимо відповідну границю:

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right),$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$$

тоді $(\sin x)' = \cos x$.

Аналогічно можемо встановити, що $(\cos x)' = -\sin x$.

Приклад. Знайти за означенням похідну функції $y = e^x$.

Розв'язання

Для цієї функції маємо

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x} = e^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = e^x\cdot 1 = e^x,$$

тому $(e^x)' = e^x$.

2.2. Геометричний зміст похідної

Кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0;\ f(x_0))$ або тангенс кута α, що утворює дотична до заданої кривої в даній точці з додатним напрямом осі Ox, – це значення похідної $f'(x_0)$ у цій точці:

$$k = tg\alpha = f'(x_0).$$

Рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0;\ f(x_0))$ матиме вигляд:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

а рівняння нормалі до цієї кривої в точці $M_0(x_0;\ f(x_0))$ буде наступним:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \qquad (2.2)$$

Приклад. До кривої $y = -\frac{2}{x}$ проведено дотичну в точці з абсцисою $x_0 = \sqrt{2}$. Який кут утворює дотична з додатнім напрямом осі *Ox*.

Розв'язання

Із геометричного змісту похідної випливає, що кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 дорівнює значенню похідної $f'(x_0)$, тобто, $k = f'(x_0)$.

$$f'(x) = -2\left(x^{-1}\right)' = 2/x^2,$$

тоді $k = f'\left(\sqrt{2}\right) = 1.$

Отже, $tg\alpha = 1$, звідки $\alpha = 45^0$.

2.3. Основні правила диференціювання. Таблиця похідних

Теорема 1. Похідна сталої (константи) дорівнює нулю, тобто якщо $y = c$, де c = const, тоді

$$y' = 0.$$

Теорема 2. Похідна алгебраїчної суми скінченної кількості диференційованих функцій дорівнює алгебраїчній сумі похідних цих функцій:

$$\left(u(x) \pm v(x)\right)' = u'(x) \pm v'(x).$$

Теорема 3. Похідна добутку двох диференційованих функцій дорівнює добутку першого множника на

похідну другого плюс добуток другого множника на похідну першого, тобто:

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Теорема 4. Сталий множник можна виносити за знак похідної:

$$(cu)' = cu',$$

де $c=const.$·

Теорема 5. Якщо чисельник і знаменник дробу диференційовані функції (знаменник не перетворюється в нуль), то похідна дробу також дорівнює дробу, чисельник якого є різницею добутків знаменника на похідну чисельника та чисельника на похідну знаменника, а знаменник є квадратом знаменника початкового дробу, тобто:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Приклад. Обчислити похідну для функції $y = \mathrm{tg}x$.

Розв'язання

$$y' = (\mathrm{tg}x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Отже, $(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Теорема 6. *(Правило похідної складної функції)*. Якщо $y = f(u)$ та $u = \varphi(x)$ – диференційовані функції від своїх аргументів, тоді похідна складної функції існує і знаходиться за формулою

$$y'_x = f'_u \cdot u'_x. \qquad (2.3)$$

Похідна неявної функції. Нехай рівняння $F(x; y) = 0$ визначає y як неявну функцію від x. Надалі будем

вважати, що ця функція – диференційована. Продиференціювавши по x обидві частини рівняння, дістанемо лінійне рівняння відносно y', з якого знаходимо y', це і буде похідна неявної функції.

Приклад. Знайти y'_x з рівняння $x^2 + y^2 = 4$.

Розв'язання

Оскільки y є функція від x, то y^2 розглядатимемо як складну функцію від x, тобто $\left(y^2\right)' = 2y \cdot y'$.

Продиференціювавши по x обидві частини заданого рівняння, дістанемо $2x + 2yy' = 0$. Звідси $y' = -\frac{x}{y}$.

Теорема 7. Похідна x'_y оберненої функції $x = \varphi(y)$ по змінній y дорівнює оберненій величині похідної y'_x від прямої функції $y = f(x): x'_y = \frac{1}{y'_x}$.

Приклад. Обчислити похідну для функції $x = \arcsin y$.

Розв'язання

Задана функція обернена до функції $y = \sin x$, за теоремою 7 можемо записати

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Звідки $(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$.

Якщо в останньому виразі замість y записати x, тоді дістанемо:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Похідна функції, заданої параметрично. Нехай функцію y від x задано системою параметричних рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \Psi(t) \end{aligned}\right\} (t_1 \le t \le t_2).$$

На підставі теорем 6 і 7 маємо:

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = \Psi'_t(t)\Phi'_x(x)\ ,\ \Phi'_x(x) = \frac{1}{\varphi'_t(t)}.$$

Звідки $y'_x = \dfrac{\Psi'(t)}{\varphi'(t)}$ або $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Приклад. Нехай задана функція параметричними рівняннями:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= a\sin t \end{aligned}\right\} (0 \le t \le \pi).$$

Знайти похідну $\dfrac{dy}{dx}$:

а) при будь-якому t;

б) при $t = \dfrac{\pi}{4}$.

Розв'язання

а) $y'_x = \dfrac{(a\sin t)'}{(a\cos t)'} = \dfrac{a\cos t}{-a\sin t} = -\operatorname{ctg} t$;

б) $\left(y'_x\right)\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -1.$

Аналогічно з попередніми прикладами можемо отримати похідні від усіх основних шкільних елементарних функцій:

Таблиця похідних

1. $(x)' = 1$;
2. $(x^m)' = mx^{m-1}$;
3. $(e^x)' = e^x$;
4. $(a^x)' = a^x \ln a$;
5. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;
6. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$;
7. $(\sin x)' = \cos x$;
8. $(\cos x)' = -\sin x$;
9. $(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;
10. $(\mathrm{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;
11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
11. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
13. $(\mathrm{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2}$;
14. $(\mathrm{arcctg}x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Приклад. $y = 3x^2 - \sqrt[3]{x} + \ln x$. Знайти похідну.

Розв'язання

Задана функція є сумою відповідних функцій, тому за правилом суми, маємо

$$y' = \left(3x^2\right)' - \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' + (\ln x)'.$$

Перший доданок є добутком сталої величини на степеневу функцію; другий – ірраціональна функція з дробовим показником степені; третій – логарифмічна функція з основою *e*. Остаточно маємо

$$y' = 3 \cdot 2x - \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{x} = 6x - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{x}.$$

Приклад. $y = 6^{\arcsin\left(x^5 - 4\right)}$.

Розв'язання

Задана функція складна: зовнішня – показникова функція з основою 6, внутрішня є оберненою тригонометричною. Обернена тригонометрична, в

свою чергу, є складною, для якої внутрішня функція x^5-4.

Отож, задана функція є суперпозицією трьох функцій. При диференціюванні послідовно тричі застосовуємо теорему 6:

$$y=\left[6^{\arcsin\left(x^5-4\right)}\right]'\left[\arcsin\left(x^5-4\right)\right]'=$$

$$=\left[6^{\arcsin\left(x^5-4\right)}\right]'\left[\arcsin\left(x^5-4\right)\right]'\left[x^5-4\right]'.$$

Скористаємося відповідними формулами таблиці похідних:

$$y'=6^{\arcsin\left(x^5-4\right)}\ln 6\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(x^5-4\right)^2}}\cdot 5x^4.$$

Приклад. $y=\left(\mathrm{tg}3x\right)^{\sin 4x}$.

Розв'язання

Задана функція є степенево-показниковою виду $y=\left(u(x)\right)^{v(x)}$, де $u(x)=\mathrm{tg}3x, v(x)=\sin 4x$. Формула для знаходження похідної від степенево-показникової функції має вигляд:

$$y'=u^v\left(v'\ln u+\frac{u'}{u}v\right). \qquad (2.4)$$

Скористаємось деяким алгоритмом, а саме, прологарифмуємо функцію за основою *e*:

$$\ln y=v\ln u.$$

Оскільки $\ln y$ і $\ln u$ – складні функції, то після диференціювання обох частин дістанемо:

$$\frac{1}{y}y'=v'\ln u+\frac{1}{u}u'v.$$

Звідси $y'=y\left(v'\ln u+\frac{u'}{u}v\right)=u^v\left(v'\ln u+\frac{u'}{u}v\right)$.

Формула для знаходження похідної від степенево-показникової функції матиме наступний вигляд:

$$y' = u^v \left(v' \ln u + \frac{u'}{u} v \right).$$

В нашому випадку дістанемо:

$$y' = (\text{tg}3x)^{\sin 4x} \cdot \left(4\cos 4x \cdot \ln \text{tg}3x + \frac{3\sin 4x}{\text{tg}3x \cdot \cos^2 3x} \right).$$

Похідні вищих порядків

Похідна $y' = f'(x)$ від функції $y = f(x)$ називається *похідною першого порядку* і утворює нову функцію. Тому похідна від похідної $(y')'$ називається похідною *другого порядку від функції* $y = f(x)$ і позначається y'', $\frac{d^2 y}{dx^2}$. Аналогічно вводиться поняття похідної будь-якого вищого порядку.

Приклад. Встановити похідну третього порядку функції $y = \sin(5x + 4)$.

Розв'язання

$y' = 5\cos(5x + 4)$; $y'' = -25\sin(5x + 4)$; $y''' = -125\cos(5x + 4)$.

2.4. Диференціал функції

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована на деякому проміжку числової осі, тобто для будь-якої точки x з цього проміжку границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ існує та дорівнює скінченному числу.

Враховуючи взаємний зв'язок змінної величини, який має скінченну границю, і нескінченної малої

величини, можемо записати $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, де α – нескінченно мала величина ($\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$).

Помноживши члени останньої рівності на Δx, отримаємо

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x . \qquad (2.5)$$

Таким чином, приріст функції Δy є сумою двох доданків, з яких перший доданок – *головна лінійна частина приросту*, другий доданок – добуток $\alpha \Delta x$ є н.м.в. вищого порядку малості, ніж Δx.

Означення. Добуток $f'(x)\Delta x$ називається *диференціалом функції* $y = f(x)$ і його позначають символом dy, тоді

$$dy = f'(x)\Delta x . \qquad (2.6)$$

Знайдемо диференціал функції $y = x$; для цього випадку $y' = (x)' = 1$, отже, $dy = dx = \Delta x$. Таким чином, диференціал незалежної змінної збігається з її приростом Δx. Тому формулу для диференціала можна записати так: $dy = f'(x)dx$.

Приклад. Знайти диференціал dy функції $y = x^2$:

1) при довільних значеннях x та Δx;

2) при $x = 20$, $\Delta x = 0{,}1$.

Розв'язання

1) $dy = \left(x^2\right)' \Delta x = 2x\Delta x$;

2) якщо $x = 20$, $\Delta x = 0{,}1$, то $dy = 2 \cdot 20 \cdot 0{,}1 = 4$.

Застосування диференціала при наближених обчисленнях

Вираз Δy можна записати так:

$$\Delta y = dy + \alpha \Delta x . \qquad (2.7)$$

Якщо $f'(x) \neq 0$, то величина $\alpha\Delta x$ є нескінченно малою малою вищого порядку порівняно з *dy*.

При малих Δx доданком $\alpha\Delta x$ можемо знехтувати і використаємо наближену рівність $\Delta y \approx dy$, або $f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$, звідки $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$.

Дана наближена рівність тим точніша, чим менше Δx.

Приклад. Обчислити наближено $\sqrt{27}$.

Розв'язання

Перетворимо вираз, що стоїть під знаком кореня:

$$27 = 25 + 2 = 25\left(1 + \frac{2}{25}\right),$$

звідки $\sqrt{27} = \sqrt{25\left(1 + \frac{2}{25}\right)} = 5\sqrt{1 + \frac{2}{25}}$.

При обчисленні $\sqrt{1 + \frac{2}{25}}$ розглянемо функцію $f(x) = \sqrt{x}$, тоді $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

В нашому випадку дана формула запишеться як:

$$\sqrt{x + \Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x, \text{ де } x = 1, \Delta x = \frac{2}{25}.$$

Дістанемо: $\sqrt{1 + \frac{2}{25}} \approx \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}}\frac{2}{25} = 1 + \frac{1}{25} = 1{,}04$.

Остаточно $\sqrt{27} \approx 5 \cdot 1{,}04 = 5{,}2$.

Правила знаходження диференціала функції

1. $y = c$; $dy = 0$;
2. $y = uv$, $dy = udv + vdu$;
3. $y = u + v$, $dy = du + dv$;
4. $y = \frac{u}{v}$, $dy = \frac{vdu - udv}{v^2}$.

***Теорема* 8.** Форма диференціала не залежить від того, чи є аргумент незалежною змінною або функцією.

Приклад. Знайти диференціал функції $y = \operatorname{arctg} x$.

Розв'язання

Маємо: $dy = (\operatorname{arctg} x)' dx = \dfrac{dx}{1+x^2}$.

Приклад. Обчислити наближено значення $\arcsin 0{,}51$.

Розв'язання

Розглянемо функцію $y = \arcsin x$. Візьмемо $x = 0{,}5$, $\Delta x = 0{,}01$. Тоді, застосовуючи формулу $\arcsin(x+\Delta x) \approx \arcsin x + (\arcsin x)' \Delta x$, отримуємо

$$\arcsin 0{,}51 \approx \arcsin 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}5)^2}} \cdot 0{,}01 = \frac{\pi}{6} + 0{,}011 = 0{,}513.$$

2.5. Основні теореми диференціального числення

Теорема Ферма. Якщо диференційована на проміжку D функція $y = f(x)$ досягає найбільшого або найменшого значення у внутрішній точці ξ даного проміжку, тоді похідна функції у цій точці дорівнює нулю, тобто $f'(\xi) = 0$.

Припустимо для визначеності, що $f(x)$ набуває в точці ξ найбільшого значення, тобто для всіх $x \in D$ $f(x) \le f(\xi)$.

За означенням похідної

$$f'(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi},$$

при цьому дана границя не залежить від того, як наближається x до ξ: справа чи зліва.

Розглянемо відношення $\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$.

Для всіх x, достатньо близьких до точки $\xi(x \neq \xi)$, отримаємо:

$$\begin{cases} \dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0 \text{ при } x > \xi, \\ \dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0 \text{ при } x < \xi. \end{cases}$$

Перейдемо в останніх нерівностях до границі при $x \to \xi$, і дістанемо

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to \xi+0} \dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0 \\ \lim\limits_{x \to \xi-0} \dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to \xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = 0 \Rightarrow f'(\xi) = 0.$$

Аналогічно розглядається випадок, коли функція $f(x)$ набуває в точці $x = \xi$ найменшого значення.

Геометричний зміст теореми Ферма. Геометричний зміст похідної $y' = f'(x)$ являє собою кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y = f(x)$. Звідки рівність нулю похідної $f'(\xi)$ геометрично означає, що у відповідній точці цієї кривої дотична паралельна осі Ox.

Теорема Ролля. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, диференційована на інтервалі $(a; b)$, на кінцях відрізка набуває рівних між собою значень, тобто $f(a) = f(b)$, тоді на інтервалі $(a; b)$ існує хоча б одна точка $x = \xi(a < \xi < b)$, для якої $f'(\xi) = 0$.

Геометричний зміст теореми Ролля. Якщо крайні ординати неперервної кривої $y = f(x)$, яка має в кожній

точці дотичну, рівні, тоді на цій кривій знайдеться принаймні одна точка з абсцисою $\xi(a < \xi < b)$, в якій дотична паралельна осі *Ox* (рис. 2.1).

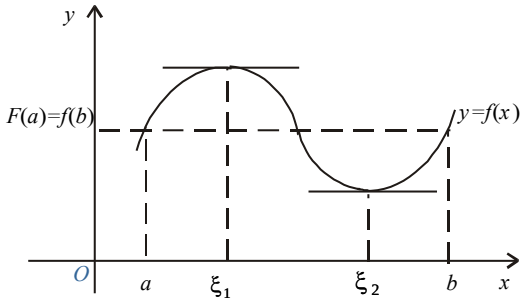


Рис. 2.1. Геометричний зміст теореми Ролля

Теорема Лагранжа (теорема про скінченні прирости функції).

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і диференційована на інтервалі $(a; b)$, тоді на цьому інтервалі знайдеться хоча б одна точка $x = \xi(a < \xi < b)$, така що $f(b) - f(a) = (b - a) f'(\xi)$.

Геометричний зміст теореми Лагранжа. Запишемо формулу у вигляді $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$.

З рис. 2.2 маємо, що величина $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ є тангенсом кута α нахилу хорди, що проходить через точки A і B графіка функції $y = f(x)$ з абсцисами, рівними a і b.

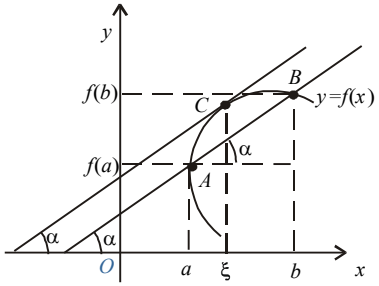


Рис. 2.2. Геометричний зміст теореми Лагранжа

Водночас, $f'(\xi)$ – тангенс кута нахилу дотичної до кривої в точці C з абсцисою ξ. Таким чином, геометричний зміст рівності можемо визначити наступним чином: якщо для всіх точок кривої $y = f(x)$ дотична існує, тоді на цій кривій знайдеться точка з абсцисою ξ, в якій дотична паралельна хорді AB, що сполучає точки A і B.

Теорема Коші. Якщо $f(x)$ і $\varphi(x)$ дві функції, які неперервні на відрізку $[a; b]$ і диференційовані на інтервалі $(a; b)$, $\varphi'(x) \neq 0$ для $x \in (a;b)$, тоді на інтервалі $(a; b)$ знайдеться хоча б одна точка $x = \xi (a < \xi < b)$, така що $\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$.

Приклад. Чи буде виконуватися теорема Ролля для функції $f(x) = x^2 - 6x + 100$, якщо $a = 1$, $b = 5$? При якому значенні ξ?

Розв'язання

Оскільки функція $f(x)$ неперервна та диференційована на всій числовій прямій і значення функції $f(x)$ на границях сегмента $[1, 5]$ рівні між собою $f(1) = f(5) = 95$, тоді теорема Ролля буде виконуватись на інтервалі $(1, 5)$. Значення ξ визначимо з наступного рівняння: $f'(x) = 2x - 6 = 0$, тобто $\xi = 3$.

Приклад. Знайти координати точки M на дузі AB кривої $y = 2x - x^2$, в якій дотична паралельна хорді AB, якщо A (1; 1) та B (3; –3).

Розв'язання

Функція $y = 2x - x^2$ неперервна та диференційована при всіх значеннях x. За теоремою Лагранжа між двома значеннями $a = 1$ та $b = 3$ існує значення $x = \xi$, яке задовольняє рівності $y(b) - y(a) = (b - a)y'(\xi)$, де $y' = 2 - 2x$. Підставивши дані умови задачі, маємо:

$$y(3) - y(1) = (3 - 1)y'(\xi),$$

тобто $\left(2 \cdot 3 - 3^2\right) - \left(2 \cdot 1 - 1^2\right) = (3 - 1) \cdot (2 - 2\xi)$.

Звідки $\xi = 2, y(2) = 0$. Таким чином, точка M матиме координати (2; 0).

2.6. Правило Лопіталя розкриття невизначеностей

Розглянемо відношення $f(x) = \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, де функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ визначені й диференційовані на деякій околиці точки a. Нехай при $x \to a$ обидві функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ прямують до 0 або до ∞. Тоді в точці a функція $f(x)$ має невизначеність типу

$$\left[\frac{0}{0}\right] \text{ або } \left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Теорема (правило Лопіталя). Границя відношення двох нескінченно малих або двох нескінченно великих функцій дорівнює границі відношення їхніх похідних), коли останні існують, тобто

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)} \ . \qquad (2.8)$$

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x+1}{2x^3+7x+5}$.

Розв'язання

Виконання граничного переходу приводить до невизначеності типу $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+1}{2x^2+7x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2+3x+1\right)'}{\left(2x^3+7x+5\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{6x^2+7}=$$

Після граничного переходу знову маємо невизначеність типу $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, тому застосовуємо правило Лопіталя повторно:

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2x+3\right)'}{\left(6x^2+7\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{12x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{6}\cdot 0=0.$$

Зауваження. Правило Лопіталя можемо застосувати для розкриття інших типів невизначеностей, які зводяться до двох приведених основних випадків.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3\ln x\right)$.

Розв'язання

Тут маємо невизначеність виду $[0\cdot\infty]$. Подамо добуток функцій у вигляді частки, а потім застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3\ln x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\ln x\right)'}{\left(x^{-3}\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{3}{x^4}}=-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}x^3=0.$$

2.7. Застосування диференціального числення для дослідження функції

Означення. Функцію $f(x)$ називають *зростаючою (спадною)* в інтервалі $(a;\ b)$, якщо більшому значенню аргумента в цьому інтервалі відповідає більше (менше) значення функції, тобто якщо з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність $f(x_2) > f(x_1)$, то функція $f(x)$ – *зростаюча,* а якщо $f(x_2) < f(x_1)$, то функція $f(x)$ – *спадна.*

Необхідна умова зростання (спадання) функції.

Якщо диференційована функція *зростає (спадає)* на деякому інтервалі, то перша похідна від цієї функції *не від'ємна (не додатна)* на цьому інтервалі.

Достатня умова зростання і спадання функції.

Якщо похідна диференційованої функції *додатна* всередині деякого інтервалу, то функція *зростає* в цьому інтервалі.

Якщо похідна диференційованої функції *від'ємна* всередині деякого інтервалу, то функція *спадає* на цьому інтервалі.

Означення. Зростаюча або спадна функція називається *монотонною*. Інтервали, у яких задана функція зростає або спадає, утворюють інтервали *монотонності* даної функції.

Інтервали монотонності можуть відмежовуватися один від одного точками, де похідна дорівнює нулю *(стаціонарними точками)*, або точками, де похідна не існує(дорівнює нескінченності).

Точки, у яких похідна функції дорівнює нулю або не існує, називаються *критичними точками першого роду.*

Щоб знайти інтервали монотонності функції $f(x)$, необхідно:

1) знайти область визначення функції;

2) знайти похідну цієї функції;

3) знайти критичні точки, вирішуючи рівняння $f'(x)=0$, та при умові, що $f'(x)$ не існує;

4) розділити критичними точками область визначення функції на інтервали, які не перетинаються, і визначити на кожному з них знак першої похідної. На інтервалах, де похідна додатна, функція зростає, а там де від'ємна – спадає.

Приклад. Знайти інтервали зростання та спадання заданих функцій:

а) $y=x^3-3x+4$; б) $y=2x^2-\ln x$.

Розв'язання

а) Функція існує при будь-якому значенні x. Знаходимо першу похідну функції:

$$y'=3x^2-3=3(x-1)\cdot(x+1).$$

Знаходимо критичні точки:

$$3(x-1)\cdot(x+1)=0 \;\Rightarrow\; x_1=1,\; x_2=-1.$$

Інших критичних точок функція не має, так як похідна на всій області визначення існує.

Розбиваємо область визначення точками $x_1=1,\; x_2=-1$ на інтервали та встановлюємо знак першої похідної на кожному з цих інтервалів.

Для цього достатньо визначити знак першої похідної функції в одній окремій довільній точці відповідного інтервалу.

На інтервалі $(-\infty;-1)$ похідна y' додатна. Тому дана функція на цьому інтервалі зростає. В інтервалі $(-1;1)$ похідна від'ємна, отже функція спадає. На інтервалі $(1;+\infty)$ похідна y' додатна, тому сама функція зростає.

б) Задана функція існує тільки при умові $x>0$. Знайдемо першу похідну функції:

$$y' = 4x - \frac{1}{x} = \frac{4x^2 - 1}{x} = \frac{(2x+1)\cdot(2x-1)}{x}.$$

Знаходимо критичні точки: $\frac{(2x+1)\cdot(2x-1)}{x} = 0 \Rightarrow$ $(2x+1)\cdot(2x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2};\ x_2 = \frac{1}{2}$. Крім того, критичною точкою є $x_3 = 0$ – де перша похідна не існує. Але точки $x_1 = -\frac{1}{2};\ x_3 = 0$ не належать до області визначення функції.

Розбиваємо область визначення функції на два відповідні інтервали: $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ та $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. У першому інтервалі похідна від'ємна, в другому – додатна. Тому функція спадає в інтервалі $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ та зростає в інтервалі $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Означення. Функція $y = f(x)$ має *максимум (мінімум)* в точці $x = x_0$, якщо значення функції у цій точці більше (менше), чим її значення у всіх інших точках деякого околиці точки x_0. Точку x_0 у цьому випадку називають точкою максимуму (мінімуму).

Максимуми та мінімуми функції називають *екстремумами*, а точки, в яких екстремум досягається, – екстремальними.

Необхідна умова існування екстремуму функції. Якщо диференційована функція $y = f(x)$ має екстремум в точці x_0, то її перша похідна у цій точці дорівнює нулю.

Достатні умови існування екстремуму функції:

а) якщо функція $y = f(x)$ диференційована в околі критичної точки x_0 та її перша похідна зліва від цієї

точки додатна, а справа від'ємна, то у точці x_0 функція має максимум;

б) якщо похідна зліва від критичної точки x_0 від'ємна, а справа додатна, то у точці x_0 функція має мінімум;

в) якщо похідна зліва і справа від критичної точки x_0 матиме однаковий знак, то у цій точці функція екстремуму не має.

Щоб знайти екстремуми функції $f(x)$, треба:

1) знайти область визначення функції;

2) знайти першу похідну функції $f'(x)$;

3) знайти критичні точки першого роду (корені рівняння $f'(x)=0$ або з умови, що $f'(x)$ не існує);

4) розділити критичними точками область визначення функції на інтервали та визначити в кожному з них знак першої похідної $f'(x)$;

5) встановити, чи має функція екстремум в знайдених точках та який саме (максимум чи мінімум);

6) встановити значення функції в екстремальних точках.

Приклад. Дослідити функцію на екстремум:

$$f(x)=(x-2)^3(x+1)^2.$$

Розв'язання

Область визначення функції $(-\infty;\ +\infty)$. Знаходимо першу похідну функції

$$f'(x)=3(x-2)^2(x+1)^2+2(x+1)(x-2)^3=$$
$$=(x-2)^2(x+1)(3x+3+2x-4)=(x-2)^2(x+1)(5x-1).$$

Розв'язуємо рівняння $f'(x)=0$, маємо:

$$(x-2)^2(x+1)(5x-1)=0.$$

Знаходимо стаціонарні точки: $x_1=2,\ x_2=-1,\ x_3=\frac{1}{5}$.

Точок, у яких перша похідна не існує, немає. Тому стаціонарні точки будуть єдиними критичними точками першого роду для заданої функції.

Розглянемо інтервали

$$(-\infty;\ -1),\ \left(-1;\ \frac{1}{5}\right),\ \left(\frac{1}{5};\ 2\right),\ (2;\ +\infty).$$

Для визначення знака першої похідної обчислимо її значення в довільних точках, які належать даним відповідним інтервалам. Візьмемо, наприклад, з кожного інтервалу точки: $-2;\ 0;\ 1;\ 3$.

Тоді

$$f'(-2) = 176 > 0,$$
$$f'(0) = -4 < 0,$$
$$f'(1) = 8 > 0,$$
$$f'(3) = 56 > 0.$$

Отож, при переході через точку $x_2 = -1$ перша похідна змінює знак із плюса на мінус, тому в цій точці функція має максимум

$$f(-1) = 0.$$

При переході через точку $x_3 = \frac{1}{5}$ перша похідна навпаки змінює знак з мінуса на плюс. Тому в цій точці функція матиме мінімум

$$f\left(\frac{1}{5}\right) = -\frac{26244}{3125}.$$

При переході через критичну точку $x_1 = 2$ перша похідна не змінює свого знаку. Точка $x_1 = 2$ не буде екстремальною для заданої функції.

Найбільше та найменше значення функції на заданому відрізку

Функція, неперервна на відрізку $[a; b]$, досягає на цьому відрізку свого відповідного найбільшого та найменшого значень. Такі значення функція може досягнути на інтервалі або на одному з кінців даного відрізка.

Для знаходження найбільшого та найменшого значень функції $f(x)$ на $[a; b]$ необхідно:

1) встановити критичні точки функції, що належать інтервалу $(a; b)$;

2) обчислити значення функції в знайдених критичних точках першого роду, і на кінцях даного відрізка, тобто $f(a)$ та $f(b)$, серед множини цих значень вибрати найбільше (найменше).

Приклад. Встановити найбільше та найменше значення функції $y = 2x^3 - 3x^2 + 2$ на відрізку $\left[-\frac{1}{3}; 2\right]$.

Розв'язання

1. Знаходимо критичні точки першого роду, які належать відрізку $\left[-\frac{1}{3}; 2\right]$. Маємо:

$$y' = 6x^2 - 6x = 6x(x-1),\ 6x(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1.$$

Всі найдені критичні точки належать заданому відрізку. Обчислюємо значення функції в цих точках та на його кінцях:

$$y(0) = 2,\ \ y(1) = 1,\ \ y(-1/3) = \frac{43}{27},\ \ y(2) = 6.$$

Порівнюючи ці результати, бачимо, що $y(1) = 1$ буде найменше значення функції на заданому відрізку, $y(2) = 6$ буде найбільшим значенням функції на даному відрізку.

2. Визначаємо значення функції на кінцях відрізку:

$$y\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{15}{8},\ \ y(-3)=-15.$$

3. Отож найбільше значення даної функції на проміжку $\left[-3,\ \frac{3}{2}\right]$ є: $y_{\text{найб}}=y_{\max}(-1)=5$, найменше – $y_{\text{найм}}=y(-3)=-15$.

Опуклість і вгнутість кривої
Точки перегину

Означення. Крива на проміжку називається *опуклою* (*вгнутою*), якщо всі точки кривої лежать нижче (вище) будь-якої її дотичної на даному проміжку.

Означення. Точка, яка відокремлює опуклу частину кривої від вгнутої, називається *точкою перегину*.

Приклад. Знайти інтервали опуклості та вгнутості графіка функції $y=e^{-x^2}$.

Розв'язання

Маємо:

$$y'=-2xe^{-x^2},\ \ y''=4\left(x^2-\frac{1}{2}\right)e^{-x^2}.$$

Друга похідна y'' перетворюється в нуль, якщо $x^2-\frac{1}{2}=0$, звідки

$$x_1=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \ x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Графік функції на інтервалах $\left(-\infty,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ і $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ +\infty\right)$ вгнутий, а на інтервалі $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ – опуклий.

Асимптоти

Означення. Пряма називається *асимптотою кривої*, якщо відстань d від точки M кривої до цієї прямої при віддаленні точки M у нескінченність прямує до нуля. Асимптоти бувають *вертикальні* та *похилі*.

Вертикальні асимптоти.

Якщо $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$, або $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$, або $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, то пряма $x = a$ буде вертикальною асимптотою для графіка функції $y = f(x)$.

Приклад. Крива $y=\dfrac{2}{x-5}$ має вертикальну асимптоту $x = 5$, оскільки

$$\lim_{x\to 5\pm 0} y=\pm\infty .$$

Похилі асимптоти. Нехай крива $y = f(x)$ має рівняння похилої асимптоти $y=kx+b$, тоді

$$\left.\begin{aligned} k &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} \\ b &= \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right) \end{aligned}\right\} . \qquad (2.9)$$

Якщо хоча б одна з даних границь не існує, то крива у відповідній півплощині похилих асимптот не має.

Приклад. Визначити асимптоти кривої $y=\dfrac{x^2+2x-1}{x}$.

Розв'язання

Оскільки $\lim\limits_{x\to\pm 0} y=\lim\limits_{x\to\pm 0}\dfrac{x^2+2x-1}{x}=\lim\limits_{x\to\pm 0}\left(x+2-\dfrac{1}{x}\right)=\mp\infty$, тоді пряма $x = 0$ (вісь Oy) буде вертикальною асимптотою.

2. Нехай похила асимптота має рівняння $y = kx + b$, тоді

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = 1;$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (y - x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = 2.$$

Отже, пряма $y = x + 2$ – похила асимптота для графіка функції.

Похилі асимптоти також можуть бути правими, лівими та двосторонніми в залежності від області їх дії.

Дослідження функції та побудова її графіка методами диференціального числення

План дослідження функцій та побудови їх графіків:

1. Знайти область визначення функції.
2. Встановити парність (непарність) та періодичність функції.
3. Знайти точки розриву функції та їх характер.
4. Визначити точки перетину графіка функції з осями координат.
5. Знайти інтервали зростання та спадання функції, точки екстремуму та обчислити значення функції у цих точках.
6. Знайти точки перегину, інтервали опуклості й вгнутості.
7. Знайти асимптоти, встановити їх тип.
8. На основі проведених досліджень побудувати графік.

Приклад. Дослідити функцію $y = \dfrac{2x - 1}{(x - 1)^2}$ та побудувати її графік.

Розв'язання

1. Знаходимо область визначення функції. Функція існує при всіх значеннях x за виключенням значення $x = 1$, звідки область визначення буде $\{-\infty < x < 1;\ 1 < x < +\infty\}$.

2. Точка $x = 1$ буде точкою розриву даної функції. Встановимо її характер:

$$\lim_{x\to 1\pm 0} y = \lim_{x\to 1\pm 0} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 1\pm 0}(x-1)^2} = +\infty.$$

Як ліворуч, так і праворуч точки $x = 1$ матимемо нескінченний розрив.

Точка $x = 1$ – точка розриву другого роду.

3. Вертикальні асимптоти. Пряма $x = 1$ буде вертикальною асимптотою.

4. Знаходимо точки перетину графіка функції з відповідними осями координат: з віссю Ox:

$$y = 0,\ \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0,\ 2x-1 = 0,\ x = \frac{1}{2},\ \left(\frac{1}{2};\ 0\right);$$

з віссю Oy:

$$x = 0,\ y = \frac{-1}{1} = -1,\ (0;\ -1).$$

5. Знаходимо точки екстремуму та інтервали зростання та спадання досліджуваної функції:

$$y' = \frac{2(x-1)^2 - 2(x-1)(2x-1)}{(x-1)^4} = -\frac{2x}{(x-1)^3};\ y' = 0 \Rightarrow$$

$-2x = 0 \Rightarrow x = 0$ – критична точка. При $x = 1$ y' не існує, але в цій точці сама функція теж не існує. Дослідимо на екстремум критичну точку $x = 0$:

при $x = -1$ $y' = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4} < 0(-)$;

при $x=\frac{1}{2}$ $y'=\frac{-1}{-1/8}=8>0(+)$.

Проходячи через критичну точку зліва направо, перша похідна змінює знак з «–» на «+»,тому в точці $x = 0$ функція має мінімум:

$$y_{\min}=\frac{-1}{1}=-1.$$

В точці $x = 1$ функція не визначена. При $1<x<+\infty$ $y'(x)<0$, тому функція на цьому інтервалі спадає.

6. Точки перегину та інтервали опуклості й вгнутості графіка функції встановлюємо за допомогою другої похідної:

$$y''=\frac{-2(x-1)^3+6x(x-1)^2}{(x-1)^6}=\frac{2(2x+1)}{(x-1)^4};\ \ y''=0\Rightarrow$$

$2(2x+1)=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$; при $x = 1$друга похідна y'' не існує, але у цій точці не існує і сама функція.

Дослідимо точку $x=-\frac{1}{2}$:

при $x=-1$ $y''=\frac{2(-2+1)}{(-2)^4}=-\frac{1}{8}<0(-)$;

при $x=0$ $y''=\frac{2}{1}=2>0(+)$.

Друга похідна, проходячи через $x=-\frac{1}{2}$, змінить свій знак, отже, точка перетину кривої з цією абсцисою буде точкою перегину.

Встановимо її ординату:

$$y=\frac{2\left(-\frac{1}{2}\right)-1}{\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2}=-\frac{8}{9}\approx -0{,}9.$$

Таким чином, точка $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{8}{9}\right)$ – є точка перегину.

В точці $x = 1$ функція не визначена. При $1 < x < +\infty$ $y'' > 0$, отож графік функції вгнутий.

7. Рівняння похилої асимптоти шукаємо у вигляді $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-1}{x(x-1)^2} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0.$$

Отож похилою асимптотою буде пряма $y = 0$ (вісь Ox).

На підставі результатів проведених досліджень будуємо графік функції.

Для точнішої побудови візьмемо додаткові точки: (–5; – 0,3), $\left(\frac{2}{3}, 3\right)$, (2; 3), (3; 1,3).

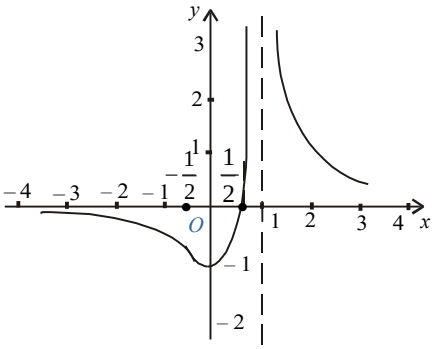


Рис. 2.3. Графік функції

Розділ 3. Невизначений інтеграл
3.1. Поняття первісної функції

В диференціальному численні на основі матеріалів попереднього розділу за даною функцією $F(x)$ можливо встановити її похідну $F'(x) = f(x)$. Сформулюємо тепер обернену задачу: необхідно відновити функцію $F(x)$, знаючи значення її похідної $f(x)$. Функцію $F(x)$ у цьому випадку називають первісною для $f(x)$.

Означення. Функція $F(x)$ називається *первісною* для функції $f(x)$ на деякому проміжку, коли на цьому проміжку:

$$F'(x) = f(x). \qquad (3.1)$$

Приклад. Первісні для функції $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ мають вигляд:

$$F_1(x) = \operatorname{arctg} x, \text{ бо } F_1'(x) = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \in R;$$

$$F_2(x) = \operatorname{arctg} x + C, \text{ бо}$$

$$F_2'(x) = (\operatorname{arctg} x + C)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \in R;$$

$$F_3(x) = -\operatorname{arctg}\frac{1}{x}, \text{ оскільки}$$

$$F_3'(x) = \left(-\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1+x^2} \; \forall x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty),$$

причому $F_1(x)$, $F_2(x)$ – неперервні для будь-якого значення $x \in R$, а $F_3(x)$ у точці $x = 0$ має розрив. У цьому прикладі первісні функцій знайдені методом підбору із наступною перевіркою та використанням відповідних формул таблиці похідних функцій.

Теорема (про множину первісних). Якщо $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$ на деякому проміжку, тоді:

1) $F(x) + C$ – теж первісна для $f(x)$ на цьому проміжку;

2) будь-яка первісна $\Phi(x)$ для $f(x)$ може бути задана у вигляді $\Phi(x) = F(x) + C$ на цьому проміжку.

Наслідок. Дві будь-які первісні для однієї й тієї ж функції на проміжку відрізняються між собою на сталу величину(константу).

Означення. *Д*ія знаходження первісної для функції $f(x)$ називається дією *інтегрування функції* $f(x)$.

Означення. Функція $F(x) + C$, що являє собою загальне сімейство всієї множини первісних для функції $f(x)$ на проміжку, називається *невизначеним інтегралом* для функції $f(x)$ на даному проміжку і записується як:

$$\int f(x)dx = F(x)+C \quad . \qquad (3.2)$$

Геометричний зміст невизначеного інтеграла. Графік первісної $F(x)$ називають інтегральною кривою. Якщо в системі координат xOy побудувати криву – графік однієї первісної функції $F(x)$, то усі інші криві (графіки інших первісних для даної функції) одержуються шляхом зміщення цієї кривої по осі Oy на величину, що дорівнює значенню сталої C.

3.2. Властивості невизначеного інтеграла. Таблиця інтегралів

1. Похідна невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = F'(x) = f(x).$$

2. Диференціал невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу.

3. $\int dF(x) = F(x)+C$.

4. Сталий множник можливо виносити з-під знака інтеграла (або вносити), тобто

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx, \quad k \neq 0.$$

5. Невизначений інтеграл суми або різниці функцій дорівнює сумі або різниці невизначених інтегралів від цих функцій, якщо вони існують, тобто

$$\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$$

Таблиця основних інтегралів

1. $\int 0 \cdot dx = C$;
2. $\int dx = x + C$;
3. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$;
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;
5. $\int e^x dx = e^x + C$;
6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a \neq 1$;
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$;
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;
10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;
11. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$;
12. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$;
13. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$;
14. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$;
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$;

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C$;

17. $\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C$;

18. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C$;

19. $\int \frac{xdx}{x^2 + a} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2 + a\right| + C$;

20. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C, a \neq 0$;

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C$.

3.3. Методи інтегрування функцій
Метод безпосереднього інтегрування

Перш за все зауважимо, що в усіх табличних інтегралах підінтегральна функція має ту властивість, що її аргумент співпадає з незалежною змінною інтегрування.

Найбільш часто для знаходження невизначеного інтеграла використовують наступні методи інтегрування: безпосереднього інтегрування, заміни змінної (підстановки), інтегрування частинами, знаходження заданого невизначеного інтеграла за допомогою довідника.

Метод інтегрування, який полягає в прямому використанні табличних інтегралів, основних властивостей невизначеного інтеграла, а також найпростіших тотожних перетворень підінтегральної функції, носить назву *методу безпосереднього інтегрування (табличний інтеграл)*.

Приклад. Обчислити табличні інтеграли:

а) $\int (5\cos x - 3e^x)dx$; б) $\int \left(4x^3 - \sqrt{x} + 6/x^2\right)dx$;

в) $\int \left(\sqrt{x} - 1\right)\left(1 + \sqrt{x}\right)dx$;

Розв'язання.

а) Застосовуючи властивості невизначеного інтеграла (4), (5) та табличні інтеграли (8), (5), маємо:

$$\int (5\cos x - 3e^x)dx = 5\int \cos x dx - 3\int e^x dx = 5\sin x - 3e^x + C.$$

б) Перетворимо під відповідні формули таблиці підінтегральну функцію та застосуємо властивості невизначеного інтеграла (4), (5) та табличний інтеграл (3):

$$\int \left(4x^3 - \sqrt{x} + 6/x^2\right)dx = \int (4x^3 - x^{1/2} + 6x^{-2})dx =$$

$$= 4\int x^3 dx - \int x^{1/2}dx + 6\int x^{-2}dx =$$

$$4\frac{x^4}{4} - \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + 6\frac{x^{-1}}{-1} + C = x^4 - \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{6}{x} + C.$$

в) Перетворимо підінтегральний вираз, користуючись формулами скороченого множення, також використаємо властивість невизначеного інтеграла (5) та табличні інтеграли (3), (2):

$$\int \left(\sqrt{x} - 1\right)\left(1 + \sqrt{x}\right)dx = \int (x-1)dx = \int x dx - \int dx = \frac{x^2}{2} - x + C.$$

Метод підстановки

Якщо інтеграл $\int f(x)dx$ не є табличним і не може бути обчислений методом безпосереднього інтегрування, то у багатьох випадках введення нової змінної інтегрування дозволяє привести цей інтеграл до табличного. У цьому полягає суть так званого *методу підстановки.* Мета методу підстановки – перетворити даний інтеграл до того вигляду, який буде простіше інтегрувати.

Досить часто інтеграл $\int f(x)dx$ можливо спростити шляхом введення нової змінної, наприклад, t. Нехай $x=\varphi(t)$, неперервна диференційована функція на деякому інтервалі. Якщо на вказаному інтервалі функція $f(x)$ є інтегрованою, тоді має місце формула:

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt,$$

де $\varphi(t)$ – монотонна функція.

Після того як знайдено первісну за допомогою підстановки $x=\varphi(t)$, необхідно обов'язково повернутися до початкової змінної інтегрування x. Іноді застосовують підстановку $t=\varphi(x)$, тобто розглядають нову змінну як функцію від x.

Приклад. Обчислити інтеграли:

а) $\int\frac{\ln^3 x}{x}dx$; б) $\int\frac{\cos x dx}{25+\sin^2 x}$; в) $\int e^{x^2+1}x\,dx$;

г) $\int\frac{x^2}{1+x^6}dx$; д) $\int\frac{\sin 2x dx}{3+\sin^2 x}$.

Розв'язання

а) Якщо скористатись підстановкою $t=\ln x$, то $dt=\frac{1}{x}dx$. Використовуючи формулу (3) таблиці невизначених інтегралів, будемо мати:

$$\int\frac{\ln^3 x}{x}dx=\int t^3dt=\frac{t^4}{4}+C=\frac{\ln^4 x}{4}+C.$$

При вирішенні даного прикладу можливо було б не вводити нову змінну t, а інтегрувати наступним чином:

$$\int\frac{\ln^3 x}{x}dx=\int\ln^3 x d(\ln x)=\frac{\ln^4 x}{4}+C.$$

У простих випадках заміну змінної виконують умовно, не записуючи нову змінну під знаком інтеграла. Такий шлях обчислення називається *метод внесення під знак диференціала.*

б) Так як $\cos x dx$ є диференціал функції $\sin x$, тобто d(sinx), то даний інтеграл зводиться до табличного з номером (18):

$$\int \frac{\cos x dx}{25+\sin^2 x} = \int \frac{d(\sin x)}{5^2+\sin^2 x} = \frac{1}{5} arctg \frac{\sin x}{5} + C.$$

в) Щоб звести даний інтеграл до табличного з номером (5), введемо заміну $t = x^2 + 1$, $dt = 2xdx$ та $x dx = \frac{dt}{2}$. Скориставшись формулою (5) з таблиці, одержимо:

$$\int e^{x^2+1} x\, dx = \int e^t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

г) Щоб звести даний інтеграл до табличного з номером (17), введемо заміну $t = x^3$, $dt = 3x^2 dx$ та $x^2 dx = \frac{dt}{3}$. Отже,

$$\int \frac{x^2}{1+x^6} dx = \int \frac{dt}{3(1+t^2)} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \frac{1}{3} arctgt + C = \frac{1}{3} arctgx^3 + C.$$

д) Нехай $t = 3 + \sin^2 x$, тоді

$$dt = 2\sin x \cos x dx = \sin 2x dx.$$

Отже, $\int \frac{\sin 2x dx}{3+\sin^2 x} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln(3+\sin^2 x) + C.$

Метод інтегрування частинами

Даний *метод інтегрування частинами* оснований на використанні формули

$$\int udv = uv - \int vdu, \qquad (3.3)$$

де $u = u(x)$ та $v = v(x)$ – деякі диференційовані функції, залежні від x.

Використовуючи цей метод, за u приймають функцію, яка під час дії диференціювання спрощується, а за dv – ту частину підінтегрального виразу, яка містить dx та легко інтегрується. При вдалому обранні множників u та dv інтеграл $\int vdu$ може бути табличним або простішим, ніж початковий заданий інтеграл $\int udv$.

Зауваження до застосування методу інтегрування частинами.

1. В інтегралах вигляду

$$\int P(x) \cdot e^x dx; \qquad \int P(x) \cdot \cos x dx; \qquad \int P(x) \cdot \sin x dx$$

доцільно обирати за множник u многочлен $P(x)$, а залишену частину підінтегрального виразу встановити як dv.

2. В інтегралах вигляду

$$\int P(x) \cdot \ln x dx; \qquad \int P(x) \cdot arctgx dx; \qquad \int P(x) \cdot \arcsin dx$$

доцільно обирати за $dv = P(x)dx$, а залишену частину підінтегрального виразу взяти за множник u.

Приклад. Обчислити інтеграли:

а) $\int xe^x dx;$ б) $\int x^2 \ln x dx;$ в) $\int x \cos x dx;$

г) $\int 2xarctgx dx;$ д) $\int \arcsin x dx.$

Розв'язання

а) Нехай $u = x$ і $dv = e^x dx$, тоді $du = dx$, $v = \int e^x dx = e^x$. Застосовуючи формулу інтегрування частинами, дістанемо

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

б) Користуючись зауваженням 2, позначимо $u = \ln x$ і $dv = x^2 dx$, тоді $du = \frac{dx}{x}$; $v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$. Застосовуючи формулу інтегрування частинами, отримаємо:

$$\int x^2 \ln x dx = \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C = \frac{x^3}{9}(3 \ln x - 1) + C.$$

в) Позначимо $u = x$ та $dv = \cos x dx$, тоді $du = dx$, $v = \int \cos x dx = \sin x$. Отже,

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

г) Нехай $u = arctgx dx$ і $dv = 2x dx$, тоді $du = \frac{dx}{1+x^2}$; $v = \int 2x dx = x^2$. Застосовуючи формулу інтегрування частинами, маємо:

$$\int 2x arctgx dx = arctgx \cdot x^2 - \int x^2 \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= x^2 \cdot arctgx - \int \frac{x^2 + 1 - 1}{1+x^2} dx = x^2 \cdot arctgx - \int dx + \int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= x^2 arctgx - x + arctgx + C = (x^2 + 1) arctgx - x + C.$$

д) Користуючись зауваженням 2, позначимо $u = \arcsin x$ та $dv = dx$; тоді $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; $v = x$.

Застосовуючи формулу інтегрування частинами, дістанемо:

$$\int \arcsin\, x dx = x \arcsin\, x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x \arcsin\, x - \int (1-x^2)^{-1/2} x dx = x \arcsin\, x +$$

$$+ \frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-1/2} d(1-x^2) = x \arcsin\, x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Далі наведено деякі типи інтегралів, при інтегруванні яких застосовують метод інтегрування частинами і показано вибір функцій $u(x)$ та $v(x)$:

$$\int \frac{P(x)}{u} \cdot \frac{\sin(ax)dx}{dv}\,;\ \int \frac{P(x)}{u} \cdot \frac{\cos(ax)dx}{dv}\,;$$

$$\int \frac{P(x)}{u} \cdot \frac{e^{ax}dx}{dv}\,;\ \int \frac{\ln(ax)}{u} \cdot \frac{Q(x)dx}{dv}\,;\ \int \frac{\operatorname{arctg} x}{u} \cdot \frac{Q(x)dx}{dv}\,;$$

$$\int \frac{\arcsin(ax)}{u} \cdot \frac{Q(x)dx}{dv}\,.$$

де $P(x)$ – многочлен, $Q(x)$ – алгебраїчна функція, $a \in R$.

Метод інтегрування частинами не обмежується застосуванням тільки інтегралів вищезгаданого типу.

У деяких випадках після інтегрування частинами одержуємо рівняння, з якого знаходимо шуканий інтеграл (метод рекурентних співвідношень).

Приклад. Обчислити інтеграл $\int e^x \cdot \cos x dx$.

Розв'язання

$$G = \int e^x \cos x dx = \left| \begin{matrix} \cos x = u,\ du = -\sin x dx; \\ e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x \end{matrix} \right| =$$

$$= e^x \cos x - \int -\sin x \cdot e^x dx = \left| \begin{matrix} \sin x = u,\ du = \cos x dx; \\ e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x \end{matrix} \right| =$$

$$= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x (\cos x + \sin x) - G.$$

Отож, дістали рівняння $G = e^x(\cos x + \sin x) - G$, з якого знаходимо $G = \int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C$.

Інтегрування раціональних функцій

Означення. Відношення двох многочленів $\frac{P_n(x)}{Qm(x)}$ називається *раціональним дробом, тут чисельник та знаменник многочлени відповідних степенів.*

Означення. Раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називається *правильним*, якщо степінь многочлена чисельника менший за степінь многочлена знаменника, тобто $n < m$; якщо $n \geq m$, тоді дріб називається *неправильним*.

Теорема. Будь-який неправильний раціональний дріб можливо подати у вигляді суми многочлена (цілої частини) і правильного раціонального дробу.

Означення. Простішими раціональними дробами називаються такі відповідні дроби:

1. $\frac{A}{x-a}$; 2. $\frac{A}{(x-a)^k}$; 3. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$; 4. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$,

де $k \geq 2, k \in N, D = p^2 - 4q < 0$,

Теорема. Будь-який правильний раціональний нескоротний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ $(n < m)$ можливо подати у вигляді скінченної кількості простіших дробів, використовуючи такі правила:

1) Якщо $Q_m(x) = (x-a)^k \cdot g_{m-k}(x)$, тоді

$$\frac{P_n(x)}{(x-a)^k g_{m-k}(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{r(x)}{g_{m-k}(x)};$$

2) Якщо $Q_m(x) = (x^2 + px + q)^k \cdot g_{m-2k}(x)$, то

$$\frac{P_n(x)}{\left(x^2+px+q\right)^k \cdot g_{m-k}(x)} =$$

$$= \frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q} + \frac{A_2x+B_2}{\left(x^2+px+q\right)^2} + \ldots + \frac{A_kx+B_k}{\left(x^2+px+q\right)^k} + \frac{r(x)}{g_{m-2k}(x)}$$

$$\frac{P_n(x)}{\left(x^2+px+q\right)^k \cdot q_{m-2k}(x)} =$$

$$= \frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q} + \frac{A_2x+B_2}{\left(x^2+px+q\right)^2} + \ldots + \frac{A_kx+B_k}{\left(x^2+px+q\right)^k} + \frac{r(x)}{q_{m-2k}(x)},$$

де A_i, B_i, $i=\overline{1,k}$ – деякі коєфіцієнти, $\frac{r(x)}{g_{m-k}(x)}$ та $\frac{r(x)}{g_{m-2k}(x)}$ – правильні раціональні дроби.

Приклад. Подати заданий дріб у вигляді суми найпростіших дробів

$$\frac{P_n(x)}{(x+1)(x+2)^2x^3\left(x^2-x+2\right)\left(x^2+1\right)^2}.$$

Розв'язання

Цей правильний раціональний дріб ($n < 12$) можемо розкласти на суму найпростіших дробів.

$$\frac{P_n(x)}{(x+1)(x+2)^2x^3\left(x^2-x+2\right)\left(x^2+1\right)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B_1}{x+2} + \frac{B_2}{(x+2)^2} +$$

$$+ \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \frac{C_3}{x^3} + \frac{Dx+E}{x^2-x+2} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+1} + \frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

$$\frac{P_n\,x}{(x+1)(x-2)^2x^3\left(x^2-x+2\right)\left(x^2+1\right)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B_1}{x-2} + \frac{B_2}{(x-2)^2} +$$

$$+ \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \frac{C_3}{x^3} + \frac{Dx+E}{x^2-x+2} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+1} + \frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Коєфіцієнти A_1, B_1, B_2, ..., N_2 – невизначені коефіцієнти(константи) Для їх знаходження треба праву частину рівності звести до спільного знаменника, знайдений чисельник прирівняти до чисельника даного дробу. З тотожної рівності многочленів-чисельників одержимо рівності коєфіцієнтів при однакових степенях змінної x, що являють собою систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження невизначених коєфіцієнтів A_1, B_1, B_2, ..., N_2. Такий метод називають *методом невизначених коєфіцієнтів*.
Розглянемо інтегрування дробів 1, 2, 3 типу.
Інтеграли від дробів 1 та 2 типу мають вигляд

1. $\int \frac{Adx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C$;
2. $\int \frac{Adx}{(x-a)^k} = A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^2} = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C$;

Розглянемо інтегрування дробу 3-го типу на конкретному прикладі.

Приклад. Обчислити інтеграл $\int \frac{3x-1}{4x^2-4x+17}dx.$

Розв'язання

У чисельнику виділимо похідну знаменника, а в знаменнику виділимо квадрат суми або різниці, а також введемо заміну. Маємо

$$\int \frac{3x-1}{4x^2-4x+17}dx = \int \frac{3x-1}{4\left(x^2-x+\frac{17}{4}\right)}dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{(3x-1)dx}{x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{17}{4}} = \frac{1}{4}\int \frac{(3x-1)dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+4} = \left|\begin{array}{l} x-\frac{1}{2}=t;\, dx=dt \\ x=t+\frac{1}{2}; \end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{3t+\frac{3}{2}-1}{t^2+4}\,dt = \frac{3}{4}\int \frac{tdt}{t^2+4} + \frac{1}{8}\int \frac{dt}{t^2+4} =$$

$$= \frac{3}{8}\ln\left(t^2+4\right) + \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = \frac{3}{8}\ln\left(x^2 - x + \frac{17}{4}\right) + \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{2} + C =$$

$$= \frac{3}{8}\ln\left(4x^2 - 4x + 17\right) + \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{4} + C.$$

1. Якщо підінтегральна функція – неправильний раціональний дріб, тоді за допомогою ділення його розкладають на суму многочлена-цілої частини ділення і правильного раціонального дробу.

2. Знаменник правильного раціонального дробу розкладають на множники. За виразом знаменника правильний раціональний дріб подають у вигляді суми найпростіших дробів, використовуючи метод невизначених коєфіцієнтів.

3. Інтегрують цілу частину та найпростіші дроби.

Приклад. Обчислити інтеграл $\int \frac{x^4+2x}{x^3+8}\,dx$.

Розв'язання

$$\int \frac{x^4+2x}{x^3+8}\,dx = \left|\begin{array}{l} x^4+2x \\ - \\ \underline{x^4+8x} \\ -6x \end{array}\right| \begin{array}{l} x^3+8 \\ x \end{array} \qquad \frac{x^4+2x}{x^3+8} = x - \frac{6x}{x^3+8};$$

$$\frac{6x}{x^3+8} = \frac{6x}{(x+2)\left(x^2-2x+4\right)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+4} =$$

$$= \frac{A\left(x^2-2x+4\right)+(Bx+C)(x+2)}{x^3+8} \Rightarrow 6x = A\left(x^2-2x+4\right)+(Bx+C)(x+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x = x^2(A+B) + x(-2A+2B+C) + 4A + 2C;$$

$$\left.\begin{array}{l|l} x^2 & 0 = A + B \\ x^1 & 6 = -2A + 2B + C \\ x^0 & 0 = 4A + 2C \\ x = -2 \Rightarrow -12 = 12A & \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A = -1 \\ B = 1 \\ C = 2 \end{array}\right| = \int\left(x + \frac{1}{x+2} - \frac{x+2}{x^2 - 2x + 4}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \ln|x+2| - \int \frac{(x+2)dx}{(x-1)^2 + 3} = \left|\begin{array}{l} x - 1 = t \\ dx = dt \\ x = t + 1 \end{array}\right| = \frac{x^2}{2} + \ln|x+2| - \int \frac{t+3}{t^2+3}dt =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \ln|x+2| - \int \frac{tdt}{t^2+3} - 3\int \frac{dt}{t^2+3} = \frac{x^2}{2} + \ln|x+2| - \frac{1}{2}\ln\left(t^2+3\right) -$$

$$- \frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + C = \frac{x^2}{2} + \ln|x+2| - \ln\sqrt{x^2 - 2x + 4} - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Інтегрування тригонометричних функцій

Розглянемо інтеграли виду $\int R(\sin x, \cos x)dx$, де R – деяка раціональна функція відносно sin$x$, cos$x$.

Існують підстановки, зокрема, $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ – універсальна тригонометрична підстановка, що за її допомогою інтеграли даного типу зводяться до інтегралів від раціональної функції $\int R^*(t)dt$.

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \left|\begin{array}{l} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, \quad x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}; \\ \sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}; \\ \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array}\right| =$$

$$= \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int R^*(t)dt\,.$$

Приклад. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{\sin x}$.

Розв'язання

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, x = 2\operatorname{arctg} t, \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}; \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\left(1+t^2\right)2dt}{2t\left(1+t^2\right)} =$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C\,.$$

На практиці універсальну тригонометричну підстановку використовують, якщо аргументи sin*x*, cos*x* входять в функцію $R(\sin x, \cos x)$ у невисокому степені.

Якщо підінтегральна функція $R(\sin x, \cos x)$ – непарна відносно sin *x*, тоді роблять частинну підстановку cos *x* = *t*.

Якщо підінтегральна функція $R(\sin x, \cos x)$ – непарна відносно cos *x* раціоналізується за допомогою частинної підстановки sin *x* = *t*.

Приклад. Обчислити інтеграл $\int \cos^3 x \sin^2 x dx$.

Розв'язання $\int \cos^3 x \sin^2 x dx = \int \cos^3 x \sin^2 x \frac{\cos x}{\cos x} dx =$

$$= \int \cos^2 x \cdot \sin^2 x \cdot \cos x dx = \int \left(1 - \sin^2 x\right)\sin^2 x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| =$$

$$= \int \left(1-t^2\right)t^2 dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C\,.$$

Якщо підінтегральна функція $R(\sin x, \cos x)$ – парна відносно $\sin x$ та $\cos x$, тобто $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ тоді використовуємо підстановку $\operatorname{tg} x = t$ або $\operatorname{ctg} x = t$.

Приклад.

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, \;\; x = \operatorname{arctg} t, \;\; dx = \dfrac{dt}{1+t^2}; \\ \sin^2 x = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{t^2}{1+t^2}; \\ \cos^2 x = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{1}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{(1+t^2)^2 (1+t^2) dt}{t^4 (1+t^2)} = \int \frac{1+2t^2+t^4}{t^4} dt = \int \left(\frac{1}{t^4} + \frac{2}{t^2} + 1 \right) dt =$$

$$= \frac{1}{3t^3} - \frac{2}{t} + t + C = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3\operatorname{tg}^3 x} - 2\operatorname{ctg} x + C.$$

Підінтегральна функція $R(\operatorname{tg} x)$ раціоналізується частинною підстановкою $\operatorname{tg} x = t$.

Приклад. $\int \operatorname{tg}^3 x dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{t^3 dt}{t^2+1} =$

$$= \int \left(t - \frac{t}{t^2+1} \right) dt = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(t^2+1) + C = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - \ln \sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 1} + C.$$

В інтегралах виду $\int \sin^{2n} x \cdot \cos^{2m} x dx$ доцільно скористатись відомими формулами пониження степеня:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},\ \ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},\ \ \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

Приклад.

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx = \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C.$$

При обчисленні інтегралів типу:

$$\int \sin(ax)\cdot\cos(bx)dx,\ \int \cos(ax)\cdot\cos(bx)dx,$$

$$\int \sin(ax)\cdot\sin(bx)dx \quad a \neq b$$

доцільно використовувати наступні шкільні тригонометричні формули:

$$\sin(ax)\cdot\cos(bx) = \frac{1}{2}(\sin(a+b)x + \sin(a-b)x),$$

$$\cos(ax)\cdot\cos(bx) = \frac{1}{2}(\cos(a+b)x + \cos(a-b)x),$$

$$\sin(ax)\cdot\sin(bx) = \frac{1}{2}(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x).$$

Приклад.

$$\int \cos 2x \cdot \sin 5x \cdot dx = \frac{1}{2}\int (\sin 7x + \sin 3x)dx = -\frac{1}{14}\cos 7x - \frac{1}{6}\cos 3x + C.$$

Розділ 4. Визначений інтеграл

4.1. Задачі, які приводять до поняття визначеного інтеграла

Означення. Криволінійною трапецією називається плоска фігура, що обмежена лініями: $y = f(x) \geq 0,\ \ y = 0,\ \ x = a,\ \ x = b.$

На рис. 4.1 зображена криволінійна трапеція та її частинні випадки.

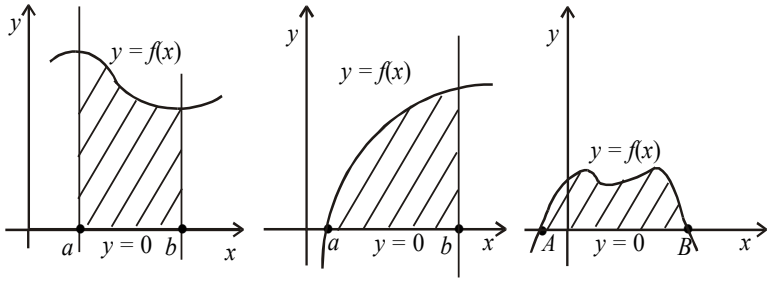


Рис. 4.1. Криволінійні трапеції

Задача. Обчислити площу криволінійної трапеції *aABв* (рис. 4.1).

Розв'язання

Розіб'ємо проміжок [*a*; *b*] на *n* елементарних частин точками x_i, $i = \overline{(0,\ n)}$ так що $a = x_0$, $b = x_n$. Виберемо точки ξ_i так: $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$. Побудуємо прямокутники з основами $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ і висотами $f(\xi_i)$ (рис. 4.2).

Площа прямокутника визначається як $\Delta S_i = f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$.

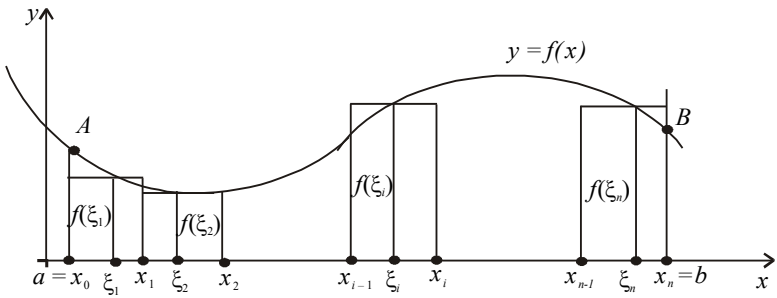


Рис. 4.2. Ступінчаста фігура

Площа ступінчастої фігури $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = S_n$ буде тим менше відрізнятись від площі криволінійної трапеції S_{aABb}, чим менша довжина $\max \Delta x_i$, і в граничному

випадку ці площі будуть збігатися, тобто $S_{aBAb} = \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f\xi_i \cdot \Delta x_i$.

Задача. Обчислити роботу змінної сили $\vec{F} = \vec{e} \cdot f(x),\ |\vec{e}| = 1,$ що виконується при переміщенні тіла чи матеріальної точки на проміжку $x \in [a;\ b]$ (рис. 4.3).

Розв'язання

Розіб'ємо проміжок $[a;\ b]$ на n елементарних частин точками x_i, $i = \overline{(0, n)}$. На кожному з відрізків $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ вважатимемо, що сила стала та дорівнює $F = f(\xi_i),\ x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$ (рис. 4.3).

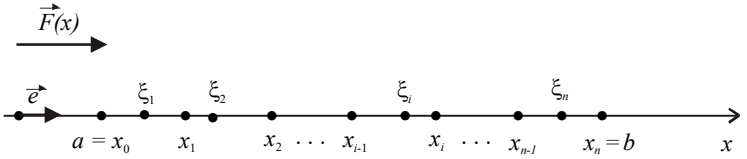


Рис. 4.3.

Елементарна робота сили на відрізку Δx_i буде визначатись як $\Delta A_i = f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$. Робота A сили $\vec{F}$ на відрізку $[a;\ b]$ знайдеться наступним чином:

$$A = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

Означення. Сума виду $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ називається *інтегральною сумою*.

Оперувати поняттям інтегральної суми доводиться в процесі розв'язку різноманітних задач. Взагалі інтегральна сума може залежати від способу розбиття проміжку $[a;\ b]$ на елементарні частини Δx_i, а також від вибору на них точок ξ_i.

4.2. Поняття визначеного інтеграла

Нехай $y = f(x)$ – деяка функція, що задана на проміжку $[a; b]$. Розіб'ємо $[a; b]$ на n елементарних частин точками x_i, так що:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

Обчислимо $f(\xi_i)$, де $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$, $i = \overline{1, n}$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Складемо інтегральну суму: $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

Позначимо $\lambda = \max \Delta x_i$.

Означення. Якщо існує скінченна границя інтегральних сум S_n при $\lambda \to 0$, яка не залежить від способу розбиття $[a; b]$ на частини Δx_i та від вибору точок ξ_i, тоді така границя називається *визначеним інтегралом* від функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$ та позначається як:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx, \qquad (4.1)$$

де $\int_a^b$ – знак визначеного інтеграла;

a, b – нижня та верхня межі(границі) інтегрування;

f(*x*) – підінтегральна функція;

f(*x*) *dx* – підінтегральний вираз;

dx – диференціал незалежної змінної інтегрування.

За означенням, визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ – число, яке залежить від типу функції $f(x)$ та проміжку $[a; b]$; він

не залежить від того, яким символом позначена незалежна змінна інтегрування, тобто: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$

Означення. Функція f(x), для якої на $[a; b]$ існує визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ називається *інтегрованою на цьому проміжку*.

Надалі буде показано, що неперервні функції – завжди інтегровані.

Геометричний зміст визначеного інтеграла

Якщо $f(x) \geq 0, \quad x \in [a; b]$, тоді $\int_a^b f(x)dx$ дорівнює площі відповідної криволінійної (4.1).

4.3. Властивості визначеного інтеграла

I. Якщо $f(x) = c = \text{const}$, то $\int_a^b c dx = c \cdot (b - a).$

II. Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла, тобто $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx.$

III. Якщо $f_1(x)$ та $f_2(x)$ інтегровані на відрізку $[a; b]$, то

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))\, dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)\, dx.$$

IV. Якщо у визначеному інтегралі змінити місцями межі інтегрування, то відповідний визначений інтеграл змінить свій знак на протилежний, тобто $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

V. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулеві: $\int_a^a f(x)dx = 0.$

VI. Якщо $f(x)$ – інтегрована в будь-якому з проміжків: $[a; b]$, $[a; c]$, $[c; b]$, тоді $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

VII. Якщо $f(x) \geq 0$ та інтегрована для $x \in [a, b],\ b > a,$ то $\int_a^b f(x)dx \geq 0.$

VIII. Якщо $f(x)$, $g(x)$ – інтегровані та $f(x) \geq g(x)$ для $x \in [a, b],\ b > a,$ то $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$

IX. Якщо $f(x)$ – інтегрована та $m \leq f(x) \leq M$ для $x \in [a, b],\ b > a,$ то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

Остання формула є результатом теореми про оцінку визначеного інтеграла.

Доведення випливає як наслідок із властивостей I та VIII.

X. ***Теорема* (*про середнє значення визначеного інтеграла*).**

Якщо функція $f(x)$ – неперервна для $x \in (a, b),\ b > a,$ то знайдеться така внутрішня точка $x = c \in (a, b),$ що

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a). \qquad (4.2)$$

Геометричний зміст теореми про середнє полягає в тому, що існує прямокутник зі сторонами $f(c), c \in (a, b)$ та *(b–a)*, який рівновеликий криволінійній трапеції *aABв* за умови, що функція $f(x) \geq 0$ і є неперервною на проміжку $(a; b)$ (рис. 4.4).

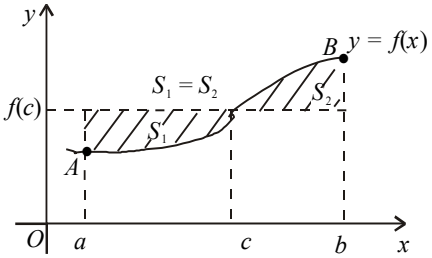


Рис. 4.4. Прямокутник

4.4. Формула Ньютона-Лейбніца

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, тоді функція

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad (4.3)$$

є первісною для функції $f(x)$, тобто

$$F'(x) = f(x), \quad a \le x \le b.$$

Визначений інтеграл пов'язаний з невизначеним відомою формулою, яка є основним засобом аналітичного обчислення визначеного інтеграла за умови існування первісної для підінтегральної функції:

Площа ступінчастої фігури $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = S_n$ буде тим менше відрізнятись від площі криволінійної трапеції S_{aABb}, чим менша довжина $\max\Delta x_i$, і в граничному випадку ці площі будуть збігатися, тобто

$$S_{aBAb} = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\xi_i \cdot \Delta x_i,$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \qquad (4.4)$$

де $F(x)$ – довільна первісна функції $f(x)$. Дана формула називається формулою Ньютона-Лейбніца.

Приклад. Користуючись формулою Ньютона-Лейбніца, обчислити визначені інтеграли*:*

а) $\int_2^3 x^3 dx;$

б) $\int_0^2 \frac{dz}{4+z^2}.$

Розв'язання

а) $\int_2^3 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_2^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{2^4}{4} = \frac{81-16}{4} = \frac{65}{4}.$

б)

$$\int_0^2 \frac{dz}{4+z^2} = \frac{1}{2}\left(arctg\, z/2\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{2}(arctg1 - arctg0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}.$$

4.5. Методи обчислення визначеного інтеграла
Метод підстановки

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна зі своєю похідною $\varphi'(t)$ на відрізку $[\alpha; \beta]$, де $a = \varphi(\alpha)$ і $b = \varphi(\beta)$, при цьому функція $f[\varphi(t)]$ визначена та неперервна на $[\alpha; \beta]$, тоді

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt. \qquad (4.5)$$

Процедура заміни змінної у визначеному інтегралі полягає в тому, що:

1) необхідно змінити межі інтегрування;

2) до початкової змінної повертатись не потрібно.

Приклад. Обчислити інтеграл $\int\limits_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$.

Розв'язання

$$\int\limits_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = \left| \begin{array}{c} x = t^2,\ \ dx = 2tdt \\ \hline x \,|\, 4 \,|\, 9 \\ t \,|\, 2 \,|\, 3 \end{array} \right| = \int\limits_2^3 \frac{2tdt}{t+1} = 2\int\limits_2^3 \frac{t+1-1}{t+1}\,dt =$$

$$=$$

$$2\int\limits_2^3 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = 2(t - \ln|t+1|)\Big|_2^3 = 2(3 - \ln 4 - (2 - \ln 3)) = 2\left(1 + \ln\frac{3}{4}\right).$$

Формула інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$ мають неперервні похідні для $x \in [a;\ b]$, тоді має місце формула вигляду:

$$\int\limits_a^b udv = (uv)\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu. \qquad (4.6)$$

Приклад. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x dx$.

Розв'язання

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x dx = \left| \begin{array}{l} u = x,\ \ du = dx; \\ \cos 2x dx = dv, \\ v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right| = \left(\frac{x}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\sin\pi + \frac{1}{2}\cos\pi\right) - \left(0\cdot\sin 0 + \frac{1}{2}\cos 0\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

4.6. Застосування визначеного інтеграла Формули наближеного обчислення визначених інтегралів

Визначений інтеграл від заданої неперервної функції далеко не завжди можливо легко та точно обчислити. Однак, використовуючи його геометричний зміст, можемо побудувати ряд наближених формул, за допомогою яких визначений інтеграл обчислюється з будь-якою наперед заданою точністю. Розглянемо наступні формули.

Нехай від заданої та неперервної на відрізку $[a; b]$ функції $y = f(x)$ необхідно обчислити визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Поділимо $[a; b]$ точками $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$ на n рівних елементарних частин завдовжки $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Значення функції $f(x)$ в точках x_i, $i = \overline{0, n}$ позначимо так:

$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \ldots, y_n = f(x_n)$.

Побудуємо для функції $f(x)$ на проміжку $[a;b]$ інтегральні суми, кожна з яких наближено буде подавати визначений інтеграл:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} y_i \Delta x = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_i, \qquad (4.7)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta x = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i. \qquad (4.8)$$

Формули (4.7) та (4.8) називають формулами лівого та правого прямокутників відповідно. Дана назва пов’язана з тим, що криволінійна трапеція наближено

замінюється відповідною ступінчастою фігурою (рис. 4.5).

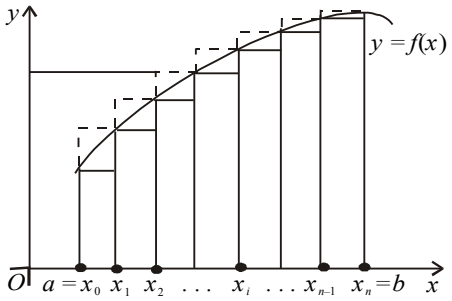


Рис. 4.5. Ступінчата фігура

II. Формула трапецій.

Більш точне значення визначеного інтеграла буде тоді, якщо криву $y = f(x)$ замінювати не ступінчастою лінією, а вписаною ламаною, тобто криволінійна трапеція замінюється сумою n числа прямолінійних трапецій (рис. 4.6). У такому разі наближене значення визначеного інтеграла можемо отримати як середнє арифметичне значень, обчислених за формулами (4.7) та (4.8).

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{2}\left(y_0 + y_n\right) + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right). \qquad (4.9)$$

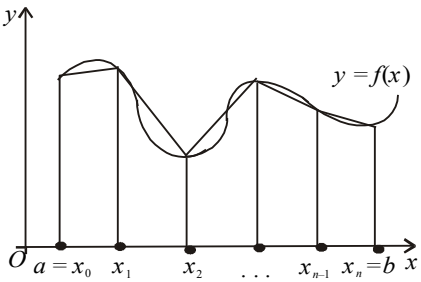


Рис. 4.6.

III. Формула Сімпсона.

Поділимо $[a; b]$ на парне число рівних елементарних частин $n = 2m$ точками x_i $i = \overline{(0,2m)}$ так, що $a = x_0$, $b = x_{2m}$. На кожному з цих проміжків криволінійну сторону трапеції, рівнянням якої є $y = f(x)$, замінюємо куском певної параболи. Таке наближення для

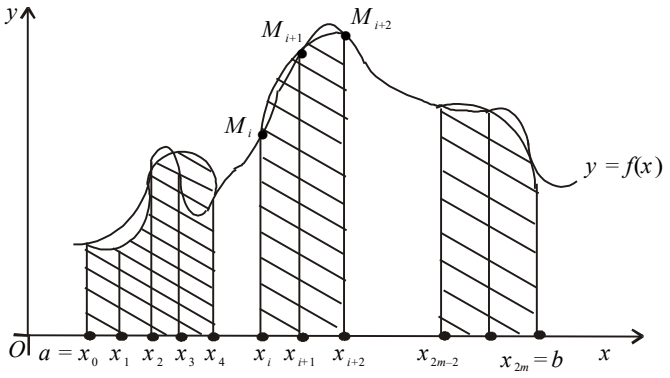


Рис. 4.7.

обчислення визначеного інтеграла буде набагато точнішим, ніж за попередніми формулами:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6m}\left(y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2m-2}) + \right.$$
$$\left. + (y_1 + y_3 + ... + y_{2m-1})\right).$$

Обчислення площі плоскої фігури через визначений інтеграл

Якщо фігура обмежена лініями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$, а функція $f(x)$ – неперервна та $f(x) \geq 0$ на проміжку $[a; b]$, то площа S такої криволінійної

трапеції обчислюється за формулою: $S = \int_a^b f(x)dx$, але якщо $f(x) \le 0$, то $S = \left| \int_a^b f(x)dx \right|$.

Якщо фігура обмежена лініями

$$y = f(x),\ y = g(x),\ x = a,\ x = b,$$

а функції $f(x)$ та $g(x)$ – неперервні та $f(x) \ge g(x)$ на $[a;\ b]$, тоді площа даної фігури, що утворюється, обчислюється за формулою $S = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx.$

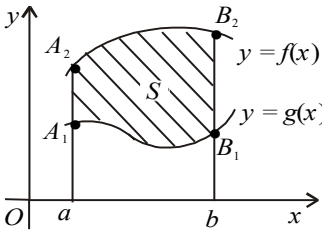


Рис. 4.8. Площа фігури

Якщо крива $y = f(x)$ задана параметрично рівняннями $x = x(t), y = y(t),$ то $S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$.

Межі інтегрування t_1 і t_2 визначаються з рівнянь $a = x(t_1),\ \ b = x(t_2)$. Припускаємо, що функція $y(t)$ неперервна на $[t_1;t_2]$, а $x(t)$ – неперервна диференційована.

г) Площа криволінійного сектора, обмеженого графіком неперервної функції $\rho = \rho(\varphi)$ та двома променями $\varphi = \alpha$ і $\varphi = \beta$, де ρ і φ – полярні (криволінійні) координати, обчислюється за формулою $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi$.

Приклад. Обчислити площу, обмежену прямою $x=4$, кривою $y=3x^2-6x$ та віссю Ox на відрізку $[0;\ 4]$.

Розв'язання

Крива $y=3x^2-6x$ – це парабола. Площа OAB розташована під віссю Ox, візьмемо її зі знаком мінус, а площа BCD – над віссю Ox, візьмемо її зі знаком плюс. Відрізок $[0;\ 4]$ розіб'ємо на два відрізки: $[0;\ 2]$ і $[2;\ 4]$. Маємо:

$$S=-S_1+S_2=-\int_0^2(3x^2-6x)dx+\int_2^4(3x^2-6x)dx=$$

$$=-(x^3-3x^2)\Big|_0^2+(x^3-3x^2)\Big|_2^4=-(8-12)+(64-48-8+12)=$$

$$=4+20=24.$$

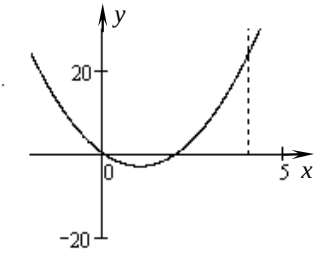


Рис.4.9. Геометрична фігура

Приклад. Знайти площу фігури, обмеженої параболою $y=\frac{1}{4}(x-2)^2$ і прямою $x+2y-14=0.$

Розв'язання

Площа фігури, обмеженої зверху неперервною кривою $y=f_2(x)$, знизу – неперервною кривою $y=f_1(x)$, зліва – прямою $x=a$ і справа прямою $x=b$, обчислюється за формулою $S=\int_a^b\big(f(x)-g(x)\big)dx.$

Знайдемо точки перетину даних ліній. З рівняння прямої знаходимо $y = 7 - \frac{x}{2}$. Розв'яжемо систему $\begin{cases} y = \frac{1}{4}(x-2)^2 \\ y = 7 - \frac{x}{2} \end{cases}$. Підставивши в перше рівняння системи замість y різницю $7 - \frac{x}{2}$, одержимо

$7 - \frac{x}{2} = \frac{1}{4}(x-2)^2$; $28 - 2x = x^2 - 4x + 4$; $x^2 - 2x - 24 = 0$,

звідси $x_1 = -4$, $x_2 = 6$. Тоді одержимо $y_1 = 9$, $y_2 = 4$.

Таким чином, парабола та пряма перетинаються в точках $A(-4; 9)$ і $B(6; 4)$.

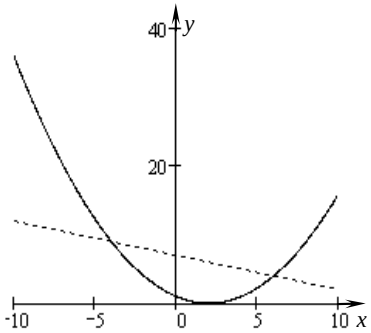


Рис. 4.10. Геометрична фігура

Так як зверху фігура обмежена прямою, знизу – параболою, то застосовуючи відповідну формулу, маємо:

$$S = \int_{-4}^{6} \left[7 - x/2 - 0{,}25(x-2)^2\right] dx = \int_{-4}^{6} \left[7 - x/2 - 0{,}25x^2 + x - 1\right] dx =$$

$$= \int_{-4}^{6} \left[6 + x/2 - 0{,}25x^2\right] dx = \left[6x + 0{,}25x^2 - x^3/12\right]_{-4}^{6} =$$

$$= 36 + 9 - 18 + 24 - 4 - \frac{16}{3} = 41\frac{2}{3}.$$

Приклад. Обчислити площу петлі кривої $x = t^2, y = \frac{1}{3}t\left(t^2 - 3\right)$.

Розв'язання

Знайдемо точки перетину кривої з відповідними координатними осями.

Маємо $x = 0$, якщо $t = 0, y = 0$, якщо $t = 0$ і $t = \pm\sqrt{3}$. Параметру $t = 0$ відповідає точка O(0,0), $t = \pm\sqrt{3}$ – точка $B(3;0)$. $t = -1$ – точка $A\left(1;\frac{2}{3}\right)$, $t = 1$ – точка $C\left(1;-\frac{2}{3}\right)$.

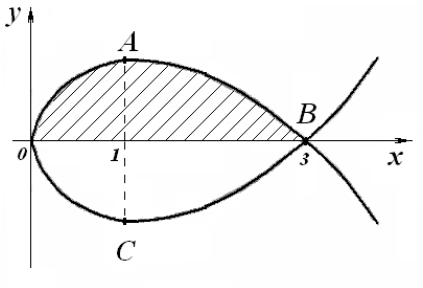


Рис. 4.11. Геометрична фігура

Фігура складається з двох симетричних відносно осі ox частин S_1 (заштрихована на рисунку) та S_2 (рис. 4.11). Верхня частина петлі відповідає зміні аргументу t від 0 до $-\sqrt{3}$. Площу S_1 обчислюємо за формулою

$$S_1 = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt = \int_0^{-\sqrt{3}} \frac{1}{3}t\left(t^2 - 3\right)\cdot 2tdt =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{-\sqrt{3}} \left(t^4 - 3t^2\right)dt = \frac{2}{3}\left(\frac{t^5}{5} - t^3\right)\Bigg|_0^{-\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\left(\frac{-9\sqrt{3}}{5} + 3\sqrt{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{5}.$$

Площа всієї фігури $S = 2S_1 = \frac{8\sqrt{3}}{5}$ (кв.од.).

Приклад. Обчислити площу фігури, обмеженої кривою

$$\rho = a\cos 3\phi.$$

Розв'язання

Фігура складається з шести симетричних частин (рис. 4.12). Взагалі назва полярної кривої – «трипелюсткова троянда». Заштрихована частина S_1 обмежена променями $\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{6}$ та кривою $\rho(\varphi) = a\cos 3\varphi$. Тому

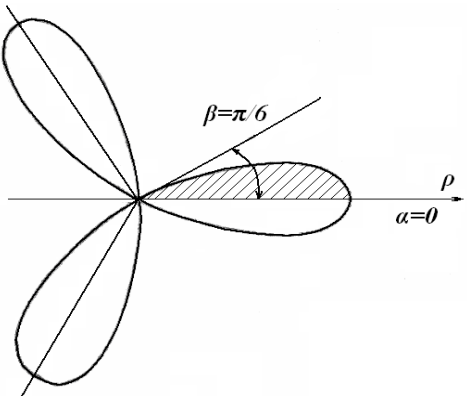


Рис. 4.12. Геометрична фігура

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(a\cos 3\phi\right)^2 d\phi = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\cos 6\phi}{2} d\phi =$$

$$= \frac{a^2}{4}\left(\phi + \frac{1}{6}\sin 6\phi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{a^2}{4}\left(\frac{\pi}{6} + 0\right) = \frac{\pi a^2}{24}$$

$$S = 6S_1 = \frac{\pi a^2}{4}\left(\text{од.}^2\right).$$

Обчислення об'єму тіла обертання через визначений інтеграл

Об'єм тіла V_x, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури (криволінійної трапеції), обмеженої лініями $y = 0$, $y = f(x) \geq 0$, $x = a$, $x = b$, обчислюється за формулою:

$$V_x = \int_a^b S(x)dx = \pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx. \qquad (4.10)$$

Аналогічно, об'єм тіла V_y, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями $x = 0$, $x = \varphi(y) \geq 0$, $y = c$, $y = d$ обчислюється за формулою

$$V_y = \pi\int_c^d (\varphi(y))^2 dy. \qquad (4.11)$$

Приклад. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y^2 = 3x - 3$, $x = 1$, $x = 4$.

Розв'язання

Скористаємось формулою

$$V_x = \int_a^b S(x)dx = \pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx.$$

Маємо: $V = \pi\int_1^4 y^2 dx = \pi\int_1^4 (3x-3)dx = \frac{3\pi}{2}(x-1)^2\Big|_1^4 = \frac{27}{2}\pi$.

Обчислення довжини дуги плоскої кривої через визначений інтеграл

Довжина дуги кривої, заданої функцією $y = f(x)$ на відрізку $[a;b]$ обчислюється за формулою:

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx. \qquad (4.12)$$

Якщо крива задана параметрично рівняннями $x = x(t), y = y(t)$ $(t_1 \le t \le t_2)$, тоді

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt\ . \qquad (4.13)$$

Якщо крива задана в полярних координатах рівнянням $\rho = \rho(\varphi), \alpha \le \varphi \le \beta,$ то

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\varphi. \qquad (4.14)$$

Приклад. Знайти довжину дуги параболи $y = \dfrac{x^2}{2}$ від точки $O(0;\ 0)$ до точки $A(1;\ 0{,}5)$.

Розв'язання

Оскільки $y' = x,\quad 0 \le x \le 1,$ то за формулою $L = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx$ одержимо

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = \left(\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})).$$

Приклад. Знайти довжину дуги параметричної кривої $x = a(t\sin t + \cos t),\ \ y = a(\sin t - t\cos t),$ від точки $A(t=0)$ до точки $B(t=2\pi)$.

Розв'язання

Використаємо формулу: $L = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2}\, dt$.

Маємо:

$$t_1 = 0, t_2 = 2\pi, x_t' = at\cos t, y_t' = at\sin t,$$

$$\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2 = a^2t^2,$$

$$L = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2t^2}\, dt = a\int\limits_0^{2\pi} tdt = \frac{at^2}{2}\Bigg|_0^{2\pi} = 2\pi^2 a \,(од.дов.).$$

Приклад. Знайти довжину кривої $\rho = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$.

Розв'язання

Замкнена крива описується точками замкненої кривої при зміні φ від 0 до 3π.

Маємо:

$$\alpha = 0, \beta = 3\pi, \rho = a\,sin^3\frac{\phi}{3},$$

$$\rho_\varphi' = a\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3},\ \ \rho^2 + \left(\rho'\right)^2 = a^2\sin^4\frac{\varphi}{3}.$$

$$L = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \left(\rho'\right)^2}\, d\phi = \int\limits_0^{3\pi} \sqrt{a^2\sin^4\frac{\phi}{3}}\, d\phi = a\int\limits_0^{3\pi} \sin^2\frac{\phi}{3}\, d\phi =$$

$$= a\int\limits_0^{3\pi} \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{2}{3}\phi\right) d\phi = \frac{a}{2}\left(\phi - \frac{3}{2}\sin\frac{2}{3}\phi\right)\Bigg|_0^{3\pi} = \frac{3}{2}\pi a(од.дов.).$$

4.7. Невласні інтеграли із нескінченним проміжком інтегрування

Нехай $f(x)$ інтегровна для будь-якого скінченного $b \in [a;+\infty)$, так що $\int\limits_a^b f(x)dx$ існує.

Означення. Границя $\int_a^b f(x)dx$ при $b \to +\infty$ називається *невласним інтегралом від функції f(x) на нескінченному проміжку* $[a;+\infty)$ і позначається так: $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Якщо ця границя існує та скінченна, то невласний інтеграл називається *збіжним*, а якщо не існує (зокрема нескінченна), то – розбіжним.

Якщо $f(x)$ – інтегрована для скінченних a та b, тобто $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, формули для обчислення невласних інтегралів на нескінченному проміжку мають вигляд:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} (F(b) - F(a)),$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} (F(b) - F(a)),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx,$$

де $C = \text{const}$.

Приклад. Дослідити на збіжність інтеграл Діріхле

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}.$$

Розв'язання

Розглянемо такі три випадки:

I. $p = 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} (\ln|x|)\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} (\ln b - \ln 1) = +\infty,$$

інтеграл розбіжний.

II. $p < 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{x^{1-p}}{1-p} \right) \Bigg|_1^b = \frac{1}{1-p} \lim_{b\to+\infty} \left(b^{1-p} - 1 \right) = +\infty,$$

інтеграл розбіжний.

III. $p > 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{x^{1-p}}{1-p} \right) \Bigg|_1^b = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{1-p} \left(b^{\frac{1}{p-1}} - 1 \right) =$$

$$= \frac{1}{1-p}(0-1) = \frac{1}{p-1},$$ інтеграл збіжний.

Отже, інтеграл Діріхле збіжний при $p > 1$ та розбіжний при $p \le 1$.

Крім безпосереднього обчислення невласних інтегралів при дослідженні їх на збіжність існують і інші методи.

Одним із таких методів можна встановити збіжність інтеграла Пуассона

$$S = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

особливість якого полягає в тому, що первісна для підінтегральної функції $f(x) = e^{-x^2}$ не виражається через елементарні функції.

У деяких випадках достатньо встановити лише збіжність чи розбіжність розглядуваного інтеграла, при цьому можна скористатися методом порівняння, що базується на такій теоремі:

Теорема. Якщо при $x \ge a$ виконується нерівність $0 \le f(x) \le g(x)$, то зі збіжності інтеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$

випливає збіжність інтеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ або з розбіжності $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ випливає розбіжність інтеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

Звичайно, для порівняння вибирається інтеграл, збіжність якого відома, наприклад інтеграл Діріхле.

Приклад. Дослідити збіжність інтеграла $\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$.

Розв'язання

$$0 \le f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2} \le \frac{1}{x^2} = g(x), \quad x \in [1; +\infty).$$

Оскільки інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ – збіжний, як інтеграл Діріхле із $p = 2 > 1$, тому буде збіжним й інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$.

4.8. Обчислення невласних інтегралів від розривних (необмежених) функцій

Нехай $f(x)$ неперервна на проміжку $(a; b]$ та при $x = a$ має розрив 2-го роду.

Означення. $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ називається *невласним інтегралом* від розривної (необмеженої) функції $f(x)$.

Якщо ця границя існує, то інтеграл називається *збіжним*, а якщо не існує, то – *розбіжним*.

Для обчислення таких невласних інтегралів використовують такі формули:

$x = a$ – точка розриву $f(x)$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(F(b) - F(a+\varepsilon)\right).$$

$x = b$ – точка розриву $f(x)$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(F(b-\varepsilon) - F(a)\right).$$

III. $x = c \in (a;\ b)$ – точка розриву $f(x)$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to +0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to +0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx.$$

Зауваження. До невласних інтегралів, які мають точку розриву, що є внутрішньою для $[a;\ b]$, не можна застосувати формулу Ньютона-Лейбніца.

Приклад. Обчислити $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$.

Розв'язання

Неправильне розв'язання

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^{1} = -1 - \left(-\frac{1}{-1}\right) = -2.$$

Правильне розв'язання: $f(x) = \frac{1}{x^2}$,

$D(f) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty) \Rightarrow \Rightarrow x = 0 \in [-1;\ 1]$ – точка розриву 2-го роду функції $f(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$ – інтеграл невласний.

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon_1 \to +0} \int_{-1}^{0-\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon_2 \to +0} \int_{0+\varepsilon_2}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon_1 \to +0} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^{-\varepsilon_1} +$$

$$+\lim_{\varepsilon_2\to+0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{\varepsilon_2}^{1}=\lim_{\varepsilon_1\to+0}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}-1\right)+\lim_{\varepsilon_2\to+0}\left(-1+\frac{1}{\varepsilon_2}\right)=+\infty+\infty=+\infty\Rightarrow$$

інтеграл розбіжний.

Розділ 5. Комплексні числа

5.1. Поняття комплексних чисел

Означення. *Комплексним числом* називається число виду $z=a+ib$, де a, b – дійсні числа, $i^2=-1$. Число a називається *дійсною частиною*, bi – *уявною частиною*, i – *уявною одиницею*. Множина комплексних чисел позначається C.

Означення. Комплексні числа виду $a + bi$ і $a - bi$ називаються *спряженими*. Комплексні числа виду $a + bi$ і $a - bi$ називаються *протилежними*. Спряжене до комплексного числа z позначається $\bar{z}$.

Означення. Два комплексних числа $a + bi$ і $a_1 + b_1i$ вважаються *рівними* в тому і тільки в тому випадку, якщо $a = a_1$ і $b = b_1$.

Дії з комплексними числами

Додавання: $(a + bi) + (a_1 + b_1i) = (a + a_1) + (b + b_1)i$.

Віднімання: $(a + bi) - (a_1 + b_1i) = (a - a_1) + (b - b_1)i$.

Множення: $(a + bi)(a_1 + b_1i) = aa_1 + a_1bi + ab_1i + bb_1i^2 =$
$= (aa_1 - bb_1) + (a_1b + ab_1)i$.

Ділення:

$$\frac{a+bi}{a_1+b_1i}=\frac{(a+bi)(a_1-b_1i)}{(a_1+b_1i)(a_1-b_1i)}=\frac{aa_1bb_1+(a_1b-ab_1)i}{a_1^2-(b_1i)^2}=\frac{aa_1+bb_1}{a_1^2+b_1^2}+\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2+b_1^2}i.$$

Піднесення до степеня: спочатку знайдемо результати від піднесення до степеня уявної одиниці,

знаючи, що за умовою i^2 треба вважати таким, що дорівнює – 1.

$i^0 = 1$ $\qquad$ $i^5 = i^4 \cdot i = i$

$i^1 = i$ $\qquad$ $i^6 = i^5 \cdot i = -1$

$i^2 = -1$ $\qquad$ $i^7 = i^6 \cdot i = -1 \cdot i = -i$

$i^3 = i^2 \cdot i = -i$ $\qquad$ $i^8 = i^7 \cdot i = -i \cdot i = 1$

$i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = 1$ і т. п.

Отже, дістали чотири значення, що чергуються:

$i; -1; -i; +1$, тоді:

$(a + ib)^2 = a^2 + 2abi + b^2i^2 = (a^2 - b^2) + 2abi,$

$(a + ib)^3 = a^3 + 3a^2b + 3a(ib)^2 + (ib)^3 = (a^3 - 3ab^2) +$

$+ (3a^2b - b^3)i$ і т. п.

Добування квадратного кореня: Припустимо, що $\sqrt{a + bi} = x + iy.$

Тоді $a + bi = (x^2 - y^2) + 2xyi.$

Отже, маємо:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x^2 - y^2)^2 = a^2 \\ (2xy)^2 = b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2 + b^2 \\ x^2 - y^2 = a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ x^2 - y^2 = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} \\ y = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \end{cases}.$$

З рівняння $2xy = b$ випливає, що знаки x та y мають бути однакові, якщо $b > 0$, і різні, якщо $b < 0$.

Тому $\sqrt{a + bi} = \pm\left[\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}\right]$ при $b > 0$;

$$\sqrt{a + bi} = \pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}\right] \text{ при}$$

$b < 0$.

Зауваження. Для того, щоб з комплексного числа можна було добути корінь третього, або вищого степеня, йому треба надати іншого вигляду.

Приклад. Нехай $z_1 = 5 + i6$; $z_2 = 7 - i9$; $z_3 = 5 + 12i$.

Знайти: $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$, z_1 / z_2, z_1^2, $\sqrt{z_3}$.

Розв'язання

$z_1 + z_2 = (5 + 6i) + (7 - 9i) = (5 + 7) + i(6 - 9) = 12 - 3i$;

$z_1 \cdot z_2 = (5 + 6i) \cdot (7 - 9i) = 5 \cdot 7 + 6i \cdot 7 - 5 \cdot 9i - i6 \cdot i9 =$

$= 35 + 42i - 45i + 54 = 89 - 3i$;

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5+6i}{7-9i} = \frac{(5+6i)(7+9i)}{(7-9i)(7+9i)} = \frac{35+42i+45i-54}{49+81} = \frac{-19+87i}{130} =$$

$$= -\frac{19}{130} + \frac{87}{130}i;$$

$z_1^2 = (5 + i6)^2 = 25 + 2 \cdot 5 \cdot 6i + (i6)^2 = 25 + 60i - 36 =$

$= -11 + 60i$;

$$\sqrt{z_3} = \sqrt{5+12i} = \pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}+5}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}-5}{2}}\right] =$$

$$= \pm\left(\sqrt{\frac{18}{2}} + i\sqrt{\frac{8}{2}}\right) = \pm\left(\sqrt{9} + i\sqrt{4}\right) = \pm(3+2i) \cdot$$

5.2. Геометричне зображення комплексних чисел

Будь-яке комплексне число $a + bi$ можна зобразити геометрично.

Візьмемо в площині прямокутну систему координат і, вибравши одиницю довжини, зображатимемо дійсні числа на осі абсцис, а уявні на осі ординат. Відповідно до цього вісь абсцис називається *дійсною віссю*, а вісь ординат – *уявною*.

Число $a + bi$ зображатимемо точкою площини, абсциса якої чисельно дорівнює a, а ордината дорівнює b (рис. 5.1).

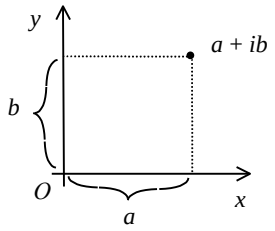


Рис. 5.1. Комплексне число

5.3. Тригонометрична форма комплексного числа

Зображення комплексних чисел за допомогою точок на площині дає змогу подати число $a + bi$ в іншому вигляді, а саме – у *тригонометричній формі.*

Нехай точка M (рис. 5.2) зображає комплексне число $a + ib$.

Тоді $OA = a$, $AM = b$. Позначимо віддаль OM точки від початку координат через r, а кут AOM, утворюваний OM з віссю x, – через φ. Тоді з трикутника AOM матимемо:

$$a = r \cos \varphi,\ b = r \sin \varphi.$$

Підставивши в комплексне число $a + bi$ значення a і b, дістанемо

$$a + bi = r \cos \varphi + r \sin \varphi \cdot i$$

або

$$a + bi = r (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Це є *тригонометрична форма комплексного числа*. Довжина $OM = r$ називається *модулем комплексного числа*, а кут $AOM = \varphi$ – *його аргументом*.

Покажемо, як перетворити в тригонометричну форму комплексне число, подане в звичайній алгебраїчній формі.

Для цього треба знайти r і φ за даними a і b. З трикутника OAM (рис. 5.2) маємо:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}\ ,\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}\,,$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{r},\ \cos\varphi = \frac{a}{r}$$

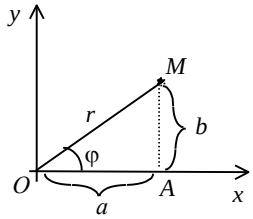


Рис. 5.2. Комплексне число

Приклад. Подати в тригонометричній формі число $-3 + 2i$.

Розв'язання

З формул для $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ та $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$ маємо:

$$r = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}\,,$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2}{-3} \approx -0{,}6666...$$

Тангенс від'ємний, отже, кут φ потрібно шукати в II або IV чверті. При $a = -3$ і $b = 2$ синус буде додатний, а косинус – від'ємний, тобто φ буде кутом II чверті. За таблицями знаходимо: φ = 146° 18′, а тому $-3+2i = \sqrt{13}\left(\cos 146^\circ 18' + i\sin 146^\circ 18'\right)$.

5.4. Дії з комплексними числами в тригонометричній формі

Додавати і віднімати комплексні числа простіше і зручніше, коли компоненти подані в алгебраїчній формі. Зовсім інша річ з останніми чотирма алгебраїчними діями.

Множення. Нехай треба перемножити числа:

$$a = R_1(\cos\alpha + i\sin\alpha),\ b = R_2(\cos\beta + i\sin\beta),$$

дістанемо:

$$ab = R_1R_2[\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)].$$

Звідси випливає:

Модуль добутку двох комплексних чисел дорівнює добуткові модулів співмножників, а аргумент – сумі аргументів співмножників.

Приклад. Знайти добуток комплексних чисел:

$$a = 3(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ);\ b = 2(\cos 35^\circ + i\sin 35^\circ).$$

Розв'язання

$$a \cdot b = 3 \cdot 2[\cos(20^\circ + 35^\circ) + i\sin(20^\circ + 35^\circ)] =$$
$$= 6(\cos 55^\circ + i\sin 55^\circ).$$

Ділення. Нехай треба число $a = R_1(\cos\alpha + \sin\alpha)$ поділити на число $b = R_2(\cos\beta + i\sin\beta)$.

Матимемо:

$$\frac{a}{b} = \frac{R_1(\cos\alpha + \sin\alpha)}{R_2(\cos\beta + \sin\beta)} = \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\beta + i\sin\beta} =$$

$$= \frac{R_1}{R_2} \cdot [\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)].$$

Модуль частки двох комплексних чисел дорівнює частці модулів, а аргумент – різниці аргументів діленого і дільника.

Приклад. Знайти частку комплексних чисел $\frac{a}{b}$, якщо

$a = 12 (\cos 55° + i \sin 55°)$; $b = 3 (\cos 35° + i \sin 35°)$.

Розв'язання

$$\frac{a}{b} = \frac{12}{3}\left(\cos\left(55^\circ - 35^\circ\right) + i\sin\left(55^\circ - 35^\circ\right)\right) = 4\left(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ\right).$$

Піднесення до степеня. Нехай потрібно число $a = R(\cos\alpha + i \sin\alpha)$ піднести до степеня n:

Матимемо:

$$a^n = \left[R\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right)\right]^n = R^n\left(\cos\alpha n + \sin\alpha n\right).$$

Модуль степеня комплексного числа дорівнює тому самому степеню модуля основи, а аргумент – аргументові основи, помноженому на показник степеня.

У частинному випадку, якщо $r = 1$, формула набуває вигляду

$$\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Ця формула має назву *формули Муавра*.

Приклад. Піднести до кубу число

$$a = 2 (\cos 20° + i \sin 20°).$$

Розв'язання

Матимемо:

$$a^3 = 8\left(\cos 3\cdot 20 + i\sin 3\cdot 20\right) = 8\left(\cos 60 + \sin 60\right) =$$

$$= 8\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4 + 4\sqrt{3}i.$$

Формула Ейлера: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$,

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2},\ \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Добування кореня. Добудемо корінь *n*-го степеня з числа:

$$a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Матимемо:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right] (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

1. Модуль кореня n-го степеня з комплексного числа дорівнює кореню того самого степеня з модуля підкореневого числа, а аргумент – аргументові підкореневого числа, поділеному на показник кореня.

2. Корінь n-го степеня з комплексного числа має n різних значень.

За допомогою формули Ейлера можна дістати *показникову форму* комплексного числа $z = re^{i\varphi}$.

5.5. Квадратний тричлен з комплексними коренями

Дано тричлен $y = ax^2 + bx + c$.

Відомо, що корені його комплексні. У цьому випадку $b^2 - 4ac < 0$. Перетворимо тричлен до вигляду

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Додамо й віднімемо вираз $\frac{b^2}{4a^2}$:

$$y = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right);$$

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right].$$

При всіх значеннях x вираз $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$ є число додатне або таке, що дорівнює нулю (при $x = -\frac{b}{2a}$).

Дослідимо, який знак має другий доданок $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$.

У випадках комплексних коренів вираз $b^2 - 4ac$ від'ємний, а протилежне йому число $-(b^2 - 4ac)$, тобто $4ac - b^2$, – число додатне.

Знаменник $4a^2$ теж число додатне, а отже, дріб $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$ є додатним числом. Значить, уся сума, що міститься в квадратних дужках, буде додатним числом при всіх значеннях.

Звідси випливає, що знак числової величини тричлена залежить лише від знака a: при a додатному тричлен має додатні значення, при a від'ємному – від'ємні.

Якщо тричлен має комплексний корінь, то при всіх значеннях x його числове значення має той самий знак, що й коефіцієнт при x^2.

5.6. Загальний висновок про квадратні рівняння

Загальна формула для коренів повного квадратного рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$ буде

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Корені квадратного рівняння будуть обидва дійсні або обидва уявні залежно від того, чи буде дискримінант $b^2 - 4ac$ величиною додатною чи від'ємною:

1. Припустимо, що $b^2 - 4ac > 0$. У цьому випадку вираз під коренем додатний. Квадратний корінь з цього виразу має два значення, і, отже, рівняння має два різні дійсні корені:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \; x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

2. Нехай $b^2 - 4ac = 0$. У цьому випадку другий член чисельника дорівнює нулю і рівняння має два рівні корені: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

3. Нехай $b^2 - 4ac < 0$. У цьому випадку рівняння має два комплексно спряжені корені:

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}, \; x_2 = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

5.7. Загальний вигляд алгебраїчного рівняння

Означення. Будь-яке рівняння, в якому невідоме пов'язане з даними числами за допомогою скінченного числа алгебраїчних дій (додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня і добування кореня), можна звести до такого цілого й раціонального вигляду:

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + Kx + L = 0, \qquad (5.1)$$

де коефіцієнти A, B, C, ..., K і L є сталі дійсні або комплексні числа, m є показник степеня рівняння. Деякі коефіцієнти в окремих випадках можуть дорівнювати нулю.

Рівняння такого виду називаються *алгебраїчними*. Алгебраїчні рівняння степеня, вищого від другого, називаються *рівняннями вищих степенів*.

Рівняння вищих степенів становлять предмет вищої алгебри. Елементарна алгебра розглядає тільки окремі види цих рівнянь.

Вища алгебра встановлює таку важливу теорему: будь-яке алгебраїчне рівняння має дійсний або комплексний корінь (*теорема Гаусса*).

Допустивши це твердження, можна показати, що алгебраїчне рівняння має стільки коренів, дійсних або комплексних, скільки одиниць у показнику його степеня.

Тоді рівняння (5.1) можна подати у вигляді:

$$A\,(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\lambda)=0,$$

де всіх різниць: $x-\alpha$, $x-\beta$, ..., буде m. В окремих випадках деякі і навіть усі корені можуть бути однакові.

Корисно звернути увагу ще на такі твердження, що їх доводять у вищій алгебрі.

Твердження 1. Сума коренів будь-якого алгебраїчного рівняння (5.1) дорівнює $-\frac{B}{A}$, а добуток коренів дорівнює $(-1)^m\frac{L}{A}$.

Твердження 2. Якщо алгебраїчне рівняння з дійсними коефіцієнтами має комплексні корені, то число цих коренів парне.

Твердження 3. Якщо алгебраїчне рівняння з дійсними коефіцієнтами має n коренів виду p + qi, то воно має ще n коренів виду p – qi.

Твердження 4. Алгебраїчне рівняння непарного степеня з дійсними коефіцієнтами має принаймні один дійсний корінь.

Твердження 5. Рівняння з довільними буквеними коефіцієнтами степеня не вище четвертого можна в загальному розв'язати алгебраїчно, тобто для коренів цих рівнянь знайдені загальні формули, складені з коефіцієнтів рівняння за допомогою алгебраїчних дій.

Твердження 6. Рівняння з довільними буквеними коефіцієнтами степеня, вищого від четвертого, не можна у загальному розв'язати алгебраїчно, проте, коли коефіцієнти рівняння якого завгодно степеня виражені числами, завжди є змога обчислити з бажаним степенем наближення всі його корені, як дійсні так і уявні. Способи такого обчислення викладаються у вищій алгебрі.

Розділ 6. Диференціальні рівняння
6.1. Загальні поняття та означення

Означення. Диференціальним рівнянням (ДР) називається рівняння, яке пов'язує незалежну змінну *x*, шукану функцію *y(x)* та її похідні (або диференціали). Найвищий порядок похідної, що входить у рівняння, називається *порядком* ДР.

У загальному випадку диференціальне рівняння *n*-го порядку має вигляд

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0.$$

Порядком ДР називається найвищий порядок похідної (або диференціала), що входить в це рівняння. Якщо невідома функція залежить тільки від однієї змінної, то диференціальне рівняння називається

звичайним ДР; якщо невідома функція залежить від кількох змінних і диференціальне рівняння містить її частинні похідні за цими змінними, то воно називається *рівнянням у частинних похідних*. Надалі будемо розглядати лише звичайні ДР.

В загальному вигляді диференціальні рівняння першого порядку можна записати у вигляді

$$F(x,\ y,\ y') = 0.$$

Або розв'язати відносно похідної, тобто подати у вигляді

$$y' = f(x,\ y) \text{ або } dy = f(x,y)dx .$$

Якщо $f(x;y)$ є дробом тобто $f(x;y) = -\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$, тоді ДР першого порядку можна записати в *симетричній формі*

$$M(x,\ y)dx + N(x,\ y)dy = 0.$$

Означення. *Розв'язком ДР* $y' = f(x,y)$ називається функція $y = \varphi(x)$, яка при підстановці у ДР перетворює його на тотожність. Графік функції $y = \varphi(x)$ називається *інтегральною кривою.*

Приклад. ДР $y' = 3y$ має розв'язок $y = e^{3x}$.

Розв'язання

Справді, $y' = 3e^{3x}$. Підставивши y' в рівняння, дістанемо тотожність $3e^{3x} \equiv 3e^{3x}$.

Звичайно, ДР має нескінченну множину розв'язків. Так, попереднє рівняння $y' = 3y$ має розв'язок $y = Ce^{3x}$, де C – довільний параметр.

Задача Коші

Розглянемо ДР $y' = f(x,y)$.

Означення. Задача пошуку розв'язку $y = \varphi(x)$, що задовольняє умови $y = y_0$ при $x = x_0$ називається

задачею Коші. Ці умови називаються *початковими умовами*, числа y_0, x_0 називаються *початковими значеннями*.

Означення. Функція $y = \varphi(x, C)$, що містить довільну сталу C, називається *загальним розв'язком ДР*, якщо функція $y = \varphi(x, C)$ є розв'язком ДР при довільному значенні сталої C, тобто $\frac{\partial \varphi(x, C)}{\partial x} \equiv f(x, \varphi(x, C))$.

За рахунок вибору довільної сталої C можна розв'язати задачу Коші з довільними початковими умовами, тобто рівняння $y_0 = \varphi(x_0, C)$ розв'язується відносно C. Розв'язок $y = \varphi(x, C_0)$ при фіксованому значенні сталої C називається *частинним розв'язком*.

Приклад. ДР $y' = 2xy^2$ має загальний розв'язок $y = -\frac{1}{x^2 + C}$.

Розв'язання

Справді, маємо тотожність:

$$\left(-\frac{1}{x^2 + C}\right)' = 2x\left(\frac{1}{x^2 + C}\right)^2.$$

При довільних початкових значеннях (x_0, y_0), $y_0 \neq 0$ знаходимо значення довільної сталої C

$$y_0 = -\frac{1}{x_0^2 + C} \Rightarrow C = -x_0^2 - \frac{1}{y_0}.$$

Означення. Задача знаходження розв'язків ДР називається *інтегруванням ДР*. Самий розв'язок називається також *інтегралом ДР*.

Загальний розв'язок може бути знайдений у неявній формі: $\varphi(x, y) = C$. Тоді ця рівність називається загальним *інтегралом ДР*. Функція $\varphi(x, y)$ також називається *інтегралом ДР*.

Приклад. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y' = \frac{e^x}{2y + 3y^2}.$$

Розв'язання

Рівняння можна записати у вигляді

$$2y\,y' + 3y^2 y' - e^x = 0 \quad \left(y^2 + y^3 - e^x\right)' = 0.$$

Звідси знаходимо інтеграл ДР $y^2 + y^3 - e^x = c.$

6.2. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Означення. ДР виду

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \qquad (6.1)$$

називається ДР з *відокремленими змінними*. Загальний розв'язок ДР подається так

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C,$$

а розв'язок задачі Коші з початковими умовами $x = x_0,\ y = y_0$ має вигляд

$$\int_{x_0}^{x} M(x)dx + \int_{y_0}^{y} N(y)dy = 0.$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок ДР $2xdx + 2ydy = 0.$

Розв'язання

Інтегруючи обидві частини рівняння, дістаємо загальний інтеграл ДР $x^2 + y^2 = C.$

Інтегральними кривими є концентричні кола з центром у початку координат.

Означення. Диференціальне рівняння виду

$$N_1(y)M_1(x)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \qquad (6.2)$$

називається ДР з *відокремлюваними змінними*, тобто рівнянням, що зводиться до ДР з відокремленими змінними.

Поділивши останнє рівняння на $N_1(y)\,M_2(x)$, дістанемо ДР з відокремленими змінними:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=0.$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок ДР $y'=2xy^2$.

Розв'язання

Запишемо рівняння у вигляді

$$\frac{dy}{dx}=2xy^2,\quad \frac{dy}{y^2}=2xdx,\quad \int\frac{dy}{y^2}=\int 2xdx$$

або

$$-\frac{1}{y}=x^2+C,\quad y=-\frac{1}{x^2+C}.$$

Приклад. Знайти закон розпаду радіоактивної речовини.

Розв'язання

Позначимо через $m(t)$ масу радіоактивної речовини. За час Δt розпадається кількість речовини $\Delta m(t)$, пропорційна до маси $m(t)$ і часу Δt, тобто $\Delta m(t)=-km(t)\Delta t$, або $\frac{\Delta m(t)}{\Delta t}=-km(t)$. При $\Delta t\to 0$ знаходимо ДР $\frac{dm(t)}{dt}=-km(t)$ з відокремленими змінними:

$$\frac{dm(t)}{m(t)}=-kdt,\ \int\frac{dm(t)}{m(t)}=-\int kdt;\ \ \ln|m(t)|=-kt+\ln C,\ \ m(t)=Ce^{-kt}.$$

При $t=0$ дістаємо: $m(0)=C$, $m(t)=m(0)e^{-kt}$.

Маємо експоненціальний закон розпаду радіоактивної речовини.

6.3. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

Означення. Диференціальне рівняння називається *однорідним*, якщо його можна подати у вигляді

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (6.3)$$

За допомогою заміни змінної $\frac{y}{x} = u,\ y = ux$ дане рівняння зводиться до ДР з відокремлюваними змінними відносно функції u :

$$u'x + u = f(u),\ x\frac{du}{dx} = f(u) - u,$$

а знаходження розв'язку зводиться до інтегрування рівності

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x}.$$

Наприкінці, необхідно повернутись до змінної y .

Приклад. Знайти загальний розв'язок ДР $y' = \frac{y^2}{x^2}$.

Розв'язання

Введемо заміну $y = ux$ і одержимо ДР відносно змінної u , тобто

$$u'x + u = u^2,\ x\frac{du}{dx} = u^2 - u,\ \frac{du}{u^2 - u} = \frac{dx}{x}.$$

Інтегруючи ДР з відокремленими змінними, знаходимо загальний розв'язок:

$$\int \frac{du}{u^2 - u} = \int \frac{dx}{x},\ \ \ln\left|\frac{u-1}{u}\right| = \ln x + \ln C,\ \ \frac{u-1}{u} = Cx,\ \ u = \frac{1}{1 - Cx},$$

або $\frac{y}{x} = \frac{1}{1 - Cx},\ \ y = \frac{x}{1 - Cx}.$

Приклад. Знайти загальний розв'язок ДР $x^2 + y^2 - 2xy \cdot y' = 0.$

Розв'язання

Дане ДР можна записати у вигляді $y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$, або $y' = \frac{x}{2y} + \frac{y}{2x}$, тобто у вигляді однорідного ДР.

Введемо нову змінну $u = \frac{y}{x}$, де $y = ux$:

$$u'(x) + u \cdot 1 = \frac{1}{2u} + \frac{u}{2},\ x\frac{du}{dx} = \frac{1-u^2}{2u},$$

$$\int \frac{2u\ du}{u^2 - 1} = -\int \frac{dx}{x},\ \ln\left|u^2 - 1\right| = -\ln|x| + \ln C,$$

$u^2 - 1 = \frac{C}{x}$, або $\frac{y^2}{x^2} - 1 = \frac{C}{x}$, $y^2 = x^2 + Cx$. Дістали загальний інтеграл.

6.4. Лінійні диференціальні рівняння

Означення. Диференціальне рівняння виду

$$y' + P(x)y' = Q(x) \qquad (6.4)$$

називається *лінійним ДР*. Якщо $Q(x) \equiv 0$, то ДР є однорідним. Якщо $Q(x) \neq 0$, то ДР називається *неоднорідним*.

Розглянемо розв'язування лінійного неоднорідного ДР методом Бернуллі.

Метод Бернуллі.

Загальний розв'язок шукаємо у вигляді добутку двох функцій $y = uv$, де u і v – дві неперервно-диференційовані функції від x.

Підставляючи його у початкове рівняння, дістанемо рівняння $u'v+uv'+P(x)uv=Q(x)$, яке розпадається на два рівняння з відокремлюваними змінними у вигляді системи:

$$\begin{cases} uv'+P(x)uv=0, \\ u'v=Q(x). \end{cases}$$

Із першого рівняння знаходимо функцію v:

$$v'=-P(x)v, \quad \frac{dv}{dx}=-P(x)v, \quad \frac{dv}{v}=-P(x)dx,$$

$$\int\frac{dv}{v}=-\int P(x)dx, \quad \ln|v|=-\int P(x)dx, \quad v=e^{-\int P(x)dx}.$$

Із другого рівняння знаходимо функцію u:

$$u'=Q(x)v^{-1}, \quad u'=Q(x)e^{\int P(x)dx}, \quad u=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C.$$

Підставимо знайдені функції u та v у вираз $y=u\cdot v$. Остаточно маємо розв'язок лінійного ДР у вигляді

$$y=\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)e^{-\int P(x)dx}.$$

Приклад. Знайдемо загальний розв'язок ДР

$$xy'+y=x^2.$$

Розв'язання

Розв'язок будемо шукати у вигляді добутку двох функцій $y=u\cdot v$. Підставляючи в початкове рівняння, дістанемо:

$$x(u'v+uv')+uv=x^2.$$

Зведемо це рівняння до системи ДР:

$$\begin{cases} xuv'+uv=0, \\ xu'v=x^2. \end{cases}$$

Із першого рівняння $xv'+v=0$ знаходимо:

$$v'=-\frac{v}{x}, \qquad \frac{dv}{dx}=-\frac{v}{x}, \qquad \frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = -\ln|x|, \quad v = x^{-1}.$$

Із другого рівняння маємо:

$$xu'x^{-1} = x^2,\ u' = x^2,\ u = \int x^2 dx,\ u = \frac{x^3}{3} + c.$$

Знаходимо остаточний розв'язок:

$$y = uv,\ y = \left(\frac{x^3}{3} + c\right) x^{-1}.$$

6.5. Диференціальні рівняння другого порядку

У загальному випадку ДР другого порядку має вигляд $F(x, y, y', y'') = 0.$

Загальний розв'язок рівняння містить дві довільні сталі: $y = \varphi(x, C_1, C_2)$

і за рахунок вибору довільних сталих C_1, C_2 можна розв'язати задачу Коші, яка полягає в пошуку частинного розв'язку $y = y(x)$, що задовольняє початкові умови $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0'.$

Тому **задача Коші** для рівнянь другого порядку формулюється таким чином: *знайти частинний розв'язок ДР* $F(x, y, y', y'') = 0$, *який задовольняє початковим умовам* $y(x_0) = y_0$ *та* $y'(x_0) = y_0'$.

Геометрично окремий розв'язок представляє інтегральну криву, що проходить через задану точку $(x_0; y_0)$ в даному напрямку – кутовий коефіцієнт дотичної до інтегральної кривої, проведеної в точці $(x_0; y_0)$, дорівнює заданому числу y_0'.

Розглянемо окремі види рівнянь, які допускають зниження порядку і зводяться до ДР першого порядку.

1. Найпростіше ДР другого порядку має вигляд $y'' = f(x)$. Таке рівняння розв'язують двократним інтегрування правої частини рівняння.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' = \cos 2x$.

Розв'язання

Нехай $y' = p(x)$, тоді $y'' = p'(x)$.

$$p'(x) = \cos 2x \Rightarrow p(x) = \int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C_1.$$

$$y' = \frac{1}{2}\sin 2x + C_1 \Rightarrow y = \int\left(\frac{1}{2}\sin 2x + C_1\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\cos 2x + C_1 x + C_2$$

Загальний розв'язок рівняння $y = -\frac{1}{4}\cos 2x + C_1 x + C_2$.

2. ДР явно не містить шукану функцію, тобто ДР виду $F(x, y', y'') = 0$. Вводячи заміну $y' = z$, $y'' = z'$, ДР зводиться до ДР першого порядку, тобто $F(x, z, z') = 0$.

Приклад. Розв'язати ДР другого порядку $y'' = \frac{y'}{1+x}$.

Розв'язання

При $z = y'$, $z' = y''$ дістанемо ДР першого порядку:

$$z' = \frac{z}{1+x}, \quad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{1+x} \quad \ln|z| = \ln|1+x| + \ln C_1,$$

$$z = C_1(1+x), \quad y' = C_1(1+x), \quad y = \int C_1(1+x)dx.$$

Знайдемо загальний розв'язок ДР другого порядку:

$$y = C_1\left(x + \frac{x^2}{2}\right) + C_2.$$

Приклад. Розв'яжемо ДР $y'' + y' = 0$.

Розв'язання

Вважаючи, що $y' = z, y'' = z'$, знижуємо порядок і приходимо до ДР першого порядку:

$$z' + z = 0,\ \frac{dz}{dx} = -z,\ \frac{dz}{z} = -dx,$$

$$\int \frac{dz}{z} = -\int dx,\ \ \ln z = -x + \ln C_1,\ \ z = C_1 e^{-x}.$$

Інтегруючи z, дістаємо загальний розв'язок ДР другого порядку:

$$y' = C_1 e^{-x},\ y = \int C_1 e^{-x} dx + C_2,\ y = -C_1 e^{-x} + C_2.$$

3. ДР не містить явно аргументу, тобто ДР виду $F(y, y', y'') = 0$. Порядок ДР можна знизити, якщо за нову незалежну змінну візьмемо y, а за нову залежну змінну – $z = y'$.

Тоді $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy}$.

Остаточно приходимо до ДР першого порядку $F\left(y, z, z\frac{dz}{dy}\right) = 0$ відносно шуканої функції z.

Приклад. Знайти загальний розв'язок ДР другого порядку $y'' + y = 0$.

Розв'язання

Узявши $y' = z$, дістанемо $y'' = z\frac{dz}{dy}$ і прийдемо до ДР першого порядку $z\frac{dz}{dy} + y = 0,\ zdz + ydy = 0,\ z^2 + y^2 = C_1^2$.

Знаходимо змінну $z = \pm\sqrt{C_1^2 - y^2}$ і приходимо до ДР першого порядку $y' = \pm\sqrt{C_1^2 - y^2}$, розв'язуючи яке, дістаємо:

$$\frac{dy}{\sqrt{C_1^2 - y^2}} = \pm dx,\ \ \arcsin\frac{y}{C_1} = \pm x + C_2,\ \ y = C_1 \sin(\pm x + C_2).$$

6.6. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Означення. Лінійними диференціальними рівняннями другого порядку з сталими коефіцієнтами називають рівняння вигляду: $y'' + py' + qy = f(x)$.

Якщо $f(x) = 0$, то рівняння буде називатися *однорідним*. Для розв'язування однорідних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з сталими коефіцієнтами складають характеристичне рівняння: $k^2 + pk + q = 0$.

1. У випадку, коли корені характеристичного рівняння різні, дійсні числа, загальний розв'язок даного рівняння має вигляд $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$.

Приклад. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' + 7y' + 12y = 0$, якщо $y(0) = 1$ і $y'(0) = -2$.

Розв'язання

Для рівняння $y'' + 7y' + 12y = 0$ складемо характеристичне $k^2 + 7k + 12 = 0$, коренями якого є числа:

$$k_1 = -3; k_2 = -4.$$

Тоді загальний розв'язок рівняння $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-4x}$.

Якщо $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-4x}$, то $y' = -3C_1 e^{-3x} - 4C_2 e^{-4x}$. Підставимо початкові умови:

$$\begin{cases} C_1 e^{-3\cdot 0} + C_2 e^{-4\cdot 0} = 1 \\ -3C_1 e^{-3\cdot 0} - 4C_2 e^{-4\cdot 0} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 3C_1 + 4C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = -1. \end{cases}$$

Частинний розв'язок рівняння матиме вигляд $y = 2e^{-3x} - e^{-4x}$.

2. У випадку, коли корені характеристичного рівняння дійсні, рівні між собою, тобто $k_1 = k_2 = k \in R$, загальний розв'язок даного рівняння має вигляд

$$y = e^{kx}(C_1 + C_2 x).$$

Приклад. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' + 6y' + 9y = 0$, якщо $y(0) = 2$ і $y'(0) = 2$.

Розв'язання

Для рівняння $y'' + 6y' + 9y = 0$ складемо характеристичне $k^2 + 6k + 9 = 0$, коренями якого є числа:

$$k_1 = k_2 = k = -3.$$

Загальний розв'язок рівняння матиме вигляд: $y = e^{-3x}(C_1 + C_2 x)$.

Якщо

$y = e^{-3x}(C_1 + C_2 x)$, то $y' = -3e^{-3x}(C_1 + C_2 x) + e^{-3x}C_2$.

Підставляємо початкові умови:

$$\begin{cases} e^{-3\cdot 0}(C_1 + C_2 \cdot 0) = 2 \\ -3e^{-3\cdot 0}(C_1 + C_2 \cdot 0) + e^{-3\cdot 0}C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ -3C_1 + C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = 8. \end{cases}$$

Тоді маємо частинний розв'язок рівняння $y = e^{-3x}(2 + 8x)$.

3. Якщо розв'язки характеристичного рівняння комплексні числа, тобто $k_1 = a + bi$ та $k_2 = a - bi$, загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд $y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$.

Приклад. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' + 2y' + 5y = 0$, якщо $y(0) = 0$ і $y'(0) = 1$.

Розв'язання

Для рівняння $y'' + 2y' + 5y = 0$ складемо характеристичне $k^2 + 2k + 5 = 0$, коренями якого є числа:

$$k_1 = -1 + 2i\,;\; k_2 = -1 - 2i.$$

Загальний розв'язок рівняння

$$y = e^{-x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right),$$

тоді

$$y' = -e^{-x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right) + e^{-x}\left(-2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x\right).$$

Підставляємо початкові умови:

$$\begin{cases} e^{-0}\left(C_1 \cos(2\cdot 0) + C_2 \sin(2\cdot 0)\right) = 0 \\ -e^{-0}\left(C_1 \cos(2\cdot 0) + C_2 \sin(2\cdot 0)\right) + e^{-0}\left(-2C_1 \sin(2\cdot 0) + 2C_2 \cos(2\cdot 0)\right) = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ -C_1 + 2C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Частинний розв'язок рівняння $y = \frac{1}{2} e^{-x} \sin 2x$.

Якщо $f(x) \neq 0$, то лінійне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами не буде однорідним і знаходження його розв'язків залежить від вигляду функції $f(x)$.

6.7. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами та спеціальною правою частиною

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку

$$y'' + py' + gy = P_n(x)e^{mx},$$

де $P_n(x)$ – многочлен n-го степеня, записується як сума двох розв'язків: загального розв'язку відповідного однорідного рівняння і частинного розв'язку неоднорідного рівняння:

$$y = Y + \overline{y}.$$

Для знаходження $\overline{y}$ використовують правила:

1. Якщо число m не є коренем характеристичного рівняння, то

$$\bar{y} = Q_n(x)e^{mx},$$

де $Q_n(x)$ – многочлен степеня n з невизначеними коефіцієнтами.

2. Якщо m збігається з одним із коренів характеристичного рівняння, то

$$\bar{y} = xQ_n(x)e^{mx};$$

3. Якщо обидва корені характеристичного рівняння рівні та збігаються з m, то

$$\bar{y} = x^2Q_n(x)e^{mx}.$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння методом невизначених коефіцієнтів

$$y'' + 5y' + 6y = 6x^2 - 10x + 2.$$

Розв'язання

Запишемо розв'язки однорідного диференціального рівняння

$$y'' + 5y' + 6y = 0,\ \kappa^2 - 5\kappa + 6 = 0,\ \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 3,$$

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}.$$

Знаходимо розв'язки неоднорідного диференціального рівняння

$\alpha = 0,\ \bar{y} = Ax^2 + Bx + C,$

$6Ax^2 + (6B - 10A)x + 6C - 5B + 2A = 6x^2 - 10x + 2,$

$$\begin{cases} 6A = 6 \\ 6B - 10A = -10 \\ 6C - 5B + 2A = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases}.$$

Отже, $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + x^2$ – загальний розв'язок.

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння методом невизначених коефіцієнтів

$$y'' - y = 2e^x.$$

Розв'язання

Запишемо розв'язки однорідного диференціального рівняння

$$y'' - y = 0,\ \kappa^2 - 1 = 0,\ \kappa_{1,2} = \pm 1,\ y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

$\bar{y} = Axe^x,\ \alpha = 1\ A = 1,$

$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + xe^x$

– загальний розв'язок.

Розділ 7. Ряди

7.1. Числові ряди. Ознаки збіжності

Означення. Нехай $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ – деяка нескінченна послідовність чисел. Вираз виду

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (7.1)$$

називається *рядом*, а самі числа $u_1, u_2, u_3, \ldots$ – членами ряду; n-ий член u_n – називається *загальним членом ряду*.

Побудуємо частинні суми ряду:

$$S_1 = u_1;$$
$$S_2 = u_1 + u_2;$$
$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3;$$
$$\ldots$$
$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n;$$
$$\ldots$$

Частинні суми ряду утворюють числову послідовність: $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$

Означення. Числовий ряд називається збіжним, якщо існує границя послідовності частинних сум ряду

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S. \qquad (7.2)$$

При цьому величина S називається сумою ряду, а число

$$r_n = S - S_n = u_{n+1} + \ldots + u_{n+k} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}$$

залишком ряду. Якщо границя S_n не існує (нескінченна), то ряд називається розбіжним.

Необхідна умова збіжності ряду. Якщо ряд збігається, то границя його загального члена прямує до 0, тобто:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+3}{10\ 000n}$.

Розв'язання

Перевіримо необхідну умову збіжності ряду, тобто знайдемо $\lim_{n\to\infty} u_n$.

$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5n+3}{10000n} = \frac{5}{10000} = \frac{1}{2000} \neq 0$. Отже, ряд розбіжний.

Сума членів нескінченної геометричної прогресії є ряд виду

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n+1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}, a \neq 0$$

із загальним членом $u_n = aq^{n-1}$.

Ряд збігається, якщо знаменник прогресії $|q| < 1$ і його сума $S = \frac{a}{1-q}$.

Ряд геометричної прогресії буде розбіжним, якщо $|q| \geq 1$.

Розглянемо ряд $\sum_{n\to\infty}^{\infty} = u_n$ з додатними членами $u_n > 0,\ u_2 > 0, \ldots,\ u_n > 0, \ldots$. Частинні суми ряду

утворюють при цьому монотонно зростаючу послідовність S_1, S_2, …, S_n, … .

Перша ознака порівняння рядів. Якщо для рядів з додатними членами:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n , \qquad (7.3)$$

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \qquad (7.4)$$

виконується умова $v_n \geq u_n$, то:

а) із збіжності ряду (7.4) випливає збіжність ряду (7.3);

б) із розбіжності ряду (7.3) випливає розбіжність ряду (7.4).

Друга ознака порівняння рядів. Якщо для рядів з додатними членами (7.3), (7.4) існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = c \quad (0 < c < +\infty)$, то ряди (7.3) і (7.4) збігаються або розбігаються одночасно.

Приклад. Дослідити за ознакою порівняння збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^n}$.

Розв'язання

Запишемо цей ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^n} = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^3} + \ldots$. Можна помітити, що починаючи з $n = 2$ виконується нерівність $\dfrac{1}{2^n} \geq \dfrac{1}{n^n}$, тобто заданий ряд можна порівняти з рядом геометричної прогресії $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, який є збіжним.

Отже, за ознакою порівняння ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^n}$ збігається.

Приклад. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n+1}$.

Розв'язання

Поставимо у відповідність заданому ряду розбіжний гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ із загальним членом $v_n=\frac{1}{n}$. За ознакою порівняння матимемо: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$, і тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$ розбігається.

Ознака Даламбера. Якщо для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ з додатними членами $u_n>0$ існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$, тоді:

при $l<1$ ряд збігається;

при $l>1$ ряд розбігається;

при $l=1$ питання про збіжність ряду залишається відкритим.

Радикальна ознака Коші. Якщо для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ з додатними членами $u_n>0$ існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$, тоді:

при $l<1$ ряд збігається;

при $l>1$ ряд розбігається;

при $l=1$ питання про збіжність ряду ознака не вирішує.

Інтегральна ознака Коші. Якщо функція $f(x)$ неперервна, додатна і монотонно спадає при $x\geq 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ і невласний інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}f(x)dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

Приклад. Дослідити за ознакою Даламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$.

Розв'язання

Загальний член ряду $u_n = \frac{1}{(2n+1)!}$, а $u_{n+1} = \frac{1}{(2(n+1)+1)!} = \frac{1}{(2n+3)!}$.

Знайдемо $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!}{(2n+1)!(2n+2)(2n+3)} = 0 < 1$.

Отже, за ознакою Даламбера ряд збіжний.

Приклад. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^n}$.

Розв'язання

Скористаємось радикальною ознакою Коші.

Знайдемо

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(2n+1)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0 < 1,$$

отже, за ознакою Коші ряд збіжний.

Приклад. Дослідити збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}.$$

Розв'язання

Загальний член ряду

$$u_n = \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)} = f(n) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}.$$

Невласний інтеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{d(\ln(x+1))}{\ln^2(x+1)} = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{\ln(x+1)} \Big| \begin{matrix} b \\ 1 \end{matrix} \right) =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(b+1)} \right) = \frac{1}{\ln 2}$$

буде збіжним, отже, за інтегральною ознакою Коші ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ збіжний.

7.2. Знакозмінні ряди. Ознака Лейбніца

Означення. Ряд називається *знакозмінним*, якщо він містить нескінченне число як додатних, так і від'ємних членів.

Означення. Знакозмінний ряд називається абсолютно збіжним, якщо збігається ряд із абсолютних величин членів знакозмінного ряду.

Означення. Знакозмінний ряд називається *умовно збіжним*, якщо цей ряд збігається, а ряд із абсолютних величин його членів розбігається.

Означення. Ряд, кожний член якого відрізняється знаком від попереднього, називається знакопочережним. Цей ряд має вигляд:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n .$$

Загальний член ряду $u_n = (-1)^{n-1} a_n$, де $a_n > 0$.

Ознака Лейбніца. Якщо члени знакопочережного ряду спадають за абсолютною величиною і границя абсолютної величини загального члена ряду дорівнює нулю, то ряд збігається.

Наслідок 1. Якщо знакопочережний ряд збігається, то його сума за абсолютною величиною не перевищує першого члена ряду, тобто $|S| < |a_1|$.

Наслідок 2. Якщо при обчисленні суми збіжного знакопочережного ряду обмежитись тільки першими *n* членами, а всі інші відкинути, то похибка за абсолютною величиною не перевищить першого із відкинутих членів, тобто $|r_n| < |a_{n+1}|$.

Наслідок 3. Якщо для ряду не виконується умова теореми Лейбніца $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд розбігається (не виконується необхідна умова збіжності).

Приклад. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}\cdot\frac{n}{2^n}$.

Розв'язання

Якщо записати цей ряд в розгорнутому вигляді, то помітимо, що цей ряд знакозмінний. Складемо ряд із абсолютних величин членів ряду: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}\cdot\frac{n}{2^n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$.

Дослідимо збіжність одержаного таким чином знакододатного ряду за допомогою ознаки Даламбера. Матимемо:

$$|u_n|=\frac{n}{2^n};\quad |u_{n+1}|=\frac{n+1}{2^{n+1}};\quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot n}=\frac{1}{2}<1.$$

За ознакою Даламбера ряд, складений із абсолютних величин членів заданого ряду, збігається, отже, абсолютно збігається початковий ряд.

Приклад. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$.

Розв'язання

Маємо знакопочережний ряд.

Ряд, що складається із абсолютних величин членів заданого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, – розбіжний, як ряд Діріхле з $p=\frac{1}{2}<1$.

Через те, що початковий ряд знакопочережний, то для його дослідження можна застосувати ознаку Лейбніца:

1. $\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n+1}}\Rightarrow|u_n|>|u_{n+1}|$;
2. $\lim_{n\to\infty}|u_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$.

Умови теореми Лейбніца для заданого ряду виконуються, отже, ряд збігається, але збігається умовно.

Приклад. Скільки членів збіжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{5^n}$ треба залишити, щоб обчислити його суму з точністю до 0,001?

Розв'язання

Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{5^n}$ – знакопочережний і збіжний, скористаємось наслідком 3. Обчислимо за абсолютною величиною члени ряду, поки не знайдемо такий член, який буде за модулем меншим за 0,001:

$|u_1|=\frac{1}{5}$; $|u_2|=\frac{2}{25}$; $|u_3|=\frac{3}{125}$; $|u_4|=\frac{4}{625}$;

$|u_5|=\frac{1}{625}>0{,}001$; $|u_6|=\frac{6}{625\cdot 25}<0{,}001$.

Отже, достатньо залишити п'ять членів ряду.

7.3. Поняття функціонального ряду. Область збіжності та інтервал збіжності

Означення. Ряд

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots, \qquad (7.5)$$

де членами ряду $u_n(x)$ є функції від аргументу x, називається *функціональним рядом*. При $x=x_0$ ряд перетворюється на числовий

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots.$$

Якщо числовий ряд збігається (розбігається), то кажуть, що при $x=x_0$ збігається (розбігається) і функціональний ряд.

Означення. Усі значення аргументу x, при яких функціональний ряд збіжний, називаються *областю збіжності функціонального ряду*.

В області збіжності існує границя частинних сум функціонального ряду

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x), \quad S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x),$$

де функція $S(x)$ – сума ряду.

Ряд $r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots$ називається *залишком ряду*.

В області збіжності функціонального ряду виконується формула $S(x) = S_n(x) + r_n(x)$, де $\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$.

У загальному випадку, при дослідженні на збіжність функціонального ряду використовується та сама методика, що і для знакозмінного ряду.

7.4. Поняття степеневого ряду

Означення. Функціональний ряд

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (7.6)$$

називається *степеневим рядом*, його загальний член $u_n(x) = a_n x^n$; числа $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ називаються *коефіцієнтами степеневого ряду*.

Розглядають і більш загальний вигляд степеневого ряду

$$a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots + a_n(x-c)^n + \ldots . \qquad (7.7)$$

Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд (7.6):

1) збігається при $x = x_0$, то він абсолютно збігається для будь-якого x, що задовольняє нерівність $|x| < |x_0|$;

2) якщо ряд (7.6) розбігається при $x = x_1$, то він розбігається при всіх x, що задовольняють нерівність $|x| > |x_1|$.

Означення. Інтервалом збіжності степеневого ряду називається такий інтервал, у всіх внутрішніх точках якого ряд збігається абсолютно, а для всіх

точок $|x| > R$ ряд є розбіжним; при цьому число $R > 0$ називається радіусом збіжності степеневого ряду.

Для узагальненого степеневого ряду (7.7) інтервал збіжності $(c - R;\ c + R)$ має центр симетрії в точці $x = c$.

Зауваження. На кінцях інтервалу збіжності, тобто в точках $x = -R,\ x = R$ ряд може як збігатись, так і розбігатись. Це питання потребує подальшого дослідження в кожному випадку.

Радіус збіжності обчислюється за формулою

$$R = \frac{1}{l} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|. \qquad (7.8)$$

Аналогічно, використовуючи радикальну ознаку Коші, можна дістати формулу для радіуса збіжності, степеневого ряду у вигляді:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}. \qquad (7.9)$$

Приклад.

Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n} = \frac{\sqrt{1}}{x-2} + \frac{\sqrt{2}}{(x-2)^2} + \frac{\sqrt{3}}{(x-2)^3} + \ldots + \frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n} + \ldots.$$

Розв'язання

Побудуємо ряд із абсолютних величин членів даного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{|x-2|^n}$. Цей ряд буде знакододатний. Отже, застосуємо до нього ознаку Даламбера, маємо

$$|u_n(x)| = \frac{\sqrt{n}}{|x-2|^2};\ |u_{n+1}(x)| = \frac{\sqrt{n}+1}{|x-2|^{n+1}};\ \lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x-2|} \sqrt{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{|x-2|}.$$

За ознакою Даламбера ряд буде збігатись, якщо

$$\frac{1}{|x-2|}<1 \Leftrightarrow |x-2|>1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x-2>1 \\ x-2<-1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x>3 \\ x<1 \end{bmatrix},$$

і розбігатись, якщо

$$\frac{1}{|x-2|}>1 \Leftrightarrow |x-2|<1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2<1 \\ x-2>-1 \end{cases} \Leftrightarrow 1<x<3.$$

Залишається дослідити ряд на збіжність у точках $x = 1$ і $x = 3$. При $x = 1$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}$, а при $x = 3$ – ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}$. Ці ряди розбігаються, оскільки для них не виконується необхідна умова збіжності. Таким чином, область збіжності функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}$ буде $x \in (-\infty; 1)\cup(3; +\infty)$. У цій області ряд збігається абсолютно.

Приклад. Знайти інтервал і радіус збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{3^n+7^n}$.

Розв'язання

Коефіцієнт степеневого ряду $\frac{2^n}{3^n+7^n}$. За формулою (7.8) маємо:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n(3^{n+1}+7^{n+1})}{2^{n+1}(3^n+7^n)} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{3\left(\frac{3}{7}\right)^n+7}{\left(\frac{3}{7}\right)^n+1} = \frac{7}{2}.$$

Тоді інтервал збіжності буде $\left(-\frac{7}{2};\ \frac{7}{2}\right)$.

7.5. Ряди Тейлора та Макларена
Зображення функцій степеневими рядами

Формули, що подають функцію $f(x)$ у вигляді степеневих рядів, мають вигляд:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots, \quad (7.10)$$

$$f(x)=f(c)+\frac{f'(c)}{1!}(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(c)(x-c)^n}{n!}+\ldots. (7.11)$$

Кажуть, що ряд Маклорена (7.10 дає розвинення функції в ряд поблизу точки $x=0$, а ряд Тейлора (7.11) – поблизу точки $x=c$.

Достатня умова розвинення функції в ряд Маклорена. Якщо на проміжку $[-R; R]$ похідні будь-якого порядку для функції $f(x)$ обмежені одним і тим самим числом $|f^{(n)}(x)| \le M$, то на інтервалі $(-R; R)$ функція $f(x)$ може бути розвинена в ряд Маклорена.

Ряд Маклорена для деяких елементарних функцій

$$\begin{cases} e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \\ \sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^{(-1)^n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots \\ \cos=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots \; n=0,\,1,\,2,\ldots \end{cases}$$

Область збіжності $(-\infty;+\infty)$.

$$\left[(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots\right.$$

Інтервал збіжності (–1; 1).

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$$

Область збіжності (–1; 1).

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

Область збіжності [–1; 1].

Приклад.

Розвинути в ряд за степенями x функцію $f(x) = 2^x$.

Розв'язання

Знайдемо значення функції та її похідних при $x = 0$:

$f(x) = 2^x$, $f(0) = 2^0 = 1$,

$f'(x) = 2^x \ln 2$, $f'(0) = \ln 2$,

$f''(x) = 2^x (\ln 2)^2$, $f''(0) = (\ln 2)^2$,

… …

$f^n(x) = 2^x (\ln 2)^n$, $f^n(0) = \ln^n 2$,

… …

Оскільки $0 < \ln 2 < 1$, то для будь-якого фіксованого x маємо $\left|f^{(n)}(x)\right| = 2^x \ln^n 2 < 2^x$, тобто достатня умова розвинення функції $f(x) = 2^x$ у ряд Маклорена виконується і ряд Маклорена для неї $2^x = 1 + x\ln 2 + \frac{x^2 \ln^2 2}{2!} + \ldots + \frac{x^n \ln^n 2}{n!} + \ldots$ буде абсолютно збіжним для $x \in (-\infty; +\infty)$.

Приклад. Розвинути в ряд Маклорена функцію $f(x) = \sin^2 x$ і знайти область збіжності ряду.

Розв'язання

Перетворимо функцію так: $f(x) = \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.

Скористаємось формулою розвинення в ряд Маклорена функції $\cos x$, тоді дістанемо:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{(2x)^2}{2\cdot 2!} - \frac{(2x)^4}{2\cdot 4!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{(2x)^{2n}}{2\cdot(2n)!} + \ldots =$$

$$= \frac{2}{2!}x - \frac{2^3}{4!}x^4 + \ldots + (-1)^{n+1}\cdot\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

Область збіжності даного ряду для $f(x) = \sin^2 x$ буде така ж, як і для $\cos x$, тобто $x \in (-\infty;\ +\infty)$.

Розвинення функцій у степеневі ряди використовується для наближеного обчислення значень функцій, визначених інтегралів, наближеного розв'язування рівнянь і т. ін. При цьому в ряді Маклорена чи Тейлора для даної функції залишають кілька перших членів, а решту відкидають. Похибка при наближених обчисленнях являє собою суму відкинутих членів ряду – залишок ряду. Для оцінки похибки, якщо ряд знакосталий, залишок ряду порівнюють із рядом нескінченно спадної геометричної прогресії. Якщо ряд знакопочережний, то за наслідком теореми Лейбніца похибка за абсолютною величиною не перевищує першого із відкинутих членів ряду.

На практиці часто доводиться мати справу з періодичними процесами, що описуються кусково-гладкими функціями. Такі функції подають не степеневими, а тригонометричними рядами.

Означення. Функція $f(x)$ називається такою, що задовольняє *умови Діріхле* на відрізку $[a;b]$, якщо на цьому відрізку виконуються такі умови:

1. $f(x)$ має скінченне число розривів першого роду;
2. $f(x)$ має скінченне число екстремумів;

3. $f(x)=\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ для $x\in(a;b)$.

Функція $\boldsymbol{f(x)}$, що задовольняє умови Діріхле на відрізку $\boldsymbol{[-l;\,l]}$ на інтервалі $\boldsymbol{(-l;\,l)}$, може бути визначена тригонометричним рядом Фур'є:

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),}$$

де коефіцієнти Фур'є $\boldsymbol{a_n}$ та $\boldsymbol{b_n}$ обчислюються за такими формулами:

$$\boldsymbol{a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\qquad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.}$$

Зауваження. Якщо функція $f(x)$ – парна, то $b_n=0$, а якщо $f(x)$ – не парна, то $a_n=0$.

Ознака Діріхле. Якщо $\boldsymbol{f(x)}$ – періодична функція з періодом 2π задовольняє умови Діріхле на відрізку $\boldsymbol{[-\pi;\,\pi]}$, то її ряд Фур'є збіжний, а його сума в точці x_0 дорівнює:

1. $\boldsymbol{f(x_0)}$, якщо $\boldsymbol{f(x)}$ – неперервна в точці x_0;
2. $\dfrac{\boldsymbol{f(x_0+0)+f(x_0-0)}}{\boldsymbol{2}}$, якщо $\boldsymbol{x_0}$ – точка розриву для $\boldsymbol{f(x)}$.

Приклад. Обчислити з точністю до 0,001: $\sqrt[3]{9}$.

Розв'язання

Зробимо такі перетворення: $\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{8+1}=2\sqrt[3]{1+\frac{1}{8}}$.

Скористаємось рядом Маклорена для функції $(1+x)^m$, узявши $x=\frac{1}{8}$, $m=\frac{1}{3}$. Тоді дістанемо:

$$\sqrt[3]{9}=2\left(1+\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}=2(1+1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}+1+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{8}\right)^2+$$

$$+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{8}\right)^3+\ldots)=2+\frac{1}{12}-\frac{2}{3^2\cdot 64}+\frac{10}{3^4\cdot 512}-\ldots$$

За винятком першого члена маємо знакопочережний ряд, він буде збіжним, оскільки $\frac{1}{8}\in(-1;\,1)$. Похибка r_n за абсолютною величиною буде меншою від першого із відкинутих членів. Послідовно обчислюємо: $|r_1|<\frac{1}{12}$; $|r_2|<\frac{1}{288}$; $|r_3|=\frac{2\cdot 5}{81\cdot 512}<0{,}001$. Отже, щоб обчислити $\sqrt[3]{9}$ з точністю до 0,001, достатньо залишити три перші члени: $\sqrt[3]{9}\approx 2+\frac{1}{12}-\frac{2}{9\cdot 64}=2\frac{23}{288}\approx 2{,}0798\approx 2{,}080$.

Приклад. Розкласти функцію $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ у ряд Фур'є на проміжку $(0;\,2\pi)$.

Розв'язання

Ця функція на відрізку $[0;\,2\pi]$ задовольняє умови Діріхле, а тому ряд Фур'є на інтервалі $(0;\,2\pi)$ для неї існує. Обчислимо коефіцієнти Фур'є, узявши $l=\pi$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi - x}{2}dx = \frac{1}{2\pi}\left(\pi x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi - x}{2}\cos nxdx = \frac{1}{2\pi}(\pi - x)\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi}\sin nxdx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi - x}{2}\sin nxdx = -\frac{1}{2\pi}(\pi - x)\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi}\cos nxdx = \frac{1}{n}.$$

Отже, $f(x) = \frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},\ x \in (0;\ 2\pi).$

Розділ 8. Функції багатьох змінних
8.1. Функції багатьох змінних

Означення. Якщо кожній точці $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D$, де D – деяка множина багатовимірних точок, поставлено у відповідність деяке дійсне число $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, то кажуть, що на множині D задано *функцію багатьох дійсних змінних* f.

Записують $y = f(x)$ або $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, $(x_1, x_2, ..., x_n) \in D$.

Множина D називається *областю визначення* функції багатьох змінних.

При $n = 2$ функцію двох змінних $z = f(x, y)$, де $(x, y) \in D$, можна розглядати як функцію точок площини в тривимірному просторі з фіксованою системою координат O_{xyz}.

Графіком функції $z = f(x, y)$ є деяка поверхня, яка проектується на площину XOY в область визначення. Існують програмні пакети, що дозволяють зображати такі поверхні (рис.8.1).

Якщо $n = 3$, то маємо функцію $U = f(x, y, z)$, де x, y, z – незалежні змінні. Ця функція кожній упорядкованій

трійці чисел (x, y, z) ставить у відповідність єдине дійсне число U. Для функції $U = f(x, y, z)$ областю визначення є весь простір E_3.

Способи задання функції

Функції двох змінних можна зобразити:

– *аналітично*, наприклад: $z = x\left(y^2 + 2x\right)$,

– *таблично*,

– *графічно.*

Для графічного зображення функції двох змінних використовуємо систему координат *Oxyz* у тривимірному просторі (рис. 1).

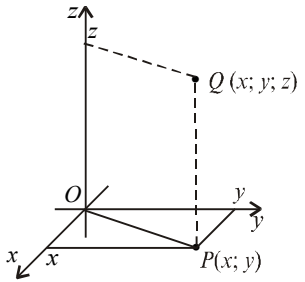


Рис. 8.1. Прямокутна система координат

Приклад. Графічне зображення функції $z = 1 - x - y$ є площина, яка проходить через точки (0; 0; 1), (0; 1; 0), (1; 0; 0) (рис. 8.2).

Графічне зображення функції $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ є півкуля (рис. 8.3).

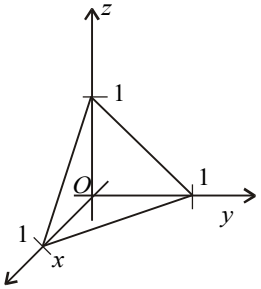


Рис. 8.2. Графік функції

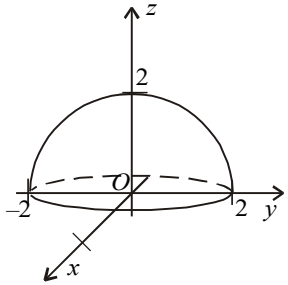


Рис. 8.3. Півкуля

Існує й інший спосіб геометричного зображення функції двох змінних – зображення за допомогою *ліній рівня*.

Означення. *Лінією рівня* називається множина всіх точок площини, в яких функція $z = f(x; y)$ набуває однакових значень. Рівняння ліній рівня записують у вигляді $f(x; y) = C$.

8.2. Частинні та повний прирости функції двох змінних

Нехай функція $z = f(x; y)$ визначена в деякому околі точки $P_0(x_0; y_0)$. Надамо незалежним змінним x та y приросту відповідно Δx та Δy так, щоб точка $P(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y)$ не виходила за межі вказаного околу. Тоді й точки $K(x_0 + \Delta x; y_0)$, $M(x_0; y_0 + \Delta y)$ також належатимуть розглядуваному околу (рис. 8.4).

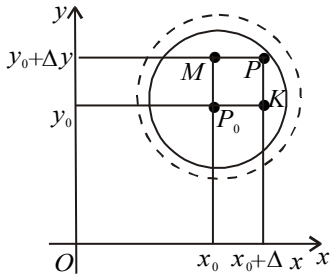


Рис. 8.4. Приріст функції

Означення. Різницю $f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y)-f(x_0; y_0)$ називають *повним приростом* функції $z=f(x;y)$ при переході від точки $(x_0; y_0)$ до точки $(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y)$ і позначають Δz.

Різницю $f(x_0+\Delta x; y_0)-f(x_0; y_0)$ називають *частинним приростом* по змінній x, а різницю $f(x_0; y_0+\Delta y)-f(x_0; y_0)$ – *частинним приростом* по змінній y функції $z=f(x;y)$; їх позначають відповідно $\Delta_x z$, $\Delta_y z$.

8.3. Диференційовність функції двох змінних

Означення. Функція $z=f(x;y)$ називається *диференційовною* у точці $(x_0; y_0)$, якщо її повний приріст Δz можна подати у вигляді:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

де A, B – числа, α, β – нескінченно малі при $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$.

Головна лінійна частина приросту функції, тобто $A\Delta x + B\Delta y$, називається *повним диференціалом функції* двох змінних $f(x;\ y)$ у точці $(x_0,\ y_0)$ і позначається dz:

$$dz = A\Delta x + B\Delta y .$$

Теорема. Якщо функція $z = f(x; y)$ диференційована в точці $(x_0; y_0)$, тоді існують границі $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$, $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}$, вони дорівнюють відповідно A і B.

Означення. Нехай функція $z = f(x; y)$ визначена в точці $(x_0; y_0)$ та деякому її околі. Якщо існує границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}\left(\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta x}\right)$, то вона називається *частинною похідною* по змінній x (по змінній y) функції $z = f(x; y)$ у точці $(x_0; y_0)$ і позначається $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, або z'_x, або $f_x(x_0; y_0)$.

Таким чином, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = Z'_x$, $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y} = Z'_y$.

Із означення частинних похідних матимемо, що вони знаходяться за тими правилами, що й похідні функції однієї змінної. Треба лише пам'ятати, що при знаходженні z'_x змінна y вважається **сталою**, а при знаходженні z'_y змінна x вважається **сталою**.

Приклад. Знайти z'_x і z'_y для функції $z = x^2y + xy^2$.

Розв'язання

Знайдемо z'_x, вважаючи $y = \text{const}$:

$$z'_x = 2xy + y^2.$$

Знайдемо z'_y, вважаючи $x = \text{const}$:

$$z'_y = x^2 + 2xy .$$

Диференціали незалежних змінних збігаються з їхніми приростами: $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. Тоді повний диференціал функції $z = f(x; y)$ можна обчислити за формулою:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \qquad (8.1)$$

Приклад. Знайти du, якщо $u = x^{y^2 z}$.

Розв'язання

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z x^{y^2 z - 1}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2 z} \ln x 2yz, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2 z} \ln x y^2.$$

Отже, $du = y^2 z x^{y^2 z - 1} dx + 2yzx^{y^2 z} \ln x dy + y^2 x^{y^2 z} \ln x dz$

8.4. Дотична площина та нормаль

Якщо функція $z = f(x; y)$ диференційована в точці $(x_0; y_0)$, то виконується рівність

$$\Delta z \approx A\Delta x + B\Delta y,$$

або

$$f(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0) \approx f'_x(x_0; y_0)\Delta x + f'_y(x_0; y_0)\Delta y.$$

Узявши в цій наближеній рівності $a = x_0 + \Delta x$, $b = y_0 + \Delta y$, дістанемо:

$$f(a; b) \approx f(x_0; y_0) + f'_x(x_0; y_0)(a - x_0) + f'_y(x_0; y_0)(b - y_0).$$

На останній формулі ґрунтується алгоритм використання диференціала для наближених обчислень.

Крім того, якщо в цій формулі взяти $a = x$, $b = y$, дістанемо

$$z = f(x; y) \approx f(x_0; y_0) + f'_y(x_0; y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0; y_0)(y - y_0).$$

Це рівняння *дотичної площини*, що проходить через точку $(x_0;\ y_0;\ z_0)$.

Якщо поверхню задано у просторі рівнянням $F(x;\ y;\ z)=0$, то рівняння дотичної площини до поверхні $F(x;\ y;\ z)=0$ в точці $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ має вигляд:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

де $A=F'_x(x_0;\ y_0;\ z_0)$, $B=F'_y(x_0;\ y_0;\ z_0)$, $C=F'_z(x_0;\ y_0;\ z_0)$.

Нормаль до поверхні в точці $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ – це пряма, що проходить через точку $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ і перпендикулярна до дотичної площини. Отже, її рівняння

$$\frac{x-x_0}{F'_x}=\frac{y-y_0}{F'_y}=\frac{z-z_0}{F'_z}.$$

8.5. Похідна за напрямом. Градієнт

Означення. Нехай функція $z=f(x;y)$ визначена в деякому околі точки $P_0(x_0;y_0)$; l – деякий промінь з початком у точці $P_0(x_0;y_0)$; $P(x;y)$ – точка на цьому промені, яка належить околу, що розглядається (рис. 8.5); Δl – довжина відрізка P_0P. Границя $\lim\limits_{\Delta l\to 0}\dfrac{f(P)-f(P_0)}{\Delta l}$, якщо вона існує, називається *похідною функції* $z=f(x;y)$ *за напрямом* $\vec{l}$ *у точці* P_0 і позначається $\dfrac{\partial z}{\partial l}$.

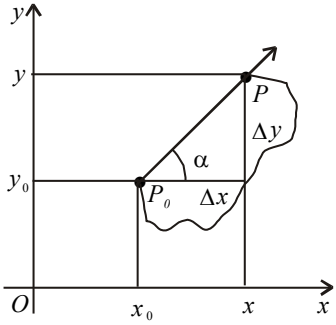


Рис. 8.5. Похідна за напрямом

Зокрема, $\frac{\partial z}{\partial x}$ є похідна функції $z = f(x;y)$ за додатним напрямом осі *Ox*, а $\frac{\partial z}{\partial y}$ – похідна функції $z = f(x;y)$ за додатним напрямом осі *Oy*.

Похідна за напрямом $\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}$ *характеризує швидкість змінювання функції* $z = f(x;y)$ у точці $P_0(x_0;y_0)$ за напрямом $\vec{l}$.

Теорема. Якщо функція $z = f(x;y)$ має в точці $P_0(x_0;y_0)$ неперервні частинні похідні, тоді в цій точці існує похідна $\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}$ за будь-яким напрямом $\vec{l} = (\cos\alpha;\ \cos\beta)$, причому

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0} \cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0} \cos\beta$$

де $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0}$ і $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0}$ – значення частинних похідних функції $z = f(x; y)$ у точці $P_0(x_0; y_0)$.

Приклад. Знайти похідну функції $u = x^2 + y^2$ у точці (1; 1) за напрямом $\vec{l} = (\cos 30^\circ;\ \cos 60^\circ)$.

Розв'язання

Знайдемо та обчислимо частинні похідні в точці (1; 1) функції $u = x^2 + y^2$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1;1)} = 2x\big|_{(1;1)} = 2, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1;1)} = 2y\big|_{(1;1)} = 2.$$

Тоді за формулою похідної за напрямом дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = 2\cos 30^\circ + 2\cos 60^\circ = 1 + \sqrt{3}.$$

Означення. Вектор з координатами $\left(\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}\right)$, який характеризує напрям максимального зростання функції $z = f(x; y)$ у точці $P_0(x_0; y_0)$, називається *градієнтом функції* $z = f(x; y)$ у цій точці і позначається $\overrightarrow{\text{grad}}\, z$ ($\vec{i}, \vec{j}$ – одиничні орти): $\overrightarrow{\text{grad}}\, z = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0} \vec{i} + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0} \vec{j}$.

Похідна за напрямом $\vec{l}$ функції $z = f(x; y)$ та градієнт пов'язані співвідношенням $\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \overrightarrow{\text{grad}}\, z \cdot \vec{l}$.

Приклад. Знайти градієнт функції

$u = 4 - x^2 - 2y^2 - xy + z^2y^2$ у точці (1; 2; –1).

Розв'язання

Знайдемо та обчислимо частинні похідні в точці (1; 2; –1):

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1;2;-1)} = \left(-2x - y\right)\Big|_{(1;2;-1)} = -4,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1;2;-1)} = \left(-4y - x + 2z^2y\right)\Big|_{(1;2;-1)} = -2,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1;2;-1)} = 2zy^2{}_{(1;2;-1)} = -8.$$

Тоді $\overrightarrow{\text{grad}}\, u = -4\vec{i} - 2\vec{j} - 8\vec{k}$.

8.6. Екстремум функції двох змінних

Означення. Точка $M_0(x_0, y_0)$ називається точкою *максимуму (мінімуму)* функції $z = f(x, y)$, якщо існує окіл точки M_0 такий, що для всіх точок цього околу виконується нерівність

$$f(x_0, y_0) > f(x, y) \quad (\ f(x_0, y_0) < f(x, y)\ ).$$

Зауважимо, що поняття максимуму чи мінімуму функції має локальний характер.

Необхідні умови екстремуму. Точки, в яких диференційована функція $z = f(x, y)$ може мати екстремум (стаціонарні точки), визначаються з системи рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0; \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Означення. Стаціонарні точки і точки, в яких частинні похідні не існують називаються *критичними точками* (точками можливого екстремуму).

Теорема (достатні умови екстремуму). Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі стаціонарної точки $(x_0; y_0)$ і має в цій точці неперервні частинні похідні другого порядку, причому

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2},\ B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y},\ C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} \quad (8.2).$$

Тоді якщо $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 > 0$, то в точці (x_0, y_0) функція $z = f(x, y)$ має екстремум (при $A < 0$ – локальний максимум, а при $A > 0$ – локальний мінімум).

При $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 < 0$ у точці (x_0, y_0) функція $z = f(x, y)$ не має екстремуму.

Якщо $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = 0$, то питання про існування екстремуму у точці (x_0, y_0) функції $z = f(x, y)$ залишається відкритим і потрібні подальші додаткові дослідження.

Зазначимо, що невиконання достатніх умов не означає, що екстремуму немає.

При знаходженні екстремумів функції багатьох змінних $y = f(x_1, ..., x_n)$ аналогічно складають систему рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 0; \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \end{cases}$ розв'язують її і, знайшовши

стаціонарні точки $\left(x_1^0,...,x_n^0\right)$, перевіряють їх на максимум та мінімум.

Приклад. Знайти екстремум функції

$z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Розв'язання

Частинні похідні даної функції дорівнюють $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y;$ $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x$. Розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0; \\ 3y^2 - 3x = 0, \end{cases}$$

знаходимо дві стаціонарні точки: $M_0(0;0)$ та $M_1(1;1)$.

Обчислюємо частинні похідні другого порядку

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x;\ B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3;\ C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y;$$

для точок M_0 та M_1 визначаємо числа A,B,C і Δ. У точці $M_0(0;0)$ маємо: $A = 6x = 6 \cdot 0 = 0;$ $B = -3;$ $C = 0y = 0 \cdot 0 = 0.$

Так як $\Delta = AC - B^2 = -9 < 0$, то екстремуму в цій точці немає.

У точці $M_1(1;1)$ маємо: $A = 6;$ $B = -3;$ $C = 6.$ Оскільки $\Delta = AC - B^2 = 27 > 0$ і $A = 6 > 0$, то в цій точці функція має екстремум. Точка $M_1(1;1)$ – точка мінімуму, причому $z(1;1) = -1$.

Література
Основна

1. Вища математика. Збірник задач за редакцією В.П. Дубовика, І.І. Юрика. Київ. «АСК», 2006. 241 с.

2. Вища математика. Підручник за редакцією Шинкарика М.Ш. Тернопіль. Вид-во Карп'юка. 2003. 480 с.

3. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз. Частина 1. Київ. «Либідь». 1993. 320 с.

4. Бохонов Ю.Є. Математичний аналіз. Диференціальне числення функцій однієї змінної. Навч. посібн. для студ. спеціальності 122 «Комп'ютерні науки». Київ. КПІ ім. Ігоря Сікорського. 2021. 162 с.

5. Томусяк А.А., Трохименко В.С. Математичний аналіз. Посібник для випускників фізико-математичних факультетів педагогічних університетів та інститутів. Вінниця. 1999. 489 с.

6. Шевченко Р.Л., Мельниченко О.П., Непочатенко В.А. Вища математика. Навчально-методичний посібник. Біла Церква. 2015. 302 с.

7. Клепко В. Ю., Голець В.Л. Вища математика в прикладах та задачах. Київ «Центр учбової літератури». 2009. 594 с.

8. Шкіль. М.І. Математичний аналіз: підручн. у 2-х ч. Київ. Вища школа. 2005. 447 с.

9. Дубовик В.П. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. зак. 4-те вид. Київ. Ігнатекс-Україна. 2013. 648 с.

10. Вища математика. Збірник задач: навч. посіб. / В.П. Дубовик, І.І. Юрик, І.П. Вовкодав, В.І. Дев'ятко, Р.К. Клименко, ВВ. Крочук, М. А. Мартиненко. Київ. А.С.К.. 2011. 480 с.

11. Хом'юк В.В., Хом'юк І.В. Вища математика: навч. посіб.; Вінниця, ВНТУ, 2017 .Ч. 2. 151 с.

12. Руденко І.Б., Чернобай О.Б. Вища та прикладна математика : навч. посіб.; Ун-т держ. фіск. служби України. Ірпінь, 2017. 373 с.

13. Ржевський С.В. Вища математика: інтегральне числення: навч. посіб. для студ. ВНЗ. Київський міжнародний ун-т. К. КиМУ. 2008. 312 с.

14. Кахута Н.Д. Вища математика: практикум. Київ: Ун-т економіки та права «КРОК», 2017. Ч. 1: Вектори і координати. Похідна та її застосування. Інтеграл і його застосування. Диференціальні рівняння. Елементи теорії ймовірностей. 2017. 95 с.

15. Дисковський, О.А., Косиченко О.О., Рибальченко Л.В. Вища математика Навч. посіб. Дніпро: Дніпропетр. держ. ун-т внутр. справ. 2019. 107 с.

16. Вища та прикладна математика в економічних прикладах та задачах: практикум. Навч. посіб. О.К. Щетініна та ін. Київ Київ. нац. торг.-екон. ун-т. 2017 .Ч. 1. 2017. 243 с.

17. Гусак Л.П., Гулівата І.О. Вища та прикладна математика. Практикум. Вінниця. ВТЕІ КНТЕУ, 2018.176 с.

18. Вища математика. Основні прийоми інтегрування : метод. вказівки до вивч. дисципліни для студ. напряму підготов. 6.030502 «Економічна кібернетика». Уклад. В.О. Капустян, В.О. Васільєва. відп. ред. В.О. Капустян. Київ. НТУУ «КПІ». 2009. 38 с.

19. Губаль Г.М. Вища математика: навч. посіб. для студентів ВНЗ; Луцьк. РВВ Луц. НТУ. 2015. 512 с.

20. Брушковський О.Л., Дубчак І.В. Вища математика. Навч. посіб. для студ. І курсу заоч. форми навч. напрямів підготов. «Економіка підприємства»,

«Облік і аудит», «Фінанси і кредит» Нац. ун-т вод. госп-ва та природокористування. Рівне. НУВГП. 2010. 144 с.

21. Веселовська О.В., Вовк М.І., Гошко Л.В. Вища математика: елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії, диференціальне числення функції однієї змінної. Навч. посіб. Львів. Вид-во Львів. політехніки. 2016. 253 с.

22. Дубчак В.М., Пришляк В.М., Новицька Л.І. Вища математика в прикладах та задачах. Навч. посіб. Вінниця. ВНАУ, 2018. 254 с.

23. Дубчак В.М., Новицька Л.І., Дячинська. Вища математика. Приклади та задачі: навч. посіб. Вінниця. ВНАУ. 2021. 365 с.

24. Ковальчук Б.В., Шіпка Й.Г. Основи математичного аналізу Ч. 1. Львів. Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2010. 370 с.

Додаткова

25. Abbott, Stephen (2015). Understanding Analysis. Undergraduate Texts in Mathematics (вид. 2). New York: Springer.

26. Rudin, Walter (1976). Principles of Mathematical Analysis. International Series in Pure & Applied Mathematics (вид. 3). McGraw–Hill

ДОДАТКИ

Додаток А

Криві другого порядку

Еліпс

Еліпсом називають множину всіх точок площини, сума відстаней яких від двох даних точок цієї площини, які називаються фокусами, є величина стала і більша від відстані між фокусами.

Нехай (рис. 1) $F_1M + F_2M = 2a \quad (a > 0)$.

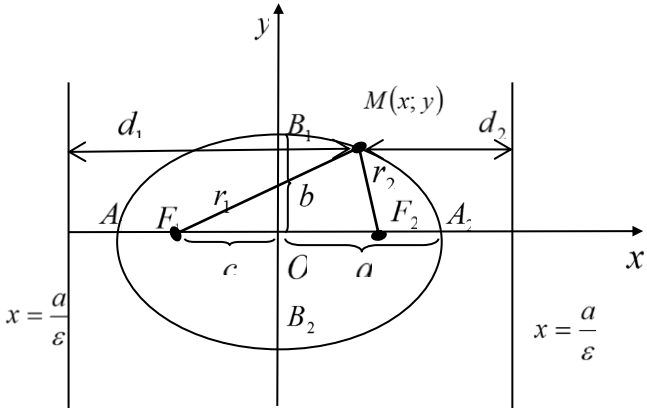


Рис. 1. Еліпс

Точки F_1 і F_2 називаються *фокусами* еліпса, а відстань F_1F_2 – *міжфокусною відстанню;* вона позначається через $2c$:

$$F_1F_2 = 2c\,.$$

Якщо взяти пряму F_1F_2 (рис. 1) за вісь абсцис і середину O відрізка F_1F_2 – за початок прямокутної декартової системи координат, то одержимо канонічне (найпростіше) рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Параметри a і b називаються *півосями еліпса*. Якщо $a > b$, тоді відрізок A_1A_2 між точками перетину еліпса з віссю x – *велика вісь еліпса*, відрізок B_1B_2 між точками перетину еліпса з віссю y – *мала вісь еліпса*; в цьому разі фокуси F_1, F_2 знаходяться на осі OX на відстані

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

від центра.

Відношення $\frac{F_1F_2}{A_1A_2}$ міжфокусної відстані до великої осі, тобто величина $\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$ називається *ексцентриситетом еліпса***.**

Відстані від точки $M(x, y)$ еліпса до його фокусів (*фокальні радіуси-вектори)* визначаються за формулами: $r_1 = a - \varepsilon x \quad r_2 = a + \varepsilon x$.

Якщо в рівнянні $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $a < b$, тоді фокуси еліпса знаходяться на осі OY . Отже, $c = \sqrt{b^2 - a^2}$, $\varepsilon = \frac{c}{b}$.

Властивості еліпса, заданого канонічним рівнянням ($a > b$):

- еліпс симетричний відносно осей координат і початку $O(0,0)$;
- координати фокусів $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$;
- еліпс – обмежена крива.

Прямі $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ називаються директрисами еліпса.

Відношення фокальних радіусів довільної точки еліпса до відстаней цієї точки від відповідних директрис є величина стала і дорівнює ексцентриситету еліпса

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon .$$

Гіпербола

Гіперболою називається множина всіх точок площини, модуль різниці відстаней яких від двох даних точок цієї площини, що називаються фокусами, є величина стала і менша відстані між фокусами.

Позначимо через F_1 і F_2 фокуси гіперболи, відстань між ними – через $2c$, а модуль різниці відстаней від довільної точки гіперболи до фокусів – через $2a$. Точка $M(x, y)$ площини лежить на гіперболі тоді і лише тоді, коли

$$| F_1M - F_2M | = 2a , \quad (0 < 2a < F_1F_2) .$$

Якщо M ближче до фокуса F_2, ніж до фокуса F_1, то точки M утворюють одну вітку гіперболи, для якої $F_1M - F_2M = 2a$ (рис. 2 права вітка). Ті точки, для яких $F_2M - F_1M = 2a,$ утворюють другу вітку (рис. 2 ліва вітка). Середина відрізка F_1F_2 – точка O називається *центром* гіперболи.

Канонічне (найпростіше) рівняння гіперболи дістаємо у випадку, якщо приймаємо пряму F_1F_2 за вісь абсцис і середину F_1 відрізка F_1F_2 – за початок координат. Тоді

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

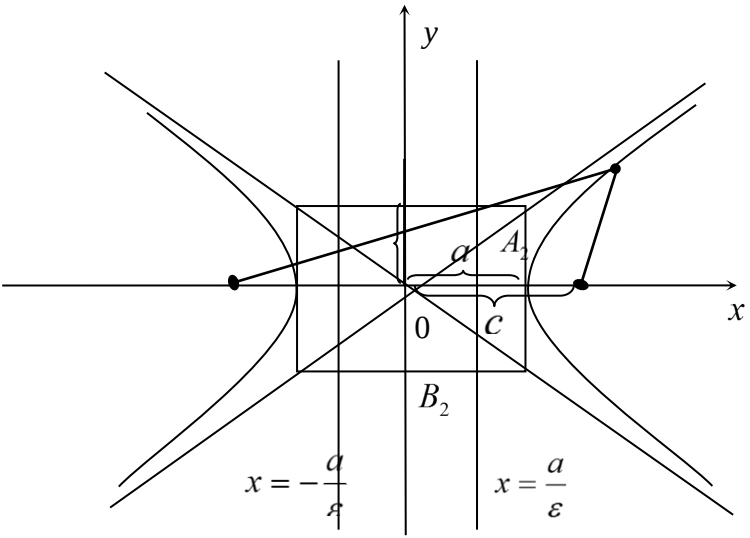


Рис.2. Гіпербола

Канонічне (найпростіше) рівняння гіперболи дістаємо у випадку, якщо приймаємо пряму F_1F_2 за вісь абсцис і середину F_1 відрізка F_1F_2 – за початок координат. Тоді

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Гіпербола перетинає вісь OX у точках $A_1(a;0), A(-a;0)$ – *вершинах гіперболи,* і не перетинає ось OY. Відрізок $A_1A_2 = 2a$ називається *дійсною віссю* гіперболи. Гіпербола має також уявну вісь, яка проходить через її центр, але не перетинає її. На уявній осі прийнято відкладати від центра відрізки $B_1O = OB_2 = b$. Параметр a називається *дійсною* піввіссю, b – *уявною* піввіссю. Параметр $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ є відстанню від фокуса до центра. Відношення

$\frac{F_1F_2}{A_1A_2} = \frac{c}{a}$ міжфокусної відстані до дійсної осі називається *ексцентриситетом* гіперболи і позначається літерою ε:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1.$$

Прямі $y = \pm\frac{b}{a}x$ називаються *асимптотами* гіперболи. Асимптотою деякої кривої називається пряма, відстань до якої від точки, що рухається по нескінченній кривій, прямує до нуля.

Відстань від точки $M(x, y)$ гіперболи до її фокусів (*фокальні радіуси-вектори*) визначаються за формулами:

$$r_1 = |\varepsilon x - a|; \quad r_2 = |\varepsilon x + a|.$$

Гіпербола, в якій $a = b$, називається *рівнобічною*, її рівняння: $x^2 - y^2 = a^2$, а рівняння асимптот: $y = \pm x$.

Дві гіперболи називаються *спряженими*, якщо вони мають спільний центр O і спільні осі, але дійсна вісь однієї з них є уявною віссю іншої. Якщо $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ є рівнянням однієї із спряжених гіпербол, тоді інша подається рівнянням $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$. Спряжені гіперболи мають спільні асимптоти.

Властивості гіперболи, заданої канонічним рівнянням (2):

- гіпербола є симетричною відносно осей координат;
- координати фокусів: $F_1(-c,0), F_2(c,0)$;

- гіпербола – необмежена крива.

Прямі $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$, де a – дійсна піввісь гіперболи, а ε – її ексцентриситет, називаються *директрисами гіперболи*. Директриси гіперболи мають ту саму властивість, що й директриси еліпса.

Парабола

Параболою називається множина всіх точок площини, кожна з яких знаходиться на однаковій відстані від даної точки, що називається *фокусом*, і від даної прямої, яка називається *директрисою* і не проходить через фокус.

Відстань від фокуса до директриси p називається *параметром* параболи.

Канонічне рівняння параболи, симетричної відносно осі OX (рис. 3): $y^2 = 2px;$ канонічне рівняння параболи, симетричної відносно осі OY: $x^2 = 2py.$

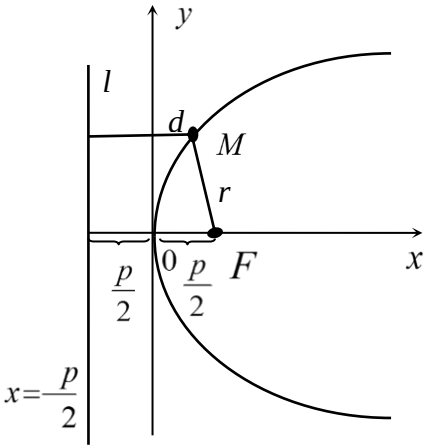


Рис. 3. Парабола

З рис. 3 видно, що парабола $y^2 = 2px$ має фокус $F(\frac{p}{2};0)$ і директрису $x = -\frac{p}{2}$; фокальний радіус-вектор точки *M* на ній $r = x + \frac{p}{2}$.

Приклад. Скласти рівняння параболи, що має фокус $F = (0;-3)$ і проходить через початок координат, знаючи, що її віссю є вісь *OY*.

Розв'язання. Оскільки фокус знаходиться у нижній півплощині, то й парабола, що міститься у нижній півплощині, симетрична відносно осі *OY*. Її рівняння $x^2 = -2py$. Фокус має координати $F\left(0;-\frac{p}{2}\right)$. За умовою $-\frac{p}{2} = -3 \Longrightarrow p=6$. Отже, рівняння параболи $x^2 = -12y$.

Додаток Б

Тести

1. Які із зазначених функцій парні?
а) $y = x^4 - 2x^2$;
б) $y = 2^x$;
в) $y = x - x^3$;
г) $y = \sin x - \cos x$.
2. Які із зазначених функцій непарні?
а) $y = x^4 - 2x^2$;
б) $y = 2^x$;
в) $y = x - x^3$;
г) $y = \sin x - \cos x$.
3. Які із зазначених функцій не є ні парними, ні непарними?
а) $y = x^4 - 2x^2$;
б) $y = 2^x$;
в) $y = x - x^3$;
г) $y = \sin x - \cos x$.
4. Визначити, яка із заданих функцій непарна:
а) $y = x^2\sqrt[3]{x} + 2\sin x$;
б) $y = 2^x + 2^{-x}$;
в) немає правильної відповіді;
г) $y = x^2 + 5x$.
5. Визначити, яка із заданих функцій парна:
а) $y = x^2\sqrt[3]{x} + 2\sin x$;
б)
$y = 2^x + 2^{-x}$; в) немає правильної відповіді;
г) $y = x^2 + 5x$.
6. Границя функції $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 + 1}$ дорівнює:
а) 1;
б) -1;
в) 1/2;

г) 2.

7. Границя функції $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x\sin x}{x^2}$ дорівнює:

а) 0;
б) 3;
в) 1/3;
г) -1.

8. Границя функції $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{1-\cos 3x}$ дорівнює:

а) 5/3;
б) –5/3;
в) 25/9;
г) -25/9.

9. Границя функції $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x}{3x}$ дорівнює:

а) 5/3;
б) –5/3;
в) 1;
г) 0.

10. Границя сталої дорівнює:

а) ∞;
б) 0;
в) сталій;
г) не існує.

11. Границя функції $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{2x}$ дорівнює:

а) 0;
б) -1;
в) 7/2;
г) немає правильної відповіді.

12. Границя функції $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x+1}{2x^3+7x+5}$ дорівнює:

а) 0;
б) 2;

в) 1/2;
г) немає правильної відповіді.

12. Границя $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,6x}{2x}$ дорівнює:

а) 6;
б) 2;
в) 3;
г) 1.

14. Похідна функції $y=\cos^3 x$ дорівнює:

а) $-3\cos^2 x\cdot\sin x$;

б) $3\sin^2\cos x$;

в) $\dfrac{\cos^4 x}{4}$;

г) $\dfrac{\cos^2 x}{3}$.

15. Похідна функції $y=tg^5 x$ дорівнює:

а) $5tg^4 x$;

б) $\dfrac{tg^6 x}{6}$;

в) $\dfrac{tg^4 x}{4}$;

г) $5tg^4 x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

16. Похідна функції $y=\sin(2x+3)$ дорівнює:

а) $y=\cos(2x+3)+C$;

б) $y=-2\cos(2x+3)$;

в) $y=3\cos(2x+3)$;

г) $y=2\cos(2x+3)$.

17. Диференціал функції $y=\operatorname{arctg}x$ дорівнює:

а) $dy=(\operatorname{arctg}x)dx$;

б) $dy = \left(\text{arctg}\, x\right)'$;

в) $dy = \dfrac{dx}{1+x^2}$;

г) $dy = \dfrac{1}{1+x^2}$.

18. Похідна функції $y = e^{-3x}$ дорівнює:

а) $\dfrac{e^{-3x+1}}{-3x+1}$;

б) $\dfrac{e^{-3^{x-1}}}{-3x-1}$;

в) $-3e^{-3x}$;

г) $\dfrac{e^{-3x}}{-3}$.

19. Похідна функції $y = \arcsin 3x$ дорівнює:

а) $3\arccos x$;

б) $\dfrac{3}{\sqrt{1-(3x)^2}}$;

в) $3\arcsin x$;

г) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

20. Похідна функції $y = arctg^2 x$ дорівнює:

а) $\dfrac{2arctg\ x}{1+x^2}$;

б) $\dfrac{arctg^3 x}{3}$;

в) $\dfrac{2}{1+x^2}$;

г) $2\,arctg\, x$.

21. Похідна функції $y = \ln(5x+1)$ дорівнює:

а) $\frac{1}{x+1}$;

б) $\frac{5}{x+1}$;

в) $\frac{5}{5x+1}$;

г) $\frac{5\ln^2(5x+1)}{2}$.

22. Похідна функції $y = ctg(4x+1)$ дорівнює:

а) $-\frac{4}{\sin^2(4x+1)}$;

б) $-\frac{4}{\cos^2(4x+1)}$;

в) $\frac{1}{\sin^2(4x+1)}$;

г) $-\frac{4}{\sin^2(x+1)}$.

23. Похідна функції $y = \cos(\ln x)$ дорівнює:

а) $\frac{\cos^2(\ln x)}{2}$;

б) $-\frac{\sin(\ln x)}{x}$;

в) $\sin(\ln x)$;

г) $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

24. Точка $x_1 = 1$ для функції $y = x^2 - 2x$ є точкою:

а) максимуму;
б) мінімуму;
в) перегину;
г) розриву.

25. Функції будуть первісними для функції $f(x)=3e^{3x}$:

а) $F_1(x)=e^x$;

б) $F_2(x)=e^{x+3}$;

в) $F_3(x)=e^{3x}$;

г) $F_4(x)=\frac{1}{3}e^{3x}+c$;

д) $F_5(x)=\left(e^x\right)^3+10$.

26. Методом підстановки можна проінтегрувати функції:

а) $f_1(x)=x^2\sin x$;

б) $f_2(x)=xe^{-x^2}$;

в) $f_3(x)=\sin x\cdot\cos^3 x$;

г) $f_4(x)=x\,\mathrm{arctg}x$.

27. Методом інтегрування частинами інтегруються функції:

а) $f_1(x)=xe^{2x^2}$;

б) $f_2(x)=x^2\cdot\sin 5x$;

в) $f_3(x)=\sqrt{x}\ln(x+1)$;

г) $f_4(x)=\cos^5 x$;

д) $f_5(x)=\sin x\cos^2 x$.

28. Формула Ньютона-Лейбніца має вигляд:

а) $\int\limits_a^b f(x)dx=F(a)-F(b)$;

б) $\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$;

в) $\int\limits_a^b f(x)dx=F(x)+c$;

г) $\int\limits_a^b f(x)dx=F(a)-F(b)$;

д) $\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)+C$.

29. Формула для обчислення об'єму тіла, одержаного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями: $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$, має вигляд:

а) $V = \int_a^b f^3(x)dx$;

б) $V = \pi\int_a^b f(x)dx$;

в) $V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$;

г) $V = \int_a^b f^2(x)dx$.

30. Які функції будуть первісними для функції $f(x) = \cos x$?

а) $F_1(x) = \sin x + 2$;

б) $F_2(x) = 3\sin\frac{x}{3} + 3$;

в) $F_1(x) = \sin x + C$;

г) $F_3(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.

31. Які з підстановок:

а) $\sin x = t$;

б) $\cos x = t$;

в) $\operatorname{tg} x = t$;

г) $\operatorname{ctg} x = t$;

д) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$;

можна застосувати при інтегруванні функції $f_1(x) = \frac{\sin x + \cos x}{1 + \sin x}$?

32. Які з підстановок:

а) $\sin x = t$;

б) $\cos x = t$;

в) $\operatorname{tg} x = t$;

г) $\operatorname{ctg} x = t$;

д) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$

можна застосувати при інтегруванні функції

$f_2(x) = \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}$?

33. Які з підстановок:

а) $\sin x = t$;

б) $\cos x = t$;

в) $\operatorname{tg} x = t$;

г) $\operatorname{ctg} x = t$;

д) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$

можна застосувати при інтегруванні функції

$f_3(x) = \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$?

34. Яку з підстановок можна використати при інтегруванні

функції $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$:

а) $\sqrt{x^2 - 1} = t$;

б) $x = \sin t$;

в) $x = \frac{1}{\sin t}$;

г) $x = \operatorname{tg} t$;

д) $x = \cos t$;

е) $x = \frac{1}{\cos t}$?

35. Які з формул:

а) $\int_a^b \sum_{i=1}^n f_i(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_a^b f_i(x)dx$;

б) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_a^b \frac{dx}{f(x)}$;

в) $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$ при $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ a > b \end{cases}$;

г) $\int\limits_a^b 0 \cdot f(x)dx = 0\int\limits_a^b f(x)dx$;

д) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx$

відбивають властивості визначеного інтеграла?

36. Які з функцій:

а) $F_1(x) = -\ln|\cos x|$,

б) $F_2(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)\right|$,

в) $F_3(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right|$,

г) $F_4(x) = \frac{1}{2}\ln\left(1+\operatorname{ctg}^2 x\right)+\ln|\operatorname{tg} x|$

не будуть первісними для функції $f(x) = \operatorname{tg} x$?

37. Інтеграл $\int \frac{1}{\sin^2(3x+1)}dx$ дорівнює:

а) $ctg(3x+1)+C$;

б) $tg(3x+1)+C$;

в) $-3ctg(3x+1)+C$;

г) $-\frac{1}{3}ctg(3x+1)+C$.

38. Інтеграл $\int \sqrt{1+x}dx$ дорівнює:

а) $\frac{1}{2\sqrt{1+x}}+C$;

б) $\frac{(1+x)^{3/2}}{3/2}+C$;

в) $\frac{1}{2}\sqrt{1+x}+C$;

г) $\frac{(1+x)^{2/3}}{2/3}+C$.

39. Інтеграл $\int \sin^4 x \cdot \cos x\, dx$ дорівнює:

а) $\frac{\sin^5 x}{5}+C$;

б) $\frac{\cos^5 x}{5}+C$;

в) $4\sin^3 x+C$;

г) $4\cos^3 x+C$.

40. Інтеграл $\int tg^3 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}dx$ дорівнює:

а) $\frac{tg^4 x}{4}+C$;

б) $3tg^2 x+C$;

в) $\frac{1}{3}tg^4 x+C$;

г) $\frac{tg^2 x}{2}+C$.

41. Інтеграл $\int \frac{1}{x^2}dx$ дорівнює:

а) $-\frac{1}{x}+C$;

б) $\frac{x^{-3}}{-3}+C$;

в) $\ln^2 x+C$;

г) $\frac{x^3}{3}+C$.

42. Інтеграл $\int \cos(1-2x)dx$ дорівнює:

а) $2\sin(1-x)+C$;

б) $-4\sin(1-2x)+C$;

в) $-\frac{1}{2}\sin(1-2x)+C$;

г) $\frac{1}{4}\sin(1-2x)+C$.

43. Інтеграл $\int \sin(2x-3)dx$ дорівнює:

а) $-\frac{1}{2}\cos(2x-3)+C$;

б) $2\cos(2x-3)+C$;

в) $\frac{1}{4}\sin^2(2x-3)+C$;

г) $2\cos(x-3)+C$.

44. Інтеграл $\int \frac{1}{3x+5}dx$ дорівнює:

а) $\frac{(3x+5)^{-2}}{-2}+C$;

б) $\frac{1}{3}\ln(3x+5)+C$;

в) $3\ln(3x+5)+C$;

г) $arctg\frac{5}{3}x+C$.

45. Інтеграл $\int e^{-5x}\,dx$ дорівнює:

а) $-\frac{e^{-5x}}{5}+C$;

б) $\frac{e^{-5x+1}}{-5x+1}+C$;

в) $\frac{e^{-5x-1}}{-5x-1}+C$;

г) $-5e^{-5x}+C$.

46. Означений інтеграл дорівнює $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$:

а) $\frac{1}{4}$;

б) $\frac{\pi}{6}$;

в) 4π;

г) $\frac{\pi}{4}$.

47. Означений інтеграл дорівнює $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4} \right) dx$:

а) $\frac{21}{8}$;

б) $\frac{3}{8}$;

в) 4;

г) $4\frac{1}{16}$.

48. Означений інтеграл дорівнює $\int_1^3 x^3 dx$:

а) 10;
б) 20;
в) 30;
г) 40.

49. Означений інтеграл дорівнює $\int_1^4 \sqrt{x} dx$:

а) $\frac{14}{3}$;

б) $\frac{7}{2}$;

в) $\frac{3}{14}$;

г) 5.

50. Означений інтеграл дорівнює $\int_0^3 e^{\frac{x}{3}} dx$:

а) $3e$;
б) $1+e$;
в) $3e-3$;
г) 3.

51. Означений інтеграл дорівнює $\int_{-1}^{2} x^2 dx$:

а) 3;
б) 6;
в) 9;
г) -5.

52. Означений інтеграл дорівнює $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$:

а) 1;
б) $\frac{1}{2}$;
в) $-\frac{3}{2}$;
г) $\frac{2}{3}$.

53. Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку є:

а) $y' = \frac{x+y}{x}$;
б) $y' - y = e^x$;
в) $xydx + (x+1)dy = 0$;
г) $y'' - y = 0.$

54. Загальним розв'язком диференціального рівняння $y' - y = e^x$ є:

а) $y = e^x(C + x)$;

б) $y = C + x$;

в) $y = Ce^x$;

г) $y = e^x x$.

55. Корені характеристичного рівняння $k^2 + 4k + 13 = 0$ $k_1 = -2 + 3i,\ k_2 = -2 - 3i.$ Тоді загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' + 4y' + 13y = 0$ має вигляд:

а) $y = C(e^{-2x} + e^{3x})$;

б) $y = C_1(e^{-2x}\sin 3x + e^{-2x}\cos 3x)$;

в) $y = e^{-2x}(C_1\sin 3x + C_2\cos 3x)$;

г) $y = e^{2x}(C_1\sin 3x + C_2\cos 3x)$.

56. Загальним розв'язом диференціального рівняння $\frac{1}{x}dx + \frac{1}{y}dy = 0$ є $y = \frac{1}{x}e^C$. Частинний розв'язок ДР, що задовольняє початкову умову $y(1) = 1$, має вигляд:

а) $y = 1$;

б) $y = \frac{1}{x}$;

в) $y = \frac{1}{x}e$;

г) $y = e$.

57. Характеристичне рівняння для диференціального рівняння $y'' - 3y' + 2y = 0$ має вигляд:

а) $k^2 - 3k + 2 = 0$;

б) $k^2 - 3k = 0$;

в) $k - 3 = 0$;

г) $k^2 + 2 = 0$.

58. Рівнянням з відокремлюваними змінними є:

а) $xydx+(x+1)dy=0$;

б) $y'-y=e^x$;

в) $y'=\dfrac{x+y}{x}$;

г) $y''-y=0$.

59. Загальним розв'язком диференціального рівняння $xy'-y=x$ є:

а) $y=x(C+\ln x)$;

б) $y=x\ln x$;

в) $y=xC$;

г) $y=C+\ln x$.

60. Однорідним рівнянням є:

а) $y'=\dfrac{x+y}{x}$;

б) $y'-y=e^x$;

в) $xydx+(x+1)dy=0$;

г) $y''-y=0.$

61. Визначити тип диференціального рівняння $x\sin x+2y=2xy'$:

а) однорідне;
б) у повних диференціалах;
в) лінійне;
г) з відокремлюваними змінними.

62. Яка функція є розв'язком диференціального рівняння $y'+y=2x+1$ є:

а) $y=x$;

б) $y=e^x$;

в) $y=2x-1$;

г) $y=x^2+1.$

63. Визначити тип диференціального рівняння $x^2 + xy + y^2 = x^2 y'$:

а) однорідне;

б) у повних диференціалах;

в) лінійне;

г) з відокремлюваними змінними.

64. Загальний розв'язок диференціального рівняння $y' + 2xy = 2x \quad y = Ce^{-x^2} + 1$. Частинний розв'язок ДР, що задовольняє початкову умову $y(0) = 2$, має вигляд:

а) $y = e^{-x^2} + 1$;

б) $y = 2e^{-x^2} + 1$;

в) $y = 1$;

г) $y = e^{-x^2}$.

65. Корені характеристичного рівняння $k^2 - 5k + 6 = 0$ $k_1 = 2,\ k_2 = 3.$ Тоді загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 5y' + 6y = 0$ має вигляд

а) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$;

б) $y = C_1 (e^{2x} + e^{3x})$;

в) $y = C_2 (e^{2x} + e^{3x})$;

г) $y = e^{2x} (C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x)$.

66. Загальний інтеграл диференціального рівняння $(1 + x^2)dy + ydx = 0$ дорівнює $\ln|y| + arctgx = C$. Частинний розв'язок ДР, що задовольняє початкову умову $y(0) = 1$, має вигляд:

а) $y = e^{-arctgx}$;

б) $y = e^{-arctgx} + 1$;

в) $y = 1$;

г) $y = 0$.

67. Який із розв'язків рівняння $y''' - y'' = 0$ буде загальним?
а) $y = x + 5$;
б) $y = c_1x + c_2$;
в) $y = c_1 + c_2x + c_3e^x$;
г) $y = ce^x$;
д) $y = c_1x + 2e^x + c_2$.
68. Який із розв'язків рівняння $y''' - y'' = 0$ буде частинним?
а) $y = x + 5$;
б) $y = c_1x + c_2$;
в) $y = c_1 + c_2x + c_3e^x$;
г) $y = ce^x$;
д) $y = c_1x + 2e^x + c_2$.
69. Які з наведених рівнянь будуть з відокремлюваними змінними?
а) $xy + y^2 = \left(2x^2 + xy\right)y'$;
б) $x + xy + y'\left(y + xy\right) = 0$;
в) $y' + xy' = xy^3$;
г) $yy' = 2y - 3$;
д) $y'\cos x - y\sin x = \sin 2x$;
е) $y'x^2 + ye^x = \cos x$.
70. Які з наведених рівнянь будуть лінійними?
а) $xy + y^2 = \left(2x^2 + xy\right)y'$;
б) $x + xy + y'\left(y + xy\right) = 0$;
в) $y' + xy' = xy^3$;
г) $yy' = 2y - 3$;
д) $y'\cos x - y\sin x = \sin 2x$;
е) $y'x^2 + ye^x = \cos x$.
71. За означенням, ряд буде збіжним, якщо:
а) границя його загального члена дорівнює нулю;
б) існує границя його частинних сум;
в) послідовність частинних сум ряду обмежена;

г) немає правильної відповіді.

72. Які з поданих далі умов, будуть лише необхідними для збіжності ряду:

а) обмеженість будь-якого члена ряду;

б) границя загального члена ряду дорівнює нулю;

в) границя частинних сум ряду існує;

г) обмеженість частинних сум ряду.

73. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{q^n}$ – збіжний при:

а) $q>1$; б) $|q|>1$; в) $q<1$; г) $|q|<1$.

74. Вибрати правильні з тверджень:

а) якщо ряд збіжний, то границя його частинних сум існує;

б) якщо ряд збіжний, то границя загального члена дорівнює нулю;

в) якщо границя загального члена дорівнює нулю, то ряд збіжний;

г) якщо границя загального члена ряду дорівнює одиниці, то про збіжність ряду нічого сказати не можна.

75. Який з перерахованих рядів є рядом Маклорена?

а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}f^{(n)}(x)\cdot(x-x_0)^n$;

б) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)\cdot x^n$;

в) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x)\cdot x^{n+1}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(x)\cdot(x-x_0)$.

76. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}$ є:

а) збіжним;
б) розбіжним;
в) абсолютно збіжним;
г) умовно збіжним.

77. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}$ є:

а) збіжним;
б) розбіжним;
в) абсолютно збіжним;
г) умовно збіжним.

78. Чому дорівнює коєфіцієнт a_n ряду Фур'є $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$?

а) $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$;

б) $a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cdot\sin x\,dx$;

в) $a_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)dx$;

г) $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\cos nx\,dx$.

79. Розклад в степеневий ряд Маклорена функції $f(x)=e^x$ має вигляд:

а) $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2x+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2x+1}}{(2n+1)!}$;

б) $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$;

в) $1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$;

г) $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.

80. Дослідивши за радикальною ознакою Коші ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{n+1}\right)^n$, можна зробити висновок, що він є:

а) збіжним;
б) розбіжним;
в) абсолютно збіжним;
г) умовно збіжним.

81. Щоб дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ на збіжність, застосовуючи ознаку Даламбера, необхідно знайти:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

82. При яких значеннях α узагальнений гармонічний ряд (ряд Діріхлє) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ буде розбіжним?

а) $-1<\alpha\le 0$;
б) $\alpha>1$;

в) $\alpha < 0$

г) $\alpha \le 1$.

83. Ряд $1-1-1+1+1-1-1+...+\left(-1\right)^{\frac{n\cdot(n-1)}{2}}+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n\cdot(n-1)}{2}}$ є:

а) знакозмінним;

б) степеневим;

в) гармонічним;

г) знакододатнім.

84. Який з наведених рядів є знакозмінним рядом?

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+3}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{n}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3+2)^{2n}}{n^2\cdot 5^n}$.

85. Розклад в степеневий ряд Маклорена функції $f(x)=\ln(1+x)$ має вигляд:

а) $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+\frac{(-1)^n x^{2x+1}}{(2n+1)!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2x+1}}{(2n+1)!}$;

б) $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$;

в) $1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$;

г) $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.

86. Степеневий ряд буде збіжним при $x = -3$, якщо цей ряд:

а) умовно збіжний при $x = 4$;

б) абсолютно збіжний при $x = 3$;

в) збіжний при $x = 3$;

г) немає правильної відповіді.

87. Степеневими рядами будуть:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n} \cdot n}{2^n}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+7}}{n}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin nx$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln x)^n$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!}$.

88. Які з умов достатні для розкладу функції в степеневий ряд на інтервалі збіжності?

а) границя залишку ряду дорівнює нулю;

б) обмеженість усіх похідних функції $f(x)$;

в) існування усіх похідних функції $f(x)$;

г) немає правильної відповіді.

89. Які з умов необхідні для розкладу функції в степеневий ряд на інтервалі збіжності?

а) границя залишку ряду дорівнює нулю;

б) обмеженість усіх похідних функції $f(x)$;

в) існування усіх похідних функції $f(x)$;

г) немає правильної відповіді.

90. Які з наведених далі умов (або їх комбінації) будуть достатніми для збіжності знакопочережного ряду?

а) послідовність модулів членів ряду монотонно спадає;

б) границя загального члена дорівнює нулю;

в) ряд із абсолютних величин членів ряду збіжний;

г) обмеженість послідовності частинних сум.

91. Які з наведених далі умов (або їх комбінації) будуть необхідними для збіжності знакопочережного ряду?

а) послідовність модулів членів ряду монотонно спадає;

б) границя загального члена дорівнює нулю;

в) ряд із абсолютних величин членів ряду збіжний;

г) обмеженість послідовності частинних сум.

92. Які з властивостей зумовлюють абсолютну збіжність знакозмінного ряду?

а) монотонне спадання абсолютних величин членів ряду;

б) компенсація додатних і від'ємних членів;

в) рівність границі загального члена ряду нулю;

г) немає правильної відповіді.

93. Які з властивостей зумовлюють умовну збіжність знакозмінного ряду?

а) монотонне спадання абсолютних величин членів ряду;

б) компенсація додатних і від'ємних членів;

в) рівність границі загального члена ряду нулю;

г) немає правильної відповіді.

94. Частинна похідна по y від функції $z = 5xy - 3y$ дорівнює:

а) $5x$;

б) -3;

в) $5y - 3$;

г) $5x - 3$.

95. Частинна похідна по у функції $z = 3xy + 2y$ дорівнює:

а) 2;

б) $3y$;

в) $3y + 2$;

г) $3x + 2$.

96. Градієнтом функції *U(x,y)* буде:

а) вектор;

б) скаляр;

в) матриця;

г) обернена до *U* функція.

97. Частинна похідна по y від функції $z = \frac{x}{y}$ дорівнює:

а) $z = -\frac{y}{x^2}$;

б) $z = -\frac{1}{xy}$;

в) $z = \frac{1}{x}$;

г) $z = \frac{1}{y}$.

98. Частинна похідна по x від функції $z = \frac{x}{y}$ дорівнює:

а) $z = -\frac{y}{x^2}$;

б) $z = -\frac{1}{xy}$;

в) $z = \frac{1}{x}$;

г) $z = \frac{1}{y}$.

99. Частинна похідна по у функції $z = \cos(xy)$ дорівнює:

а) $\cos(xy)$;

б) $-x\sin(xy)$;

в) $y\cos(xy)$;

г) $-xy\cos(xy)$.

100. Задана функція $W(x, y, z) = x - y$. Частинна похідна W по y дорівнює:

а) 2;

б) 1;

в) 0;

г) -1.

101. Задана функція $W(x, y, z) = x + y$. Частинна похідна W по z дорівнює:

а) 2 ;
б) 1;
в) 0;
г) не існує.

Навчальне видання

Дубчак Віктор Миколайович
Новицька Людмила Іванівна

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

Навчальний посібник

Підписано до друку _._.2022. Формат 30х42/4.
Папір офсетний. Ризографія. Авт. арк. 11,76.
Тираж 30 прим. Зам.174712.

Віддруковано ПП «Едельвейс і К»
21100, м. Вінниця, вул. 600-річчя, 17
Тел. +38(0432) 550-333

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до
Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів
видавничої продукції
ДК №