МІНІСТЕРСТВО НАУКИ ТА ОСВІТИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

ВИЩА МАТЕМАТИКА.

ЧАСТИНА 1.

ЗБІРНИК ЗАДАЧ

Київ
КПІ імені Ігоря Сікорського
2024

УДК 512(510)
В 41

Автори: *Журавська Ганна Вікторівна*, канд. фіз.-мат наук, доцент
Карпалюк Тамара Олексіївна, канд. фіз.-мат наук, доцент
Копась Інна Миколаївна, канд. фіз.-мат наук, доцент
Рева Надія Віталіївна, канд. фіз.-мат наук, доцент
Самойленко Тетяна Анатоліївна, канд. фіз.-мат. наук
*Степаненко Наталія Вікторівна***,** *канд. фіз.-мат. наук, доцент*

Рецензенти *Пелехата О.Б,* канд. фіз.-мат наук, доцент кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей КПІ ім. Ігоря Сікорського

Відповідальний
редактор *Поліщук О.Б.,* канд. фіз.-мат наук, доцент

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол №2 від 08.11.2024 р.)
за поданням вченої ради Фізико-математичного факультету
(протокол №11 від 02.10.2024 р.)

В 41 **Вища математика. Частина 1. Збірник задач** [Електронний ресурс]: навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю 131 Прикладна механіка / Г. В. Журавська та ін. ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. Електрон. текст. дані (1 файл: 5,54 Мб). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. – 182 с.

УДК 512(510)

Реєстр. № НП 24/25-083. Обсяг 12,6 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056
https://kpi.ua
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

Зміст

Вступ

Збірник задач призначено для студентів першого курсу спеціальності «Прикладна механіка». Завдання в збірнику системно розташовані відповідно до розділів і тем силабусу дисципліни «Вища математика 1. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної».

На початку кожної теми надано короткий довідковий матеріал (означення, теореми та формули). До всіх завдань на обчислення подаються відповіді у кінці збірника. Частина відповідей ілюструється графіками та малюнками. Для зручності користування збірником, після завдань до кожної теми є посилання на відповіді, звідки також можна повернутися до завдань за допомогою посилання після відповідей.

Розділ 1. Елементи лінійної алгебри.

Тема 1.1. Матриці та визначники.

Матриця це прямокутна таблиця чисел, символів або виразів – ***елементів матриці***, розташованих у рядках і стовпцях

$$A_{n\times m}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2m} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Кожен член у матриці називається ***елементом***. Кожен елемент позначають як a_{ij}, де i – ***номер рядка***, а j – ***номер стовпця***, до якого належить елемент. Кількість рядків і стовпців матриці називається ***розмірністю матриці***.

Дві матриці є рівними, якщо вони мають однакову розмірність і рівні елементи, які займають однакові місця в обох матрицях.

Типи матриць

$A_{n\times n}$ – квадратна матриця;

$N=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ – нульова матриця;

$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – одинична матриця;

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ – діагональна матриця;

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ – нижня трикутна матриця;

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ – верхня трикутна матриця.

Визначники

Визначник (детермінант) матриці – це спеціальна скалярна величина, яка обчислюється для кожної квадратної матриці і позначається

$$|A|,\ \Delta A \text{ або } \det A.$$

Визначник першого порядку

$$|A| = |a_{11}| = a_{11}.$$

Визначник другого порядку

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

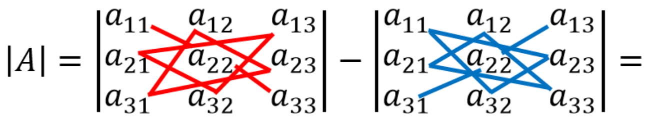
Визначник третього порядку

Загальне правило (Розвинення Лапласа – розклад за елементами рядка/стовпця визначника).

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{31}a_{22}.$$

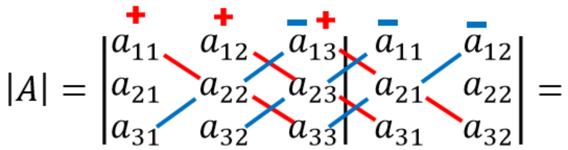
Правило трикутників.



$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Правило Саррюса.



$$|A| = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}\Bigg| =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

1.1.1. Обчислити визначники за означенням:

1) $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$;

2) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 20 \end{vmatrix}$;

3) $\Delta = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$;

4) $\Delta = \begin{vmatrix} -10 & 6 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$;

5) $\Delta=\begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2 & a \end{vmatrix}$;

6) $\Delta=\begin{vmatrix} a+1 & b-c \\ a^2+a & ab-ac \end{vmatrix}$;

7) $\Delta=\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 3-\sqrt{5} \\ 3+\sqrt{5} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$;

8) $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}$;

9) $\Delta=\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$;

10) $\Delta=\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$;

11) $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$;

12) $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$;

13) $\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -4 & 1 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix}$;

14) $\Delta=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$;

15) $\Delta=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix}$;

16) $\Delta=\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$;

17) $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$;

18) $\Delta=\begin{vmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{vmatrix}$;

19) $\Delta=\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}$;

20) $\Delta=\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$;

21) $\Delta=\begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha & \operatorname{tg}\alpha \\ \cos\alpha & 0 & \cos\alpha \\ \operatorname{tg}\alpha & \cos\alpha & 0 \end{vmatrix}$;

22) $\Delta=\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & x^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}$.

1.1.2. Розв’язати рівняння та нерівності:

1) $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0$;

2) $\begin{vmatrix} 2x-1 & x+1 \\ x+2 & x-1 \end{vmatrix} = -6$;

3) $\begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}$;

4) $\begin{vmatrix} \sin x & 1 \\ 1 & 2\cos x \end{vmatrix} = 0$;

5) $\begin{vmatrix} \cos 4x & \sin x \\ \sin 4x & \cos x \end{vmatrix} = 0$;

6) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$;

7) $\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$;

8) $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 & x+5 \\ x+6 & x+7 & x+8 \end{vmatrix} = 0$;

9) $\begin{vmatrix} 3x-3 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} > 0$;

10) $\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} < 14$;

11) $\begin{vmatrix} x & 3x \\ 1 & x \end{vmatrix} < -2;$ 12) $\begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ 3 & \frac{1}{x+2} \end{vmatrix} \geq 1;$

13) $\begin{vmatrix} 1 & x+3 \\ 4 & x \end{vmatrix} < 0;$ 14) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1;$

15) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0;$ 16) $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -3x^2 & 5 & x \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} > 0.$

1.1.3. Довести рівності, користуючись властивостями визначників:

1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 11 \end{vmatrix};$

2) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{vmatrix};$

3) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 + a_1x + b_1y \\ a_2 & b_2 & c_2 + a_2x + b_2y \\ a_3 & b_3 & c_3 + a_3x + b_3y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$

4) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos 2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix} = 0;$

5) $\begin{vmatrix} 1-x & 1+x & 2 \\ 2+x & 2-x & 4 \\ 3-x & 3+x & 2 \end{vmatrix} = 4x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix};$

6) $\begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1x + b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2x + b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3x + b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$

1.1.4. У визначниках знайти доповнюючі мінори та алгебраїчні доповнення:

1) всіх елементів другого рядка $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix};$

2) всіх елементів другого стовпчика $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 6 \\ 7 & 0 & 4 \end{vmatrix};$

3) всіх елементів третього стовпчика $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$

1.1.5. Обчислити визначники розкладом за довільним рядком чи стовпцем:

1) $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$;

2) $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$;

3) $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}$;

4) $\Delta=\begin{vmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 3 & 6 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}$;

5) $\Delta=\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}$;

6) $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$;

7) $\Delta=\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & 1 & 8 \end{vmatrix}$;

8) $\Delta=\begin{vmatrix} 5 & 7 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$;

9) $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$;

10) $\Delta=\begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$;

11) $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$;

12) $\Delta=\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

1.1.6. Звести визначники до найбільш зручного вигляду та обчислити їх:

1) $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 7 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;

2) $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$;

3) $\Delta=\begin{vmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$;

4) $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$;

5) $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 6 \\ -5 & 3 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & -6 & 0 & 3 \end{vmatrix}$;

6) $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & -4 \\ 3 & -8 & -1 & 7 \\ 2 & -6 & -6 & 2 \end{vmatrix}$;

7) $\Delta=\begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}$;

8) $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$;

9) $\Delta=\begin{vmatrix}0 & 2 & 3 & -3 & 4\\ 0 & 2 & 1 & -1 & 2\\ 2 & -1 & 3 & 4 & 0\\ 0 & 6 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 0 & 5\end{vmatrix}$; 10) $\Delta=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6\end{vmatrix}$;

11) $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$; 12) $\Delta=\begin{vmatrix}x & y & z\\ x^2 & y^2 & z^2\\ x^3 & y^3 & z^3\end{vmatrix}$.

1.1.7. Розв’язати рівняння, не обчислюючи визначника

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & -3 & x & 4\\ 4 & 9 & x^2 & 16\\ 8 & -27 & x^3 & 64\end{vmatrix}=0\,.$$

1.1.8. Довести рівність, користуючись властивостями визначників

$$\begin{vmatrix}1 & a & a^3\\ 1 & b & b^3\\ 1 & c & c^3\end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}.$$

1.1.9. Обчислити визначники:

1) $\Delta_n=\begin{vmatrix}3 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ 2 & 3 & 2 & \cdots & 2\\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 3\end{vmatrix}$; 2) $\Delta_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n\\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0\end{vmatrix}$.

1.1.10. Як зміниться визначник, якщо перший його рядок записати на місці n-того рядка, а інші зсунути вгору, не змінюючи порядку їх слідування?

1.1.11. Використовуючи властивості визначників довести, що визначник

$$\Delta=\begin{vmatrix}12 & 3 & 5 & 0\\ 21 & -6 & -2 & -3\\ 0 & 4 & 2 & 4\\ 27 & -2 & -3 & 18\end{vmatrix}\quad \text{ділиться на 30.}$$

1.1.12. Числа 185, 518, 851 діляться на 37.

Довести, що $\begin{vmatrix}1 & 8 & 5\\ 5 & 1 & 8\\ 8 & 5 & 1\end{vmatrix}$ ділиться на 37.

Дії над матрицями.

Додавання

Матриці додаються поелементно, причому операція додавання визначається на двох матрицях однакового розміру

$$A_{n\times m} + B_{n\times m} = S_{n\times m},\ s_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ 0 \le i \le n,\ 0 \le j \le m.$$

Властивості

1. Комутативність $A + B = B + A$.
2. Асоціативність $(A + B) + C = A + (B + C)$.
3. $\exists\ N,\ \ A + N = A$ (N - нульова матриця).
4. $\exists\ -A,\ \ A + (-A) = N$.

Множення на скаляр

Матриці множаться на скаляри поелементно.

$$\alpha \cdot A_{n\times m} = B_{n\times m},\ b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij},\ 0 \le i \le n,\ 0 \le j \le m.$$

Властивості

1. $1 \cdot A = A$.
2. $\alpha(\beta A) = \alpha\beta A$.
3. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
4. $\alpha(A + B) = \alpha B + \alpha A$.

Транспонування

Транспонування матриці $A_{n\times m}$– це операція перетворення рядків у стовпці і навпаки

$$A^T = {A^T}_{m\times n}$$

Множення матриць

Перемножити дві матриці можна лише тоді, коли кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої. Добутком матриць $A_{n\times m}$та $B_{m\times k}$ називається матриця $S_{n\times k}$

$$A_{n\times m} \cdot B_{m\times k} = S_{n\times k},\ s_{ij} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} \cdot b_{pj}\,,\ 0 \le i \le n,\ 0 \le j \le k.$$

Властивості

1. Операція множення матриць **НЕ КОМУТАТИВНА** $A \cdot B \neq B \cdot A$.

2. Асоціативність $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot B \cdot C$.

3. Дистрибутивність $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ або $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$.

4. $\alpha(A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B)$.

1.1.13. Обчислити суму і різницю матриць A та B, якщо:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & -6 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$.

1.1.14. Знайти лінійні комбінації:

1) $2A + 5B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & 4 & -7 \end{pmatrix}$;

2) $2A - 3B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$;

3) $A - 3B + 4E$, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

4) $-2A - 5B + C$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.1.15. Знайти $A - \lambda E$, якщо:

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -2 & -6 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$.

1.1.16. Записати матрицю, транспоновану до заданої:

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & -1 & 3 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ -7 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$;

4) $A = (3 \quad -8 \quad 0 \quad 1 \quad 7)$.

1.1.17. Показати, що матриця $C = 3A - 2B$ не зміниться при транспонуванні, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & -8 & 5 \end{pmatrix}.$$

1.1.18. Знайти добутки матриць AB та BA, якщо це можливо, і вказати їх розміри:

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

4) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$;

5) $A = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B = (2 \quad 7)$;

6) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$;

7) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

8) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$;

9) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = (2 \quad 3 \quad 4 \quad 1)$;

10) $A=\begin{pmatrix}6&4&3\\5&8&4\\2&7&2\\3&10&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$;

11) $A=\begin{pmatrix}2&1&-3\\-3&2&4\\1&-2&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&-3&0\\2&4&-2\end{pmatrix}$;

12) $A=\begin{pmatrix}a&0&0&0\\0&b&0&0\\0&0&c&0\\0&0&0&d\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\alpha&0&0&0\\0&\beta&0&0\\0&0&\gamma&0\\0&0&0&\delta\end{pmatrix}$.

1.1.19. Обчислити добутки AA^T і A^TA. Якщо різниця AA^T-A^TA визначена, знайдіть її. Якщо ні, поясніть чому

1) $A=\begin{pmatrix}5&-2&1\\3&4&2\end{pmatrix}$;

2) $A=\begin{pmatrix}2&-3\\-1&4\\-2&0\end{pmatrix}$.

1.1.20. Знайдіть значення матричного виразу $(AB)^T-B^TA^T$, якщо

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&1&4\\-1&0&3\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2&5&0\\1&-1&3\\0&2&-1\end{pmatrix}.$$

1.1.21. Знайти A^3, якщо:

1) $A=\begin{pmatrix}1&-2\\3&-4\end{pmatrix}$,

2) $A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&-3\end{pmatrix}$.

1.1.22. Знайти значення многочлена f від матриці A, якщо:

1) $f(x)=x^2-5x+3$, $A=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&3\end{pmatrix}$;

2) $f(x)=x^2-2x+2$, $A=\begin{pmatrix}-1&2\\-3&1\end{pmatrix}$;

3) $f(x)=x^2-x-3$, $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&0&2\\3&1&2\end{pmatrix}$.

Обернена матриця.

Оберненою до матриці A є матриця A^{-1} така, що

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

Алгоритм обчислення оберненої матриці.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

1. Обчислити визначник $\det A \neq 0$.

2. Обчислити алгебраїчні доповнення:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

3. Скласти матрицю з алгебраїчних доповнень та транспонувати її

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

4. Виписати обернену матрицю

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Для матриці другого порядку має місце формула

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Розв’язування матричних рівнянь

$A \cdot X = B$	$X \cdot A = B$	$A \cdot X \cdot C = B$
$X = A^{-1} \cdot B$	$X = B \cdot A^{-1}$	$X = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$

1.1.23. Знайти обернену матрицю і зробити перевірку:

1) $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

4) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$;

5) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

6) $A = \begin{pmatrix} 10 & 20 & -30 \\ 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$;

7) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

8) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

9) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 9 \\ -2 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

1.1.24. Розв’язати матричні рівняння:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$;

3) $X \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$;

4) $X \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} X \begin{pmatrix}-1 & 1/2\\ 0 & 1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$;

8) $\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix} X \begin{pmatrix}-2 & 3\\ 0 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}16 & 12\\ 10 & 5\end{pmatrix}$;

9) $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix} X = \begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 2 & -6 & 4\end{pmatrix}$;

10) $X \begin{pmatrix}3 & 0 & 7\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$;

11) $\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix} X = \begin{pmatrix}7 & 3\\ 3 & 3\\ 5 & -1\end{pmatrix}$;

12) $X \begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 5 & 2\\ 5 & 8 & -1\end{pmatrix}$.

1.1.25. Нехай $A = \begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}6 & 3\\ 5 & 2\end{pmatrix}$. Знайти визначник матриці A^2B^3.

1.1.26. Знайти A^{50}, якщо $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

Відповіді.

Тема 1.2. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Методи розв’язання.

Метод Крамера

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}.$$

Розв’язок системи можна обчислити за формулами

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta},$$

де

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\mathit{\Delta}_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Зауваження:

1. Якщо $\Delta = 0$, але $\Delta_x \neq 0,\ \Delta_y \neq 0,\ \Delta_z \neq 0$, то система не має розв’язків (несумісна).
2. Якщо $\Delta = 0$ і $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, то система має нескінченно багато розв’язків.

1.2.1. Розв’язати системи методом Крамера:

1) $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1; \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases};$

3) $\begin{cases} 5x + 2y - 4z = 4 \\ x + 3y + 4z = 3 \\ 2x + 4y + z = 1 \end{cases};$

4) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ x + 3y + 2z = -3 \\ 3x + 10y + 8z = -8 \end{cases};$

5) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 9 \\ 3x - 5y + z = -4 \\ 4x - 7y + z = 5 \end{cases};$

6) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 2x + 6y - 5z = 3; \\ 3x - 7y + z = -3 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x + y - z = 5 \\ x + z - y = -1; \\ y + z - x = 3 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + 3z = 10; \\ 5y - z = 7 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x + y + z = a \\ x - y + z = b; \\ x + y - z = c \end{cases}$ 10) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11; \\ 3x + 2y + x = 5 \end{cases}$

11) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases};$ 12) $\begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}.$

1.2.2. Знайти значення параметра a, за якого система має єдиний розв'язок

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 3 \\ -x + y = 2 \\ x + ay - z = -2 \end{cases}.$$

Матричний метод

Систему рівнянь можна представити у матричному вигляді. Для цього ліву частину системи записують у вигляді добутку головної матриці системи на матрицю невідомих та прирівнюють цей добуток до матриці правої частини. У результаті маємо:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot X = B.$$

Тоді

$$A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

1.2.3. Розв'язати системи лінійних рівнянь матричним методом:

1) $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases};$ 2) $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y + 2z = 1; \\ x - y - 2z = 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 4x + 5y + 6z = 9; \\ 7x + 8y = -6 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x - y + 5z = 19 \\ x + y - 3z = -3; \\ 2x + 4y + z = 6 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x+2y-z=-6 \\ -x+5z=12 \\ 5x-y+3z=-5 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ -2x-y+5z=2; \\ 5x+z=6 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3x+y-2z=-3 \\ 2x-3y+z=-8; \\ 5x+2y-z=-7 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 2x-3y+3z=-1 \\ 7x+3y-2z=7 \\ 4x+y+3z=-7 \end{cases}$.

Метод Гауса

Цей метод полягає в перетворенні системи рівнянь на еквівалентну систему трикутної форми. Щоб спростити обчислення, перепишіть систему у вигляді розширеної матриці, яка складається з матриці коефіцієнтів і незалежних членів (розділених прямою лінією).

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right).$$

Ми можемо перетворити цю матрицю в матрицю трикутної форми, використовуючи такі елементарні операції з рядками:

- **поміняти місцями рядки** (поміняти місцями всі елементи в рядку ***i*** та рядку ***j***);
- **помножити рядок на константу** (помножити всі елементи рядка ***i*** на константу ***b***);
- **додати рядок до іншого рядка** (замінити рядок ***i*** сумою рядка ***i*** та рядка ***j*** або сумою рядка ***i*** та рядка ***j*,** помноженого на сталу ***b***).

Нарешті нам потрібно отримати матрицю в трикутній формі.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} c_{11} & c_{12} & c_{13} & d_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & d_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & d_3 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} c_{11}x+c_{12}y+c_{13}z=d_1 \\ c_{22}y+c_{23}z=d_2 \\ c_{33}z=d_3 \end{cases}.$$

Тоді можна знайти розв’язок вихідної системи.

1.2.4. Знайти ранг матриці, користуючись елементарними перетвореннями:

1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$; 4) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

5) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 5\\ 2 & 1 & -1 & 4\\ 2 & -2 & 6 & 3\end{pmatrix}$;

6) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 6 & 8\\ 3 & 6 & 9 & 12\end{pmatrix}$;

7) $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & 7\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}$;

8) $A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$;

9) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -1\\ 5 & -3 & 1 & -7\end{pmatrix}$;

10) $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 2\\ 2 & -1 & 3 & 5\\ 1 & 10 & -6 & 1\end{pmatrix}$;

11) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ -1 & 0 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 7 & 5\\ -1 & 4 & 12 & 10\end{pmatrix}$;

12) $A=\begin{pmatrix}3 & -4 & 1 & 5 & -2\\ 2 & 1 & -3 & 0 & 4\\ 3 & 7 & -10 & -5 & 14\end{pmatrix}$;

13) $A=\begin{pmatrix}5 & -2 & 1 & 3 & 4\\ 2 & 5 & 5 & -3 & 2\\ 2 & -5 & -1 & 4 & 1\\ 6 & -4 & -2 & 5 & 5\end{pmatrix}$;

14) $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 2\\ -2 & 3 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 3\end{pmatrix}$;

15) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -4 & 2\\ 2 & -1 & 1 & 5\\ 5 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$;

16) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0\\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

1.2.5. Розв’язати системи рівнянь методом Гаусса:

1) $\begin{cases}2x+y-z=-1\\ x-y-z=1\\ 3x+y-z=0\end{cases}$;

2) $\begin{cases}4x-y+z=11\\ 2x+3y-z=3\\ x-2y+z=4\end{cases}$;

3) $\begin{cases}x-\frac{1}{3}y+2z=1\\ 3x-y+6z=3\\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{6}y+z=\frac{1}{2}\end{cases}$;

4) $\begin{cases}x-\frac{1}{2}y-3z=2\\ 2x-y-6z=4\\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{4}y-\frac{3}{2}z=5\end{cases}$;

5) $\begin{cases}x-y+2z=-1\\ -x+2y-3z=3\\ 2x-y+3z=2\end{cases}$;

6) $\begin{cases}2x+y-z=5\\ x-2y+2z=-5\\ 7x+y-z=10\end{cases}$;

7) $\begin{cases}2x-3y+z=-7\\ x+2y-3z=14\\ -x-y+5z=-18\end{cases}$;

8) $\begin{cases}x+2y+3z=-1\\ 2x-y+z=-2\\ x-3y-2z=3\end{cases}$;

9) $\begin{cases}x-2y+z+u=1\\ x-2y+z-u=-1\\ x-2y+z+3u=3\end{cases}$;

10) $\begin{cases}2x-y+z-5u=4\\ 2x+y+2z-u=1\\ 6x-y+4z-11u=6\end{cases}$;

$$11)\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y+2z=1 \\ x+y+3z=2 \\ x+3z=1 \end{cases};$$

$$12)\begin{cases} 2x_1-2x_2+x_3-x_4=-3 \\ 3x_1+2x_2-x_3-x_4=0 \\ -x_1+x_2-x_3+x_4=2 \\ x_1-3x_2+x_3+x_4=2 \end{cases};$$

$$13)\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+4x_4=-13 \\ -x_1+x_3+2x_4=-1 \\ 3x_1+4x_2+5x_3=11 \\ 5x_1+6x_2+7x_3-2x_4=19 \end{cases};$$

$$14)\begin{cases} 7x_1-5x_2-2x_3-4x_4=8 \\ -3x_1+2x_2+x_3+2x_4=-3 \\ 2x_1-x_2-x_3-2x_4=1 \\ -x_1+x_3+24x_4=1 \\ -x_2+x_3+2x_4=3 \end{cases};$$

$$15)\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3+2x_5=18 \\ 2x_1-5x_2+x_4+x_5=-7 \\ x_1-x_4+2x_5=8 \\ 2x_2+x_3+x_4-x_5=10 \\ x_1+x_2-3x_3+x_4=1 \end{cases};$$

$$16)\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=4 \\ 2x_1-x_2+3x_3-2x_4=1 \\ x_1-x_3+2x_4=6 \\ 3x_1-x_2+x_3-x_4=0 \end{cases};$$

$$17)\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+2x_4+3x_5=2 \\ 6x_1-3x_2+2x_3+4x_4+5x_5=3 \\ 6x_1-3x_2+4x_3+8x_4+13x_5=9 \\ 4x_1-2x_2+x_3+x_4+2x_5=4 \end{cases};$$

$$18)\begin{cases} -2x_1+x_2+x_3+x_4=4 \\ x_1-x_2-x_3-x_4=-3 \\ -x_1+2x_2+x_3+x_4=4 \\ 2x_1-x_3-2x_4=-1 \end{cases}.$$

1.2.6. Дослідити системи на сумісність. У випадку сумісності знайти загальний розв’язок, вказати базисні та вільні змінні:

$$1)\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4+2x_5=1 \\ 3x_1+6x_2-x_3+x_4+2x_5=7 \end{cases};$$

$$2)\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=9 \\ 3x_1-5x_2+x_3=-4 \\ 4x_1-7x_2+x_3=5 \end{cases};$$

$$3)\begin{cases} 2x_1-5x_2+3x_3+4x_4=7 \\ -3x_1+4x_2+x_3-x_4=3 \\ x_1+x_2-4x_3-3x_4=-10 \end{cases};$$

$$4)\begin{cases} 5x_1-4x_2+3x_3+6x_4=9 \\ 7x_1-5x_2+4x_3+9x_4=16 \\ x_1-2x_2+x_3=1 \end{cases};$$

$$5)\begin{cases} x_1+x_2-x_3=-4 \\ x_1+2x_2-3x_3=0 \\ -x_1-x_3=8 \end{cases};$$

$$6)\begin{cases} x_1+5x_2+4x_3=1 \\ 2x_1+10x_2+8x_3=3 \\ 3x_1+15x_2+12x_3=5 \end{cases};$$

$$7)\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-5x_4=1 \\ x_1-x_2-5x_3=2 \\ 3x_1-2x_2-2x_3-5x_4=3 \\ 7x_1-5x_2-9x_3+10x_4=8 \end{cases};$$

$$8)\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3+x_4=-9 \\ -2x_1+x_2-x_3+4x_4=-2 \\ -x_1+x_2+9x_4=-13 \\ -9x_1+4x_2-5x_3+11x_4=3 \\ -15x_1+6x_2-9x_3+9x_4=21 \end{cases}.$$

1.2.7. Знайти загальний розв’язок та фундаментальну систему розв’язків для однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

1) $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 4x+5y+6z=0; \\ 7x+8y+9z=0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_4=0 \\ x_1+3x_3+2x_4=0 \\ x_2+2x_3+x_4=0 \\ x_1-x_2+x_3+x_4=0 \end{cases}.$

1.2.8. За яких значень параметрів a, b, c система сумісна

$$\begin{cases} x+2y+3z=a \\ 4x+5y+6z=b. \\ 7x+8y+9z=c \end{cases}$$

1.2.9. Визначити, за яких значень a і b система рівнянь

$$\begin{cases} 3x-2y+z=b \\ 5x-8y+9z=3 \\ 2x+y+az=-1 \end{cases}$$

1) має єдиний розв’язок;

2) не має розв’язків;

3) має безліч розв’язків.

1.2.10. Визначити, за якого значення a система однорідних рівнянь

$$\begin{cases} 3x-2y+z=0 \\ ax-14y+15z=0 \\ x+2y-3z=0 \end{cases}$$

має ненульовий розв’язок.

1.2.11. Дослідити систему і знайти загальний розв’язок залежно від значення параметра k:

1) $\begin{cases} kx+y+z=1 \\ x+ky+z=1\ ; \\ x+y+kz=1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x_1-3x_2+2x_3+4x_4=3 \\ 4x_1-2x_2+3x_3+7x_4=1 \\ 8x_1-6x_2-x_3-5x_4=9 \\ 7x_1-3x_2+7x_3+17x_4=k \end{cases}.$

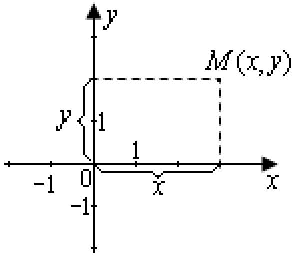
Відповіді.

Розділ 2. Елементи векторної алгебри.

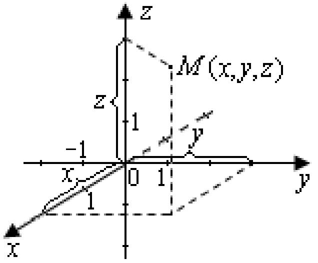
Тема 2.1. Вектори та дії над ними.

Декартові прямокутні двовимірні (тривимірні) координати однозначно визначають кожну точку на 2D площині (3D просторі) парою (трійкою) чисел, які визначають відстані до точки від двох (трьох) фіксованих перпендикулярних напрямлених ліній (осей), виміряних у однакових одиницях довжини.

Декартові 2D координати $\left(\mathbb{R}^2\right)$



Декартові 3D координати $\left(\mathbb{R}^3\right)$



Відстань між точками Aта B визначають за формулою

в $\mathbb{R}^2$: для $A(x_A, y_A)$ та $B(x_B, y_B)$

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2};$$

в $\mathbb{R}^3$: для $A(x_A, y_A, z_A)$ та $B(x_B, y_B, z_B)$

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}\,.$$

Координати точки C***, що ділить відрізок*** AB ***у відношенні*** $\lambda,\ \lambda = \frac{AC}{CB}$**:**

$$\text{в } \mathbb{R}^2\text{:}\quad x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{\lambda + 1};\quad y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{\lambda + 1};$$

$$\text{в } \mathbb{R}^3\text{:}\quad x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{\lambda + 1};\quad y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{\lambda + 1};\quad z_C = \frac{z_A + \lambda z_B}{\lambda + 1}.$$

Координати точки C ***– середини відрізка*** AB**:**

$$\text{в } \mathbb{R}^2\text{:}\quad x_C = \frac{x_A + x_B}{2};\quad y_C = \frac{y_A + y_B}{2};$$

$$\text{в } \mathbb{R}^3\text{:}\quad x_C = \frac{x_A + x_B}{2};\quad y_C = \frac{y_A + y_B}{2};\quad z_C = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

Вектори.

Впорядкована пара точок $\overrightarrow{AB}$ називається ***вектором***. Цей геометричний об'єкт має ***довжину*** (як довжина відрізка AB) та ***напрям*** (визначається початковою точкою A та кінцевою точкою B).

Вектори, які можна сумістити паралельним перенесенням, називаються ***рівними***. Множина рівних між собою векторів називається ***вільним вектором*** $(\vec{a})$, а множина вільних векторів утворює ***векторний простір***.

Вільний вектор можна задати його ***координатами або розвиненням за ортами***

$$\text{в } \mathbb{R}^2: \ \vec{a} = \{a_x, a_y\} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath};$$

$$\text{в } \mathbb{R}^3: \ \vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}.$$

Тут a_x, a_y, a_z – проекції вектора на відповідні вісі координат , а $\vec{\imath}, \ \vec{\jmath}, \ \vec{k}$ – орти цих осей (одиничні вектори, напрям кожного з яких співпадає з напрямом відповідної вісі).

Якщо відомі координати початкової та кінцевої точок (A та B), то

$$\text{в } \mathbb{R}^2\text{: для } A(x_A, y_A) \text{ та } B(x_B, y_B)$$

$$\overrightarrow{AB} = \{x_B - x_A, y_B - y_A\};$$

$$\text{в } \mathbb{R}^3\text{: для } A(x_A, y_A, z_A) \text{ та } B(x_B, y_B, z_B)$$

$$\overrightarrow{AB} = \{x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A\}.$$

Довжина вектора $\vec{a}$ обчислюється за формулою

$$\text{в } \mathbb{R}^2: |\vec{a}| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2};$$

$$\text{в } \mathbb{R}^3: |\vec{a}| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2} \, .$$

Напрям вектора $\vec{a}$ визначається кутами $\alpha, \ \beta, \ \gamma$, що утворює вектор з додатними напрямами осей координат $Ox, \ Oy, \ Oz$ відповідно. Косинуси цих кутів називаються напрямними косинусами вектора $\vec{a}$ і визначаються за формулами

$$\text{в } \mathbb{R}^2: \quad \cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \qquad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|};$$

$$\text{в } \mathbb{R}^3: \quad \cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \qquad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \qquad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|},$$

причому

$$\text{в } \mathbb{R}^2: \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1;$$

$$\text{в } \mathbb{R}^3: \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Одиничний вектор $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ називається ***ортом*** вектора $\vec{a}$. Його координати співпадають з напрямними косинусами вектора $\vec{a}$.

Лінійні операції над векторами

Множення вектора на число

$$\text{в } \mathbb{R}^2: \; k\vec{a} = \{ka_x, ka_y\} = ka_x\vec{i} + ka_y\vec{j};$$

$$\text{в } \mathbb{R}^3: \; k\vec{a} = \{ka_x, ka_y, ka_z\} = ka_x\vec{i} + ka_y\vec{j} + ka_z\vec{k}.$$

Додавання та віднімання векторів

$$\text{в } \mathbb{R}^2: \; \vec{a} \pm \vec{b} = \{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y\};$$

$$\text{в } \mathbb{R}^3: \; \vec{a} \pm \vec{b} = \{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z\}.$$

2.1.1. Обчислити $|\vec{a}|$, якщо $\vec{a} = \{2; -6; 3\}$.

2.1.2. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{BA}$, якщо $A(5; -1; 3)$, $B(-2; 1; 1)$.

2.1.3. Визначити точку N, з якою співпадає кінець вектора $\vec{a} = \{3; -4; 1\}$, якщо його початок співпадає з точкою $M(1; 2; -3)$.

2.1.4. Відомо $|\vec{a}| = 2$ і кути, які цей вектор утворює з координатними осями: $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 120°$. Обчислити проєкції вектора $\vec{a}$ на координатні осі.

2.1.5. Відомі дві координати вектора $\vec{a}$: $a_x = 3$; $a_y = -12$. Знайдіть a_z , якщо $|\vec{a}| = 13$.

2.1.6. Обчислити напрямні косинуси вектора:

1) $\vec{a} = \{12; -4; -3\}$; 2) $\vec{a} = \{-16; 15; -12\}$.

2.1.7. Чи може вектор утворювати такі кути з координатними осями?

1) $\alpha = 45°,\ \beta = 135°,\ \gamma = 60°$;

2) $\alpha = 90°,\ \beta = 150°,\ \gamma = 60°$.

2.1.8. Вектор $\vec{a}$ утворює з координатними осями OX та $OУ$ кути $\alpha = 60°$, $\beta = 120°$. Обчислити його координати за умови $|\vec{a}| = 2$.

2.1.9. За заданими векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ побудувати кожний з наступних векторів:

1) $\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{a} - \vec{b}$; 3) $\vec{b} - \vec{a}$; 4) $-\vec{a} - \vec{b}$; 5) $3\vec{a}$; 6) $-\frac{1}{2}\vec{b}$; 7) $2\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$.

2.1.10. Дано: $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 30$. Знайти $|\vec{a} + \vec{b}|$.

2.1.11. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні. Відомо, що $|\vec{a}| = 12$ та $|\vec{b}| = 5$. Знайдіть $|\vec{a} + \vec{b}|$ і $|\vec{a} - \vec{b}|$.

2.1.12. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = 60°$, причому $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 8$. Визначити $|\vec{a} + \vec{b}|$ і $|\vec{a} - \vec{b}|$.

2.1.13. Якій умові мають задовольняти вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$, щоб мали місце наступні співвідношення:

1) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$; 2) $|\vec{a} + \vec{b}| > |\vec{a} - \vec{b}|$; 3) $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a} - \vec{b}|$.

2.1.14. Якій умові мають задовольняти вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, щоб вектор $\vec{a} + \vec{b}$ ділив навпіл кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

2.1.15. Точка O є центром мас трикутника ABC. Довести, що $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 0$.

2.1.16. Дано два вектори $\vec{a} = \{3; -5; 6\}$ і $\vec{b} = \{-1; 1; 0\}$. Визначити проєкції на координатні осі наступних векторів:

1) $\vec{a} + \vec{b}$; 2) $2\vec{a} + 3\vec{b}$; 3) $\frac{1}{3}\vec{a} - \vec{b}$.

2.1.17. Дано два вектори $\vec{a} = \{2; -1; 3\}$ та $\vec{b} = \{-6; 3; -9\}$. Чи є вони колінеарними? Який з них довший?

2.1.18. Задані точки $A(-1; 5; -10)$, $B(5; -7; 8)$, $C(2; 2; -7)$ і $D(5; -4; 2)$. Перевірити колінеарність векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$; встановити, який з них довший і в скільки разів; чи будуть вони співнапрямлені чи протилежно напрямлені.

2.1.19. У точці A прикладено сили $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{AD}$. Знайти рівнодійну цих сил і її довжину, якщо $A(2; -1; 3)$, $B(1; 3; -1)$, $C(-2; 1; 3)$, $D(3; -5; 4)$.

2.1.20. Визначити, за яких значеннях параметрів α і β вектори $\vec{a} = -2\vec{\imath} + +3\vec{\jmath} + \beta\vec{k}$, $\vec{b} = \alpha\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} + 2\vec{k}$ колінеарні.

2.1.21. Перевірити, що чотири точки є вершинами трапеції $A(3;-1;2)$, $B(1;2;-1)$, $C(-1;1;-3)$, $D(3;-5;3)$.

2.1.22. Знайти орт вектора:

1) $\vec{a} = \{-2;6;-3\}$; 2) $\vec{a} = \{6;-2;-3\}$; 3) $\vec{a} = \{3;4;-12\}$.

2.1.23. Знайти одиничний вектор, колінеарний вектору $\vec{a} = \{3;4;-12\}$, який має однаковий (протилежний) з ним напрямок.

2.1.24. Має місце розклад вектора $\vec{c}$ за базисом $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$: $\vec{c} = 16\vec{\imath} - 15\vec{\jmath} + 12\vec{k}$. Знайти розклад за цим же базисом вектора $\vec{d}$, колінеарного вектору $\vec{c}$, протилежного з ним напрямку і такого що $|\vec{d}| = 75$.

2.1.25. Вершини трикутника ABC мають координати $A(1;2;3)$, $B(-1;0;4)$, $C(3;6;7)$. Знайдіть довжину медіани, проведеної до сторони AC.

2.1.26. Два вектори $\vec{a} = \{2;-3;6\}$ і $\vec{b} = \{-1;2;-2\}$ прикладені до однієї точки. Визначити координати вектора $\vec{c}$, напрямленого по бісектрисі кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ за умови, що $|\vec{c}| = 3\sqrt{42}$.

2.1.27. На площині задано два вектори $\vec{p} = \{2,-3\}$, $\vec{q} = \{1;2\}$. Знайти розклад вектора $\vec{a} = \{9;4\}$ за базисом $\vec{p}$, $\vec{q}$.

2.1.28. Дано три вектори $\vec{p} = \{3,-2;1\}$, $\vec{q} = \{-1;\ 1;-2\}$, $\vec{r} = \{2;1;-3\}$. Знайти розклад вектора $\vec{c} = \{11;-6;5\}$ за базисом $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$.

2.1.29. Дано чотири вектори $\vec{a} = \{2;1;0\}$, $\vec{b} = \{1;-1;2\}$, $\vec{c} = \{2;2;-1\}$, $\vec{d} = \{3;7;-7\}$. Знайти розклад:

1) вектора $\vec{a}$ за базисом $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$;

2) вектора $\vec{c}$ за базисом $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$.

Відповіді.

Тема 2.2. Скалярний, векторний та мішаний добутки. Основні властивості та застосування.

Скалярний добуток

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається число, яке визначається формулою

$$\text{в } \mathbb{R}^2\text{: } \vec{a}\cdot\vec{b} = (\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot cos\,\varphi = a_x b_x + a_y b_y;$$

$$\text{в } \mathbb{R}^3\text{: } \vec{a}\cdot\vec{b} = (\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot cos\,\varphi = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\ ,$$

де φ кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

Властивості	***Застосування***
1. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$; 2. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$; 3. $(k\vec{a})\cdot\vec{b} = k(\vec{a}\cdot\vec{b}),\ \ k\in\mathbb{R}$; 4. $\vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{a}^2 = \lvert\vec{a}\rvert^2 \geq 0$; 5. $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, якщо $\vec{a} = 0$ або $\vec{b} = 0$, або $\vec{a}\perp\vec{b}$.	1. Перевірка ***ортогональності*** двох векторів $\vec{a}\perp\vec{b} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$; 2. Обчислення кута між векторами $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert}$; 3. Обчислення проекції вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$ $\text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert}$.

2.2.1. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. Відомо, що $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$. Обчислити:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$;
2) $\vec{a}^2$;
3) $\vec{b}^2$;
4) $(\vec{a}+\vec{b})^2$;
5) $(\vec{a}-\vec{b})^2$;
6) $(\vec{a}-3\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})$;
7) $(2\vec{a}+3\vec{b})^2$.

2.2.2. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні, а вектор $\vec{c}$ утворює з ними кут $\frac{\pi}{3}$. Відомо, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 2$. Обчислити:

1) $(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(\vec{b}+2\vec{c})$;
2) $(\vec{a}+3\vec{c})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})$;

3) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2$;

4) $(2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c})^2$.

2.2.3. Дано одиничні вектори, що задовольняють умові $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$. Обчислити $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$.

2.2.4. Якій умові мають задовольняти вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$, щоб вектор $\vec{a}+\vec{b}$ був перпендикулярний вектору $\vec{a}-\vec{b}$.

2.2.5. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ попарно утворюють кути, кожен з яких дорівнює $60°$. Знаючи, що $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, $|\vec{c}|=3$, знайти модуль вектора $\vec{q}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

2.2.6. Дано довжини векторів: $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$. Визначити, за якого α вектори $\alpha\vec{a}+\vec{b}$ і $\alpha\vec{a}-\vec{b}$ взаємно перпендикулярні.

2.2.7. Дано вектори $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ і $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, що співпадають зі сторонами трикутника ABC. Знайти розклад за базисом $\vec{b}$, $\vec{c}$ вектора, що прикладений до вершини B цього трикутника і співпадає з його висотою BD.

2.2.8. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=\frac{\pi}{6}$. Відомо, що $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=2$. Обчислити кут між векторами $\vec{p}=2\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{q}=2\vec{a}-\vec{b}$.

2.2.9. Дано вектори $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ і $\vec{b}=-6\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$. Обчислити:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$;

2) $|\vec{a}|$;

3) $\sqrt{\vec{b}^2}$;

4) $(\vec{a}+\vec{b})^2$;

5) $(\vec{a}-\vec{b})^2$;

6) $(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$;

7) $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(4\vec{a}-\vec{b})$.

2.2.10. Відомо точки $A(-1;2;-3)$, $B(2;-1;4)$, $C(3;-1;1)$. Обчислити:

1) $(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB})\cdot(2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB})$;

2) $\sqrt{\overrightarrow{BA}^2}$;

3) $\sqrt{\overrightarrow{AC}^2}$;

4) $(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{CA}$;

5) $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA})$.

2.2.11. Дано вершини чотирикутника $A(1;-2;2)$, $B(1;4;0)$, $C(-4;1;1)$, $D(-5;-5;3)$. Довести, що його діагоналі AC і BD взаємно перпендикулярні.

2.2.12. Визначити, за якого α вектори $\vec{a} = \alpha\vec{i} - 6\vec{j} + 5\vec{k}$ і $\vec{b} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + \alpha\vec{k}$ взаємно перпендикулярні.

2.2.13. Обчислити кут між векторами $\vec{a} = \{6;-3;2\}$ і $\vec{b} = \{2;1;-2\}$.

2.2.14. Дано вершини трикутника $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$, $C(3;-2;1)$. Визначити його внутрішній кут при вершині B.

2.2.15. Дано вершини трикутника $A(3;1;4)$, $B(0;5;2)$, $C(4;3;6)$. Визначити його зовнішній кут при вершині C.

2.2.16. Який кут утворюють одиничні вектори $\vec{p}$ і $\vec{q}$, якщо вектори $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$ і $\vec{b} = 5\vec{p} - 4\vec{q}$ взаємно перпендикулярні?

2.2.17. Знайти довжину діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, якщо $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{q}| = 3$, а кут між $\vec{p}$ і $\vec{q}$ дорівнює $\frac{\pi}{4}$.

2.2.18. Вектор $\vec{x}$ колінеарний вектору $\vec{a} = \{6;-8;-7{,}5\}$ і утворює гострий кут з віссю OZ. Знаючи, що $|\vec{x}| = 50$, знайти його координати.

2.2.19. Знайти вектор $\vec{x}$, який колінеарний вектору $\vec{a} = \{2;1;-2\}$ і задовольняє умову $\vec{x} \cdot \vec{a} = 18$.

2.2.20. Вектор $\vec{x}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 18\vec{i} - 22\vec{j} - 5\vec{k}$ і утворює тупий кут з віссю OY. Знайти його координати, якщо відомо, що $|\vec{x}| = 14$.

2.2.21. Знайти вектор $\vec{x}$, знаючи, що він перпендикулярний до векторів $\vec{a} = \{3;-1;2\}$ і $\vec{b} = \{-2;1;1\}$ і задовольняє умову $\vec{x} \cdot (\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}) = 24$.

2.2.22. Дано вектори $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$ і $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Знайти вектор $\vec{x}$, якщо відомо, що він перпендикулярний до осі OZ і задовольняє умови $\vec{x} \cdot \vec{a} = 9$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = -4$.

2.2.23. Дано вектори $\vec{a} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = 4\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 4\vec{k}$. Знайти вектор $\vec{x}$, що задовольняє умови $\vec{x} \cdot \vec{a} = -1$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = -4$, $\vec{x} \cdot \vec{c} = -2$.

2.2.24. Обчислити проєкцію вектора $\vec{a} = 6\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} + 2\vec{k}$ на вісь вектора $\vec{b} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 2\vec{k}$.

2.2.25. Дано точки $A(1; -2; 2)$, $B(2; 5; 0)$, $C(7; 1; 2)$, $D(5; -3; 6)$. Обчислити проєкцію $\text{Пр}_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}$.

2.2.26. Дано вектори $\vec{a} = -3\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 8\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} + 3\vec{k}$, $\vec{c} = -4\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 4\vec{k}$. Обчислити проєкцію $\text{Пр}_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b})$.

2.2.27. Дано вектори $\vec{a} = \{2; 1;\ 2\}$, $\vec{b} = \{3; -12; -1\}$, $\vec{c} = \{0; 8; 13\}$. Обчислити проєкцію $\text{Пр}_{\vec{b}+\vec{c}}\ \vec{a}$.

2.2.28. Дано вектори $\vec{a} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = 7\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}$, $\vec{c} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 2\vec{k}$. Обчислити проєкцію $\text{Пр}_{\vec{c}}(3\vec{a} - 4\vec{b})$.

2.2.29. Обчислити проєкцію вектора $3\vec{a} - 2\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$, якщо $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 3$, а кут між $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює $\frac{2\pi}{3}$.

2.2.30. Знайти проєкцію вектора $\vec{s} = \{\sqrt{2}; -3;\ -5\}$ на вісь, що складає з координатними осями OX, OZ кути $\alpha = 45°$, $\gamma = 60°$, а з віссю OY гострий кут β.

2.2.31. Обчислити роботу, яку виконує сила $\vec{f} = \{-4; 3;\ 5\}$, коли її точка прикладання переміщується з початку в кінець вектора $\vec{s} = \{2; -1;\ 6\}$.

2.2.32. Обчислити роботу, яку виконує сила $\vec{f} = \{3; -1;\ -4\}$, коли її точка прикладання, рухаючись прямолінійно, переміщується з положення $A(-2; 5; 6)$ в положення $B(-1; 7; -3)$.

2.2.33. У точці прикладено сили $\vec{M} = \{3; -4;\ 2\}$, $\vec{N} = \{2; -3;\ -4\}$, $\vec{P} = \{1; 5; -4\}$. Обчислити, яку роботу виконує рівнодійна цих сил, коли точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, переміщується з положення $A(2; 3; -7)$ в положення $B(7; 2; -3)$.

Векторний добуток

Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який визначається наступним чином

$$\vec{a}\times\vec{b}=[\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}.$$

Властивості	***Застосування***
1. $\vec{c}\perp\vec{a}$ та $\vec{c}\perp\vec{b}$; 2. $\lvert\vec{c}\rvert=\lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert=\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\cdot\sin\varphi$, де φ кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$. 3. $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$; 4. $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$; 5. $(k\vec{a})\times\vec{b}=k(\vec{a}\times\vec{b}),\ k\in\mathbb{R}$; 6. $\vec{a}\times\vec{b}=0,$ якщо $\vec{a}=0$ або $\vec{b}=0,$ або $\vec{a}\lvert\rvert\vec{b}$; 7. $\vec{a}\times\vec{a}=0.$	1. Перевірка ***колінеарності*** двох векторів $\vec{a}\lvert\rvert\vec{b}\Rightarrow\ \vec{a}\times\vec{b}=0$; 2. Обчислення площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$ $S=\ \lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert$; 3. Обчислення площі трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$ $S_{\Delta}=\frac{1}{2}\ \lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert.$

2.2.34. Знайти модуль векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

1) $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=3,$ кут між $\vec{a},\ \vec{b}$ дорівнює $\frac{\pi}{6}$;

2) $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=5,\ \ \vec{a}\cdot\vec{b}=6.$

2.2.35. Дано $|\vec{a}|=5,\ |\vec{b}|=8,\ |\vec{a}\times\vec{b}|=32.$ Обчислити $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

2.2.36. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні і $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=5$. Обчислити:

1) $\left|(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})\right|$;

2) $\left|(2\vec{a}-\vec{b})\times(3\vec{a}+\vec{b})\right|$.

2.2.37. Вектори утворюють $\vec{a}$ та $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ і відомо, що $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$. Обчислити:

1) $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)^2$;

2) $\left(\left(2\vec{a} + \vec{b}\right) \times \left(3\vec{a} + \vec{b}\right)\right)^2$;

3) $\left(\left(\vec{a} - 3\vec{b}\right) \times \left(3\vec{a} + \vec{b}\right)\right)^2$.

2.2.38. Яку умову мають задовольняти вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$, щоб вектори $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$ були колінеарні?

2.2.39. Вектори $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ задовольняють умову $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Довести, що

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$.

2.2.40. Дано вектори $\vec{a} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 2\vec{k}$. Знайти координати векторних добутків:

1) $\vec{a} \times \vec{b}$;

2) $\left(2\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{b}$;

3) $\left(\vec{a} - 2\vec{b}\right) \times \left(\vec{a} + 2\vec{b}\right)$.

2.2.41. Відомо точки $A(-1; 2; -3)$, $B(-2; 4; -1)$, $C(3; -1; 1)$. Знайти координати векторних добутків:

1) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$;

2) $\left(2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA}\right) \times \overrightarrow{CB}$;

3) $\left(\overrightarrow{CB} - 3\overrightarrow{AC}\right) \times \overrightarrow{CB}$.

2.2.42. Дано точки $A(1; 2; 0)$, $B(3; 0; -3)$, $C(5; 2; 6)$. Обчислити площу трикутника ABC та довжину висоти, опущеної з вершини B на сторону AC.

2.2.43. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, де $\vec{a} = 2\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{b} = 3\vec{p} - 5\vec{q}$, $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, а кут між $\vec{p}$, $\vec{q}$ дорівнює $\frac{\pi}{4}$.

2.2.44. Дано вершини трикутника $A(1; -1; 2)$, $B(5; -6; 2)$, $C(1; 3; -1)$. Обчислити довжину його висоти, опущеної з вершини B на сторону AC.

2.2.45. Обчислити висоту паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 2\vec{\imath} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k}$.

2.2.46. Перевірити, чи можуть вектори $\vec{a} = -2\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} - 9\vec{k}$, $\vec{b} = -6\vec{\imath} + 7\vec{\jmath} + 6\vec{k}$ бути ребрами куба. Якщо можуть, то знайдіть третє ребро.

2.2.47. Обчислити синус кута, утвореного векторами

$$\vec{a} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}, \qquad \vec{b} = 6\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 2\vec{k}.$$

2.2.48. Вектор $\vec{x}$ перпендикулярний до вектора $\vec{a} = \{4; -2; -3\}$ і вектора $\vec{b} = \{0; 1; 3\}$ та утворює тупий кут з віссю OY. Знайти його координати, якщо відомо, що $|\vec{x}| = 26$.

2.2.49. Знайти вектор $\vec{x}$, якщо він перпендикулярний до вісі OZ та до вектора $\vec{a} = \{8; -15; 3\}$ і $|\vec{x}| = 51$. Кут між вектором $\vec{x}$ і віссю OX гострий.

2.2.50. Знайти вектор $\vec{x}$, який перпендикулярний до вектора $\vec{a} = \{2, -3,1\}$ та до вектора $\vec{b} = \{1, -2,3\}$ і задовольняє умову $\vec{x} \cdot (\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 7\vec{k}) = 10$.

2.2.51. Сила $\vec{F} = \{-2; 4; 5\}$ прикладена до точки $A(-1; 3; 2)$. Визначити момент цієї сили відносно початку координат.

2.2.52. Сила $\vec{F} = \{-1; 3; 5\}$ прикладена до точки $M(3; 4; -2)$. Визначити момент цієї сили відносно точки $A(-2; 3; 1)$.

2.2.53. Сила $\vec{F} = \{2; 2; 9\}$ прикладена до точки $A(4; 2; -3)$. Визначити величину і напрямні косинуси моменту цієї сили відносно точки $C(2; 4; 0)$.

2.2.54. У точці $C(-1; 3; -2)$ прикладено сили $\vec{M} = \{2; -3; -1\}$, $\vec{N} = \{1; 2; -5\}$, $\vec{P} = \{-6; 3; 4\}$. Визначити величину і напрямні косинуси моменту рівнодійної цих сил відносно точки $A(-4; 4; 1)$.

2.2.55. Визначити величину моменту сили $\vec{F}$, прикладеної до точки A відносно точки O, якщо $\overrightarrow{OA} = \vec{r}$, $\vec{F} = 5\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{r} = -2\vec{p} + 3\vec{q}$, $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = 1$, а кут між $\vec{p}$, $\vec{q}$ дорівнює $\frac{\pi}{6}$.

Мішаний добуток

Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ називається число, яке визначається за формулою

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Властивості	***Застосування***
1. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} =$ $= -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}$; 2. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$, якщо $\vec{a} = 0$ або $\vec{b} = 0$, або $\vec{c} = 0$ або вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ компланарні (лежать в одній площині).	1. Перевірка ***компланарності*** трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$; 2. Обчислення об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ $V = \left\|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right\|$; 3. Обчислення об'єму трикутної піраміди побудованої на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ $V = \frac{1}{6}\left\|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right\|$.

2.2.56. Визначити, якою є трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (права чи ліва), якщо:

1) $\vec{a} = \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{\imath}$, $\vec{c} = \vec{\jmath}$;

2) $\vec{a} = \vec{\imath}$, $\vec{b} = \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{\jmath}$;

3) $\vec{a} = \vec{\jmath}$, $\vec{b} = \vec{\imath}$, $\vec{c} = \vec{k}$;

4) $\vec{a} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$, $\vec{b} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$, $\vec{c} = \vec{\imath}$;

5) $\vec{a} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$, $\vec{b} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$, $\vec{c} = \vec{k}$.

2.2.57. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$. Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює $\frac{\pi}{3}$. Відомо, що $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $\left|\vec{b}\right| = 2$, $|\vec{c}| = 3$. Знайти $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

2.2.58. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють праву трійку і взаємно перпендикулярні. Відомо, що $|\vec{a}| = 2$, $\left|\vec{b}\right| = 3$, $|\vec{c}| = 4$. Знайти $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

2.2.59. Довести, що $\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right| \leq |\vec{a}|\left|\vec{b}\right||\vec{c}|$. В якому випадку тут знак рівності?

2.2.60. Довести, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, які задовольняють умові $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = 0$, компланарні.

2.2.61. Дано вектори $\vec{a} = \{-3; 1;\ 4\}$, $\vec{b} = \{2; -10; -3\}$, $\vec{c} = \{1; 1; -2\}$. Обчислити $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

2.2.62. Перевірити, чи компланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, якщо:

1) $\vec{a} = \{4; -1;\ 1\}$, $\vec{b} = \{2; 3;\ -1\}$, $\vec{c} = \{1; -2;\ 1\}$;
2) $\vec{a} = \{-1; 3;\ -1\}$, $\vec{b} = \{1; -2;\ 3\}$, $\vec{c} = \{3; -1;\ 2\}$;
3) $\vec{a} = \{3; 2;\ 2\}$, $\vec{b} = \{2; -1;\ 3\}$, $\vec{c} = \{8; 3;\ 7\}$;
4) $\vec{a} = \{1; 2;\ 3\}$, $\vec{b} = \{3; 2;\ 1\}$, $\vec{c} = \{2; 3;\ 1\}$.

2.2.63. Перевірити, що точки $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$, $D(-5; -5; 3)$ лежать в одній площині.

2.2.64. Знайти об'єм тетраедра, вершини якого знаходяться в точках $A(2; -1; -2)$, $(-1; 3; -2)$, $C(1; -1; 4)$, $D(2; 0; 1)$.

2.2.65. Дано вершини тетраедра $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; -2)$, $C(6; 3; 7)$, $D(-5; -4; 8)$. Знайти довжину його висоти, опущеної з вершини D.

2.2.66. Знайти об'єм тетраедра і довжину його висоти, опущеної з вершини A, якщо $A(2; 3; -1)$, $B(3; 0; 2)$, $C(2; -2; 1)$, $D(1; -3; 0)$.

Відповіді.

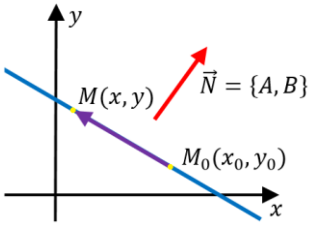
Розділ 3. Елементи аналітичної геометрії.

Тема 3.1. Пряма на площині.

Рівняння прямої

Рівняння прямої, що перпендикулярна вектору $\vec{N} = \{A, B\}$ і проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$



Загальне рівняння прямої

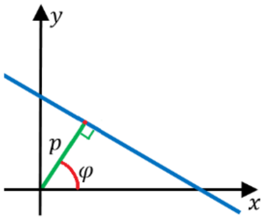
$$Ax + By + C = 0.$$

Нормальне рівняння прямої

$$\cos\varphi\, x + \sin\varphi\, y - p = 0,$$

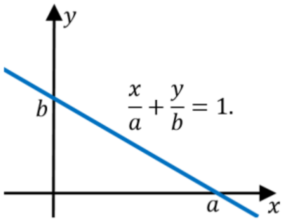
яке отримуємо з загального рівняння шляхом домноження на

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \mu C < 0.$$



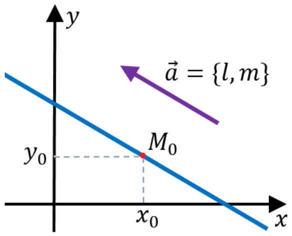
Рівняння прямої у відрізках на осях

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$



Канонічне рівняння прямої або рівняння прямої, що паралельна вектору $\vec{a} = (l, m)$ і проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}.$$

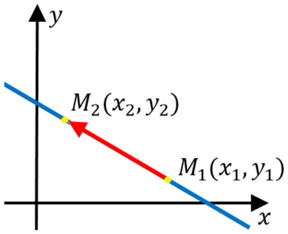


Параметричне рівняння прямої

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt. \end{cases}$$

Рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$

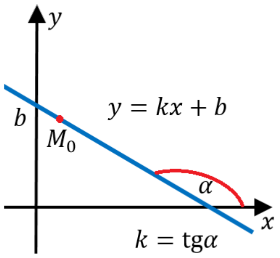
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$



Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

$$y = kx + b,$$

тут $k = \mathrm{tg}\alpha$ – кутовий коефіцієнт, α – кут, який утворює пряма з додатним напрямом осі абсцис, а b – ордината точки перетину прямої з віссю Oy.



Рівняння прямої з заданим кутовим коефіцієнтом k, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Відстань від точки $M(x_0, y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$

$$d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|.$$

Кут між прямими

Якщо прямі задано канонічними рівняннями

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} \text{ та } \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2}.$$

$$\cos\psi = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} = \frac{l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2}}.$$

Якщо прямі задано загальними рівняннями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{та} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0:$$

$$\cos\psi = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right| \cdot \left|\vec{N}_2\right|} = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Умова ***перпендикулярності*** прямих $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$.

Умова ***паралельності прямих*** $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$.

Якщо прямі задано рівняннями з кутовими коефіцієнтами

$$y = k_1x + b_1 \quad \text{та} \quad y = k_2x + b_2:$$

$$\mathrm{tg}\,\psi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}.$$

Умова ***перпендикулярності*** прямих $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Умова ***паралельності*** прямих $k_1 = k_2$.

3.1.1. Визначити, які з точок $M_1(3;1)$, $M_2(2;3)$, $M_3(6;3)$, $M_4(-3;-3)$, $M_5(3;-1)$, $M_6(-2;1)$ належать прямій $2x-3y-3=0$ і які їй не належать.

3.1.2. Знайти точку перетину двох прямих $3x-4y-29=0$, $2x+5y+19=0$.

3.1.3. Сторони трикутника лежать на прямих

$$x+5y-7=0,\ \ 3x-2y-4=0,\ \ 7x+y+19=0.$$

Знайдіть площу цього трикутника.

3.1.4. Точки $M_1(2;1)$, $M_2(5;3)$, $M_3(3;-4)$ є серединами сторін трикутника. Скласти рівняння його сторін.

3.1.5. Запишіть рівняння сторін та медіан трикутника з вершинами в точках $A(3;2)$, $B(5;-2)$, $C(1;0)$.

3.1.6. Дано пряму $5x+2y-4=0$. Визначити кутовий коефіцієнт k прямої:

1) паралельної заданій прямій;
2) перпендикулярної заданій прямій.

3.1.7. Дано пряму $2x+3y+1=0$. Напишіть рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(3;1)$ і

1) паралельна заданій прямій;
2) перпендикулярна заданій прямій.

3.1.8. Обчислити кутовий коефіцієнт k прямої, що проходить через дві точки:

1) $M_1(2;-7)$ і $M_2(3;1)$;
2) $M_1(3;-5)$ і $M_2(6;-4)$.

3.1.9. Дано рівняння двох сторін прямокутника $2x-3y+5=0$, $3x+2y-7=0$ і одна з його вершин $A(2;-3)$. Запишіть рівняння двох інших сторін цього прямокутника.

3.1.10. Дано рівняння двох сторін прямокутника $x-2y=0$, $x-2y+15=0$ і рівняння однієї з його діагоналей $7x+y-15=0$. Знайти вершини прямокутника.

3.1.11. Знайти проекцію точки $P(-6;4)$ на пряму $4x-5y+3=0$.

3.1.12. Знайдіть точку Q, симетричну точці $P(-5;13)$ відносно прямої $2x-3y-3=0$.

3.1.13. Знайдіть точку M_1, симетричну точці $M_2(8;-9)$ відносно прямої, що проходить через точки $A(3;-4)$ та $B(-1;-2)$.

3.1.14. Задано вершини трикутника $A(2;1)$, $B(-1;-1)$, $C(3;2)$. Запишіть рівняння його висот.

3.1.15. Дано вершини трикутника $A(1;-1)$, $B(-2;1)$, $C(3;5)$. Запишіть рівняння перпендикуляра, проведеного з вершини A на медіану, проведену з вершини B.

3.1.16. Дано вершини трикутника $A(2;-2)$, $B(3;-5)$, $C(5;7)$. Запишіть рівняння перпендикуляра, проведеного з вершини C на бісектрису внутрішнього кута при вершині A.

3.1.17. Дано рівняння двох сторін прямокутника $5x+2y-7=0$, $5x+2y-36=0$ і рівняння його діагоналі $3x+7y-10=0$. Запишіть рівняння решти сторін цього прямокутника і його другої діагоналі.

3.1.18. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо задані одна з його вершин $B(-4;-5)$ і рівняння двох висот трикутника $5x+3y-4=0$, $3x+8y+13=0$.

3.1.19. Запишіть рівняння прямої, що проходить через точку $P(3;5)$ на однаковій відстані від точок $A(-7;3)$ та $B(11;-15)$.

3.1.20. Знайдіть проєкцію точки $P(-8;12)$ на пряму, що проходить через точки $M_1(2;-3)$ та $M_2(-5;1)$.

3.1.21. На осі абсцис знайдіть таку точку P, щоб сума відстаней від неї до точок $M(1;2)$ та $N(3;4)$ була найменшою.

3.1.22. Знайдіть кут між прямими:

1) $-x+5y+1=0$, $2x+3y+7=0$;
2) $3x-y+5=0$, $x+3y-1=0$;
3) $\sqrt{2}x-\sqrt{3}y-3=0$, $(3+\sqrt{2})x+(\sqrt{6}-\sqrt{3})y+4=0$;
4) $3x-y+5=0$, $2x+y-7=0$;
5) $\sqrt{3}x+\sqrt{2}y-1=0$, $\sqrt{6}x-3y+2=0$.

3.1.23. Визначте, які з наступних пар прямих перпендикулярні:

1) $5x-y+3=0$, $x+5y-4=0$;
2) $2x-4y+1=0, 4x-2y+5=0$;
3) $5x-2y+1=0, 4x+6y+17=0$.

3.1.24. Визначте, для яких значень параметру a пряма

$$(a+2)x+(a^2-9)y+3a^2-8a+5=0$$

1) паралельна осі OX;
2) паралельна осі OY;
3) проходить через початок координат.

3.1.25. Визначте, для яких значень параметрів a і b прямі

$$ax-2y-1=0, \quad 6x-4y-b=0$$

1) мають одну спільну точку;
2) паралельні;
3) співпадають.

3.1.26. Визначте, чи перетинаються наступні прямі в одній точці:

1) $2x+3y-1=0,\ 4x-5y+5=0,\ 3x-y+2=0$;
2) $3x-y+3=0,\ 5\,x+3y-7=0,\ x-2y-4=0$.

3.1.27. Запишіть рівняння у відрізках для наступних прямих та побудуйте їх:

1) $3x+4y-12=0$;
2) $4x-5y-1=0$.

3.1.28. Запишіть рівняння прямої, яка проходить через точку $C(8;6)$ і відтинає від координатного кута трикутник з площею 12 кв.од.

3.1.29. Визначити, які з наступних рівнянь прямих є нормального (нормованого) вигляду:

1) $2x+y-1=0$;
2) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-3=0$;
3) $\frac{2}{5}x-\frac{3}{5}y-1=0$;
4) $\frac{5}{13}x-\frac{12}{13}y+4=0$;
5) $-y-8=0$;
6) $x+3=0$.

3.1.30. Приведіть загальні рівняння прямих до нормального (нормованого) вигляду в кожному з наступних випадків і побудуйте їх:

1) $3x-4y+12=0$;

2) $\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 10 = 0$;

3) $x + 2 = 0$;

4) $2x - y - \sqrt{5} = 0$.

3.1.31. Обчисліть величину відхилення і відстань від точки до прямої в кожному з наступних випадків:

1) $A(2; -1)$, $4x + 3y + 10 = 0$;

2) $B(0; -3)$, $5x - 12y - 23 = 0$;

3) $P(-2; 3)$, $3x - 4y - 2 = 0$.

3.1.32. Встановити, чи лежить точка $M(1; -3)$ і початок координат по одну чи по різні боки від кожної з наступних прямих:

1) $2x - y + 5 = 0$;

2) $3x + 2y - 2 = 0$;

3) $5x - y - 4 = 0$;

4) $x - 2y - 6 = 0$;

5) $15x + 20y + 10 = 0$.

3.1.33. Точка $A(-5; 2)$ є вершиною квадрата, одна з сторін якого лежить на прямій $2x - y - 8 = 0$. Обчисліть площу цього квадрата.

3.1.34. Дано рівняння двох сторін прямокутника $3x - 2y - 5 = 0$, $2x + +3y + 7 = 0$ і одна з його вершин $A(-2; 1)$. Знайти площу цього прямокутника.

3.1.35. Доведіть, що пряма $2x + y + 3 = 0$ перетинає відрізок, який з'єднує точки $A(-5; 1)$ і $B(3; 7)$.

3.1.36. Доведіть, що пряма $2x - 3y + 6 = 0$ не перетинає відрізок, обмежений точками $C(-2; -3)$ і $D(1; -2)$.

3.1.37. Точки $A(-3; 5)$, $B(-1; -4)$, $C(7; -1)$ і $D(2; 9)$ – послідовні вершини чотирикутника. Встановити, чи буде даний чотирикутник опуклим.

3.1.38. Точки $A(-1; 6)$, $B(1; -3)$, $C(4; 10)$ і $D(9; 0)$ – послідовні вершини чотирикутника. Встановити, чи буде даний чотирикутник опуклим.

3.1.39. Точки $A(-10;-13)$, $B(-2;3)$ і $C(2;1)$ є вершинами трикутника. Обчислити довжину перпендикуляра, опущеного з вершини B на медіану, проведену з вершини C.

3.1.40. Знайти його площу квадрата, дві сторони якого лежать на прямих

$$5x - 12y + 26 = 0, \quad 5x - 12y - 65 = 0.$$

3.1.41. Запишіть рівняння прямих, які паралельні прямій $4x - 3y - 8 = 0$ і знаходяться від неї на відстані $d = 3$.

3.1.42. Запишіть рівняння бісектрис кутів, утворених двома прямими:

1) $x - 3y + 5 = 0, \quad 3x - y - 2 = 0;$
2) $3x + 4y - 1 = 0, \; 5x + 12y - 2 = 0.$

3.1.43. Знайдіть відстань між паралельними прямими:

1) $6x - 8y + 11 = 0\,, \; 3x - 4y + 18 = 0;$
2) $5x - 12y + 26 = 0, 5x - 12y - 13 = 0;$
3) $4x - 3y + 15 = 0, 8x - 6y + 25 = 0.$

3.1.44. Запишіть рівняння прямої, що належить в’язці прямих

$$\alpha(x + 2y - 5) + \beta(3x - 2y + 1) = 0, \text{ а також}$$

1) проходить через точку $A(3;-1)$;
2) проходить через початок координат;
3) паралельна осі OX;
4) паралельна осі OY;
5) паралельна прямій $4x + 3y + 5 = 0$;
6) перпендикулярна прямій $2x + 3y + 7 = 0$.

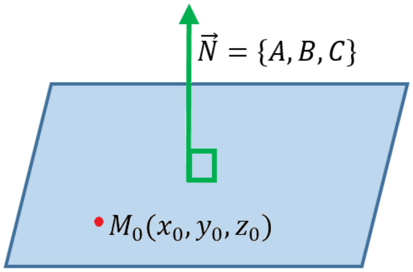
3.1.45. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих $2x + y - 2 = 0$, $x - 5y - 23 = 0$ і ділить навпіл відрізок, обмежений точками $M_1(5;-6)$ та $M_2(-1;-4)$. Розв’язати задачу, не обчислюючи координат точки перетину прямих.

3.1.46. Задані рівняння сторін трикутника $x + 2y - 1 = 0$, $5x + 4y - 17 = 0$, $x - 4y + 11 = 0$. Не визначаючи координат його вершин, запишіть рівняння висот трикутника.

Відповіді.

Тема 3.2. Пряма та площина в просторі.

Площина

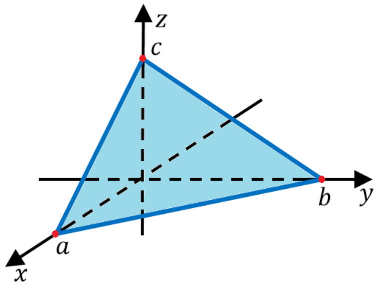


Рівняння площини, яка перпендикулярна до вектора $\vec{N}=\{A,B,C\}$ і проходить через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Загальне рівняння площини

$$Ax+By+Cz+D=0.$$



Рівняння площини у відрізках на осях

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Рівняння площини, що проходить через три точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$

$$\overrightarrow{M_0M}\cdot\overrightarrow{M_0M_1}\cdot\overrightarrow{M_0M_2}=\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0.$$

Кут між двома площинами

Кут ψ між площинами $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ та $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

$$\cos\psi=\frac{\vec{N}_1\cdot\vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right|\cdot\left|\vec{N}_2\right|}=\frac{A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Умова ***перпендикулярності двох площин*** $A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2=0.$

Умова ***паралельності двох площин*** $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}.$

Відстань від точки до площини

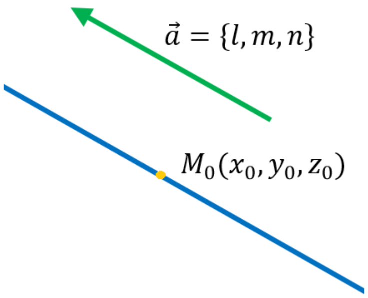
Відстань від точки $M(x_0,y_0,z_0)$ до площини $Ax+By+Cz+D=0$

$$d=\left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|.$$

Пряма у просторі

Канонічне рівняння прямої або рівняння прямої, що паралельна вектору $\vec{a} = \{l, m, n\}$ і проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

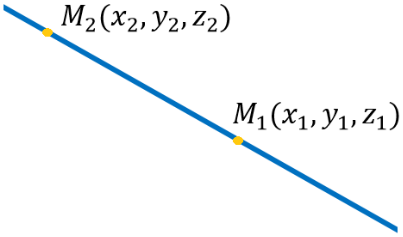


Параметричне рівняння прямої

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \quad -\infty < t < +\infty. \\ z = z_0 + nt, \end{cases}$$

Рівняння прямої через дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$



Кут між прямими

Кут ψ між прямими $\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$ та $\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$:

$$\cos\psi = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} = \frac{l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

Умова ***перпендикулярності двох прямих*** $l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 = 0.$

Умова ***паралельності двох прямих*** $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.$

Кут між прямою та площиною

Кут між площиною $Ax + By + Cz + D = 0$ та прямою $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$:

$$\sin\varphi = \frac{\vec{N} \cdot \vec{a}}{|\vec{N}| \cdot |\vec{a}|} = \frac{A \cdot l + B \cdot m + C \cdot n}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Умова ***перпендикулярності прямої та площини*** $\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}.$

Умова ***паралельності прямої та площини*** $A \cdot l + B \cdot m + C \cdot n = 0.$

3.2.1. Запишіть рівняння площини, яка проходить через точку $A(5;2;4)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=2\vec{i}-3\vec{j}-6\vec{k}$.

3.2.2. Точка $P(3;-1;2)$ є основою перпендикуляра, опущеного з початку координат на площину. Скласти рівняння цієї площини.

3.2.3. Запишіть рівняння площини, що проходить через точку $M(3;4;-5)$ паралельно двом векторам $\vec{a}=\{3;1;-1\}$ та $\vec{b}=\{1;-2;1\}$.

3.2.4. Запишіть рівняння площини, що проходить через точки $M_1(2;-1;3)$ і $M_2(3;1;2)$ паралельно вектору $\vec{a}=\{3;-1;4\}$.

3.2.5. Запишіть рівняння площини, яка проходить через точки $A(2;3;4)$, $B(4;9;16)$, $C(8;27;64)$.

3.2.6. Запишіть рівняння площини, яка проходить через точки $A(2;3;4)$, $B(4;9;16)$ перпендикулярно площині $5x-7y+9z-15=0$.

3.2.7. Запишіть рівняння площини, яка проходить через початок координат паралельно площині $5x-3y+2z-3=0$.

3.2.8. Запишіть рівняння площини, яка проходить через точку $A(5;-4;3)$ паралельно площині $2x-7z-9=0$.

3.2.9. Запишіть рівняння площини, яка проходить через початок координат перпендикулярно до площин $5x+2y+6z-3=0$ та $3x+4y++5z-7=0$.

3.2.10. Запишіть рівняння площини, яка проходить через точку $A(2;-1;1)$ перпендикулярно до площин $2x-z+1=0$ та $y=0$.

3.2.11. Визначте, які з наведених пар площин є паралельними, а які – перпендикулярними:

1) $2x-3y+5z-7=0,\ -4x+6y-10z+3=0;$
2) $3x-y-2z-5=0,\ \ x+9y-3z+2=0;$
3) $2x-5y+z=0,\ \ x+2z-3=0;$
4) $3x+6z-2=0,\ x+2z+3=0;$
5) $2x+3y-z-5=0,\ x-y-z+8=0.$

3.2.12. За яких значень l і m наступні пари рівнянь будуть визначати паралельні площини:

1) $2x + ly + 3z - 5 = 0,\ mx - 6y - 6z + 2 = 0;$

2) $3x - y + lz - 9 = 0,\ 2x + my + 2z - 3 = 0$.

3.2.13. За якого значення l наступні пари рівнянь будуть визначати перпендикулярні площини:

1) $3x - 5y + lz - 3 = 0,\ x + 3y + 2z + 5 = 0;$

2) $5x + y - 3z - 3 = 0,\ 2x + ly - 3z + 1 = 0.$

3.2.14. Знайдіть точку перетину трьох площин:

$$4x + 5y - 2z - 20 = 0,\ \ 5x - 8y + z = 0,\ \ 4x + y - 9z - 5 = 0.$$

3.2.15. Знайдіть гострий кут між площинами:

1) $4x + 2y + 4z - 9 = 0,\quad 6x - 9y + 18z - 5 = 0;$

2) $x - \sqrt{2}y + z - 1 = 0,\quad x + \sqrt{2}y - z + 3 = 0;$

3) $3y - z = 0,\quad 2y + z = 0.$

3.2.16. Доведіть, що три площини

$$x - 2y + z - 7 = 0,\ 2x + y - z + 2 = 0,\ x - 3y + 2z - 11 = 0.$$

мають одну спільну точку і обчисліть її координати.

3.2.17. Доведіть, що три площини $7x + 4y + 7z + 1 = 0,\ 2x - y - z + 2 = 0, x + 2y + 3z - 1 = 0$ проходять через одну пряму.

3.2.18. Доведіть що три площини

$$2x - y + 3z - 5 = 0,\ 3x + y + 2z - 1 = 0,\quad 4x + 3y + z + 2 = 0.$$

перетинаються по трьом різним паралельним прямим.

3.2.19. Запишіть рівняння площини, яка проходить через

1) точку $M_1(2; -3; 3)$ паралельно площині OXY;

2) точку $M_2(1; -2; 4)$ паралельно площині OXZ;

3) вісь OX і точку $M_3(4; -1; 2)$;

4) вісь OZ і точку $M_4(3; -4; 7)$;

5) точки $A_1(7; 2; -3)$ та $A_2(5; 6; -4)$ паралельно осі OX;

6) точки $M_1(2; -1; 1)$ та $M_2(3; 1; 2)$ паралельно осі OY.

3.2.20. Запишіть рівняння наступних площин у вигляді рівняння площини у відрізках; побудуйте їх та знайдіть точки, в яких вони перетинають осі координат:

1) $3x+6y+5z-90=0$;

2) $2x+3y-5z-6=0$.

3.2.21. Обчисліть об'єм піраміди, яка утворена координатними площинами та площиною $2x-3y+6z-12=0$.

3.2.22. Запишіть рівняння наступних площин у нормальному (нормованому) вигляді:

1) $2x-2y+z-18=0$;

2) $4x-6y-12z-11=0$;

3) $5y-12z+26=0$;

4) $-x+5=0$.

3.2.23. Знайти величину відхилення δ та відстань d від точки до площини:

1) $M_1(-2;-4;3)$, $2x-y+2z+3=0$;

2) $M_2(2;-1;-1)$, $16x-12y+15z-4=0$;

3) $M_3(1;2;-3)$, $5x-3y+z+4=0$;

4) $M_4(3;-6;7)$, $4x-3z-1=0$.

3.2.24. Знайдіть відстань від точки $A(3;-4;6)$ до площини $3x-2y+6z-11=0$.

3.2.25. Знайти відстань d від точки $P(-1;1;-2)$ до площини, що проходить через точки

$$M_1(1;-1;1),\ M_2(-2;1;3) \text{ і } M_3(4;-5;-2).$$

3.2.26. Знайдіть відстань між двома паралельними площинами

$$9x-72y+8z-81=0 \text{ та } 9x-72y+8z+65=0.$$

3.2.27. З'ясувати, чи лежить точка $Q(2;-1;1)$ і початок координат по один бік чи по різні боки відносно кожної з наступних площин:

1) $5x-3y+z-18=0$;

2) $x+5y+12z-1=0$;

3) $2x+3y-6z+2=0$;

4) $2x-y+z+11=0$.

3.2.28. Доведіть, що площина $3x-4y-2z+5=0$ перетинає відрізок, обмежений точками $A(3;-2;1)$ та $B(-2;5;2)$.

3.2.29. Доведіть, що площина $5x-2y+z-1=0$ не перетинає відрізок, обмежений точками $A(1;4;-3)$, $B(2;5;0)$.

3.2.30. Дві грані куба лежать на площинах $2x-2y+z-1=0$, $2x-2y++2z+5=0$. Обчисліть об'єм цього куба.

3.2.31. Виведіть рівняння геометричного місця точок, відхилення яких від площини $6x+3y+2z-10=0$ дорівнює (– 3).

3.2.32. У кожному з наступних випадків скласти рівняння площин, які ділять навпіл двогранні кути, утворені двома площинами:

1) $x-3y+2z-5=0, 3x-2y-z+3=0$;

2) $2x-y+5z+3=0,\ 2x-10y+4z-2=0$.

3.2.33. У кожному з наступних випадків скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від двох паралельних площин:

1) $4x-y-2z-3=0,\ 4x-y-2z-5=0$;

2) $5x-3y+z+3=0,\ 10x-6y+2z+7=0$.

3.2.34. Знайдіть точки перетину прямої

$$\begin{cases}2x+y-z-3=0\\ x+y+z-1=0\end{cases}$$

з координатними площинами.

3.2.35. Визначте, за якого значення D пряма

$$\begin{cases}2x+3y-z+D=0\\ 3x-2y+2z-6=0\end{cases}$$

перетинає 1) вісь OX; 2) вісь OY; 3) вісь OZ.

3.2.36. Запишіть рівняння площини, що проходить через пряму перетину площин

$$\begin{cases}3x-y+2z+9=0\\ x+z-3=0\end{cases}$$

1) і через точку $M_1(4;-2;-3)$;

2) паралельно осі OX;

3) паралельно осі OY;

4) паралельно осі OZ.

3.2.37. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму перетину площин

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 5 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

паралельно вектору $\vec{s} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} - 2\vec{k}$.

3.2.38. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму перетину площин

$$\begin{cases} 5x - y - 2z - 3 = 0 \\ 3x - 2y - 5z + 2 = 0 \end{cases}$$

перпендикулярно до площини $x + 19y - 7z - 11 = 0$.

3.2.39. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму перетину площин

$$\begin{cases} 2x + y - z + 1 = 0 \\ x + y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

паралельно відрізку, обмеженому точками $A(2; 5; -3)$ і $B(3; -2; 2)$.

3.2.40. Запишіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(3; 1; 4)$

1) паралельно прямій $\frac{x-4}{2} = \frac{y-5}{7} = \frac{z+3}{5}$;
2) паралельно осі OX;
3) паралельно осі OY;
4) паралельно осі OZ.

3.2.41. Запишіть рівняння прямої, що проходить через точки $A(16; 9; 4)$ та $B(4; 3; -1)$.

3.2.42. Запишіть параметричне рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(3; -1; 2)$ та $M_2(2; 1; 1)$.

3.2.43. Через точки $A(-6; 6; -5)$ та $B(12; -6; 1)$ проведена пряма. Знайдіть точки перетину цієї прямої з координатними площинами.

3.2.44. Запишіть в загальній формі (у вигляді перетину двох площин) рівняння прямої $\frac{x-8}{4} = \frac{y-7}{3} = \frac{z+9}{2}$.

3.2.45. Запишіть параметричне рівняння прямої, що проходить через точку $A(8; -3; 4)$ паралельно вектору $\vec{s} = 5\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} + 7\vec{k}$.

3.2.46. Запишіть канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $B(2; 3; -5)$ паралельно прямій $\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0 \\ x + 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$.

3.2.47. Запишіть канонічні рівняння прямих, заданих загальними рівнянням:

1) $\begin{cases} 2x+4y-3z+6=0 \\ 4x+y+3z-2=0 \end{cases}$;

2) $\begin{cases} x-2y+3z-4=0 \\ 3x+2y-5z-4=0 \end{cases}$.

3.2.48. Довести паралельність прямих:

1) $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$ і $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y-5z-8=0 \end{cases}$;

2) $x=2t+5,\ y=-t+2,\ z=t-7$ і $\begin{cases} x+3y+z+2=0 \\ x-y-3z-2=0 \end{cases}$.

3.2.49. Довести перпендикулярність прямих:

1) $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3}$ і $\begin{cases} 3x+y-5z+1=0 \\ 2x+3y-8z+3=0 \end{cases}$;

2) $\begin{cases} x+y-3z-1=0 \\ 2x-y-9z-2=0 \end{cases}$ і $\begin{cases} 2x+y+2z+5=0 \\ 2x-2y-z+2=0 \end{cases}$.

3.2.50. Доведіть, що прямі задані параметрично $x=2t-3,\ y=3t-2,\ z=-4t+6$ та $x=t+5,\ y=-4t-1,\ z=t-4$ перетинаються.

3.2.51. Дослідіть взаємне розташування прямих

$$\begin{cases} x=5t+3 \\ y=7t+2 \\ z=4t+5 \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} x=8t+9 \\ y=6t+3. \\ z=3t+7 \end{cases}$$

3.2.52. Знайдіть кут між прямими:

1) $\frac{x-6}{3}=\frac{y-9}{2}=\frac{z+8}{12}$ та $\frac{x-3}{6}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+7}{-2}$;

2) $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}$ та $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}$;

3) $\begin{cases} x=3t-2 \\ y=0 \\ z=-t+3 \end{cases}$ та $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=0 \\ z=t-3 \end{cases}$.

3.2.53. Знайдіть точку перетину прямої та площини:

1) $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$; $2x+3y+z-1=0$;

2) $\frac{x+3}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{-5}$; $x-2y+z-15=0$;

3) $\frac{x+2}{-2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{2}$; $x+2y-2z+6=0$.

3.2.54. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(2;-3;1)$ перпендикулярно до площини $3x-2y-5z+2=0$.

3.2.55. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(1;-1;-1)$ перпендикулярно до прямої $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+2}{4}$.

3.2.56. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(3;-1;4)$ перпендикулярно до прямої $\begin{cases} x-2y+z-1=0 \\ x+y-z+3=0 \end{cases}$.

3.2.57. За якого значення a пряма $\begin{cases} 3x-2y+z+3=0 \\ 4x-3y+4z+1=0 \end{cases}$ паралельна площині $2x-y+az-2=0$.

3.2.58. За яких значень m пряма $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{m}=\frac{z+3}{-2}$ паралельна площині $x-3y+6z+7=0$.

3.2.59. Знайдіть проекцію точки $P(2;-1;3)$ на пряму $\begin{cases} x=5t+3 \\ y=7t+10. \\ z=4t+5 \end{cases}$

3.2.60. Знайдіть проекцію точки $M(5;2;-1)$ на площину $2x-y+3z+23=0$.

3.2.61. Знайдіть координати точки Q, яка симетрична точці $P(4;1;6)$ відносно прямої

$$\begin{cases} x-y-4z+12=0 \\ 2x+y-2z+3=0 \end{cases}.$$

3.2.62. Знайдіть точку Q, симетричну точці $P(2;-5;7)$ відносно прямої, що проходить через точки $M_1(5;4;6)$ і $M_2(-2;-17;-8)$.

3.2.63. Знайдіть точку Q, симетричну точці $P(1;3;-4)$ відносно площини $3x+y-2z=0$.

3.2.64. Обчисліть відстань від точки $P(1;-1;-2)$ до прямої $\frac{x+3}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-8}{-2}$.

3.2.65. Обчисліть відстань від точки $P(2;3;-1)$ до прямої

$$\begin{cases} 2x-2y+z+3=0 \\ 3x-2y+2z+17=0 \end{cases}.$$

3.2.66. Запишіть рівняння площини, що проходить через точку $M_0(1;2;-3)$ паралельно прямим $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-7}{3}$ та $\frac{x+5}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{-1}$.

3.2.67. Довести, що прямі $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-5}{4}$, $\begin{cases} x=3t+7 \\ y=2t+2 \\ z=-3t+1 \end{cases}$ лежать в одній площині і скласти рівняння цієї площини.

3.2.68. Скласти рівняння площини, яка проходить через дві паралельні прямі

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2} \quad \text{та} \quad \frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}.$$

3.2.69. Знайти проєкцію точки $Q(3;-4;-2)$ на площину, що проходить через паралельні прямі

$$\frac{x-5}{13}=\frac{y-6}{1}=\frac{z+3}{-4} \quad \text{та} \quad \frac{x-2}{13}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+3}{-4}.$$

3.2.70. Скласти канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(3;-2;-4)$ паралельно площині $3x-2y-3z-7=0$ і перетинає пряму $\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-1}{2}$.

3.2.71. Обчислити найкоротшу відстань між двома прямими в кожному з наступних випадків:

1) $\frac{x+7}{3}=\frac{y+4}{4}=\frac{z+3}{-2}$ і $\frac{x-21}{6}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z-2}{-1}$;

2) $\frac{x+5}{3}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-1}{-2}$ і $\begin{cases} x=6t+9 \\ y=-2 \\ z=-t+2 \end{cases}$.

Відповіді.

Розділ 4. Теорія границь.

Тема 4.1. Числова послідовність. Границя числової послідовності.

Числова послідовність - це набір дійсних чисел, члени якого занумеровані всіма натуральними числами, розташовані у порядку зростання номерів та обчислюються за певним законом (часто залежним від номера) і позначається $\{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

Послідовність $\{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ називається ***збіжною*** до числа a, якщо для кожного достатньо малого числа $\varepsilon > 0$ існує натуральне число N (що залежить від ε) таке, що для всіх $n > N$ виконується нерівність

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

При цьому число a називається ***границею числової послідовності*** $\{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ і позначається

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Тобто

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \text{ якщо } \forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N :\ |a_n - a| < \varepsilon.$$

Якщо послідовність має *скінченну* границю (a - дійсне число), то послідовність називається збіжною (послідовність збігається до a), інакше послідовність розбіжна (послідовність розбігається).

Теорема.

Нехай $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ та $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, Тоді

1) $\forall C \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to\infty} Ca_n = Ca$;

2) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b$;

3) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = ab$;

4) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$, якщо $b \neq 0.$

***Теорема.* (Принцип збіжності) – Ознака Вейєрштрасса**

Якщо послідовність $\{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ монотонна та обмежена, то $\exists a \in \mathbb{R}$: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Невизначені форми (Невизначеності)

$$\frac{0}{0},\qquad \frac{\infty}{\infty},\qquad 0\cdot\infty,\qquad \infty-\infty,\qquad 1^{\infty},\qquad 0^{0},\qquad \infty^{0}.$$

Число e

Послідовність $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n},\ n\in\mathbb{N}\right\}$ має скінченну границю

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e=2{,}7182818284\ldots$$

4.1.1. Виписати перші п'ять членів послідовності, заданої своїм загальним членом.

1) $\left\{\frac{n+3}{2n},\ n>0\right\}$;

2) $\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n!},\ n\geq 0\right\}$;

3) $\{\cos(3n-2)\pi,\ n\geq 0\}$;

4) $\left\{\frac{(-1)^{n}n^{2}}{4n+1},\ n\geq 0\right\}$;

5) $\{2n+(-1)^{n-1},\ n>0\}$;

6) $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n},\ n>0\right\}$.

4.1.2. Виписати загальний член послідовності.

1) $1,\ 2,\ 5,\ 10,\ 17,\ 26,\ldots$;

2) $-1,\ \frac{1}{2},-\frac{1}{4},\ \frac{1}{8},-\frac{1}{16},\ldots$;

3) $\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{6}{4},\ \frac{24}{5},\ \frac{120}{6},\ldots$;

4) $0,\ \frac{1}{3},\ \frac{4}{9},\ \frac{9}{27},\ \frac{16}{81},\ldots$;

5) $\frac{3}{2},-\frac{5}{4},\ \frac{7}{6},-\frac{9}{8},\ \frac{11}{10},\ldots$;

6) $\frac{2}{3\cdot 1},\ \frac{3}{4\cdot 2},\ \frac{4}{5\cdot 3},\ \frac{5}{6\cdot 4},\ \frac{6}{7\cdot 5},\ldots$.

4.1.3. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ та визначити номер $N(\varepsilon)>0$ такий, що $|a_n-a|<\varepsilon$ для всіх $n>N(\varepsilon)$, якщо

1) $\left\{a_n=\frac{n+1}{n},\ n>0\right\}$;

2) $\left\{a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n^2},\ n>0\right\}$;

3) $\left\{a_n=2+\frac{1}{2^n},\ n>0\right\}$.

У кожному прикладі знайти $N(\varepsilon)$ для $\varepsilon=0{,}1$ та $\varepsilon=0{,}01$.

4.1.4. Довести за означенням, що:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n+1}{2n-1}=2$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{1-n^2}=0;$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}=0.$

4.1.5. Знайти границі.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n};$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2}{(n-1)^2};$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{100n^3+2n^2}{0{,}01n^4-10n^3+2};$ 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+4n-2}{5n^2-n+4};$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-5n+1}{n^3-n^2+n+1};$ 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^4+n^2+7n}{2n^3-6n+5};$

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^3+6n+1}{n^3+5n^2-1};$ 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^3-n^5+n}{3n^4+7n^3+n+1};$

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^5+6}{4n^5-n^6+4n};$ 10) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3+5n+1}{n^7+8};$

11) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-100n^2+1}{100n^2+15n};$ 12) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n^{30}+3n^{15}-8n+10}{n^7+8n^{15}-3n^{30}}.$

4.1.6. Знайти границі.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-(n+2)^2}{(n-1)^2-(2n-1)^2};$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(n^2-3)}{(n+2)^3-(n-1)^3};$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2};$ 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+(n-1)^2}{(n+1)^3-(n-2)^3};$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4+(n-1)^4}{(n+1)^4-(n-1)^4};$ 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^4+(n-1)^4}{(2n+1)^4-(n-1)^4};$

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4-(2n+1)^4}{(n+1)^3-(n+2)^3};$ 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4-n^4}{(2n-1)^4-n^4};$

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)^4-(n-1)^4}{n^3-(2n+1)^3};$ 10) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+5)^5(n^2+5n+4)^3}{(n+1)^{10}(6n+9)};$

11) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+15)^{13}-(n^2+n-3)^6}{(3n+10)^{11}+6n+9};$ 12) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^5-5n+1}{n-2}-\frac{n^2+n-4}{n-1}.$

4.1.7. Знайти границі.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8n^3-2n+1}}{n+3};$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n^2+6n-3}}{n-1};$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n^2+6n-3}}{\sqrt[4]{n^5+1}};$ 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+\sqrt{n^2+1})^2}{\sqrt[3]{n-n^6}};$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}+\sqrt{n^2-n}}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt[3]{n^5+1}};$ 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+3}-\sqrt[5]{n-1}}{\sqrt[5]{n^2+3}-\sqrt[4]{n^2+4n}};$

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{2n^2+3}}{\sqrt[3]{n^3+3}+\sqrt[4]{n^5+2}}$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10n^3-\sqrt{n^3+2}}{\sqrt{4n^6+3}-n}$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+2n^2+1}+\sqrt[3]{n^4-1}}{\sqrt[4]{n^6+6n^5-3}-\sqrt[5]{n^7+5n^3+1}}$.

4.1.8. Знайти границі.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+2)!-n!}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+3)!+(n+1)!}{(n+1)!-2\cdot n!}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!-(n-2)!}{(n+3)!+(n-3)!}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!+(n+1)!+(n+2)!+\cdots+(2n)!}{1!+2!+3!+\cdots+n!}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!(n-1)}$.

4.1.9. Знайти границі.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+1}{2^n-1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-2^{\frac{1}{n}}}{1+2^{\frac{1}{n}}}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}-3^{n+1}}{2^n+3^n}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+2}+1}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n+4^n}{3^n-4^{n+1}}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n-5^n}{3^n+4^n}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-5^{\frac{1}{n}}}{2^{\frac{1}{n}}+3^{\frac{1}{n}}}$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n+4\cdot7^n}{2\cdot7^n-4^n}$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+\cdot2^{n-1}}{3^n+5^n}$.

4.1.10. Знайти границі.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(1+2+3+\cdots+n)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+3+5+7+\cdots+(2n-1)}{n+1}-\frac{2n+1}{2}\right)$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-2+3-4+\cdots-2n}{\sqrt{n^2+4}}$.

4.1.11. Знайти границі.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{3n+2}-\sqrt{n-2})$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2-1})$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+5}-\sqrt{2n+1}}{\sqrt{n}}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+4}-n)n^2$;	6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n+\sqrt[3]{4-n^3}\right)$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n(n-2)}-\sqrt{n^2-3}\right)$;	8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^5-8}-n\sqrt{n(n^2+5)}}{\sqrt{n}}$.

4.1.12. Знайти границі.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{3n+6}$;	2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{n+4}\right)^{2n-1}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^{n-3}$;	4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{3n+1}\right)^{n^2+1}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4n+1}{6n-1}\right)^{n^2}$;	6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-2n}{n^2+2}\right)^{n}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-2n}{3n^2-2n+5}\right)^{n+2}$;	8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+3}{n^3-2}\right)^{n-n^2}$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n+2}-n\right)^{n}$.

4.1.13. Знайти границі.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\sin n!}{n^2+1}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+\cos\frac{\pi n}{4}}{3^n+1}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n}\cos n^3-\frac{3n}{6n+1}\right)$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right)$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin^5\frac{\pi}{2}n}{\sqrt{n^2+1}}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}^3 n}{n}$.

Відповіді.

Тема 4.2. Функція однієї змінної. Границя функції.

Границя функції

Число A називається ***границею функції*** $f(x)$ ***в точці*** $x = x_0$ і позначається

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A,$$

якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$ (яке залежить від ε і x_0), що для всіх x, які задовольняють умову $|x - x_0| < \delta,\ x \neq x_0$, виконується нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

У найпростіших випадках обчислення границі зводиться до підстановки у функцію граничного значення аргументу. Часто підстановка граничного значення аргументу приводить до невизначених виразів вигляду

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 1^{\infty}, \quad 0^{0}, \quad \infty^{0}.$$

Обчислення границі функції в цих випадках називають розкриттям невизначеності.

Односторонні границі

Односторонні границі розглядають поведінку функції $f(x)$, коли x наближається до x_0 з правого або з лівого боку.

Границею справа (правосторонньою границею) функції $f(x)$ у разі прямування x до x_0, є число $a \in R$

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = a,$$

якщо

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \neq x_0,\ x \in (x_0, x_0 + \delta):\ |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Границею зліва (лівосторонньою границею) функції $f(x)$, у разі прямування x до x_0, є число $a \in R$

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = a,$$

якщо

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \neq x_0,\ x \in (x_0 - \delta, x_0):\ |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Теорема.

Нехай $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ та $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$. Тоді

1) $\forall C \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{x\to x_0} Cf(x) = Ca$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a + b$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = ab$;

4) $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{a}{b}$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$.

Перша важлива границя

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Наслідки:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x}{\arcsin x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{arctg} x} = 1.$$

Друга важлива границя

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to 0}(1 + y)^{\frac{1}{y}} = e = 2{,}7182818284 \ldots\ .$$

Наслідки:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1 + x)^m - 1}{x} = m.$$

Нескінченно великі функції. Нескінченно малі функції

Функція $\alpha(x)$ називається ***нескінченно великою*** у разі $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = \infty$.

Функція $\beta(x)$ називається ***нескінченно малою*** у разі $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} \beta(x) = 0$.

Порівняння нескінченно малих функцій

Нехай $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ дві нескінченно малі функції, коли $x \to x_0$.

1. Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ називається нескінченно малою ***вищого порядку*** у порівнянні з $\beta(x)$ коли $x \to x_0$ і позначається $\alpha = o(\beta)$.
2. Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, то $\alpha(x)$ називається нескінченно малою ***нижчого порядку*** у порівнянні з $\beta(x)$ коли $x \to x_0$ і позначається $\beta = o(\alpha)$.
3. Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c,\ c \neq 0,\ c \neq 1$, то $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ є нескінченно малими ***одного порядку*** малості коли $x \to x_0$.
4. Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ ***еквівалентні*** коли $x \to x_0$ і позначається $\alpha \sim \beta$.
5. Якщо $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k} = A \neq 0\ (A \epsilon \mathbb{R})$, то функція $\alpha(x)$ називається нескінченно малою ***k-го порядку*** малості відносно $\beta(x)$ коли $x \to x_0$ і позначається $\alpha(x) = o\left(\beta^k(x)\right)$. Число k у цьому разі називається ***порядком малості***.
6. Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не існує, то $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ називається ***непорівнянними*** нескінченно малими.

Таблиця еквівалентностей

$z(x) \to 0, \quad x \to x_0$

$\sin z\,(x) \sim z(x)$	$\arcsin z\,(x) \sim z(x)$	$e^{z(x)} - 1 \sim z(x)$
$\mathrm{tg}\, z(x) \sim z(x)$	$\mathrm{arctg}\, z(x) \sim z(x)$	$a^{z(x)} - 1 \sim z(x) \ln a$
$\ln(1 + z(x)) \sim z(x)$	$\log_a(1 + z(x)) \sim \frac{z(x)}{\ln a}$	$(1 + z(x))^m - 1 \sim m z(x)$

4.2.1. Довести за означенням, що $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$, тобто для заданого числа $\varepsilon > 0$ підібрати таке число $\delta > 0$, щоб виконання нерівності $|x-2| < \delta$ забезпечувало виконання нерівності $|x^2-4| < \varepsilon$.

Обчислити δ, якщо: $\varepsilon = 0{,}1$ та $\varepsilon = 0{,}01$.

4.2.2. Довести за означенням.

1) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-1) = 3$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2x) = 3$;

3) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-1}{x^2+1} = \frac{4}{5}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-2}{2x} = \frac{1}{2}$.

4.2.3. Знайти границі.

1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{5x+1}$; 2) $\lim\limits_{y\to\frac{\pi}{4}}\frac{1+3\sin 2y}{1-\cos 4y}$;

3) $\lim\limits_{z\to\frac{\sqrt{3}}{2}}\arccos z$; 4) $\lim\limits_{t\to 1}\frac{5}{\sin^2(t-1)}$;

5) $\lim\limits_{z\to 0}\frac{-2}{\sqrt{\operatorname{tg}3z}}$; 6) $\lim\limits_{y\to 2}\left(\frac{8}{y^2}\right)^{\frac{4}{y^2}}$;

7) $\lim\limits_{a\to+\infty}\frac{5}{2^{a+2}}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+1}{e^{\frac{1}{x^2}}}$;

9) $\lim\limits_{t\to -1}\frac{1}{\operatorname{ctg}^2(t+1)}$.

4.2.4. Знайти границі.

1) $\lim\limits_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}}$ та $\lim\limits_{x\to 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}}$;

2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}-0}\left(\frac{1}{3}\right)^{\operatorname{tg}2x}$ та $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}+0}\left(\frac{1}{3}\right)^{\operatorname{tg}2x}$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{1+e^x}$ та $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{1+e^x}$.

4.2.5. Знайти границі.

1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-6x+8}$; 2) $\lim\limits_{t\to -3}\frac{t^2+4t+3}{t^3-9t}$;

3) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x^3+3x^2+2x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$;

5) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x-2}$; 6) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^3+2x^2+3x+3}{x^3+x^2+x+1}$;

7) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^3+7x^2+15x+9}{x^3+8x^2+21x+18}$; 8) $\lim\limits_{y\to1}\frac{y^3-y^2+y-1}{y^3+5y^2-13y+7}$;

9) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+7x^2+10x}$; 10) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-x^2-x-2}{x^3-2x^2+x-2}$;

11) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^4+x^3+2x+2}{x^2-1}$; 12) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^4-1}{x^4-x^3+x-1}$.

4.2.6. Знайти границі.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+3x}{x^4-2x^2+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^4+4x}{x^2-5x+1}$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-2x^3}{1+x^3}$; 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3-x^2+3}{x^2-5x+6}$;

5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2+4x-9}{4x^3+6x^2-x+1}$; 6) $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{6z^2-5z+1}{2z^2+z-5}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\frac{5x^3-6x^2+3x}{x^5+x^2-3x}$; 8) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^4+2x^3+5x^2}{x^2+5x}$;

9) $\lim\limits_{t\to0+}\frac{2t^3+2t}{t^4-8t^2}$.

4.2.7. Знайти границі.

1) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to-2}\left(\frac{1}{x(x^2+4x+4)}-\frac{1}{x^3-3x+2}\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x+2}{x^2-5x+4}-\frac{x-4}{3(x^2-3x+2)}\right)$;

5) $\lim\limits_{y\to\infty}\left(\frac{6y^4}{3y^3+1}-2y\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2x^3}{4x^2-3}-\frac{2x^2}{4x+3}\right)$;

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2}{2x-1}-\frac{(2x+1)(3x^2+6x+1)}{3x^2}\right)$; 8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+\cdots+(x+100)^{10}}{x^{10}-100^{10}}$.

4.2.8. Знайти границі.

1) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{(x+3)\sqrt{1-x}}{9-x^2}$; 2) $\lim\limits_{y\to8}\frac{y-8}{\sqrt[3]{y}-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to-8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$;

5) $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$; 6) $\lim\limits_{x\to9}\frac{\sqrt[3]{x-1}-2}{x-9}$;

7) $\lim\limits_{z\to1}\frac{z^2-\sqrt{z}}{\sqrt{z}-1}$; 8) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$;

9) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$; 10) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+16}-4}{\sqrt{x^2+1}-1}$;

11)* $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}$;   12) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}}{x-1}$.

4.2.9. Знайти границі.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+10}-\sqrt{x}\right)$;   2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$;   4) $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\sqrt{t(t+2)}-t\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt[3]{1+x^2}}{\sqrt[4]{1+x^4}-\sqrt[5]{1+x^4}}$;   6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[5]{x^7+5}-\sqrt[4]{2x^3-3}}{\sqrt[6]{x^8+x^7+1}-x}$;

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^4+2}-\sqrt[5]{x^3+3}}{\sqrt[3]{x^7+1}}$.

4.2.10. Знайти границі.

1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{4x}$;   2) $\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin 5t}{\sin 6t}$;

3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 7x}{\operatorname{tg}2x}$;   4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{3\arcsin x}{2x}$;

5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{3x-\operatorname{arctg}x}{2x-\arcsin x}$;   6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{4x-\operatorname{tg}2x}{\arcsin 7x}$;

7) $\lim\limits_{z\to0}\frac{\sin z^2}{z\operatorname{arctg}5z}$;   8) $\lim\limits_{y\to0}\frac{\operatorname{tg}^2 y}{\sin 3y^2+\arcsin y}$;

9) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x+\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{5x-\sqrt{\sin 2x^2}}$;   10) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{e^{2x^2}-1}$;

11) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{9-x}-3}{3\operatorname{arctg}2x}$;   12) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin 2x}{\ln(e-2x)-1}$.

4.2.11. Знайти границі.

1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 6x}{5x^2}$;   2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 5x-\cos 4x}{x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{x\operatorname{tg}3x}$;   4) $\lim\limits_{z\to0}\frac{1-\cos^3 2z}{z\sin 3z}$;

5) $\lim\limits_{\alpha\to0}\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\sqrt{1-\cos 2\alpha}}$;   6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$;   8) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$;

9) $\lim\limits_{t\to0}\frac{1-\sqrt{\cos t}}{\arcsin t^2}$;   10) $\lim\limits_{y\to0}\frac{\sin(\alpha+y)-\sin\alpha}{y}$;

11) $\lim\limits_{z\to0}\frac{\operatorname{tg}2z}{\sqrt[3]{(1-\cos 3z)^2}}$;   12) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 4x+\operatorname{tg}^4\sqrt{x}}{3x^2-\operatorname{arctg}5x}$.

4.2.12. Знайти границі.

1) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 6x}{\sin 5x}$; 2) $\lim\limits_{t\to 1}\frac{\operatorname{tg} 4\pi t}{\sin 8\pi t}$;

3) $\lim\limits_{y\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin y}{\left(\frac{\pi}{2}-y\right)^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$;

5) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2+2x}{\operatorname{arctg}(x+2)}$; 6) $\lim\limits_{y\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos y}{\sqrt[3]{(1-\sin y)^2}}$;

7) $\lim\limits_{y\to\pi}\frac{\sin^2 x}{\cos 5x-\cos 3x}$; 8) $\lim\limits_{z\to 1}\frac{\operatorname{tg}^2 \pi z}{1+\cos \pi z}$;

9) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\operatorname{tg} \pi x}$; 10) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{1+\cos 2\pi x}{\operatorname{tg}^2 2\pi x}$;

11) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2^x-4}{\sin \pi x}$; 12) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2-\sqrt{5-x}}{\sin \pi x}$;

13) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-x-1}-1}{\ln(x-1)}$; 14) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1+\cos 5x}{\sin^2 3x}$.

4.2.13. Знайти границі.

1) $\lim\limits_{z\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-z\right)\operatorname{tg} z$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg} 2x \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{5\pi}{x}$; 4) $\lim\limits_{y\to\infty}(4-y)\operatorname{tg}\frac{2}{3y}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(\cos\frac{\pi}{x}-1\right)$; 6) $\lim\limits_{z\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg} 2z \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-z\right)$;

7) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+\sin x}{2x+\cos x}$.

4.2.14. Знайти границі.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin 2x}-\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$; 2) $\lim\limits_{y\to\frac{\pi}{2}}\left(2y\operatorname{tg} y-\frac{\pi}{\cos y}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}-\operatorname{tg}^2 x\right)$; 4) $\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 t}-\frac{10}{\sin^2 3t}\right)$.

4.2.15. Знайти границі.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+2}\right)^{x}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+3}{4x-5}\right)^{\frac{5x-1}{2}}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+5}\right)^{\frac{x+3}{2}}$;

6) $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{t-1}{t+5}\right)^{t^3+3}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3}{x^2-2}\right)^{-x^2}$;

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2+3}\right)^{\sqrt{x}+3}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+4}{x^2-x+1}\right)^{x-1}$;

10) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x+1}{2x-3}\right)^{x}$;

11) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x-1}{x+3}\right)^{x}$;

12) $\lim\limits_{z\to\pm\infty}\left(\frac{2z+5}{6z-4}\right)^{z+3}$;

13) $\lim\limits_{y\to\infty} y(\ln(y-1)-\ln(y+3))$;

14) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2(\ln(x+7)-\ln x)$.

4.2.16. Знайти границі.

1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{2}{\operatorname{tg} 3x}}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin^2 x)^{\frac{1}{2x^2}}$;

3) $\lim\limits_{t\to 0}\left(1-\operatorname{tg}^2\sqrt{t}\right)^{\frac{\sqrt{t}+1}{\arcsin 5t}}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(2+x)-\ln 2}{x}$;

6) $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{bx}$;

8) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^{x}-e}{x-1}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x^2}}-1\right)$;

11) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x-1}{x}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}$;

12) $\lim\limits_{y\to 1}(3y^2-2y)^{\frac{1}{y-1}}$;

13) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x}$;

14) $\lim\limits_{z\to 2}\left(\frac{\sin z}{\sin 2}\right)^{\frac{1}{z-2}}$;

15) $\lim\limits_{x\to 4\pi}(\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x\sin 2x}}$;

16) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}}$;

17) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\sin x}{\sin 1}\right)^{\frac{1}{x-1}}$;

18) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{3}{x}\right)^{\frac{1}{\ln(4-x)}}$;

19) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\cos 2x}}$;

20) $\lim\limits_{x\to 1}(3e^{x-1}-2)^{\frac{x}{x-1}}$;

21) $\lim\limits_{x\to 2\pi}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

4.2.17. Довести, що функція $f(x)$ є нескінченно малою, коли $x \to x_0$.

1) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 4} - 2,\ x_0 = 3;$

2) $f(x) = \frac{e^{x+1} - 1}{2x+3},\ x_0 = -1;$

3) $f(x) = (x + \cos x) \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right),\ x_0 = \frac{\pi}{12};$

4) $f(x) = \left(\frac{x^2+x}{x^2-2}\right)^{x^2+1},\ x_0 = 0.$

4.2.18. Довести, що нескінченно малі $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ еквівалентні, коли $x \to x_0$.

1) $\alpha(x) = \sqrt{1+x} - 1,\ \beta(x) = \frac{x}{2},\ x_0 = 0;$

2) $\alpha(x) = e^{2x} - 1,\ \beta(x) = 2x - \sin x,\ x_0 = 0;$

3) $\alpha(x) = e^{3x} - e^{x},\ \beta(x) = \sin 3x - \sin x, x_0 = 0;$

4) $\alpha(x) = \ln(1 + \sqrt{x \sin x}),\ \beta(x) = \text{arcsin}x,\ x_0 = 0;$

5) $\alpha(x) = e^{x} - \cos x,\ \beta(x) = \text{arctg}x,\ x_0 = 0;$

6) $\alpha(x) = \frac{1-x}{1+x},\ \beta(x) = 1 - \sqrt{x},\ x_0 = 1;$

7) $\alpha(x) = \frac{x-1}{3-x},\ \beta(x) = \frac{x^2-1}{x+3}, x_0 = 1;$

8) $\alpha(x) = \ln(x+3),\ \beta(x) = \text{tg}(x+2),\ x_0 = -2\ .$

4.2.19. Довести, що функція $\alpha(x)$ є нескінченно малою вищого порядку у порівнянні з $\beta(x)$ коли $x \to x_0$.

1) $\alpha(x) = \frac{2x^4 - x^3}{x+5},\ \beta(x) = x^2,\ x_0 = 0;$

2) $\alpha(x) = \sin^2 x,\ \beta(x) = \text{tg}\, 3x,\ x_0 = 0;$

3) $\alpha(x) = \text{tg}^3 x,\ \beta(x) = 1 - \cos 2x,\ x_0 = 0;$

4) $\alpha(x) = \text{arctg}^2 2x,\ \beta(x) = \ln(1+x),\ x_0 = 0;$

5) $\alpha(x) = \sin\left(\sqrt{1+x^2} - 1\right),\ \beta(x) = \arcsin\sqrt{x},\ x_0 = 0;$

6) $\alpha(x) = \arcsin\left(\sqrt{4+x^2} - 2\right),\ \beta(x) = \sqrt[3]{1+x} - 1,\ x_0 = 0;$

7) $\alpha(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3,\ \beta(x) = x^2 - 1,\ x_0 = 1;$

8) $\alpha(x) = (x-5)^2,\ \beta(x) = \sqrt{x-1} - 2,\ x_0 = 5.$

4.2.20. Довести, що нескінченно малі $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ одного порядку малості, коли $x \to x_0$.

1) $\alpha(x) = x^3 + 100x^2,\ \beta(x) = x^2,\ x_0 = 0;$

2) $\alpha(x) = \operatorname{tg} x - \sin x\,,\ \beta(x) = x^3,\ x_0 = 0;$

3) $\alpha(x) = \sqrt{1 + 2x^2} - 1,\ \beta(x) = \sin^2 x\,,\ x_0 = 0;$

4) $\alpha(x) = \ln(1 + 3x)\,,\ \beta(x) = \sqrt[3]{\arcsin x^3}\,,\ x_0 = 0;$

5) $\alpha(x) = 1 - \sqrt[3]{x},\ \beta(x) = 1 - x,\ x_0 = 1;$

6) $\alpha(x) = \sqrt[3]{e^x - e},\ \beta(x) = 5\sqrt[3]{x} - 5, x_0 = 1;$

7) $\alpha(x) = 1 + \cos x\,,\ \beta(x) = \operatorname{tg} x^2\,, x_0 = \pi;$

8) $\alpha(x) = \sqrt{e^{2\operatorname{tg} x} - 1},\ \beta(x) = e^{\sqrt{3x}} - 1,\ x_0 = 0.$

4.2.21. Порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ та $\beta(x)$, коли $x \to x_0$.

1) $\alpha(x) = \operatorname{tg} 3x\,,\ \beta(x) = \arcsin 2x\,,\ x_0 = 0;$

2) $\alpha(x) = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}} - 1,\ \beta(x) = x,\ x_0 = 0;$

3) $\alpha(x) = e^{x^2} - \cos x\,,\ \beta(x) = x,\ x_0 = 0;$

4) $\alpha(x) = \sqrt{\sin^2 x + x^4},\ \beta(x) = 1 - \cos x\,,\ x_0 = 0;$

5) $\alpha(x) = \ln(1 + x\sqrt{\sin x})\,,\ \beta(x) = \sqrt{x^5} + \sqrt{x^3},\ x_0 = 0;$

6) $\alpha(x) = \sin(x^2 - 2x + 1)\,,\ \beta(x) = (x - 1)^2, x_0 = 1;$

7) $\alpha(x) = 2^{x+1} - e^{x+1},\ \beta(x) = \sqrt{x + 1},\ x_0 = -1;$

8) $\alpha(x) = x^2 \sin\frac{1}{x},\ \beta(x) = x^2, x_0 = 0;$

9) $\alpha(x) = \frac{1-x}{1+x},\ \beta(x) = 1 - \sqrt{x},\ x_0 = 1.$

4.2.22. Визначити порядок малості нескінченно малої функції $\alpha(x)$ щодо нескінченно малої $\beta(x)$, коли $x \to 0$.

1) $\alpha(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt{x},\quad \beta(x) = x;$

2) $\alpha(x) = \frac{7x^{10}}{x^3+1},\quad \beta(x) = x;$

3) $\alpha(x) = x^3 + 1000x^2,\quad \beta(x) = x;$

4) $\alpha(x) = \operatorname{arctg} 3x\,,\ \beta(x) = \ln(1 + x^3);$

5) $\alpha(x) = e^{\sqrt{x}} - 1,\ \beta(x) = e^{\sin x} - 1.$

4.2.23. Знайти границі за допомогою таблиці еквівалентності нескінченно малих.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{e^{-2x}-1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 6x-\cos 2x}{\operatorname{arctg}^2 4x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\arcsin^2 x-\operatorname{arctg}^2 x}{\operatorname{tg} x-x^3-5x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 6x}-e^{\sin 4x}}{\arcsin 2x}$;

5) $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin 2y-\sin y}{\sqrt{1-4y^2}-1}$;

6) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+\operatorname{tg}^3 2t)}{\operatorname{tg} t\cdot\sin(t^2-3t^3)}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x-\sin^2 x}{x^2+\ln(1+3x)}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\sqrt{1+x^2}-1}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}+\ln(1+2x^2)+(1+\sin^2 x)^2-2}{\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)^4+x^4}$;

10) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(e^{x-1}-1)}{\ln x}$;

11) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\arcsin(x^3-3x^2+4)}{\sqrt[3]{1+\operatorname{arctg}(x-2)}-1}$;

12) $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{(1-y)^2}-1}{(1+y)^2\sqrt{(1+y)^5}-1}$;

13) $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\ln\cos 2y}{\cos 8y+e^{\sin 3y^2}-2}$;

14) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1+x-3x^2+2x^3)}{\ln(1+3x-4x^2+x^3)}$;

15) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sqrt{25+6z}-5}{\sqrt[3]{27+4z}-3}$;

16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(e^x-e^{-x})}{e^{x^3}-e}$;

17) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\operatorname{tg}\left(3^{\frac{\pi}{x}}-3\right)}{3^{\cos\frac{3x}{2}}-1}$;

18) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\ln(2+\cos x)}{\left(3^{\sin x}-1\right)^2}$;

19) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(5-2x)}{\sqrt{10-3x}-2}$;

20) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{tg}(\ln(3x-5))}{e^{x+3}-e^{x^2+1}}$;

21) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin\left(\sqrt{2x^2-3x-5)}-\sqrt{1+x}\right)}{\ln(x-1)-\ln(x+1)+\ln 2}$.

Відповіді.

Тема 4.3. Неперервні функції. Класифікація розривів функції.

Функція $f(x)$ називається неперервною в точці $x_0 \in D(f)$ тоді і лише тоді, коли

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

Точки розриву функції та їх класифікація

Якщо в деякій точці $x = x_0$ функція $f(x)$ не є неперервною, то така функція називається ***розривною в точці*** x_0, або кажуть, що точка x_0 є ***точкою розриву*** функції $f(x)$.

Класифікація точок розриву

1. Якщо правостороння та лівостороння границі існують, але не рівні між собою

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = a \in R, \lim_{x\to x_0-0} f(x) = b \in \mathbb{R} \text{ та } a \neq b \text{ ,}$$

то точка x_0 називається ***точкою розриву першого роду типу стрибок***.

2. Якщо $f(x_0)$ не існує, а правостороння та лівостороння границі існують і рівні

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = a \in \mathbb{R}$$

то точка x_0 називається ***точкою розриву першого роду типу усувна (точкою усувного розриву)***.

3. Якщо хоча б одна з $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ та $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ дорівнює $\pm\infty$ або не існує, то точка x_0 називається ***точкою розриву другого роду***.

Властивості функцій, неперервних на відрізку

Теорема 1. (Перша теорема Вейєрштрасса)

Якщо $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, $a \leq x \leq b$, то вона обмежена на відрізку $[a, b]$.

Теорема 2. (Друга теорема Вейєрштрасса)

Якщо $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, $a \leq x \leq b$, то існує хоча б одна точка x^* така, що $\forall x \in [a, b]$: $f(x^*) \geq f(x)$ та існує хоча б одна точка x_* така, що $\forall x \in [a, b]$: $f(x_*) \leq f(x)$.

За цих обставин ми називаємо значення $f(x^*)$ найбільшим значенням функції $y = f(x)$ на відрізку $[a,b]\left(\max\limits_{[a,b]} f(x) = f(x^*)\right)$, а значення $f(x_*)$ найменшим значенням функції $y = f(x)$ на відрізку $[a,b]$ $\left(\min\limits_{[a,b]} f(x) = f(x_*)\right)$.

Теорема 3. (Перша теорема Больцано-Коші)

Якщо $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, $a \leq x \leq b$ і виконується одна з нерівностей $f(a) < 0 < f(b)$ або $f(b) < 0 < f(a)$, тоді існує хоча б одна точка x_0 така, що $f(x_0) = 0$.

Теорема 4. (Друга теорема Больцано-Коші)

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, $a \leq x \leq b$ і $f(a) \neq f(b)$, то для довільного числа C такого, що $f(a) \leq C \leq f(b)$, існує точка $x = c, a < c < b$ така, що $f(c) = C$.

4.3.1. Функцію задано формулою

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}, & \text{коли } x \neq 3, \\ A, & \text{коли } x = 3. \end{cases}$$

За якого значення A функція $f(x)$ буде неперервною в точці $x = 3$?

4.3.2. За якого значення числа a функція

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 1, \\ 3 - ax^2, & x > 1 \end{cases}$$

буде неперервною?

4.3.3. Функцію задано формулою

$$f(x) = 1 - x \sin\frac{1}{x} .$$

Яким значенням треба довизначити функцію $f(x)$, щоб вона стала неперервною в точці $x = 0$?

4.3.4. Дослідити задані функції $f(x)$ та $g(x)$ на неперервність. Відповісти на питання.

1) Яким значенням треба довизначити функцію $f(x) = x\operatorname{arctg}\frac{1}{(x-2)^2}$, щоб вона стала неперервною в точці $x = 2$?

2) Чи можливо довизначити функцію $g(x) = x\operatorname{arctg}\frac{1}{x-2}$, щоб вона стала неперервною в точці $x = 2$?

4.3.5. Дослідити на неперервність функції.

1) $y = \frac{x+1}{x^2+x-6}$;
2) $y = \frac{x^3-8}{x-2}$;
3) $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{3-x}$;
4) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x-2}}$;
5) $y = 1 - 2^{\frac{1}{x-1}}$;
6) $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$;
7) $y = 4^{\frac{1}{x^2-9}}$;
8) $y = \frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$;
9) $y = \frac{7^{\frac{1}{x}}-1}{7^{\frac{1}{x}}+1}$;
10) $y = \frac{2}{1-3^{3+x}}$;
11) $y = \frac{1}{1+2^{\operatorname{tg}x}}$;
12) $y = \frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$;
13) $y = \frac{x}{\sin x}$;
14) $y = \frac{1}{x}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{x}$;
15) $y = \frac{2}{\lg|2x-3|} - 1$;
16) $y = \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$;
17) $y = \frac{|2x+3|}{2x+3}$;
18) $y = \frac{|x|-x}{x^2}$.

4.3.6. Дослідити на неперервність функції та побудувати їх графіки.

1) $y = \begin{cases} 3x^2, & x \le -1, \\ x+2, & x > -1; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} 4-x^2, & x < 2, \\ -1, & x \ge 2; \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} 1+x, & -\infty < x \le -1, \\ 2, & -1 < x \le 2, \\ -2x+6, & 2 < x < +\infty; \end{cases}$

$$4)\ y=\begin{cases}1-x^2, & -\infty<x<0,\\ \frac{6}{x}, & 0<x\le 3,\\ x-2, & 3<x<+\infty;\end{cases}$$

$$5)\ y=\begin{cases}\sin x\,, & -\infty<x<-\frac{\pi}{2},\\ \left(\frac{x}{\pi}\right)^3, & -\frac{\pi}{2}<x<\pi,\\ -\cos x\,, & \pi<x<+\infty;\end{cases}$$

$$6)\ y=\begin{cases}\frac{1}{1-x}, & -\infty<x<1,\\ \ln(x-1)\,, & 1<x\le 2,\\ (x-2)^2, & 2<x<+\infty;\end{cases}$$

$$7)\ y=\begin{cases}0, & -\infty<x<0,\\ x, & 0\le x<1,\\ -x^2+4x-2, & 1\le x<3,\\ 4-x, & 3\le x<+\infty.\end{cases}$$

4.3.7. Довести існування оберненої до $f(x)$ функції в заданій області ($x \in D$). Знайти обернену функцію та вказати її область визначення (у відповідності до області D).

1) $f(x) = x^2 + 2x + 2,\ \ x \in [1, +\infty);$

2) $f(x) = \ln(1 - x)\,,\ \ x \in [-1,1);$

3) $f(x) = \mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right),\ \ x \in \left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right).$

4.3.8. Встановити, чи буде функція $f(x)$ обмежена на відрізку $[a, b]$.

1) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-2x+1},\ \ x \in [-5, 0];$

2) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3x-4},\ \ x \in [0, 5];$

3) $f(x) = x^2 \ln(x^2 - 1) + x\,,\ \ x \in [-2, 2];$

4) $f(x) = x \sin\frac{1}{x} + 1,\ \ x \in [0, 1].$

4.3.9. Довести, що функція $f(x)$ досягає своїх найбільшого та найменшого значень на відрізку $[a, b]$.

1) $f(x) = x^3 - 2x + 1,\ \ x \in [0, 3];$

2) $f(x) = x \ln(x + 1) + 2,\ \ x \in [0, 5];$

3) $f(x) = \sin x^2 + \cos^2 x\,,\ \ x \in [0,\ \pi].$

4.3.10. Показати, що функція $f(x)$ набуває нульового значення хоча б в одній точці на відрізку $[a, b]$.

1) $f(x) = 2^x - 4x,\ \ x \in [0, 1];$

2) $f(x) = x^4 - x - 1,\ \ x \in [-1, 0];$

3) $f(x) = x^2 \ln x - x,\ \ x \in [1, 2].$

4.3.11. Показати, що рівняння має хоча б один корінь, що належить відрізку $[a, b]$.

1) $x^5 - 3x = 1,\ \ x \in [0, 3];$

2) $x2^x = 1,\ \ x \in [-2, 2];$

3) $x = \frac{1}{2}\sin x + 3,\ \ x \in [-1, 4].$

Встановити відрізок $[n, n+1] \subset [a, b]$, де n – ціле число, до якого належить корінь заданого рівняння.

4.3.12. Показати, що існує розв’язок рівняння $f(x) = C$, що належить відрізку $[a, b]$. Встановити кількість коренів та відрізки вигляду $[n, n+1] \subset [a, b]$, де n – ціле число, до яких належать ці корені.

1) $f(x) = x^2 e^x + 2,\ C = \frac{5}{2}, x \in [-4, -1];$

2) $f(x) = x^2 + \cos 2x\,,\ \ C = -1,\ x \in [0, 2];$

3) $f(x) = x - \ln(x^2 - 1)\,,\ \ C = 2,\ x \in [-2, 6].$

Відповіді.

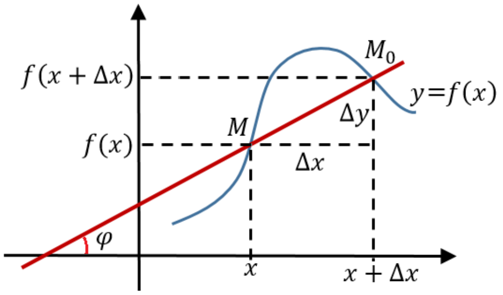
Розділ 5. Диференціальне числення функцій однієї змінної.

Тема 5.1. Похідні та диференціали функції однієї змінної.

Середньою швидкістю зміни функції $y = f(x)$ на інтервалі $[x, x + \Delta x]$ називається відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Пряма лінія, яка проходить через дві точки M і M_0 на графіку функції $y = f(x)$, називається ***січною***. Положення січної лінії визначається $\operatorname{tg}\varphi$ - кутовим коефіцієнтом нахилу прямої:



$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Миттєву швидкість зміни функції $y = f(x)$ називають похідною функції і позначають

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Похідна функції в точці $x = x_0$ задається наступним чином:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

5.1.1. Знайти приріст Δy функції $y = f(x)$ у точці $x = x_0$, якщо задано приріст аргументу Δx.

1) $y = x^2, \quad x_0 = 1, \quad \Delta x = 0{,}1;$

2) $y = \ln(x + 1), \quad x_0 = 2, \quad \Delta x = 0{,}4;$

3) $y = \frac{x-1}{x+1}, \quad x_0 = -2, \quad \Delta x = 0{,}1;$

4) $y = \sin 2x, \quad x_0 = a, \quad \Delta x = \frac{\pi}{4}.$

5.1.2. Знайти відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ для функції $y = f(x)$ у точці $x = x_0$, якщо задано приріст аргументу Δx.

1) $y = 2x^3 - x^2 + 1, \quad x_0 = 1, \quad \Delta x = 0{,}1;$

2) $y = \sqrt[3]{2x - 1}, \quad x_0 = 1, \quad \Delta x = 0{,}4;$

3) $y = 2^x, \quad x_0 = -1, \quad \Delta x = 0{,}5;$

4) $y = \cos x\,, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \Delta x = \frac{\pi}{6}.$

5.1.3. Знайти приріст Δy в точці $x = x_0$, як функцію Δx ($\Delta y(x_0, \Delta x)$).

1) $y = 2x^2 + 5, \quad x_0 = 1;$ 2) $y = \sqrt{x + 1}, \quad x_0 = 0;$

3) $y = \log_2 x\,, \quad x_0 = 1;$ 4) $y = \operatorname{tg} x\,, \quad x_0 = \frac{\pi}{3}.$

Знайти границю відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, якщо $\Delta x \to 0$.

5.1.4. Знайти похідну функції $y = f(x)$ у точці $x = x_0$, користуючись означенням.

1) $y = x^3, \quad x_0 = 2;$

2) $y = \sqrt[3]{x}, \quad x_0 = 1;$

3) $y = e^{2x}, \quad x_0 = 0;$

4) $y = \cos x\,, \quad x_0 = \frac{\pi}{6}.$

5.1.5. Знайти кутовий коефіцієнт січної до кривої $y = f(x)$, якщо абсциси точок перетину дорівнюють x_1 і x_2.

1) $y = \frac{1}{x}, \quad x_1 = 3, \; x_2 = 5;$

2) $y = \sqrt{2x + 1}, \quad x_1 = 4, \; x_2 = 7{,}5;$

3) $y = \operatorname{tg} x\,, \quad x_1 = \frac{\pi}{6}, \; x_2 = \frac{\pi}{3};$

4) $y = x^2 + 2x, \quad x_1 = 0, \; x_2 = 0{,}5.$

5.1.6. Тіло рухається прямолінійно за законом $S(t) = t^3 + 3t^2 + 2$, де шлях подано в сантиметрах, а час – у хвилинах. Знайти середню швидкість руху:

1) за перші 2 хвилини;

2) за проміжок часу від $t = 2$ хв. до $t = 3$ хв.

5.1.7. Спортсмен пробігає стометрівку так, що відстань S після t секунд дорівнює $S(t) = \frac{1}{5}t^2 + 8t$. Знайти середню швидкість спортсмена:

1) за перші 4 секунди; 2) на фініші.

5.1.8. З повітряної кулі, що знаходиться на висоті 160 метрів над землею, скинули мішок з піском. Після t секунд мішок буде знаходитися на висоті $160 - 16t^2$ метрів над землею.

1) Знайти формулу для обчислення середньої швидкості на проміжку часу від $t = a$ сек. до $t = b$ сек.

2) Користуючись формулою, обчислити середню швидкість протягом усього часу падіння.

3) Користуючись означенням похідної, знайти формулу для обчислення швидкості у будь-який момент часу.

5.1.9. Тонкий неоднорідний стержень AB має довжину $L = 20$ см. Маса відрізка AM зростає пропорційно квадрату відстані точки M від точки A, причому відомо, що маса відрізка $AM = 2$ см дорівнює 8 гр. Знайти:

1) середню лінійну густину відрізка $AB = 2$ см;

2) середню лінійну густину усього відрізка AB;

3) густину стержня в точці M.

5.1.10. За законом Бойля-Маріотта маємо, що при постійній температурі й масі газу добуток тиску газу на його об'єм постійний, тобто тиск та об'єм газу зв'язані співвідношенням $P = \frac{C}{V}$, де $C -$ деяка константа. Якщо, для певного газу, $C = 200$ і V збільшується, знайти, користуючись означенням похідної, швидкість зміни тиску P від об'єму V.

5.1.11. Користуючись означенням похідної, знайти швидкість зміни площі поверхні S кулі під час надування, в залежності від радіуса R. Знайти значення швидкості для $R = 2$ см.

Основні правила обчислення похідних

Нехай нам задано дві функції $u(x)$, $v(x)$, тоді

$$[c \cdot u(x)]' = c \cdot u'(x), \quad \text{де} \quad c - const$$

$$[u(x) \pm \ v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$$

$$[u(x) \cdot \ v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

Таблиця похідних

$\boldsymbol{y(x)}$	$\boldsymbol{y'(x)}$	$\boldsymbol{y(x)}$	$\boldsymbol{y'(x)}$	$\boldsymbol{y(x)}$	$\boldsymbol{y'(x)}$
c	0	$\cos x$	$-\sin x$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
x^n	nx^{n-1}	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
a^x	$a^x \ln a$	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
e^x	e^x	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arccosec} x$	$-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$[f(x)]^n$	$n[f(x)]^{n-1}f'(x)$
$\lg x$	$\frac{1}{x\ln 10}$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\ln f(x)$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$
$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{arcsec} x$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

Похідна складеної функції

Нехай $y = f(u)$ і $u = u(x)$, тобто $y = f(u(x))$, де функції f та u мають похідні, тоді

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \quad \text{або} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

5.1.12. Знайти похідні.

1) $y = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x + 4;$

2) $y = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2}$;

3) $y=\sqrt{x}-\frac{1}{x}+\sqrt[4]{5}$;

4) $y=0{,}4\sqrt[4]{x}-\frac{x^3}{0{,}3}+\frac{0{,}1}{x^2}$;

5) $y=(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)$;

6) $y=\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)$;

7) $y=\left(\sqrt[3]{x}+6\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+3x\right)$;

8) $y=\frac{x+1}{x-1}$;

9) $s=\frac{3t^2+1}{t-1}$;

10) $y=\frac{2x+1}{\sqrt[3]{x+4}}$;

11) $y=\frac{2x^3-3x+\sqrt{x}-1}{x}$, знайти $y'\left(\frac{1}{4}\right)$;

12) $s(t)=\frac{3}{5-t}+\frac{t^2}{5}$, знайти $s'(0)$ та $s'(2)$;

13) $F(x)=(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)$, знайти $F'(0)$, $F'(1)$ та $F'(2)$.

5.1.13. Знайти похідні.

1) $y=2x\sin x-(x^2-2)\cos x$;

2) $y=2x+5\cos^3 x$;

3) $y=\frac{x}{\cos x+\sin x}$;

4) $y=\frac{x}{1+x^2}-\operatorname{arctg} x$;

5) $y=\frac{x\sin x}{1+\operatorname{tg} x}$;

6) $y=\sqrt{1+2\operatorname{tg} x}$;

7) $y=\sin^2(\cos 3x)$;

8) $y=\operatorname{ctg}\sqrt[3]{1+x^2}$;

9) $y=\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}$;

10) $y=\operatorname{tg} t-\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 t+\frac{1}{7}\operatorname{tg}^7 t$;

11) $y=\sin(x^2-5x+1)+\operatorname{tg}\frac{6}{x}$;

12) $y = \frac{x^2 - \operatorname{ctg} 2x}{\sin 3x}$.

5.1.14. Знайти похідні.

1) $y = \ln(1 - x^2)$;

2) $y = \log_3(x^2 - 1)$;

3) $y = \log_2 \sin 2x$;

4) $y = \sqrt{\ln x + 1} + \ln(1 + \sqrt{x})$;

5) $y = \log_2 \log_3(\log_5 x)$;

6) $y = \sqrt[3]{\ln \sin \frac{x+3}{4}}$;

7) $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

5.1.15. Знайти похідні.

1) $y = \left(1 - 2\sqrt{x}\right)^5$;

2) $y = \sqrt{xe^x + x}$;

3) $y = \frac{1-10^x}{1+10^x}$;

4) $y = \sqrt[3]{2e^x - 3^x + 1} + \ln^6 x$;

5) $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$;

6) $y = 10^{1-\sin^4 3x}$;

7) $y = e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}$.

5.1.16. Знайти похідні.

1) $y = x \arcsin x$;

2) $y = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$;

3) $y = \frac{(1+x^2)\operatorname{arctg} x - x}{2}$;

4) $y = \sqrt{1 + \arcsin x}$;

5) $y = \arcsin \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;

6) $y = \frac{1}{\operatorname{arctg} e^{-2x}}$;

7) $y = \sqrt{\operatorname{arcctg} x} - \arccos^3 x$;

8) $y = \operatorname{arctg}\left(x - \sqrt{1 + x^2}\right)$.

5.1.17. Знайти похідні.

1) $y = \frac{x^2}{\operatorname{ch} x}$;

2) $y = \operatorname{th} x - x$;

3) $y = \frac{3\operatorname{cth} x}{\ln x}$;

4) $y = \operatorname{sh}^3 x$;

5) $y = e^{\operatorname{ch}^2 x} + \sqrt{\operatorname{ch} x}$;

6) $y = \operatorname{th}(\ln x) + \ln \operatorname{ch}(2x)$.

5.1.18. Знайти похідні.

1) $y = e^x \cdot \sin x \cdot \cos^3 x$;

2) $y = \sqrt[11]{9 + 6\sqrt[5]{x^9}}$;

3) $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$;

4) $y = \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{ctg} x \cdot \ln(1 + \sin x) - x$;

5) $y = \ln \sin \sqrt[3]{\operatorname{arctg} e^{3x}}$;

6) $y = \ln \cos \operatorname{arctg}\frac{e^x - e^{-x}}{2}$;

7) $y = -\frac{x}{1+8x^3} + \frac{1}{12}\ln\frac{(1+2x)^2}{1-2x+4x^2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\frac{4x-1}{\sqrt{3}}$;

8) $y = \frac{2}{3}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{1-x^2}$.

5.1.19. Довести, що функція $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ задовольняє співвідношення

$$(1 - x^2)y' - xy = 1.$$

5.1.20. Довести, що функція $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + 1} + \ln\sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}}$ задовольняє співвідношення $2y = xy' + \ln y'$.

5.1.21. Обчислити суму:

1) $1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1},\ x \neq 1$;

2) $2 + 2 \cdot 3x + 3 \cdot 4x^2 + \cdots + (n-1)nx^{n-2},\ x \neq 1$.

Похідна оберненої функції

Якщо для заданої функції $y = f(x)$ існує обернена функція $x = \varphi(y)$, то

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{або} \quad x'_y = \frac{1}{y'_x}, \quad y'_x \neq 0.$$

5.1.22. Використовуючи похідну оберненої функції, розв'язати задачі.

1) $x = e^{\arcsin y}$, знайти $\frac{dy}{dx}$ через y; через x.

2) $s = te^{-t}$, знайти $\frac{dt}{ds}$.

3) $y = \frac{1-x^4}{1+x^4}$, знайти $\frac{dx}{dy}$ через x; через y.

Перевірити справедливість співвідношення

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1.$$

4) Перевірити справедливість співвідношення

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1,$$

якщо x та y зв'язані залежністю

$$y = \ln(x^2 - 1).$$

5) $x = y^3 - 4y + 1$, знайти $\frac{dy}{dx}$.

6) $t = \arcsin 2^s$, знайти s'.

Похідна функції, що задана неявно

Нехай функція $y = y(x)$ задана неявно рівнянням $F(x, y) = 0$. Щоб знайти похідну неявно заданої функції, потрібно продиференціювати за змінною x обидві частини рівняння $F(x, y) = 0$, вважаючи y функцією від x, і отримане рівняння розв'язати відносно y'.

5.1.23. Обчислити похідну $\frac{dy}{dx} = y'_x$ неявно заданих функцій.

1) $x^2 + y^2 - 3axy = 0\,, a = const$; 2) $y = 1 + xe^y$;

3) $\cos xy = x$; 4) $y = \sin(x + y)$;

5) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}\,, a=const;$

6) $2^x+2^y=2^{x+y};$

7) $y=x+\text{arctg}y;$

8) $x-y=\text{arcsin}x-\text{arcsin}y;$

9) $x^y=y^x;$

10) $x\sin y-\cos y+\cos 2y=0;$

11) $2y\ln y=x;$

12) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$

13) $\sin(xy)+\cos(xy)=\text{tg}(x+y)\,.$

Похідна функції, що задана параметрично

Нехай функція задана параметрично рівняннями $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}$ де t –параметр. Тоді похідна обчислюється за формулою:

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}\,.$$

5.1.24. Обчислити похідну $\frac{dy}{dx}=y'_x$ функцій, заданих параметрично.

1) $\begin{cases}x=a\sin\varphi\,,\\ y=b\cos\varphi\,,\end{cases}$ $\{a,b\}=const>0.$

2) $\begin{cases}x=3\cos^2\varphi\,,\\ y=2\sin^2\varphi.\end{cases}$

3) $\begin{cases}x=a\cdot(\varphi-\sin\varphi),\\ y=a\cdot(1-\cos\varphi),\end{cases}$ $a=const>0.$

4) $\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\,,\\ y=t-\text{arctg}t\,.\end{cases}$

5) $\begin{cases}x=\frac{1+t^3}{t^2-1},\\ y=\frac{1}{t^2-1}.\end{cases}$

6) $\begin{cases}x=e^t\sin t\,,\\ y=e^t\cos t\,.\end{cases}$

7) $\begin{cases}x=\frac{3at}{1+t^3},\\ y=\frac{3at^2}{1+t^3}.\end{cases}$

8) Знайти $\frac{dy}{dx}=y'_x$ та $y'_x|_{t=\frac{\pi}{4}}$ для $\begin{cases}x=\text{tg}t+t,\\ y=\frac{1}{\cos^2 t}.\end{cases}$

Логарифмічне диференціювання

Нехай задана степенево-показникова функція

$$y = [u(x)]^{v(x)},$$

де $u(x)$ та $v(x)$ –диференційовні функції.

Тоді

$$\ln y = v(x) \ln u(x).$$

Диференціюючи обидві частини даної рівності, отримуємо:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{1}{u(x)} u'(x).$$

Звідси для похідної маємо рівність

$$y' = \left[v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{1}{u(x)} u'(x)\right] \cdot y = \left[v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{1}{u(x)} u'(x)\right] \cdot [u(x)]^{v(x)}.$$

5.1.25. Обчислити похідні функцій.

1) $y = (\sin x)^{\cos x}$; 2) $y = (\ln x)^x$;

3) $y = x^3 e^{x^2} \sin 2x$; 4) $y = \frac{(x-2)^2 \sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^3}$;

5) $y = x^{x^2}$; 6) $y = x^{x^x}$;

7) $y = \frac{(x+1)^3 \sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2 (x+4)^2}}$.

Похідні вищих порядків явно заданої функції

$$y''(x) = [y'(x)]'; y'''(x) = [y''(x)]', \ldots, y^{(n)}(x) = \left[y^{(n-1)}(x)\right]'.$$

Для похідної n –го порядку добутку функцій $u(x)v(x)$ має місце формула Лейбніца:

$$[u(x)v(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}(x) \cdot v^{(k)}(x),$$

де $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$.

Наведемо формули похідних n –го порядку для деяких функцій:

$$(a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n,$$

$$(x^m)^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}, \ \ n \le m; m, n \in N, \\ 0\,, \ \ \ n > m, \end{cases}$$

$$(\log_a x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n \ln a} \ ,$$

$$\left(\frac{1}{x-a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}} \ ,$$

$$(\sin \alpha x)^{(n)} = \alpha^n \sin\left(\alpha x + \frac{\pi n}{2}\right), \qquad (\cos \alpha x)^{(n)} = \alpha^n \cos\left(\alpha x + \frac{\pi n}{2}\right).$$

5.1.26. Знайти похідні вищих порядків.

1) $y = (x^2+1)\sin x,\ y^{(20)}(x) = ?$

2) $y = (x^3+2)e^{4x+3}, \quad y^{(4)}(x) = ?$

3) $y = \frac{x-3}{x^2-3x+2}, \quad y^{(n)}(x) = ?$

4) $y = \mathrm{arctg}x,\ y''(1) = ?$

5) $y = x^3 \ln x$, знайти $y^{(4)}(1) = ?$

6) $y = \frac{1}{1-x}, \quad y^{(n)}(x) = ?$

5.1.27. Знайти похідні вищих порядків.

1) $y = (x^2+1)^3$, знайти y'';

2) $y = (1+x^2)\mathrm{arctg}x$, знайти y'';

3) $y = \sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x$, знайти y'';

4) $y = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$, знайти y'';

5) $y = e^{\sqrt{x}}$, знайти y'';

6) $y = x^x$, знайти y'';

7) $y = x \ln x$, знайти $y^{(n)}$;

8) $y = \frac{x}{x^2-1}$, знайти $y^{(n)}$;

9) $y = \frac{1}{x^2-3x+2}$, знайти $y^{(n)}$.

5.1.28.

1) Довести, що функція $y = e^x \sin x$ задовольняє співвідношення

$$y'' - 2y' + 2y = 0,$$

а функція $y = e^{-x}\sin x$ – співвідношення $y'' + 2y' + 2y = 0$.

2) Довести, що функція $y = \frac{x-3}{x+4}$ задовольняє співвідношення

$$2(y')^2 = (y-1)y''.$$

3) Довести, що функція $y = (x^2-1)^n$ задовольняє співвідношення

$$(x^2-1)y^{(n+2)} + 2xy^{(n+1)} - n(n+1)y^{(n)} = 0.$$

Похідні вищих порядків від функцій, заданих неявно

Для того щоб знайти похідну другого порядку y'' функції $y = y(x)$, яка задана в неявному вигляді $F(x, y) = 0$, потрібно знайти першу похідну, а потім продиференціювати отриману тотожність за x і в отримане співвідношення підставити вираз для першої похідної.

Продовжуючи диференціювання, можна отримати одну за одною послідовно похідні вищих порядків, причому всі вони будуть виражені через незалежну змінну x і функцію y.

5.1.29. Знайти похідні вказаного порядку.

1) $y^3 + x^3 - 3axy = 0$, знайти y'';

2) $e^{x+y} = xy$, знайти y'';

3) $s = 1 + te^s$, знайти $\frac{d^2s}{dt^2}$.

4) $x^2 + y^2 = r^2$; $\frac{d^3y}{dx^3} = ?$

5) $y = \sin(x+y)$, знайти y''.

Похідні вищих порядків функцій, заданих параметрично

Якщо функція $y = f(x)$, яку задано параметрично рівняннями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, диференційовна на (a, b) $(t \in (\alpha, \beta)$), то похідні функції $f(x)$ обчислюються за формулами

$$y'_x(t) = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_{x^2}(t) = \left(y'_x(t)\right)'_t \frac{1}{x'_t} = \frac{y''_{t^2} \cdot x'_t - x''_{t^2} \cdot y'_t}{(x'_t)^3}, \quad \dots \; y^{(n)}_{x^n}(t) = \left(y^{(n-1)}_{x^{n-1}}(t)\right)'_t \frac{1}{x'_t}.$$

5.1.30. Знайти похідні другого порядку $\left(\frac{d^2y}{dx^2}=?\right)$.

1) $\begin{cases} x=\ln t\,, \\ y=t^3-1. \end{cases}$
2) $\begin{cases} x=a\cos t\,, \\ y=b\sin t. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x=a(\varphi-\sin\varphi)\,, \\ y=a(1-\cos\varphi). \end{cases}$
4) $\begin{cases} x=a\cos^3 t\,, \\ y=a\sin^3 t. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x=\arcsin t\,, \\ y=\ln(1-t^2). \end{cases}$
6) $\begin{cases} x=at\cos t\,, \\ y=at\sin t. \end{cases}$

5.1.31.

1) Довести, що функція $y=f(x)$, яка задана параметрично рівняннями $x=3t^2, y=3t-t^3$, задовольняє рівність

$$36y''\left(y-\sqrt{3x}\right)=x+3.$$

2) Довести, що функція $y=f(x)$, яка задана параметрично рівняннями $x=e^t\text{sin}t, y=e^t\text{cos}t$, задовольняє рівність

$$y''(x+y)^2=2(xy'-y).$$

Диференціал функції

Диференціал функції першого порядку

Якщо відома похідна $f'(x)$ функції $y=f(x)$, то її диференціал знаходиться за формулою

$$df(x)=f'(x)dx.$$

Диференціали вищих порядків

Диференціали вищих порядків позначають так:

$$d^2y=d(dy);\ d^ny=d(d^{n-1}y).$$

Диференціали порядку вище першого не мають властивості інваріантності (на відміну від диференціала першого порядку).

Якщо x –незалежна змінна, то

$$d^2y=d(y'dx)=y''(dx)^2+y'd(dx)=y''(dx)^2,$$

якщо ж $x=\varphi(t)$, то

$$d^2y=d(y'dx)=y''(dx)^2+y'd(dx)=y''(dx)^2+y'd^2x\ .$$

5.1.32. Знайти диференціали функцій.

1) $y=\sqrt{1+\operatorname{ctg}3x}$;

2) $y=(x^2+4x+1)\left(x^2-\sqrt{x}\right)$;

3) $y=\frac{x^3+1}{x^3-1}$;

4) $y=\left(x^2-2\sqrt{x}+2\right)^3$;

5) $y=e^{\ln\operatorname{tg}x}$;

6) $y=2^{-\frac{1}{\cos x}}$;

7) $y=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}\right)$;

8) $y=\sqrt{\operatorname{arctg}x}-(\arcsin x)^2$;

9) $y=3\arcsin x-4\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\arccos x-\frac{7}{2}\operatorname{arcctg}x$;

10) $\rho=k\sqrt{\cos 2\varphi}$.

5.1.33. Знайти диференціали складеної функції.

1) $s=\cos^2 z,\ z=\frac{t^2-1}{4}$;

2) $s=e^z,\ z=\frac{1}{2}\ln t,\ t=2u^2-3u+1$;

3) $z=\operatorname{arctg}v,\ v=\frac{1}{\operatorname{tg}s}$.

5.1.34. Обчислити наближено за формулою

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x.$$

1) $y(x)=e^{0{,}1x(1-x)}, y(1{,}05)=?$

2) $(1{,}03)^6$;

3) $\sqrt[5]{31}$;

4) $\sqrt{\frac{x+3}{x}}$, $y(1{,}04)=?$

5) $\sqrt{\frac{(2{,}037)^2-3}{(2{,}037)^2+5}}$;

6) $\operatorname{arctg}(0{,}97)$;

7) $\operatorname{arctg}(1{,}02)$;

8) $\arcsin(0{,}4983)$;

9) $\sin 44°$.

5.1.35. Знайти наближене значення приросту функції $y = \operatorname{tg} x$ у разі зміни x від 45° до $45^\circ 10'$.

5.1.36. Знайти диференціали від функцій.

1) $y = (x+1)^3(x-1)^2$, знайти d^2y;

2) $y = 4^{-x^2}$, знайти d^2y;

3) $y = \sqrt{\ln^2 x - 4}$, знайти d^2y;

4) $\rho^2\cos^3\varphi - a^2\sin^3\varphi = 0$, знайти $d^2\rho$;

5) $y = \ln\frac{1-x^2}{1+x^2}$, $x = \operatorname{tg} t$, знайти d^2y через:

а)x і dx; б) t i dt;

6) $y = \sin z$, $z = a^x$, $x = t^3$, знайти d^2y через:

а)z і dz; б) x i dx; в) t i dt;

7) $y = x^m$, знайти d^3y;

8) $y = \cos^2 x$, знайти d^3y.

Відповіді.

Тема 5.2. Застосування похідних функції однієї змінної.

Основні теореми диференціального числення

Теорема Ролля.

Нехай функція $y = f(x)$ є неперервно-диференційовною на відрізку $[a; b]$ та на кінцях цього відрізка набуває однакових значень: $f(a) = f(b)$, тоді існує хоча б одна точка $c \in (a; b)$, в якій похідна цієї функції дорівнює нулю: $f'(c) = 0$.

Теорема Коші.

Нехай задано дві функції $y = f(x)$, $y = g(x)$ які є неперервно-диференційовними на відрізку $(a; b)$ і похідна $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a; b)$, тоді існує точка $c \in (a; b)$ в якій виконується рівність

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Теорема Лагранжа.

Нехай функція $y = f(x)$ - неперервно-диференційовна на відрізку $(a; b)$. Тоді знайдеться така точка $c \in (a; b)$, що виконується рівність

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$

Ця формула називається формулою Лагранжа (або формулою скінченних приростів).

5.2.1. Перевірити виконання теореми Ролля для функції $f(x) = x - x^3$ на $[-1; 0]$ та $[0; 1]$, знайти точки c_1 та c_2, в яких $f'(c_i) = 0$, $i = 1{,}2$.

5.2.2. Довести, що для многочлена $P(x) = (x^2 + x + 1{,}5)(x + 3)(x + 2)(x - 1)$ на відрізку $(-3; 1)$ знайдеться корінь рівняння $P''(x) = 0$.

5.2.3. Застосовуючи теорему Лагранжа для функції $f(x) = \sqrt{3}x^3 + 3x$ на відрізку $[0; 1]$, визначте точку $x = c$, що фігурує в теоремі.

5.2.4. Застосовуючи теорему Коші для функцій $f(x) = 2x^3 + 5x + 1$ та $g(x) = x^2 + 4$ на відрізку $[0; 2]$, визначте точку $x = c$, що фігурує в теоремі.

5.2.5. Перевірити справедливість теореми Ролля для функції $y = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$ на інтервалі $[-1; 2]$.

5.2.6. Перевірити справедливість теореми Ролля для функції $y = 4^{\sin x}$ на інтервалі $[0; \pi]$.

Правила Лопіталя

Нехай $f(x)$, $g(x)$ визначені і диференційовні в околі точки x_0, $g'(x_0) \neq 0$ та

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \ (\infty), \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \ (\infty).$$

Тоді $\exists \ \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, причому

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Якщо $f(x)$ і $g(x)$ такі, що $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$, то

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = [\infty - \infty] = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{f} \cdot \frac{1}{g}}.$$

Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$, то

$$\lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Якщо маємо невизначеності типу $[1^\infty]$, $[0^\infty]$, $[\infty^0]$, то потрібно знайти границю логарифма цього виразу, а потім повернутись до границі самої функції.

5.2.7. Обчислити границі, користуючись правилом Лопіталя.

1) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^{50} - 2x + 1}{x^{100} - 2x + 1}$;

2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln \cos x}{\operatorname{tg} x}$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln \sin ax}{\ln \sin bx}$;

4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2^x - 3^x}{4^x - 5^x}$;

5) $\lim\limits_{x \to 5} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{5}}{\sqrt{x} - \sqrt{5}}$;

6) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x - \sin x}$;

7) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$;

8) $\lim\limits_{x \to a} \frac{\cos x \cdot \ln(x - a)}{\ln(e^x - e^a)}$;

9) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$;

10) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - e^x}{\operatorname{tg} x - x}$;

11) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x - 1}{\cos x - \frac{1}{2}x^2 - 1}$;

12) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)^4 - 4x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + x^4}{6 \sin x - 6x + x^3}$;

13) $\lim\limits_{x \to \infty} [(\pi - 2\operatorname{arctg} x) \ln x]$;

14) $\lim\limits_{x \to 1} \left[\frac{x}{x - 1} - \frac{1}{\ln x}\right]$;

15) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\operatorname{ctg} x\right]$;

16) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x)^{2x-\pi}$;

17) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$;

18) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$;

19) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-x)^{\frac{1}{x}}$;

20) $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$;

21) $\lim\limits_{x\to 0+}(\arcsin x)^{\operatorname{tg}x}$;

22) $\lim\limits_{x\to 1}\sin(x-1)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$;

23) $\lim\limits_{x\to 1+0}\ln x\cdot\ln(x-1)$;

24) $\lim\limits_{x\to +0}(\operatorname{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}}$;

25) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-\cos\alpha x}{e^{\beta x}-\cos\beta x}$;

26) $\lim\limits_{\varphi\to a}(a^2-\varphi^2)\operatorname{tg}\frac{\pi\varphi}{2a}$;

27) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^6 2x}$;

28) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x^n\cdot e^{-x})$.

Дотична та нормаль до кривої

Нехай існує похідна функції $y=f(x)$ в точці x_0 і вона відмінна від нуля: $f'(x_0)\neq 0$. Дотичною до графіка функції $y=f(x)$ в точці $M_0(x_0,y_0)$ називають пряму

$$y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0),$$

а нормаллю до графіка функції $y=f(x)$ в точці $M_0(x_0,y_0)$ - пряму, проведену в точці дотику перпендикулярно до дотичної:

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0).$$

Коефіцієнт $f'(x_0)$ дорівнює тангенсу кута, який дотична утворює з додатнім напрямом осі OX: $f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha$.

Якщо $f'(x_0)=\infty$, то пряму $x=x_0$ називають вертикальною асимптотою.

5.2.8. Записати рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y=f(x)$ у точці x_0.

1) $y=x^2-5x+4$, $x_0=-1$;

2) $y=e^{1-x^2}$, $x_0=0$;

3) $y=\frac{1}{x}$, $x_0=-\frac{1}{2}$.

5.2.9. Скласти рівняння дотичної та нормалі до лінії $x^2(x+y) =) a^2(x-y)$ у початку координат.

5.2.10. Скласти рівняння дотичної до лінії $y = x^3 + 3x^2 - 5$, перпендикулярної до прямої $2x - 6y + 1 = 0$.

5.2.11. Провести нормаль до лінії $y = x\ln x$ паралельно прямій $2x - 2y + 3 = 0$.

5.2.12. Скласти рівняння дотичних до лінії $y = x - \frac{1}{x}$ в точках її перетину з віссю абсцис.

5.2.13. Скласти рівняння дотичних до гіперболи $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{7} = 1$, перпендикулярних до прямої $2x + 4y - 3 = 0$.

5.2.14. На лінії $y = x^2(x-2)^2$ знайти точки, в яких дотичні паралельні осі абсцис.

5.2.15. Знайти кути перетину між лініями, що задані рівняннями:

1) $y = x^2$, $3x - y - 2 = 0$;

2) $y = x^2$, $y^2 = x$;

3) $y = \frac{1}{x}$, $y = \sqrt{x}$.

5.2.16. Знайти кути перетину кривих

$$\begin{cases} x = \dfrac{at^2}{1+t^2}, \\ y = \dfrac{at\sqrt{3}}{1+t^2}, \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} x = a\cos\varphi\,, \\ y = a\sin\varphi\,. \end{cases}$$

5.2.17. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до лінії

$$\begin{cases} x = 3\cos t\,, \\ y = 4\sin t \end{cases}$$

в точці $A\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; 2\sqrt{2}\right)$.

5.2.18. В якій точці еліпса $16x^2 + 9y^2 = 400$ ордината спадає з такою ж швидкістю, з якою зростає абсциса ?

Формули Тейлора та Маклорена

Якщо функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 і має $(n+1)$ похідну в цьому околі, то має місце ***формула Тейлора***

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x)\,,$$

де $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, $\xi \in [x_0; x]$ називається залишковим членом у формі Лагранжа, а $P_n(x)$ називається ***многочленом Тейлора***.

Якщо $x_0 = 0$, то маємо ***формулу Маклорена***

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_n(x),$$

де $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi x)}{(n+1)!}x^{n+1}$, $\xi \in [0; 1]$.

***Розклад елементарних функцій за формулою Маклорена*:**

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}(x),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_n(x).$$

5.2.19. Розкласти многочлен $f(x)$ за формулою Тейлора в околі точки $x = x_0$.

1) $f(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4, \quad x_0 = 4;$

2) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 4, \quad x_0 = -1;$

3) $f(x) = (x^2 - 3x + 1)^3, \quad x_0 = 0.$

5.2.20. Знайдіть перші три члени розкладу функції $f(x) = x^{10} - 3x^6 + x^2 + 2$ за формулою Тейлора в околі точки $x_0 = 1$. Обчислити наближено $f(1{,}03)$.

5.2.21. Відомо, що функція $f(x)$ є многочленом четвертого порядку, причому

$$f(2) = -1, \qquad f'(2) = 0, \qquad f''(2) = 2, \qquad f'''(2) = -12, \qquad f^{IV}(2) = 24.$$

Обчислити $f(-1),\ f'(0),\ f''(1)$.

5.2.22. Розкласти за степенями x функцію $f(x)$ до члена, що містить x^3 включно.

1) $f(x) = \operatorname{tg} x$;

2) $f(x) = x \cos x$;

3) $f(x) = \ln(1 - x + x^2)$;

4) $f(x) = e^x \ln(1 + x)$.

5.2.23. Розкласти за степенями $(x - x_0)$ функцію $f(x)$ до члена, що містить $(x - x_0)^4$ включно.

1) $f(x) = \sqrt[3]{x},\ x_0 = -1$;

2) $f(x) = \sin 3x\,,\ x_0 = -\frac{\pi}{6}$;

3) $f(x) = e^{\frac{x}{3}},\ x_0 = 3$.

5.2.24. Обчислити значення функцій із точністю до ε, користуючись формулами Маклорена.

1) $\sqrt[3]{30},\ \varepsilon = 10^{-4}$;

2) $\sqrt{70},\ \varepsilon = 10^{-3}$;

3) $\sqrt{e},\ \varepsilon = 10^{-3}$;

4) $\sqrt[7]{129},\ \varepsilon = 10^{-4}$;

5) $\sin 18°\,,\ \varepsilon = 10^{-3}$;

6) $\cos 10°\,,\ \varepsilon = 10^{-4}$.

5.2.25. Оцінити похибку, яку допускають, обчислюючи значення ln1,5.

5.2.26. Написати формулу Тейлора n-го порядку для функції $f(x)$ в околі точки x_0.

1) $f(x) = \sqrt{x},\ x_0 = 4$;

2) $f(x) = \frac{1}{x},\ x_0 = -1$;

3) $f(x) = \sin^2 x\,,\ x_0 = 0$;

4) $f(x) = x^3 \ln x,\ x_0 = 1$.

Ознаки монотонності функції

Нехай для всіх $x_1, x_2 \in (a;b)$, $x_1 < x_2$.

Тоді

- функція $y = f(x)$ на $(a;b)$ зростає, якщо $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x) \nearrow)$;
- функція $y = f(x)$ на $(a;b)$ не спадає, якщо $f(x_1) \leq f(x_2)$;
- функція $y = f(x)$ на $(a;b)$ спадає, якщо $f(x_1) > f(x_2)$ $(f(x) \searrow)$;
- функція $y = f(x)$ на $(a;b)$ не зростає, якщо $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Функції, що не зростають і не спадають, називаються монотонними на $(a;b)$, а ті що зростають та спадають - строго монотонними. Інтервали, де функція зростає чи спадає, називають інтервалами монотонності функції.

Теорема.

Нехай існує похідна $y' = f'(x)$ $\forall x \in (a;b)$ тоді, якщо

$f'(x) > 0$ на $(a;b)$, то функція $y = f(x)$ зростає на $(a;b)$;

$f'(x) < 0$ на $(a;b)$, то функція $y = f(x)$ спадає на $(a;b)$.

Точку $x_0 \in (a;b)$ називають критичною, якщо виконується одна з умов

- $f'(x_0) = 0$;
- $f'(x_0) = \infty$;
- $f'(x_0)$- не існує.

Для того, щоб знайти інтервали монотонності функції $y = f(x)$ треба:

1) знайти область визначення функції;
2) знайти похідну даної функції;
3) знайти критичні точки функції, що належать області визначення;
4) розбити критичними точками область визначення на інтервали та в кожному визначити знак похідної;
5) зробити висновок про поведінку функції на кожному інтервалі.

5.2.27. Знайти інтервали монотонності функцій.

1) $y = 4x^3 - 21x^2 + 18x + 7$;

2) $y = (x-2)^5(2x+1)^4$;

3) $y = \sqrt{8x^2 - x^4}$;

4) $y = x - e^x$;

5) $y = x^2e^{-x}$;

6) $y = \frac{1}{\ln x}$;

7) $y = \begin{cases} \frac{1}{e}, & x < e, \\ \frac{\ln x}{x}, & x \geq e; \end{cases}$

8) $y = \sin\frac{\pi}{x}$.

5.2.28. Покажіть, що функція $y = x^3 + x$ скрізь зростає.

5.2.29. Покажіть, що функція $y = \mathrm{arctg}x - x$ скрізь спадає.

Локальний екстремум функції

Теорема (достатня умова локального екстремуму).

Нехай $x = x_0$ – критична точка і функція $y = f(x)$ неперервна в ній.

Якщо в деякому околі точки x_0 $f'(x) > 0$, коли $x < x_0$ і $f'(x) < 0$, коли $x > x_0$, тобто переходячи через точку x_0 похідна змінює знак з «+» на «–», то в точці x_0 функція $f(x)$ досягає максимуму.

Якщо в деякому околі точки x_0 $f'(x) < 0$, коли $x < x_0$ і $f'(x) > 0$, коли $x > x_0$, тобто переходячи через точку x_0 похідна змінює знак із «–» на «+», то в точці x_0 функція $f(x)$ досягає мінімуму.

Якщо похідна $f'(x)$ не змінює знак, переходячи через точку x_0, то екстремуму в цій точці немає.

Для того, щоб знайти локальні екстремуми функції $f(x)$ треба:

1) знайти область визначення функції;
2) знайти критичні точки функції $f(x)$ (якщо їх немає, то функція не має екстремумів);
3) дослідити знак похідної в кожному з інтервалів, на які критичні точки розбивають область визначення;
4) за зміною знаку похідної визначити точки максимумів і мінімумів;
5) знайти ці максимальні та мінімальні значення.

5.2.30. Знайдіть інтервали монотонності та точки екстремумів функцій.

1) $y = 2x^3 - 3x^2$;

2) $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$;

3) $y = x - \ln(1 + x)$;

4) $y = -x^2\sqrt{x^2 + 2}$;

5) $y = x^2 e^{-x}$;

6) $y = \frac{x}{\ln x}$;

7) $y = x + \cos x$.

5.2.31. Знайти екстремуми функцій.

1) $y = x\sqrt[3]{(x-2)^2}$;

2) $y = \frac{x^2}{2} - \ln x$;

3) $y = \frac{3x^2+4x+4}{x^3+x+1}$;

4) $y = x - \ln(1 + x^2)$;

5) $y = \frac{4\sqrt{3}}{9x\sqrt{1-x}}$;

6) $y = \frac{1}{\ln(x^4+4x^3+30)}$;

7) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 64}$;

8) $y = (x^2 - 2x)\ln x - \frac{3}{2}x^2 + 4x$;

9) $y = \frac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$;

10) $y = (x-5)^2\sqrt[3]{(x+1)^2}$.

Найбільше та найменше значення функції на відрізку

Для того, щоб знайти найбільші та найменші значення функції на відрізку $[a;b]$ треба:

1) знайти критичні точки функції на $[a;b]$;
2) перевірити, які з них належать $[a;b]$;
3) обчислити значення функції у знайдених критичних точках, що належать $[a;b]$ та на кінцях відрізка;
4) серед знайдених значень вибрати найбільше та найменше.

5.2.32. Знайти найбільше та найменше значення функцій.

1) $y = x^4 - 8x^2 + 3$, $x \in [-1;2]$;

2) $y = x^4 - 2x^2 + 5$, $x \in [-2;2]$;

3) $y = 3x + 2\sqrt{x}$, $x \in [0;4]$;

4) $y = \sqrt{100-x^2}$, $x \in [-6;8]$;

5) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$, $x \in [-1;2]$;

6) $y = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$, $x \in [0;1]$;

7) $y = 2\mathrm{tg}x - \mathrm{tg}^2x$, $0 \le x < \frac{\pi}{2}$;

8) $y = x^x$, $0{,}1 \le x < \infty$;

9) $y = \mathrm{arctg}\frac{1-x}{1+x}$, $0 \le x \le 1$;

10) $y = x\sin x + \cos x - \frac{1}{4}x^2$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;

11) $y = \sin 2x - x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Опуклість і вгнутість кривих, точки перегину

Нехай задано неперервно-диференційовну функцію $y = f(x)$, $x \in (a; b)$, яка має також похідну другого порядку $f''(x)$.

Якщо $f''(x) > 0 \ \forall x \in (a; b)$, то функція буде вгнутою. Це означає, що графік цієї функції буде знаходитись вище довільної дотичної, проведеної до графіка цієї функції в точках x: $x \in (a; b)$.

Якщо ж $f''(x) < 0 \ \forall x \in (a; b)$, то функція буде опуклою. Це означає, що графік цієї функції буде знаходитись нижче довільної дотичної, проведеної до графіка цієї функції в точках x: $x \in (a; b)$.

Якщо $f''(x_0) = 0$ в деякій точці $x_0 \in (a; b)$ і функція з вгнутої переходить в опуклу, або навпаки, то точка x_0 є точкою перегину функції.

5.2.33. Знайти проміжки опуклості та вгнутості функції. Визначити точки перегину.

1) $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$;

2) $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$;

3) $y = 1 - \sqrt[3]{x - 2}$;

4) $y = \ln(1 + x^2)$;

5) $y = x\mathrm{arctg}x$;

6) $y = \ln(x^2 - 1)$;

7) $y = \frac{x}{x^2+1}$;

8) $y = \frac{x^3}{x^2+3}$;

9) $y = x^4(12\ln x - 7)$.

Асимптоти кривої

Пряма називається асимптотою кривої, якщо відстань від змінної точки кривої до цієї прямої прямує до нуля, коли точка кривої віддаляється на нескінченість

1) Вертикальна асимптота.

Пряма лінія $x = a$ є вертикальною асимптотою функції $y = f(x)$, якщо точка $x = a$ є точкою розриву другого роду (принаймні, одна з границь $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ або $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ дорівнює $\pm\infty$).

2) Похила асимптота.

Пряма $y = kx + b$, де

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \text{ та } b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx),$$

де $k \neq 0$ і b дійсні числа, називається похилою асимптотою функції $y = f(x)$ при $x \to \infty$, причому $x \to +\infty$ та $x \to -\infty$ потрібно розглядати окремо.

3) Горизонтальна асимптота.

Пряма $y = b$ називається горизонтальною асимптотою $y = f(x)$ якщо $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$, причому $x \to +\infty$ та $x \to -\infty$ потрібно розглядати окремо.

5.2.34. Знайти асимптоти функції.

1) $y = \frac{1}{x^2 - 4x + 5}$;

2) $y = 3 + \frac{1}{(x-2)^2}$;

3) $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$;

4) $y = x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$;

5) $y = xe^{\frac{2}{x}} + 1$;

6) $y = 2x - \frac{\cos x}{x}$;

7) $y = \sqrt{\frac{x^2}{x-2}}$;

8) $y = 2x + \operatorname{arctg}\frac{x}{2}$.

Загальна схема дослідження функції

1. Знайти область визначення функції, інтервали неперервності та з’ясувати характер поведінки функції при підході до межових точок області визначення та знаходження інтервалів монотонності.
2. З’ясувати, чи буде функція парною, непарною або періодичною.
3. Знайти точки перетину графіка функції з осями координат та інтервали її знакосталості.
4. Знайти похилі, вертикальні та горизонтальні асимптоти функції.
5. Знайти похідну функції, область визначення похідної, нулі похідної, інтервали зростання та спадання, точки екстремуму та значення функції в цих точках.
6. Знайти другу похідну функції, область визначення другої похідної, нулі другої похідної, інтервали опуклості та вгнутості, точки перегину графіка функції.
7. Побудувати графік функції, використовуючи всі отримані результати дослідження.

5.2.35. Дослідити функції та побудувати їх графік.

1) $y = (x-2)^3(x+1)^2$;

2) $y = \frac{1}{x^2+2x}$;

3) $y = \frac{x}{1-x^2}$;

4) $y = \frac{x^3}{x^2-1}$;

5) $y = \frac{x^3}{3-x^2}$;

6) $y = \frac{1}{x} + 4x^2$;

7) $y = (x-3)\sqrt{x}$;

8) $y = \sqrt[3]{1-x^3}$;

9) $y = \sqrt[3]{x^2} - x$;

10) $y = \frac{e^x}{2x-1}$;

11) $y = x^3e^{-x}$;

12) $y = x - \ln(x^2-1)$;

13) $y = \frac{1+\ln x}{x}$;

14) $y = \ln(\cos x)$;

15) $y = x + \cos x$;

16) $y = x \sin x$;

17) $y = x - 2\mathrm{arctg}x$.

5.2.36. Побудувати графіки функцій, які задано у полярній системі координат.

Вказівка. Функція, яку задано в полярній системі координат, має вигляд

$$\rho = \rho(\varphi)\ ,$$

де φ – кут з вершиною в полюсі O, який відраховується від полярної осі проти годинникової стрілки; ρ – відстань, яка відраховується від полюса вздовж променя, який складає кут φ з полярною віссю, $\rho \geq 0$.

Для того щоб побудувати графік функції $\rho = \rho(\varphi)$ в полярній системі координат, необхідно перш за все знайти область визначення функції, тобто множину тих значень φ, за яких ρ буде невід’ємним: $\rho(\varphi) \geq 0$. Потім визначити поведінку функції за таких значень φ, які прямують до граничних точок області визначення. Знайти точки розриву, з’ясувати їх характер, визначити інтервали неперервності, найбільше та найменше значення φ, нулі функції. За тих значеннях кута φ_0, за яких $\rho'(\varphi_0) = 0$, графік функції буде дотикатись до кола радіуса $\rho_0 = \rho(\varphi_0)$. Об’єднуючи одержані дані, будуємо графік функції $\rho = \rho(\varphi)$.

1) $\rho = \sin 2\varphi$;

2) $\rho = \sin 3\varphi$;

3) $\rho = \cos 4\varphi$;

4) $\rho = \frac{3}{\sqrt{\cos 3\varphi}}$;

5) $\rho = 2(1 - \cos 2\varphi)$;

6) $\rho = \frac{2}{\sqrt{\sin 2\varphi}}$;

7) $\rho = 0{,}5(1 - \sin \varphi)$;

8) $\rho = 5 - 3\cos 3\varphi$.

5.2.37. Побудувати графіки функцій, які задано неявно.

Вказівка. Часто у випадках, коли рівняння функції в декартовій системі координат задано неявно, зручно перейти в рівнянні до звичайної полярної системи координат

$$x = \rho \cos \varphi\,, \quad y = \rho \sin \varphi$$

або до узагальненої системи координат заміною

$$x = a\rho \cos \varphi\,, \quad y = b\rho \sin \varphi\ .$$

Якщо неявно задане рівняння функції при одній з указаних замін можна записати у вигляді $\rho = \rho(\varphi)$, то графік будуємо в полярній системі координат.

1) $(x^2 + y^2)^2 = 2x^3$;

2) $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)$;

3) $\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}\right)^4 = \frac{2xy}{\sqrt{6}}$;

4) $(x^2 + y^2)^2 = -xy$;

5) $x^4 + y^4 = 2xy$;

6) $\left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}\right)^2 = xy$.

5.2.38. Побудувати графіки функцій, які задано параметрично.

Вказівка. Параметричне рівняння плоскої кривої має вигляд

$$x = x(t)\,, \quad y = y(t), \quad t \in T.$$

Дослідження та побудова графіка функції проводиться аналогічно тому, як це було зроблено для кривої, заданої явним рівнянням $y = f(x)$.

Обчислюємо похідні $x_t'(t)$ та $y_t'(t)$. Для тих точок, поблизу яких крива є диференційовною функцією, обчислюємо $\frac{dy}{dx} = \frac{y_t'}{x_t'}$. Знаходимо значення параметра $t = t_1, t_{2,}, \dots, t_k$, за яких хоч би одна з похідних $x_t'(t)$ або $y_t'(t)$ перетворюється в нуль чи не існує (критичні значення t). Визначаємо знак $\frac{dy}{dx}$ у кожному з інтервалів $(t_1; t_2), (t_2; t_3), \dots, (t_{k-1}; t_k)$, а відповідно в кожному з інтервалів $(x_1; x_2), (x_2; x_3), \dots, (x_{k-1}; x_k)$, де $x_i = x(t_i)$, отже отримуємо проміжки зростання (спадання).

Далі обчислюємо

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} \quad \text{або} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''_{t^2}x'_t - x''_{t^2}y'_t}{\left(x'_t\right)^3}$$

і визначаємо проміжки опуклості та вгнутості графіка функції, точки перегину. Для знаходження асимптот знаходимо такі значення параметра t, наближаючись до яких x або y прямують до нескінченності. Завершуємо наші дослідження і будуємо графік функції $x = x(t),\ \ y = y(t)$.

1) $x = \frac{3t}{1+t^3}\ ,\ y = \frac{3t^2}{1+t^3}$;

2) $x = t - \sin t\ ,\ y = 2(1 - \cos t)$;

3) $x = 1 - t\ ,\ y = 1 - t^2$;

4) $x = \frac{t^2}{1-t^2}\ ,\ y = \frac{1}{1+t^2}$;

5) $x = \ln t\ ,\ y = \mathrm{arctg} t$;

6) $x = t^2,\ y = \frac{t^3}{3} - t$.

Відповіді.

Розділ 6. Інтегральне числення функцій однієї змінної.

Тема 6.1. Невизначений інтеграл та його властивості. Основні методи інтегрування.

Функція $F(x)$ називається ***первісною*** функції $f(x)$, якщо $F'(x) = f(x)$.

Вираз

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

де C – константа інтегрування, називається ***невизначеним інтегралом функції*** $f(x)$.

Таблиця основних інтегралів

$\int 0dx = C$	$\int dx = x + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\|x\| + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$	$\int \cos x\, dx = \sin x + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$
$\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$	$\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$
$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + C$	$\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + C$
$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases}$	$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \\ -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C \end{cases}$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \begin{cases} \arcsin \frac{x}{a} + C \\ -\arccos \frac{x}{a} + C \end{cases}$
$\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C$

Властивості невизначених інтегралів

1. $(\int f(x)dx)' = (F(x) + C)' = f(x)$.

2. $\int f'(x)dx = f(x) + C$.

3. $\forall\, K \in R,\ \ K \neq 0$: $\int Kf(x)dx = K\int f(x)dx$.

4. $\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$.

6.1.1. Довести, що функція $F(x)$ є первісною функції $f(x)$.

1) $F(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 4,\qquad f(x) = 6x^2 - 10x + 7;$

2) $F(x) = (2x^3 + 5)^4 + 5,\qquad f(x) = 24x^2(2x^3 + 5)^3;$

3) $F(x) = 1 - \mathrm{ctg}x - x,\qquad f(x) = \mathrm{ctg}^2 x;$

4) $F(x) = 1 - \cos^2 e^{2x}\,,\qquad f(x) = 2e^{2x}\sin(2e^{2x});$

5) $F(x) = x\sqrt{x}(3\ln x - 2),\qquad f(x) = \frac{9}{2}\sqrt{x}\ln x;$

6) $F(x) = 3 + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|,\qquad f(x) = \frac{1}{x^2-4};$

7) $F(x) = 2 - \arccos\frac{2x^2}{x^4+1},\qquad f(x) = \frac{4x}{x^4+1}.$

6.1.2. Заповнити пропущені місця в рівностях.

1) $d(\quad) = 4x^3dx;$

2) $d(\quad) = \frac{dx}{\sqrt{x}};$

3) $d(\quad) = \sin x\,dx;$

4) $d(\quad) = \frac{dx}{x};$

5) $d(\quad) = \frac{dx}{x^2+1};$

6) $d(\quad) = 3^x dx.$

6.1.3. Відомо, що $\int 3x^2dx = x^3 + C$. Обчислити:

1) $\int 3t^2dt;$

2) $\int 3(2x+9)^2d(2x+9);$

3) $\int 3\cos^2 x d(\cos x);$

4) $\int 3\ln^2(x+3)d(\ln(x+3)).$

6.1.4. Обчислити інтеграли методом безпосереднього інтегрування.

1) $\int\left(\sqrt{x^5} + 5\sqrt[3]{x^4} - \frac{3}{x^5} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx;$

2) $\int \sqrt[n]{x^m}dx;$

3) $\int(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx;$

4) $\int\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^2 dx;$

5) $\int\frac{\sqrt{x^5}+x^2 3^x - x}{x^2}dx;$

6) $\int\frac{7\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt[4]{x}}{2\sqrt{x}}dx;$

7) $\int \frac{(1+x^2)^2}{x\sqrt[3]{x}}dx$; 8) $\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}{\sqrt{x}}dx$;

9) $\int a^x e^x dx$; 10) $\int \frac{2\cdot e^x+5\cdot e^{2x}}{e^x}dx$;

11) $\int \frac{4\cdot 3^x}{2^x}dx$; 12) $\int \frac{5\cdot 7^x-2\cdot 6^x}{3^x}dx$;

13) $\int \frac{\sin 2x}{\cos x}dx$; 14) $\int \frac{a\cos x\sin x+b}{\cos^2 x}dx$;

15) $\int \cos^2\frac{x}{2}dx$; 16) $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$;

17) $\int 2\sin^2\frac{x}{2}dx$; 18) $\int \frac{2}{1-\cos 2x}dx$;

19) $\int \frac{2\cos^2\frac{x}{2}-1}{\sin x}dx$; 20) $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$;

21) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$; 22) $\int \frac{dx}{\cos 2x+\sin^2 x}dx$;

23) $\int \frac{\ln 2}{\sqrt{1-9x^2}}dx$; 24) $\int \frac{dx}{1+25x^2}$;

25) $\int \frac{dx}{1+3x^2}$; 26) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$;

27) $\int \frac{dx}{3x^2+9}$; 28) $\int \frac{x^2+1}{x^4-1}dx$;

29) $\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{5x^2+10}dx$; 30) $\int \frac{1-2x^2+x^4}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx$;

31) $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx$.

Внесення під знак диференціала

Нехай $\int f(x)dx = F(x)+C$. Тоді

$$\int f(u(t))u'(t)dt = \int f(u(t))du\,(t) = F(u(t))+C.$$

Нехай $\int f(x)dx = F(x)+C$. Тоді $\forall\ a\in \mathrm{R},\ a\neq 0,\ b\in \mathrm{R}$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

6.1.5. Обчислити інтеграли

1) $\int \sin 3x\,dx$; 2) $\int e^{2x}dx$;

3) $\int a^{-x}dx$;   4) $\int 3^{9-x}dx$;

5) $\int \cos(3+8x)dx$;   6) $\int \sin(2-3x)\,dx$;

7) $\int e^{-5x+1}dx$;   8) $\int (7x+4)^5dx$;

9) $\int \frac{1}{(3x-1)^5}dx$;   10) $\int \sqrt[5]{(3-2x)^6}dx$;

11) $\int \frac{1}{\sqrt{8x+4}}dx$;   12) $\int \frac{1}{6-9x}dx$;

13) $\int \frac{1}{\sin^2(4x-1)}dx$;   14) $\int \frac{1}{\cos^2(1-3x)}dx$

15) $\int \frac{1}{16+(2x+1)^2}dx$;   16) $\int \frac{1}{1-(x-4)^2}dx$;

17) $\int \frac{1}{\sqrt{3+(2-5x)^2}}dx$;   18) $\int \frac{1}{\sqrt{4-(3+2x)^2}}dx$.

6.1.6. Обчислити інтеграли методом піднесення під знак диференціала.

1) $\int x\sqrt{1+x^2}dx$;   2) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx$;

3) $\int e^{-x^2}xdx$;   4) $\int e^{-x^3}x^2dx$;

5) $\int x^2\cos x^3\,dx$;   6) $\int \frac{x^3}{1+x^4}dx$;

7) $\int x^4 4^{x^5}dx$;   8) $\int x^3\sqrt[3]{4-x^4}dx$;

9) $\int \frac{x}{1+x^4}dx$;   10) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}dx$;

11) $\int \frac{2x-5}{x^2-5x+3}dx$;   12) $\int \frac{6x+7}{\sqrt{3x^2+7x-1}}dx$;

13) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$;   14) $\int \frac{1}{x\ln x}dx$;

15) $\int \frac{1}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}dx$;   16) $\int \frac{dx}{x\cos^2(\ln x+1)}$;

17) $\int \frac{dx}{x(\ln x)^n}$;   18) $\int e^x\sin e^x\,dx$;

19) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+a^2}dx$;   20) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$;

21) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$;   22) $\int \frac{e^{-x}}{e^{-2x}-1}dx$;

23) $\int \sin x\, e^{\cos x}dx$;   24) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$;

25) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx$;   26) $\int \frac{\cos x}{16+\sin^2 x}dx$;

27) $\int \cos^3 x \sin 2x \, dx$;

28) $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x} dx$;

29) $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$;

30) $\int \frac{\operatorname{ctg}^4 x}{\sin^2 x} dx$;

31) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx$;

32) $\int \frac{\sqrt{4-\operatorname{tg}^2 x}}{\cos^2 x} dx$;

33) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}$;

34) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$;

35) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

36) $\int \frac{dx}{(\arccos x)^3\sqrt{1-x^2}}$;

37) $\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2} dx$;

38) $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^n}{1+x^2} dx$;

39) $\int \frac{2x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

40) $\int \frac{x+\arccos^2 3x}{\sqrt{1-9x^2}} dx$.

Інтегрування частинами

Нехай функції $u(x)$ та $v(x)$ диференційовані, тоді

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x) \, dx.$$

або

$$\int u dv = uv - \int v \, du.$$

6.1.7. Обчислити інтеграли методом інтегрування частинами.

1) $\int x \cos 2x \, dx$;

2) $\int x \sin 5x \, dx$;

3) $\int x 5^x dx$;

4) $\int (3x-1) \cos x \, dx$;

5) $\int x^2 e^{-x} dx$;

6) $\int x^2 \sin x \, dx$;

7) $\int x^2 e^{2x} dx$;

8) $\int x \operatorname{tg}^2 x \, dx$;

9) $\int x^3 e^x dx$;

10) $\int x^2 \cos^2 x \, dx$;

11) $\int x^n \ln x \, dx \quad (n \neq -1)$;

12) $\int x \ln(x+1) dx$;

13) $\int x \ln^2 x \, dx$;

14) $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$;

15) $\int \arccos x \, dx$;

16) $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^2+1}} dx$;

17) $\int e^x \sin x \, dx$;

18) $\int e^{3x}(\sin 2x - \cos 2x) dx$;

19) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1+x^2}}$; 20) $\int \frac{x^2dx}{(1+x^2)^2}$;

21) $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$; 22) $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx$.

Заміна змінних

Нехай $\int f(x)dx = F(x) + C$. Розглянемо диференційовану функцію $u = u(t)$. Тоді

$$\int f(u(t))u'(t)dt = \begin{vmatrix} x = u(t) \\ dx = u'(t)dt \end{vmatrix} = \int f(x)dx = F(x) + C = F(u(t)) + C.$$

6.1.8. Обчислити інтеграли методом заміни змінних.

1) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$; 2) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}dx$;

3) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$; 4) $\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)}dx$;

5) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$; 6) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}-1)}$; 8) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$;

9) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx$; 10) $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$;

11) $\int \frac{xdx}{(x+9)^{10}}$; 12) $\int \frac{x^2dx}{(x-5)^7}$;

13) $\int \sqrt{e^x-1}\,dx$; 14) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

6.1.9. Обчислити інтеграли, що містять квадратний тричлен.

1) $\int \frac{x+2}{x^2+2x+2}dx$; 2) $\int \frac{7-8x}{2x^2-3x+1}dx$;

3) $\int \frac{3x-2}{x^2+6x+9}dx$; 4) $\int \frac{x-3}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$;

5) $\int \frac{6x^3-7x^2+3x-1}{2x-3x^2}dx$; 6) $\int \frac{8x-11}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx$;

7) $\int \frac{3x-1}{4x^2-4x+17}dx$; 8) $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$;

9) $\int \frac{x-2}{x^2-7x+12}dx$; 10) $\int \frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}}dx$;

11) $\int \frac{3-4x}{2x^2-3x+1}dx$.

Інтегрування раціональних функцій

Нехай є інтеграл вигляду

$$\int \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}\, dx,$$

де $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ – раціональна функція, $Q_m(x)$, $P_n(x)$ – многочлени степенів m і n відповідно. Тоді, якщо раціональна функція неправильна, тобто $m \geq n$, то виділяємо цілу частину і правильну раціональну функцію, тобто

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = R_{m-n}(x) + \frac{S_k(x)}{P_n(x)}, k < n,$$

і інтегруємо многочлен $R_{m-n}(x)$ і $\frac{S_k(x)}{P_n(x)}$. Для знаходження інтегралу $\int \frac{S_k(x)}{P_n(x)}\, dx$ правильну раціональну функцію $\frac{S_k(x)}{P_n(x)}$ розкладають на елементарні дроби I-IV типів:

(I) $\frac{A}{x-a}$ (II) $\frac{B}{(x-b)^s}$ (III) $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ (IV) $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^r}$; $r, s \geq 2$; $r, s \in \mathbb{N}$; $p^2 - 4q < 0$.

6.1.10. Обчислити інтеграли від раціональних функцій (знаменник має тільки дійсні різні корені):

1) $\int \frac{x}{(x-1)(2x-1)} dx$; 2) $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx$;

3) $\int \frac{x}{3x^2-2x-1} dx$; 4) $\int \frac{x}{2x^2-3x-2} dx$;

5) $\int \frac{x^2-x+4}{(x+1)(x-2)(x-3)} dx$; 6) $\int \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}$;

7) $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x} dx$; 8) $\int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx$;

9) $\int \frac{x}{x^4-3x^2+2} dx$; 10) $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} dx$;

11) $\int \frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+6} dx$; 12) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx$.

6.1.11. Обчислити інтеграли від раціональних функцій (знаменник має тільки дійсні корені, деякі з них кратні):

1) $\int \frac{dx}{x^3-x^2}$; 2) $\int \frac{(x^2+2)^2}{x^3-2x^2+x} dx$;

3) $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$; 4) $\int \frac{3x^2+2x-1}{(x-1)^2(x+2)} dx$;

5) $\int \frac{x^3 \mp 1}{x^3-x^2}dx$; 6) $\int \frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4}dx$;

7) $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$; 8) $\int \frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}dx$;

9) $\int \frac{x^3-6x^2+11x-5}{(x-2)^4}dx$; 10) $\int \left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2 dx$.

6.1.12. Обчислити інтеграли від раціональних функцій (знаменник має комплексні різні корені):

1) $\int \frac{dx}{x^3+1}$; 2) $\int \frac{x}{x^3-1}dx$;

3) $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$; 4) $\int \frac{x^4+1}{x^4-1}dx$;

5) $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx$; 6) $\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}dx$;

7) $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}dx$; 8) $\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx$;

9) $\int \frac{dx}{x(1+x)(1+x+x^2)}$; 10) $\int \frac{dx}{1+x^4}$.

6.1.13. Обчислити інтеграли від раціональних функцій (знаменник має комплексні кратні корені):

1) $\int \frac{dx}{x^4+2x^2+1}$; 2) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^4}$;

3) $\int \frac{dx}{(x^2+9)^3}$; 4) $\int \frac{5x^2-12}{(x^2-6x+13)^2}dx$;

5) $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}dx$; 6) $\int \frac{x^9}{(x^4-1)^2}dx$.

7) $\int \frac{2x\,dx}{(x+1)(x^2+1)^2}$; 8) $\int \frac{dx}{x(x^2+4)^2(x^2+1)}$.

Інтегрування ірраціональних функцій

1. Інтеграл вигляду

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_s}{n_s}}\right)dx,$$

де R – раціональна функція, $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$, $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \dots, \frac{m_s}{n_s} \in \mathbb{Q}$; зводиться до інтегралу від раціональної функції змінної t за допомогою підстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^k,$$

де k – спільний знаменник дробів $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \dots, \frac{m_s}{n_s}$.

2. В інтегралах вигляду

$$\int \frac{dx}{(x-p)\sqrt{ax^2+bx+c}},\ p,a,b,c \in \mathbb{R},$$

можна виконати підстановку: $x-p=\frac{1}{t}$.

3. В наступних інтегралах можна виконати тригонометричні чи гіперболічні підстановки:

1) $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$, підстановка: $x=a\,sin\,t$ або $x=a\,th\,t$;

2) $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$, підстановка: $x=\frac{a}{\cos t}$ або $x=a\,ch\,t$;

3) $\int R\left(x,\sqrt{x^2+a^2}\right)dx$, підстановка: $x=a\operatorname{tg} t$ або $x=a\,sh\,t$; $a\in\mathbb{R}$.

4. Інтеграл від диференціального бінома

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx,\quad a,b\in\mathbb{R};\ m,n,p\in\mathbb{Q}$$

зводиться до інтеграла від раціональної функції змінної t тільки у таких випадках:

1) $p\in\mathbb{Z}$, підстановка $x=t^s$, де s – найменший спільний знаменник дробів m і n;

2) $\frac{m+1}{n}\in\mathbb{Z}$, підстановка $a+bx^n=t^s$, де s – знаменник дробу p;

3) $\frac{m+1}{n}+p\in\mathbb{Z}$, підстановка $ax^{-n}+b=t^s$, де s – знаменник дробу p.

5. Інтеграли вигляду

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,\ \text{де } P_n(x) \text{ – многочлен степеня } n$$

можна обчислити скориставшись формулою

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

де $Q_{n-1}(x)$ – многочлен степеня $(n-1)$ з невизначеними коефіцієнтами, записаний у загальному вигляді, $\lambda\in\mathbb{R}$ - також невизначений коефіцієнт.

6.1.14. Обчислити інтеграли від ірраціональних функцій:

1) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$;

2) $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}dx$;

3) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx;$

4) $\int \frac{dx}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2}\right)};$

5) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt{x+1}}dx;$

6) $\int \frac{x^2+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}dx;$

7) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x};$

8) $\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{(x+1)^2};$

9) $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-2}}\frac{dx}{(x+1)^2};$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}};$

11) $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx;$

12) $\int \frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}};$

13) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}dx;$

14) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}};$

15) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}};$

16) $\int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6}dx;$

17) $\int \frac{\sqrt{x^2-8}}{x^4}dx;$

18)$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}};$

19) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}};$

20) $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^6}dx;$

21) $\int x^2\sqrt{9-x^2}dx;$

22) $\int \sqrt{x^2-2x-1}dx;$

23) $\int \frac{dx}{\left(\sqrt{1+x+x^2}\right)^3};$

24) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}};$

25) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$;

26) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}};$

27) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}};$

28) $\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}};$

29) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-2x-x^2}};$

30) $\int \frac{3x^2-5x}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx;$

31) $\int \frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx;$

32) $\int \frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx;$

33) $\int \sqrt{x^2-2x-1}dx.$

6.1.15. Обчислити інтеграли від диференціальних біномів:

1) $\int x^{-1}(1+x^{1/3})^{-3}dx;$

2) $\int \sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^4dx;$

3) $\int x^{-1/2}(1+x^{1/3})^{-2}dx;$

4) $\int x^5(1+x^3)^{2/3}dx;$

5) $\int \frac{dx}{x\ \sqrt[3]{x^2+1}};$

6) $\int x^7\sqrt{x^4+1}dx;$

7) $\int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}dx$; 8) $\int x^7\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}dx$;

9) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$; 10) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$;

11) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$; 12) $\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}dx$;

13) $\int \frac{dx}{x^2(2+x^3)^{5/3}}$; 14) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\ \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}$.

Інтегрування тригонометричних функцій

Інтеграл вигляду

$$\int R(\sin x, \cos x)dx,$$

де R – раціональна функція від $\sin x$, $\cos x$ зводиться до інтеграла від раціональної функції змінної t за допомогою *універсальної тригонометричної підстановки*

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t,\ \ (-\pi < x < \pi),$$

з якої слідує, що $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$

Універсальна тригонометрична підстановка часто приводить до інтегрування громіздких раціональних виразів. Тому застосовують і інші підстановки:

1) $\int \sin^m x\, cos^n x dx,\ \ m, n \in \mathbb{Z}$;

a) $m > 0$ і m – непарне: підстановка $t = cos\, x$;

b) $n > 0$ і n – непарне: підстановка $t = sin\, x$;

c) $m > 0$ і $n > 0$ і парні: понижуємо степінь підінтегральної функції за допомогою формул $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$;

d) $m < 0$ і $n < 0$ і $m + n$ – парна: підстановка $t = \mathrm{tg}\, x$ або $t = \mathrm{ctg}\, x$;

2) $\int \sin \alpha x \cos \beta x\, dx$, $\int \sin \alpha x \sin \beta x\, dx$, $\int \cos \alpha x \cos \beta x\, dx$ обчислюємо за допомогою формул:

$$\sin \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta)\, x + \sin(\alpha + \beta)x),$$

$$\sin \alpha x \sin \beta x = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta)\, x - \cos(\alpha + \beta)x),$$

$$\cos \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta)\, x + \cos(\alpha + \beta)x);$$

3) $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ і $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$: підстановка $t = \operatorname{tg} x$;

4) $\int R(\operatorname{tg} x) dx$: підстановка $t = \operatorname{tg} x$.

6.1.16. Обчислити інтеграли від тригонометричних функцій:

1) $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx$;
2) $\int \sin^4 x \cos^5 x\, dx$;
3) $\int \sin^4 x \cos^2 x\, dx$;
4) $\int \cos^7 x\, dx$;
5) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$;
6) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx$;
7) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$;
8) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$;
9) $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$;
10) $\int \frac{dx}{\sin^3 x\, \cos x}$;
11) $\int \frac{dx}{\sin^3 x\, \cos^3 x}$;
12) $\int \frac{dx}{\sin^4 x\, \cos^4 x}$;
13) $\int \operatorname{tg}^5 x\, dx$;
14) $\int \operatorname{ctg}^4 x\, dx$;
15) $\int \sin 3x \cos 5x\, dx$;
16) $\int \sin 4x \sin 3x\, dx$;
17) $\int \cos 3x \cos 2x\, dx$;
18) $\int \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) dx$;
19) $\int \frac{dx}{\sqrt{\cos^5 x\, \sin^3 x}}$;
20) $\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x}$;
21) $\int \frac{\cos x\, dx}{(1-\cos x)^2}$;
22) $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$;
23) $\int \frac{dx}{\sin^2 x+\operatorname{tg}^2 x}$;
24) $\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}$;
25) $\int \frac{dx}{3\cos x+2}$;
26) $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$;
27) $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$;
28) $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x} dx$;
29) $\int \frac{dx}{3+2\sin x+\cos x}$;
30) $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$;
31) $\int \frac{3\sin x+2\cos x}{2\sin x+3\cos x} dx$.

Відповіді.

Тема 6.2. Визначений інтеграл. Формула Ньютона-Лейбніца.

Нехай $f(x)$ – неперервна на $[a, b]$ функція, тоді справедлива *формула Ньютона-Лейбніца*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

де $F(x)$ – первісна функції $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x), x \in [a, b]$.

Обчислення визначеного інтеграла за допомогою методу інтегрування частинами

Нехай функції $u = u(x)$, $v = v(x)$ та їх похідні $u'(x)$, $v'(x)$ неперервні на відрізку $[a, b]$, тоді справедлива формула інтегрування частинами

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x).$$

Обчислення визначеного інтеграла за допомогою методу заміни змінної

Нехай функція $f(x)$ – неперервна на відрізку $[a, b]$, а функція $x = \varphi(t)$ – монотонна, неперервна і має неперервну похідну $x' = \varphi'(t)$ на відрізку $[\alpha, \beta]$, причому $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тоді справджується рівність

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Рекурентні формули для інтегралів $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$:

$$I_n = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, \text{ при } n = 2k+1, \; I_n = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{\pi}{2}, \text{ при } n = 2k.$$

6.2.1. Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int_2^9 \sqrt[3]{x-1}\, dx$;

2) $\int_0^1 \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}\right) dx$;

3) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(2+3x)^4}$;

4) $\int_1^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} dx$;

5) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{(2-x)^4}}$;

6) $\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$;

7) $\int_0^1 e^x\,(e^x-1)^3 dx$;

8) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$;

9) $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$;

10) $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}\,dx}{x^2}$;

11) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$;

12) $\int_2^5 \frac{dx}{x^2+2x+10}$;

13) $\int_2^3 \frac{dx}{2x^2+3x-2}$;

14) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$;

15) $\int_{-0,5}^1 \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$;

16) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$;

17) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin 2x\, dx$;

18) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x-\cos^3 x}\; dx$;

19) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} dx$;

20) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin(2x-\frac{\pi}{4}) dx$.

6.2.2. Обчислити визначені інтеграли методом інтегрування частинами:

1) $\int_0^1 xe^{-x} dx$;

2) $\int_1^e \ln^2 x\, dx$;

3) $\int_0^{\pi/2} x\cos x\, dx$;

4) $\int_0^{\pi} x^3 \sin x\, dx$;

5) $\int_0^{1/2} \arccos x\, dx$;

6) $\int_0^1 \mathrm{arctg}\, x\, dx$;

7) $\int_0^{e-1} \ln(x+1)\, dx$;

8) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x}{\sin^2 x} dx$;

9) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{x}{\cos^2 x} dx$;

10) $\int_0^{\pi/4} \frac{x\sin x}{\cos^3 x} dx$;

11) $\int_0^{a\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{a^2+x^2}} dx$;

12) $\int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\, dx$.

6.2.3. Обчислити визначені інтеграли методом заміни змінної:

1) $\int_0^1 \frac{xdx}{1+\sqrt{x}}$;

2) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{1+x}$;

3) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}$;

4) $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$;

5) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$;

6) $\int_0^{\pi/2} \sin 2x \sin^3 x\, dx$;

7) $\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}} dx$;

8) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5-3\cos x}$;

9) $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$;

10) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$;

11) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$;

12) $\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^3}dx$;

13) $\int_{2,5}^5 \frac{(\sqrt{25-x^2})^3}{x^4}dx$;

14) $\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$;

15) $\int_0^{\pi/4} \cos^7 2xdx$;

16) $\int_0^{\pi} \sin^6\frac{x}{2}\, dx$.

Відповіді.

Тема 6.3. Невласні інтеграли I та II роду.

Невласні інтеграли I роду (з нескінченними межами інтегрування)

Нехай функція $f(x)$ – визначена на проміжку $[a,+\infty)$ і інтегровна на будь-якому відрізку $[a,b]$, де $-\infty < a < b < +\infty$. Тоді, якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$, то її називають невласним інтегралом I роду і позначають $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, тобто

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

У цьому випадку невласний інтеграл I роду – збіжний. Якщо границя не існує або нескінченна, то невласний інтеграл – розбіжний.

Аналогічно визначається невласний інтеграл I роду: $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx.$

Невласний інтеграл I роду

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\mathrm{c}} f(x)dx + \int_{\mathrm{c}}^{+\infty} f(x)dx$$

збіжний, коли збіжні обидва інтеграли в правій частині, де c – довільне дійсне число.

Інтеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \text{збіжний}, & p > 1 \\ \text{розбіжний}, & p \le 1 \end{cases}.$

Невласні інтеграли другого роду (від необмежених функцій)

Нехай функція $f(x)$ – визначена на проміжку $[a,b)$ і $x = b$ – особлива точка функції $f(x)$, тобто $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \infty$. Припустимо, що $f(x)$ інтегровна на будь-якому відрізку $[a,b-\varepsilon]$, $\forall\varepsilon > 0$; тоді, якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, то її називають невласним інтегралом II роду і позначають $\int_a^b f(x)dx$, тобто

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx\,.$$

У цьому випадку невласний інтеграл II роду – збіжний. Якщо границя не існує або нескінченна, то невласний інтеграл – розбіжний.

Аналогічно визначається невласний інтеграл II роду у випадку, коли $x = a$ – особлива точка функції $f(x)$: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$.

Невласний інтеграл II роду у випадку, коли $x = \mathrm{c} \in (a, b)$ – особлива точка функції $f(x)$ визначається

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{\mathrm{c}} f(x)dx + \int_{\mathrm{c}}^b f(x)dx$$

і збіжний, коли збіжні обидва інтеграли в правій частині.

Інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \text{збіжний, } 0 < \alpha < 1 \\ \text{розбіжний, } \alpha \geq 1 \end{cases}$.

З'ясовувати питання про збіжність невласних інтегралів I та II роду можна не обчислюючи інтеграли, а використовуючи теореми порівняння.

6.3.1. Обчислити невласні інтеграли першого роду або встановити їх розбіжність:

1) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5}$;
2) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$;
3) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$;
4) $\int_{-\infty}^{\pi} \cos x \, dx$;
5) $\int_0^{+\infty} e^{-kx} dx \; (k > 0)$;
6) $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$;
7) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x dx}{x^2+1}$;
8) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$;
9) $\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;
10) $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$;
11) $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$;
12) $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx$;
13) $\int_0^{+\infty} x \sin x \, dx$;
14) $\int_0^{+\infty} x \cos x \, dx$;
15)13) $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x \, dx$;
16) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

6.3.2. Дослідити на збіжність невласні інтеграли першого роду:

1) $\int_1^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^4} dx$;
2) $\int_1^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^5} dx$;
3) $\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^3+1} dx$;
4) $\int_0^{+\infty} \frac{x^5}{(x^3+x^2+1)^3} dx$;
5) $\int_0^{+\infty} \frac{x^{13}}{(x^5+x^3+1)^3} dx$;
6) $\int_0^{+\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{1+x^4}} dx$;

7) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} dx$;

8) $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln \ln x}$;

9) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx$;

10) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3+1}} dx$.

6.3.3. Обчислити невласні інтеграли другого роду або встановити їх розбіжність:

1) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

2) $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$;

3) $\int_2^3 \frac{xdx}{\sqrt{x^2-4}}$;

4) $\int_1^3 \frac{dx}{x \ln x}$;

5) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;

6) $\int_0^{1/e} \frac{dx}{x \ln^2 x}$;

7) $\int_0^1 x \ln x \, dx$;

8) $\int_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx$;

9) $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$;

10) $\int_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}} dx$;

11) $\int_{-1}^1 \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}} dx$;

12) $\int_{-1}^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$;

13) $\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{6x- x^2-8}}$;

14) $\int_3^5 \frac{x^2dx}{\sqrt{(x-3)\,(5-x)}}$.

6.3.4. Дослідити на збіжність невласні інтеграли другого роду:

1) $\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1-x^3}} dx$;

2) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} dx$;

3) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}} dx$;

4) $\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$;

5) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1} dx$;

6) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos x}$.

Відповіді.

Тема 6.4. Застосування визначеного інтеграла до задач геометрії та механіки.

Обчислення площ плоских фігур

1. Площу криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$, причому $f(x) \geq 0, x \in [a, b]$, обчислюємо за формулою

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

2. Площу фігури, обмеженої лініями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$, причому $f_1(x) \leq f_2(x), x \in [a, b]$, обчислюємо за формулою

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$$

3. Площу криволінійної трапеції, обмеженої кривою, що задана параметрично $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [t_1, t_2]$, та прямими $x = a$, $x = b$, $y = 0$, причому $x(t_1) = a$, $x(t_2) = b$, $a < b$, $y(t) \geq 0$, $t \in [t_1, t_2]$, обчислюємо за формулою

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt.$$

4. Площу криволінійного сектора, обмеженого лініями, заданими в полярній системі координат $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, обчислюємо за формулою

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi.$$

6.4.1. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = 4x - x^2$ і віссю абсцис.

6.4.2. Обчислити площу фігури, обмеженої параболами $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$.

6.4.3. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2 - 4x + 5$, прямими $x = 3$, $x = 5$ і віссю абсцис.

6.4.4. Обчислити площу фігури, обмеженої параболами $y = x^2$, $y = \frac{x^3}{3}$.

6.4.5. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 + 2x$, $x - y + 2 = 0$.

6.4.6. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y^2 = 2x + 1$, $x - y - 1 = 0$.

6.4.7. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = -x^2 + 4x - 3$ і дотичними до неї в точках $A\ (0; -3)$, $B\ (3; 0)$.

6.4.8. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y^2 = 2px$ і нормаллю до неї, нахиленою до осі абсцис під кутом 135°.

6.4.9. Знайти площу фігури, обмеженої параболами $y^2 + 8x = 16$ і $y^2 - 24x = 48$.

6.4.10. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 1$.

6.4.11. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими $y = \frac{27}{x^2+9}$ та $y = \frac{x^2}{6}$.

6.4.12. Знайти площу фігури, обмеженої кривими $y = \ln(x + 2)$, $y = 2\ln x$ і віссю абсцис.

6.4.13. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими $y = \ln x$, $y = \ln^2 x$.

6.4.14. Коло $x^2 + y^2 = 8$ поділене параболою $y = \frac{x^2}{2}$ на дві частини. Знайти площі обох частин.

6.4.15. Коло $x^2 + y^2 = 16$ поділене параболою $y^2 = 6x$ на дві частини. Знайти площі обох частин.

6.4.16. Знайти площу фігури, обмеженої кривими $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ і віссю абсцис.

6.4.17. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими $y = x(x - 1)^2$ і віссю абсцис.

6.4.18. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими $y = (x^2 + 2x)\, e^{-x}$ і віссю абсцис.

6.4.19. Знайти площу фігури, обмеженої кривою $y = \ln x$, прямими $y = \ln a$, $y = \ln b$, $(a < b)$ та віссю ординат.

6.4.20. Обчислити площу одного з криволінійних трикутників, обмежених віссю абсцис та кривими $y = \sin x$, $y = \cos x$.

6.4.21. Знайти площу фігури, обмеженої віссю ординат і кривими $y = \operatorname{tg} x$, $y = \frac{2}{3}\cos x$.

6.4.22. Знайти площу фігури, обмеженої однією аркою циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ і віссю абсцис.

6.4.23. Обчислити площу фігури, обмеженої астроїдою $x = a\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$.

6.4.24. Знайти площу фігури, обмеженої петлею кривої $x = 3t^2, \quad y = 3t - t^3$.

6.4.25. Знайти площу фігури, обмеженої петлею кривої $x = t^2 - 1, \quad y = t^3 - t$.

6.4.26. Обчислити площу фігури, обмеженої першим витком спіралі Архімеда $\rho = a\varphi$ та полярною віссю.

6.4.27. Обчислити площу фігури, обмеженої другим і третім витками спіралі Архімеда $\rho = a\varphi$ та полярною віссю.

6.4.28. Знайти площу фігури, обмеженої кривою $\rho = a\sin 2\varphi$ (двопелюсткова роза).

6.4.29. Знайти площу фігури, обмеженої кривою $\rho = a\cos 5\varphi$ (п'ятипелюсткова роза).

6.4.30. Обчислити площу фігури, обмеженої кардіоїдою $\rho = a(1 + \sin\varphi)$.

6.4.31. Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $\rho^2 = a^2 \sin 2\varphi$.

6.4.32. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими $\rho^2 = 2\cos 2\varphi$, $\rho = 1$ (зовні кола).

6.4.33. Знайти площу фігури, обмеженої лемніскатою Бернуллі $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

6.4.34. Знайти площу фігури, обмеженої лемніскатою Бернуллі $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, яка лежить усередині кола $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}$.

6.4.35. Знайти площу фігури, яка описується нерівностями: $x^2 + y^2 \geq 2y$, $x^2 + y^2 \leq 4y$, $y \geq -\sqrt{3}x, y \geq x$.

Довжина дуги

1. Довжину дуги гладкої кривої, що задана рівнянням $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, обчислюємо за формулою

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

2. Довжину дуги гладкої кривої, що задана параметрично $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [t_1, t_2]$, обчислюємо за формулою

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

3. Довжину дуги гладкої кривої, що задана в полярній системі координат $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, обчислюємо за формулою

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi.$$

4. Довжину дуги гладкої просторової кривої, що задана рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, обчислюємо за формулою

$$l = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt.$$

6.4.36. Обчислити довжину дуги кривої $y = \ln x$ від $x = \sqrt{3}$ до $x = \sqrt{8}$.

6.4.37. Обчислити довжину дуги кривої $y = \ln(1 - x^2)$ від $x = 0$ до $x = \frac{1}{2}$.

6.4.38. Знайти довжину дуги ланцюгової лінії $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ від $x = 0$ до $x = b$.

6.4.39. Обчислити довжину дуги кривої $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin \sqrt{x}$.

6.4.40. Знайти довжину петлі кривої $x = t^2$, $y = t - \frac{1}{3} t^3$.

6.4.41. Знайти довжину дуги евольвенти кола $x = R(\cos t + t \sin t)$, $y = R(\sin t - t \cos t)$ від $t = 0$ до $t = \pi$.

6.4.42. Знайти довжину астроїди $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.

6.4.43. Знайти довжину дуги кардіоїди $\rho = a(1 + \cos \varphi)$.

6.4.44. Знайти довжину дуги кардіоїди $\rho = 2(1 - \cos \varphi)$, що лежить усередині кола $\rho = 1$.

6.4.45. Обчислити довжину дуги спіралі Архімеда $\rho = a\varphi$ від початку до кінця першого витка.

6.4.46. Обчислити довжину дуги гіперболічної спіралі $\rho\varphi = 1$ від $\varphi = \frac{3}{4}$ до $\varphi = \frac{4}{3}$.

6.4.47. Обчислити довжину лінії $\rho = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$.

6.4.48. Обчислити довжину дуги просторової кривої $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$ від $t = 0$ до $t = 2\pi$ (гвинтова лінія).

6.4.49. Обчислити довжину дуги просторової кривої $x = at^2$, $y = a\left(t + \frac{1}{3}t^3\right)$, $z = a\left(t - \frac{1}{3}t^3\right)$ від $t = 0$ до $t = \sqrt{3}$.

Об'єм тіл

1. Об'єм тіла за відомою площею $S(x)$ – перерізу тіла площиною перпендикулярною до осі Ox, обчислюємо за формулою

$$V = \int_a^b S(x)\,dx.$$

2. Об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x) \geq 0$ та прямими $x = a, x = b$, обчислюємо за формулою

$$V_{Ox} = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

3. Об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy криволінійної трапеції, обмеженої кривою $x = \varphi(y) \geq 0$ та прямими $y = c, y = d$, обчислюємо за формулою

$$V_{Oy} = \pi \int_c^d \varphi^2(y)\,dy.$$

6.4.50. Знайти об'єм еліпсоїда, утвореного обертанням еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ навколо осі Ox.

6.4.51. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої параболами $y = x^2$, $x = y^2$.

6.4.52. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями $y = x^3$, $y = 0$, $x = 1$, навколо: 1) осі Ox; 2) осі Oy.

6.4.53. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y = xe^x$, $x = 1$, $y = 0$.

6.4.54. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$, $y = 2$.

6.4.55. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями $y = 2x - x^2$, $y = 0$.

6.4.56. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями $(x-4)y^2 = x(x-3)$, $y = 0$.

6.4.57. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої гіперболою $x^2 + y^2 = a^2$ і прямою $x = a + h$ $(h > 0)$.

6.4.58. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої лінією $y = \arcsin x$ з основою $[0,1]$.

6.4.59. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням однієї арки циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ навколо осі абсцис.

6.4.60. Обчислити об’єм тіла, обмеженого еліпсоїдом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

6.4.61. Обчислити об’єм тіла, обмеженого еліптичним параболоїдом $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2}$ і площиною $z = 1$.

6.4.62. Знайти об’єм тіла, обмеженого однопорожнинним гіперболоїдом $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1$ і площинами $z = -1, z = 2$.

6.4.63. Обчислити об’єм тіл, обмежених еліпсоїдом $x^2 + 2y^2 + z^2 = 6$ та параболоїдом $z = x^2 + 2y^2$.

6.4.64. Знайти об’єм тіла, обмеженого параболоїдом $2z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ і конусом $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z^2$.

Площа поверхні обертання

1. Площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox дуги кривої $y = f(x), x \in [a, b]$, обчислюємо за формулою

$$P_{Ox} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

2. Площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Oy дуги кривої $x = \varphi(y), y \in [c, d]$, обчислюємо за формулою

$$P_{Oy} = 2\pi \int_{c}^{d} \varphi(y)\sqrt{1 + (\varphi'(y))^2}dy.$$

3. Площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox дуги кривої, що задана параметрично $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [t_1, t_2]$, обчислюємо за формулою

$$P_{Ox} = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$$

4. Площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Oy дуги кривої, що задана параметрично $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [t_1, t_2]$, обчислюємо за формулою

$$P_{Oy} = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} x(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$$

5. Площу поверхні, утвореної обертанням навколо полярної осі дуги кривої, що задана в полярній системі координат $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, обчислюємо за формулою

$$P_{Op} = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho(\varphi)\sin\varphi\sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\ d\varphi.$$

6.4.65. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням параболи $y^2 = 4x$ навколо осі абсцис від вершини до точки $x = 3$.

6.4.66. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кубічної параболи $y = \frac{1}{3}x^3$ навколо осі абсцис, від $x = 0$ до $x = a$.

6.4.67. Знайти площу поверхні катеноїда, утвореної обертанням ланцюгової лінії $y = a\text{ch}\,\frac{x}{a}$ навколо осі абсцис, від $x = 0$ до $x = a$.

6.4.68. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням однієї арки циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ навколо осі абсцис.

6.4.69. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кардіоїди $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ навколо полярної осі.

Робота змінної сили

Припустимо, сила F рухає предмет по осі Ox, причому напрямок сили збігається з напрямком руху.

Робота змінної сили $F(x)$ від точки $x = a$ до точки $x = b$

$$W = \int_a^b F(x)\,dx.$$

6.4.70. Яку роботу треба виконати, щоб віддалити у нескінченість з поверхні Землі тіло маси m? (Сила земного тяжіння $F = \frac{mgR^2}{r^2}$, де R - радіус Землі, r – відстань від тіла до центра Землі)

6.4.71. Яку роботу треба виконати, щоб розтягнути пружину на 5 см, якщо сила 1 Н розтягує її на 1 см?

6.4.72. Яку роботу треба виконати, щоб стиснути пружину на 10 см, якщо для стискання на 1 см витрачається сила 2 Н?

6.4.73. Циліндр з рухомим поршнем наповнений парою об'єму $V_0 = 0{,}2$ м^3 під тиском $p_0 = 10300$ Па. Яку роботу треба виконати, щоб при сталій температурі об'єм пари зменшити в 2 рази?

6.4.74. Яку роботу треба виконати, щоб викачати рідину із вертикальної циліндричної ємності висоти H і радіуса основи R? Питома вага рідини γ.

6.4.75. Яку роботу треба виконати, щоб насипати купу піску конічної форми висоти H і радіусом основи R? Питома вага піску γ.

6.4.76. Яку роботу треба виконати, щоб викачати воду з ємності, що має формулу параболоїда обертання висоти H і радіуса основи R, повернутого вершиною вгору?

6.4.77. Яку роботу треба виконати, щоб подолати силу тяжіння, при побудові правильної чотирикутної піраміди висоти H з довжиною сторони основи a при питомій вазі матеріалу γ? Обчислити роботу для побудови піраміди Хеопса ($H = 140$ м, $a = 200$ м, $\gamma = 2{,}5\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$)

6.4.78. Яку роботу треба виконати, щоб відкачати рідину з ємності, що має форму повернутого вершиною вниз конуса висоти H і радіуса основи R? Питома вага рідини γ.

6.4.79. Яку роботу треба виконати, щоб викачати воду з півсферичної ємності радіуса R?

Маса, центр мас та моменти інерції матеріальної лінії

Розглянемо дугу матеріальної кривої $y = f(x)$, $a \le x \le b$, і нехай густина (маса на одиницю довжини) цієї матеріальної кривої $\gamma(x)$.

1. Маса матеріальної кривої обчислюються за допомогою інтеграла

$$m = \int_a^b \gamma(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

2. Центр мас матеріальної кривої

$$x_c = \frac{\int_a^b \gamma(x)x\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx}{\int_a^b \gamma(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx} = \frac{M_{oy}}{m},$$

$$y_c = \frac{\int_a^b \gamma(x)f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx}{\int_a^b \gamma(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx} = \frac{M_{ox}}{m}.$$

Тут M_{oy} і M_{ox} - статичні моменти кривої відносно осей *Oy* та *Ox* відповідно.

3. Моменти інерції матеріальної кривої

відносно осі *Ox*

$$I_x = \int_a^b \gamma(x)f^2(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

відносно осі *Oy*

$$I_y = \int_a^b \gamma(x)x^2\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

відносно початку координат

$$I_o = \int_a^b \gamma(x)(x^2 + f^2(x))\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

6.4.80. Знайти масу стержня довжиною 5м, якщо лінійна густина стержня змінюється за законом $\gamma = (1 + 0{,}1x^3)$ кг/м, де x – відстань від одного з кінців стержня.

6.4.81. Обчислити статичний момент відносно осі абсцис однорідної $(\gamma = 1)$ дуги еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, що лежить у першій чверті.

6.4.82. Обчислити статичний момент відносно полярної осі однорідного ($\gamma = 1$) кола

$$\rho = 2a\sin\varphi.$$

6.4.83. Знайти координати центра тяжіння однорідних ($\gamma = 1$) дуг кривих:

1) півколо $y = \sqrt{R^2 - x^2}$;

2) дуга кола радіуса R з центром в початку координат, що стягує центральний кут α;

3) дуга ланцюгової лінії $y = a\text{ch}\,\frac{x}{a}$ від $x_1 = -a$ до $x_2 = a$;

4) перша арка циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$;

5) дуга астроїди $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, що лежить в першій чверті;

6) дуга логарифмічної спіралі $\rho = a\,e^{\varphi}$ від $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ до $\varphi_2 = \pi$;

7) дуга кардіоїди $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ від $\varphi_1 = 0$ до $\varphi_2 = \pi$;

8) дуги кола $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

6.4.84. Знайти момент інерції однорідного кола радіуса R відносно його діаметра.

6.4.85. Знайти момент інерції однорідного півкола радіуса R відносно його діаметра.

6.4.86. Знайти момент інерції однорідної дуги лінії $y = e^x$ $\left(0 \le x \le \frac{1}{2}\right)$ відносно осі абсцис.

6.4.87. Знайти моменти інерції однорідної першої арки циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, відносно обох координатних осей.

6.4.88. Знайти статичні моменти відносно обох координатних осей відрізка прямої $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, вирізаного осями координат.

6.4.89. Знайти момент інерції однорідної дуги кривої $y = e^x$ $(0 \le x \le 0{,}5)$ відносно осі Ox.

Маса і центр мас матеріальної пластинки

Розглянемо матеріальну пластинку, яку задано криволінійною трапецією, обмеженої лінією $y = f(x)$, $a \le x \le b$. Припустимо, що густину (маса на одиницю площі) задано функцією $\gamma(x)$.

1. Маса матеріальної пластинки

$$m = \int\limits_a^b \gamma(x) f(x)\, dx.$$

2. Центр мас матеріальної пластинки

$$x_c = \frac{\int_a^b x\gamma(x) f(x)\, dx}{\int_a^b \gamma(x) f(x)\, dx} = \frac{M_{oy}}{m},\ y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b \gamma(x) f^2(x)\, dx}{\int_a^b \gamma(x) f(x)\, dx} = \frac{M_{ox}}{m}.$$

Тут, M_{oy} та M_{ox} - статичні моменти матеріальної пластинки відносно осей *Oy* та *Ox* відповідно.

3. Моменти інерції матеріальної пластинки

відносно осі *Ox*

$$I_x = \frac{1}{3}\int\limits_a^b \gamma(x) f^3(x)\, dx,$$

відносно осі *Oy*

$$I_y = \int\limits_a^b \gamma(x) x^2 f(x)\, dx,$$

відносно початку координат

$$I_o = \int\limits_a^b \gamma(x)\left(x^2 + \frac{1}{3} f^2(x)\right) f(x)\, dx.$$

6.4.90. Обчислити статичний момент трикутника з основою a і висотою h відносно його основи.

6.4.91. Обчислити статичні моменти прямокутного рівнобедреного трикутника, катети якого дорівнюють a, відносно кожної з його сторін.

6.4.92. Обчислити статичні моменти однорідної пластинки, обмеженої заданими кривими, відносно осі абсцис:

1) $y = \frac{2}{1+x^2}$ та $y = x^2$;

2) $y = \sin x$ та $y = \frac{1}{2}$ (перший сегмент);

3) $y = \sqrt{x}$ та $y = x^2$.

6.4.93. Обчислити координати центра мас однорідної пластинки:

1) півкруга, обмеженого $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ та віссю абсцис;

2) обмеженої еліпсом $x = a\,\text{cos}t,\ y = b\,\text{sin}t$ і осями координат ($x \geq 0,\ y \geq 0$);

3) обмеженої дугою синусоїди $y = \sin x$ та відрізком осі абсцис від $x = 0$ до $x = \pi$;

4) обмеженої першою аркою циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ та віссю абсцис;

5) обмеженої дугою астроїди $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$ та координатними вісями, якщо $x \geq 0,\ y \geq 0$;

6) обмеженої дугою спіралі Архімеда $\rho = a\varphi$ від $\varphi_1 = 0$ до $\varphi_2 = \pi$;

7) сектора круга радіуса R з центральним кутом 2α з центром у початку координат;

8) обмеженої кардіоїдою $\rho = a(1 + \cos\varphi)$;

9) обмеженої правою частиною лемніскати Бернуллі $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$.

6.4.94. Знайти статичні моменти відносно координатних осей та координати центра тяжіння трикутника, обмеженого прямими $x + y = a$, $x = 0$ та $y = 0$.

6.4.95. Знайти момент інерції прямокутника зі сторонами a та b відносно сторони a.

6.4.96. Знайти момент інерції півкруга радіуса R відносно його діаметра.

6.4.97. Знайти момент інерції півкруга радіуса R відносно його центра.

6.4.98. Знайти момент інерції прямого параболічного сегмента з основою $2a$ та висотою b відносно його вісі симетрії.

6.4.99. Знайти моменти інерції площі однорідного еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, відносно обох його осей.

Відповіді.

Відповіді

Відповіді до Теми 1.1.

1.1.1. 1) 10; 2) 0; 3) -18; 4) -60; 5) 0; 6) 0; 7) -5; 8) $x_2 - x_1$; 9) $4ab$; 10) 1; 11) -60; 12) 0; 13) 5; 14) -12; 15) 4; 16) -34; 17) -8 ; 18) $2a^3$; 19) $2a^2b$; 20) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$; 21) $\sin 2\alpha$; 22) $xyz(x-y)(y-z)(z-x)$.

1.1.2. 1) $x_1 = -1,\ x_2 = -4$; 2) $x_1 = 1,\ \ x_2 = 5$; 3) $x_1 = \frac{3}{2},\ x_2 = -\frac{1}{6}$; 4) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 5) $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}$; 6) $x = -3$; 7) $x_1 = -10,\ \ x_2 = 2$; 8) $x \in \mathbb{R}$; 9) $x \in (3; +\infty)$; 10) $x \in (-1; 7)$; 11) $x \in (1; 2)$; 12) $x \in [-2.5; -2)$; 13) $x \in (-4; +\infty)$; 14) $x \in (7/2; +\infty)$ 15) $x \in (-6; -4)$; 16) $x \in \mathbb{R}$.

1.1.4. 1) $M_{21} = 10$; $A_{21} = -10$; $M_{22} = 8$; $A_{22} = 8$; $M_{23} = 1$; $A_{23} = -1$;
2) $M_{12} = -54$; $A_{12} = 54$; $M_{22} = -2$; $A_{22} = -2$; $M_{32} = 24$; $A_{32} = -24$;
3) $M_{13} = -9$; $A_{13} = -9$; $M_{23} = 8$; $A_{23} = -8$; $M_{33} = -5$; $A_{33} = -5$.

1.1.5. 1) -4; 2) -20; 3) -8; 4) -50; 5) 0; 6) $(x-y)(y-z)(z-x)$; 7) -48; 8) -60; 9) 48; 10) -215; 11) -110; 12) 20.

1.1.6. 1) -101; 2) 4; 3) 114; 4) 0; 5) 633; 6) -104; 7) 100; 8) 840; 9) -144; 10) 394; 11) 1; 12) $xyz(y-x)(z-x)(z-y)$.

1.1.9. 1) $2n + 1$; 2) $n!$.

1.1.13. 1) $A + B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 4 \\ 4 & -2 & 12 \\ 7 & 3 & 3 \end{pmatrix}, A - B = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$;
2) $A + B = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 8 & -1 \\ -1 & 15 \end{pmatrix}$, $A - B = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 2 & -11 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.1.14. 1) $\begin{pmatrix} 7 & 19 & 8 \\ -9 & 28 & -25 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 7 & -13 \\ 0 & -14 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & -11 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 12 & -7 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

1.1.15. 1) $\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -\lambda & 3 & -1 \\ -2 & -6-\lambda & 1 \\ 1 & -4 & -3-\lambda \end{pmatrix}$.

1.1.16. 1) $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & -1 \\ 5 & 9 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $A^T = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 2 \\ -9 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

3) $A^T = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $A^T = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$.

1.1.17. $C = C^T = \begin{pmatrix} 11 & 3 & -4 \\ 3 & 11 & 10 \\ -4 & 10 & 2 \end{pmatrix}$.

1.1.18. 1) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 18 \\ -18 & 19 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 1 & 18 \\ -18 & 19 \end{pmatrix}$;

2) $AB = \begin{pmatrix} 14 & 9 & -4 \\ 16 & 5 & -3 \\ 7 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 11 \\ -1 & -3 & 1 \\ 6 & 4 & 17 \end{pmatrix}$; 3) $AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 10 & 22 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 12 \\ 8 & 12 & 16 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$;

4) $AB = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 6 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$; 5) $AB = \begin{pmatrix} 6 & 21 \\ -2 & -7 \end{pmatrix}$, $BA = (-1)$;

6) AB, BA – нульові матриці; 7) $AB = \begin{pmatrix} -18 & 6 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, BA неможливо;

8) $AB = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 8 \\ 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, BA неможливо; 9) $AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 9 & 12 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $BA = (21)$;

10) $AB = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$, BA неможливо; 11) $AB = \begin{pmatrix} -5 & -15 & 10 \\ 3 & 10 & -14 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -5 \\ 7 & -7 & -9 \\ -10 & 14 & 12 \end{pmatrix}$;

12) $AB = BA = \begin{pmatrix} a\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d\delta \end{pmatrix}$.

1.1.19. 1) різниця невизначена, $AA^T = \begin{pmatrix} 30 & 9 \\ 9 & 29 \end{pmatrix}$, $A^TA = \begin{pmatrix} 34 & 2 & 11 \\ 2 & 20 & 6 \\ 11 & 6 & 5 \end{pmatrix}$; 2) різниця невизначена, $AA^T = \begin{pmatrix} 13 & -14 & -4 \\ -14 & 17 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $A^TA = \begin{pmatrix} 9 & -10 \\ -10 & 25 \end{pmatrix}$.

1.1.20. Нульова матриця.

1.1.21. 1) $A^3 = \begin{pmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{pmatrix}$; 2) $A^3 = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 10 & -17 \end{pmatrix}$.

1.1.22. 1) нульова матриця; 2) $\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 12 & 3 & 10 \\ 6 & 5 & 11 \\ 9 & 7 & 10 \end{pmatrix}$.

1.1.23. 1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$; 2) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{pmatrix}$; 3) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$; 4) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;
5) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; 6) $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 7) $\frac{1}{18}\begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ -3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$;
8) $\frac{1}{34}\begin{pmatrix} 8 & -3 & 7 \\ 4 & 7 & -5 \\ -10 & 8 & 4 \end{pmatrix}$; 9) $\frac{1}{93}\begin{pmatrix} -57 & 12 & 6 \\ 22 & -3 & -17 \\ 18 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

1.1.24. 1) $X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $X = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; 3) $X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$; 4) $X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$;
5) $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; 6) $X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; 7) $X = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$; 8) $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$;
9) $X = \begin{pmatrix} 0.5 & -1.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 10) $X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$; 11) $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; 12) $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.1.25. -2700.

1.1.26. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 50 & 1 \end{pmatrix}$.

Повернутися до завдань.

Відповіді до теми 1.2.

1.2.1. 1) $x = 1, y = 1, \ z = 1$; 2) $x = 0, y = 0, \ z = 0$; 3) $x = 2, y = -1, \ z = 1$; 4) $x = \frac{14}{3}$, $y = -\frac{13}{3}, \ z = \frac{8}{3}$; 5) $\Delta = 0$; 6) $x = 1, y = 1, \ z = 1$; 7) $x = 2, y = 4, \ z = 1$; 8) $x = 1, y = 2$, $z = 3$; 9) $x = \frac{b+c}{2}, y = \frac{a-b}{2}, \ z = \frac{a-c}{2}$; 10) $x = 2, y = -2, \ z = 3$; 11) $x_1 = -1, x_2 = -1, \ x_3 = 0, x_4 = 1$; 12) $x_1 = 1, \ x_2 = 2, \ x_3 = 1, \ x_4 = -1$.

1.2.2. $a \neq -6$.

1.2.3. 1) $x = 1, y = 1, \ z = 1$; 2) $x = 1, y = 2, \ z = -1$; 3) $x = -2, y = 1, \ z = 2$; 4) $x = 4$, $y = -1, \ z = 2$; 5) $x = -2, y = 1, \ z = 2$; 6) $x = 1, y = 1, \ z = 1$; 7) $x = -2, y = 1$, $z = -1$; 8) $x = 1, y = -2, \ z = -3$.

1.2.4. 1) 2; 2) 3; 3) 1; 4) 2; 5) 3; 6) 1; 7) 2; 8) 2; 9) 2; 10) 2; 11) 3; 12) 2; 13) 3; 14) 4; 15) 3; 16) 3.

1.2.5. 1) $x=1$, $y=-\frac{3}{2}$, $z=\frac{3}{2}$; 2) $x=\frac{18}{7}-\frac{c}{7}$, $y=-\frac{5}{7}+\frac{3c}{7}, z=c$, $\forall c\in\mathbb{R}$; 3) $x=1+\frac{c_1}{3}-2c_2$, $y=c_1$, $z=c_2$ $\forall c_1,c_2\in\mathbb{R}$; 4) немає розв'язку; 5) немає розв'язку; 6) $x=1, y=3+c$, $z=c$ $\forall c\in\mathbb{R}$; 7) $x=1$, $y=2, z=-3$; 8) немає розв'язку; 9) $x=2c_1-c_2$, $y=c_1$, $z=c_2$, $u=1$ $\forall c_1,c_2\in\mathbb{R}$; 10) немає розв'язку; 11) $x=-\frac{1}{2}$, $y=1, z=\frac{1}{2}$; 12) $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$; 13) $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=-2$; 14) $x_1=-1+c_1+2c_2$, $x_2=-3+c_1+2c_2$, $x_3=c_1$, $x_4=c_2$ $\forall c_1,c_2\in\mathbb{R}$; 15) $x_1=5$, $x_2=4, x_3=3$, $x_4=1$, $x_5=2$; 16) $x_1=1$, $x_2=2, x_3=3$, $x_4=4$; 17) $x_1=c_1$, $x_2=c_2$, $x_3=5-8c_1+4c_2$, $x_4=-3, x_5=1+2c_1-c_2$ $\forall c_1,c_2\in\mathbb{R}$; 18) $x_1=-1$, $x_2=1, x_3=3$, $x_4=-2$.

1.2.6. 1) сумісна, $x_1=2-2c_1-c_3$, $x_2=c_1$, $x_3=-`1+c_2-c_3, x_4=c_2$, $x_5=c_3$ $\forall c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$; 2) несумісна; 3) сумісна, $x_1=-\frac{43}{7}+\frac{17}{7}c_1+\frac{11}{7}c_2$, $x_2=-\frac{27}{7}+\frac{11}{7}c_1+\frac{10}{7}c_2$, $x_3=c_1$, $x_4=c_2$ $\forall c_1,c_2\in\mathbb{R}$; 4) несумісна; 5) сумісна, $x_1=-8-c$, $x_2=4+2c$, $x_3=c$ $\forall c\in\mathbb{R}$; 6) несумісна; 7) сумісна; 8) сумісна, $x_1=-11-c_1-5c_2$, $x_2=-24-c_1-14c_2$, $x_3=c_1$, $x_4=c_2$ $\forall c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

1.2.7. 1) З.Р: $\begin{pmatrix} c \\ -2c \\ c \end{pmatrix}$, ФСР : $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; 2) З.Р: $\begin{pmatrix} -2c_2-3c_1 \\ -c_2-2c_1 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, ФСР : $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1.2.8. $a-2b+c=0$.

1.2.9. 1) $a\neq-3$; 2) $a=-3, b\neq 1/3$; 3) $a=-3$, $b=1/3$.

1.2.10. $a=5$.

Повернутися до завдань.

Відповіді до теми 2.1.

2.1.1. $|\vec{a}|=7$.

2.1.2. $\overrightarrow{AB}=\{-7;2;-2\}, \overrightarrow{BA}=\{7;-2;2\}$.

2.1.3. $N(4;-2;-2)$.

2.1.4. $a_x=\sqrt{2}$, $a_y=1$, $a_z=-1$.

2.1.5. $a_z = 4$ або $a_z = -4$.

2.1.6. 1) $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\cos\beta = -\frac{4}{13}$, $\cos\gamma = -\frac{3}{13}$; 2) $\cos\alpha = -\frac{16}{25}$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$, $\cos\gamma = -\frac{12}{25}$.

2.1.7. 1) не може, 2) може.

2.1.8. $\vec{a} = \{1; -1; \sqrt{2}\}$ або $\vec{a} = \{1; -1; -\sqrt{2}\}$.

2.1.10. $|\vec{a} + \vec{b}| = 20$.

2.1.11. $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| = 13$.

2.1.12. $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{129} \approx 11{,}4$; $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$.

2.1.13. 1) $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають бути взаємно перпендикулярні; 2) кут між $\vec{a}$ і $\vec{b}$ має бути гострий; 3) кут між $\vec{a}$ і $\vec{b}$ має бути тупий.

2.1.14. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

2.1.16. 1) $\{2; -4; 6\}$; 2) $\{3; -7; 12\}$; 3) $\{2; -8/3; 2\}$.

2.1.17. Колінеарні, $\vec{b}$ довший $\vec{a}$ в три рази.

2.1.18. $|\overrightarrow{AB}| = 2|\overrightarrow{CD}|$, $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$.

2.1.19. $\vec{R} = \{-4; 2; -3\}$, $|\vec{R}| = \sqrt{29}$.

2.1.20. $\alpha = 4, \beta = -1$.

2.1.22. 1) $\vec{a}^0 = \left\{-\frac{2}{7}; \frac{6}{7}; -\frac{3}{7}\right\}$, 2) $\vec{a}^0 = \left\{\frac{6}{7}; -\frac{2}{7}; -\frac{3}{7}\right\}$, 3) $\vec{a}^0 = \left\{\frac{3}{13}; \frac{4}{13}; -\frac{12}{13}\right\}$.

2.1.23. $\uparrow\uparrow$ $\vec{a}^0 = \left\{\frac{3}{13}; \frac{4}{13}; -\frac{12}{13}\right\}$, $\uparrow\downarrow$ $\vec{a}^0 = \left\{-\frac{3}{13}; -\frac{4}{13}; \frac{12}{13}\right\}$.

2.1.24. $\vec{d} = -48\vec{i} + 45\vec{j} - 36\vec{k}$.

2.1.25. $\sqrt{26}$.

2.1.26. $\vec{c} = \{-3; 15; 12\}$.

2.1.27. $\vec{a} = 2\vec{p} + 5\vec{q}$.

2.1.28. $\vec{c} = 2\vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}$.

2.1.29. 1) $\vec{a} = \frac{3}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}$; 2) $\vec{c} = -2\vec{a} + 3\vec{b} + +\vec{d}$.

Повернутися до завдань.

Відповіді теми 2.2.

2.2.1. 1)-3; 2) 4; 3) 9; 4) 7; 5) 19; 6) -4; 7) 61.

2.2.2. 1) 3; 2) 33; 3) 22; 4) 55.

2.2.3. $-\frac{3}{2}$.

2.2.4. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

2.2.5. 5.

2.2.6. $\alpha = \pm\frac{3}{2}$.

2.2.7. $\vec{h} = \frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{\vec{c}^2}\vec{c} - \vec{b}$.

2.2.8. $\arccos\frac{2}{\sqrt{7}}$.

2.2.9. $1)\ -8;\ 2)\ 3;\ 3)\ 7;\ 4)\ 42;\ 5)\ 74;\ 6)\ -121; 7)\ -118$.

2.2.10. 1) 64; 2) $\sqrt{67}$; 3) $\sqrt{41}$; 4) $\{-72; 54; -72\}$; 5) $\{-24; 24; -56\}$.

2.2.12. $\alpha = 2$.

2.2.13. $\arccos\frac{5}{21}$.

2.2.14. 45°.

2.2.15. $\arccos(-\frac{4}{9})$.

2.2.16. 60°.

2.2.17. $|\vec{a} + \vec{b}| = 15$, $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{593}$.

2.2.18. $\vec{x} = \{-24; 32; 30\}$.

2.2.19. $\vec{x} = \{4; 2; -4\}$.

2.2.20. $\vec{x} = \{-4; -6; 12\}$.

2.2.21. $\vec{x} = \{-9; -21; 3\}$.

2.2.22. $\vec{x} = \{2; -3; 0\}$.

2.2.23. $\vec{x} = \{1; 2; -2\}$.

2.2.24. $-\frac{20}{3}$.

2.2.25. $-\frac{19}{3}$.

2.2.26. 2.

2.2.27. 2.

2.2.28. $\frac{7}{3}$.

2.2.29. 6.

2.2.30. -3.

2.2.31. 19.

2.2.32. 37.

2.2.33. 8.

2.2.34. 1) 3; 2) 8.

2.2.35. ± 24.

2.2.36. 1) 30; 2) 75.

2.2.37. 1) 27; 2) 27; 3) 2700.

2.2.38. $\vec{a}||\vec{b}$.

2.2.40. 1) $\{10; -1; -7\}$; 2) $\{20; -2; -14\}$; 3) $\{40; -4; -28\}$.

2.2.41. 1) $\{14; 12; -5\}$; 2) $\{-14; -12; 5\}$; 3) $\{42; 36; -15\}$.

2.2.42. $S = 14,\ h = \frac{28}{\sqrt{52}}$.

2.2.43. $39\sqrt{2}$.

2.2.44. $S = 25,\ h = 5$.

2.2.45. $\sqrt{\frac{62}{13}}, \sqrt{\frac{31}{3}}$.

2.2.46. $\vec{c} = 9\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} + 2\vec{k}$ або $\vec{c} = -9\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} - 2\vec{k}$.

2.2.47. $\frac{5\sqrt{17}}{21}$.

2.2.48. $\vec{x} = \{-6; -24; 8\}$.

2.2.49. $\vec{x} = \{45; 24; 0\}$.

2.2.50. $\vec{x} = \{7; 5; 1\}$.

2.2.51. $\vec{M} = \{7; 1; 2\}$.

2.2.52. $\vec{M} = \{14; -22; 16\}$.

2.2.53. $|\vec{M}| = 28, \cos\alpha = -\frac{12}{28},\ \cos\beta = -\frac{6}{7}, \cos\gamma = \frac{2}{7}$.

2.2.54. $|\vec{M}| = \sqrt{298}, \cos\alpha = \frac{8}{\sqrt{298}},\ \cos\beta = \frac{15}{\sqrt{298}}, \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{298}}$.

2.2.55. 34.

2.2.56. 1) права; 2) ліва; 3) ліва; 4) компланарні; 5) ліва.

2.2.57. ± 9.

2.2.58. 24.

2.2.59. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ взаємно перпендикулярні.

2.2.60. -20.

2.2.61. 1) так; 2) ні; 3) так; 4) ні.

2.2.63. 5.

2.2.64. 11.

2.2.65. $V = \frac{1}{3},\ h = \sqrt{2}$.

Повернутися до завдань.

Відповіді до теми 3.1.

3.1.1. Точки M_1, M_3, M_4 належать даній прямій; M_2, M_5, M_6 не належать даній прямій.

3.1.2. $(3; -5)$.

3.1.3. 17.

3.1.4. $7x - 2y + 12 = 0, 5x + y - 28 = 0, 2x - 3y - 18 = 0$.

3.1.5. Рівняння сторони AB : $2x + y - 8 = 0$, BC : $x + 2y - 1 = 0$, CA : $x - y - 1 = 0$; рівняння медіани, проведеної з вершини A : $x - 3 = 0$, B : $x + y - 3 = 0$, C : $y = 0$.

3.1.6. 1) $-\frac{5}{2}$; 2) $\frac{2}{5}$.

3.1.7. 1) $2x + 3y - 9 = 0$; 2) $3x - 2y - 7 = 0$.

3.1.8. 1) $k = 8$; 2) $k = \frac{1}{3}$.

3.1.9. $2x - 3y - 13 = 0,\ 3x + 2y = 0$.

3.1.10. $(2;1), (4;2), (-1;7), (1;8)$.

3.1.11. $(-2;-1)$.

3.1.12. $Q(11;-11)$.

3.1.13. $M_1(10;-5)$.

3.1.14. $x+y+2=0, 4x+3y-11=0, 3x+2y-13=0$.

3.1.15. $4x+y-3=0$.

3.1.16. $x-5=0$.

3.1.17. Рівняння сторін: $2x-5y+3=0, 2x-5y-26=0$,

рівняння діагоналі $7x-3y-33=0$.

3.1.18. $3x-5y-13=0,\ 8x-3y+17=0$, $5x+3y-1=0$.

3.1.19. $x+y-8=0, 11x-y-28=0$.

3.1.20. $(-12;5)$.

3.1.21. $P\left(\frac{5}{3};0\right)$.

3.1.22. 1) 45°; 2) 90°; 3) 60° 4) 45°; 5) 90°.

3.1.23. 1) так; 2) ні; 3) ні.

3.1.24. 1) $a=-2$; 2) $a=\pm3$; 3) $a=1, a=\frac{5}{3}$.

3.1.25. 1) $a\neq3$; 2) $a=3, b\neq2$; 3) $a=3,\ b=2$.

3.1.26. 1) перетинаються; 2) не перетинаються.

3.1.27. 1) $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$, 2) $\frac{x}{1/4}+\frac{y}{(-1/5)}=1$.

3.1.28. $3x-8y+24=0$ або $3x-2y-12=0$.

3.1.29. Прямі 2), 4) і 5) задані нормальними рівняннями.

3.1.30. 1) $-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{12}{5}=0$; 2) $-\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y-10=0$; 3) $-x-2=0$;

4) $\frac{2}{\sqrt{5}}x-\frac{1}{\sqrt{5}}y-1=0$.

3.1.31. 1) $\delta=-3, d=3$; 2) $\delta=1, d=1$; 3) $\delta=-4, d=4$.

3.1.32. 1), 4) – по один бік; 2), 3), 5) – по різні боки.

3.1.33. 80.

3.1.34. 6.

3.1.37. Так.

3.1.38. Ні.

3.1.39. 4.

3.1.40. 49.

3.1.41. $4x - 3y - 23 = 0$, $4x - 3y + 7 = 0$.

3.1.42. 1) $4x - 4y + 3 = 0$, $2x + 2y - 7 = 0$; 2) $14x - 8y - 3 = 0$, $64x + 112y - 23 = 0$.

3.1.43. 1) $d = 5/2$; 2) $d = 3$; 3) $d = 0{,}5$.

3.1.44. 1) $3x + 2y - 7 = 0$; 2) $2x - y = 0$; 3) $y - 2 = 0$; 4) $x - 1 = 0$; 5) $4x + 3y - 10 = 0$; 6) $3x - 2y + 1 = 0$.

3.1.45. $x - y - 7 = 0$.

3.1.46. $4x - 5y + 22 = 0$, $4x + y - 18 = 0$, $2x - y + 1 = 0$.

Повернутися до завдань.

Відповіді до теми 3.2.

3.2.1. $2x - 3y - 6z + 20 = 0$.

3.2.2. $3x - y + 2z - 14 = 0$.

3.2.3. $x + 4y + 7z + 16 = 0$.

3.2.4. $x - y - z = 0$.

3.2.5. $6x - 4y + z - 4 = 0$.

3.2.6. $69x + 21y - 22z - 113 = 0$.

3.2.7. $5x - 3y + 2z = 0$.

3.2.8. $2x - 7z + 11 = 0$.

3.2.9. $2x + y - 2z = 0$.

3.2.10. $x + 2z - 4 = 0$.

3.2.11. 1) паралельні; 2) перпендикулярні; 3) ні паралельні, ні перпендикулярні; 4) паралельні; 5) перпендикулярні.

3.2.12. 1) $m = -4$, $l = 3$; 2) $m = -\frac{2}{3}$, $l = 3$.

3.2.13. 1) $l = 6$; 2) $l = -19$.

3.2.14. $(3; 2; 1)$.

3.2.15. 1) $\arccos\frac{13}{21}$; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{4}$.

3.2.16. $(1; -2; 2)$.

3.2.19. 1) $z - 3 = 0$; 2) $y + 2 = 0$; 3) $2y + z = 0$; 4) $4x + 3y = 0$; 5) $y + 4z + 10 = 0$; 6) $x - z - 1 = 0$.

3.2.20. 1) $\frac{x}{30} + \frac{y}{15} + \frac{z}{18} = 1$; 2) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{-1{,}2} = 1$.

3.2.21. 8.

3.2.22. 1) $\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z - 6 = 0$, 2) $\frac{2}{7}x - \frac{3}{7}y - \frac{6}{7}z - \frac{11}{4} = 0$, 3) $-\frac{5}{13}y + \frac{12}{13}z - 2 = 0$, 4) $x - 5 = 0$.

3.2.23. 1) $\delta = -3$, $d = 3$; 2) $\delta = 1$, $d = 1$; 3) $\delta = 0$, $d = 0$; – точка M_3 лежить на площині; 4) $\delta = -2$, $d = 2$.

3.2.24. 6.

3.2.25. $d = 4$.

3.2.26. 2.

3.2.27. 1), 4) – по один бік; 2), 3) – по різні боки.

3.2.30. 8.

3.2.31. $6x + 3y + 2z + 11 = 0$.

3.2.32. 1) $4x - 5y - z - 2 = 0$, $2x + y - 3z + 8 = 0$;
2) $3x - 6y + 7z + 2 = 0$, $x + 4y + 3z + 4 = 0$.

3.2.33. 1) $4x - y - 2z - 4 = 0$; 2) $20x - 12y + 4z + 13 = 0$.

3.2.34. $(2; -1; 0)$, $\left(\frac{4}{3}; 0; -\frac{1}{3}\right)$, $(0; 2; -1)$.

3.2.35. 1) $D = -4$; 2) $D = 9$; 3) $D = 3$.

3.2.36. 1) $23x - 2y + 21z - 33 = 0$; 2) $y + z - 18 = 0$; 3) $x + z - 3 = 0$; 4) $x - y + 15 = 0$.

3.2.37. $5x + 5z - 8 = 0$.

3.2.38. $(5 + 3\lambda)x - (1 + 2\lambda)y - (2 + 5\lambda)z - 3 + 2\lambda = 0$, де $\lambda \in \mathbb{R}$. *Вказівка.* Пряма перетину площин $5x - y - 2z - 3 = 0$, $3x - 2y - 5z + 2 = 0$ перпендикулярна до площини $x + 19y - 7z - 11 = 0$; тому, умові задачі будуть задовольняти всі площини, що належать в'язці площин, які проходять через цю пряму.

3.2.39. $9x + 7y + 8z + 7 = 0$.

3.2.40. 1) $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-4}{5}$; 2) $\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-4}{0}$; 3) $\frac{x-3}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-4}{0}$; 4) $\frac{x-3}{0} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-4}{1}$.

3.2.41. $\frac{x-16}{20} = \frac{y-9}{6} = \frac{z-4}{5}$.

3.2.42. $x = 3 - t,\ y = -1 + 2t,\ z = 2 - t$.

3.2.43. $(9; -4; 0),\ (3; 0; -2), (0; 2; -3)$.

3.2.44. Напр., $3x - 4y + 4 = 0,\ 2y - 3z - 41 = 0$.

3.2.45. $x = 8 + 5t,\ y = -3 + 6t, z = 4 + 7t$.

3.2.46. $\frac{x-2}{-2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+5}{5}$.

3.2.47. 1) $\frac{x-1}{15} = \frac{y+2}{-18} = \frac{z}{-14}$; 2) $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}$.

3.2.51. Мимобіжні.

3.2.52. 1) 90°; 2) 60°; 3) 135°.

3.2.53. 1) $(2; -3; 6)$; 2) пряма паралельна площині; 3) пряма належить площині.

3.2.54. $\frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-1}{-5}$.

3.2.55. $2x - 3y + 4z - 1 = 0$.

3.2.56. $x + 2y + 3z - 13 = 0$.

3.2.57. $a = -2$.

3.2.58. $m = -3$.

3.2.59. $(-2; 3; 1)$.

3.2.60. $(1; 4; -7)$.

3.2.61. $Q(2; -3; 2)$.

3.2.62. $Q(4; 1; -3)$.

3.2.63. $Q(-5; 1; 0)$.

3.2.64. 7.

3.2.65. 15.

3.2.66. $9x + 11y + 5z - 16 = 0$.

3.2.67. $2x - 16y - 13z + 31 = 0.$

3.2.68. $6x - 20y - 11z + 1 = 0.$

3.2.69. $(2; -3; -5).$

3.2.70. $\frac{x-3}{5} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z+4}{9}.$

3.2.71. 1) 13; 2) 7.

Повернутися до завдань.

Відповіді до Теми 4.1.

4.1.2. 1) $\{1 + n^2, n \geq 0\}$; 2) $\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{2^n},\ n \geq 0\right\}$; 3) $\left\{\frac{n!}{n+1},\ n > 0\right\}$; 4) $\left\{\frac{n^2}{3^n},\ n \geq 0\right\}$; 5) $\left\{\frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{2n},\ n > 0\right\}$; 6) $\left\{\frac{n+1}{(n+2)n},\ n > 0\right\}$.

4.1.5. 1) $\frac{2}{3}$; 2) 2; 3) 0; 4) $\frac{3}{5}$; 5) 0; 6) $+\infty$, 7) 5; 8) $-\infty$; 9) 0; 10) 0; 11) $+\infty$; 12) -2.

4.1.6. 1) $-\frac{1}{3}$; 2) $+\infty$; 3) 3; 4) $\frac{2}{3}$; 5) $+\infty$; 6) $\frac{17}{15}$; 7) $-\infty$; 8) 0; 9) $-\frac{12}{7}$; 10) $\frac{16}{3}$; 11) $+\infty$; 12) -3.

4.1.7. 1) 2; 2) $+\infty$; 3) 0; 4) -4; 5) 0; 6) $-\infty$; 7) 0; 8) 5; 9) 1.

4.1.8. 1) 0; 2) 1; 3) $+\infty$; 4) 0; 5) $+\infty$; 6) 3.

4.1.9. 1) 1; 2) 0; 3) 3; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $-\frac{1}{4}$; 6) $-\infty$; 7) 0; 8) 2; 9) 0.

4.1.10. 1) $\frac{4}{3}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{3}{2}$; 4) -1.

4.1.11. 1) 0; 2) ∞; 3) 0; 4) $1 - \sqrt{2}$; 5) $\frac{4}{3}$; 6) 0; 7) $-\infty$; 8) $-\frac{5}{2}$.

4.1.12 1) e^3; 2) $+\infty$; 3) $\frac{1}{e}$; 4) 0; 5) 0; 6) e^{-2}; 7) 1; 8)e^{-5}; 9) $e^{\frac{1}{2}}$.

4.1.13. 1) 0; 2) 3; 3)$-\frac{1}{2}$; 4) 1; 5) 0; 6) 0.

Повернутися до завдань.

Відповіді до Теми 4.2.

4.2.3. 1) $\frac{1}{11}$; 2) 2; 3) $\frac{\pi}{6}$; 4) $+\infty$; 5) $-\infty$; 6) 2; 7) 0; 8) 0; 9) $+\infty$.

4.2.4. 1) $0, +\infty$; 2) $+\infty, 0$; 3) $0, 2$.

4.2.5. 1) $-\frac{5}{2}$; 2) $-\frac{1}{9}$; 3) $-\frac{5}{2}$; 4) 6; 5) 0; 6) $\frac{3}{2}$; 7) 2; 8) $+\infty$; 9) 0; 10) $\frac{7}{3}$; 11) $-\frac{1}{2}$; 12) 2.

4.2.6. 1) 0; 2) $+\infty$; 3) -2; 4) $+\infty$; 5) 0; 6) 3; 7) -1; 8) 0; 9) $-\infty$.

4.2.7. 1) -1; 2) $\frac{1}{2}$; 3) ∞; 4) ∞; 5) 0; 6) $\frac{3}{8}$; 7) -4; 8) 100.

4.2.8. 1) $\frac{1}{3}$; 2) 12; 3) -2; 4) 0; 5) $\frac{1}{4}$; 6) $\frac{1}{12}$; 7) 3; 8) $\frac{2}{3}$; 9) $\frac{2}{3}$; 10) $\frac{1}{4}$; 11)* $\frac{1}{2}$. Вказівка: в чисельнику додати і відняти одиницю; 12) $-\frac{1}{4}$.

4.2.9. 1) 0; 2) 0; 3) $\frac{1}{2}$, якщо $x \to +\infty$, $-\infty$, якщо $x \to -\infty$; 4) 1; 5) 1; 6) $+\infty$; 7) 0.

4.2.10. 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{5}{6}$; 3) $\frac{7}{2}$; 4) $\frac{3}{2}$; 5) 2; 6) $\frac{2}{7}$; 7) $\frac{1}{5}$; 8) 0; 9) $+\infty$; 10) 1; 11) $\frac{1}{36}$; 12)$-e$.

4.2.11. 1) $\frac{18}{5}$; 2) $-\frac{9}{2}$; 3) $\frac{1}{3}$; 4) 2; 5) 0; 6) $\frac{\sqrt{2}}{8}$; 7) $\frac{1}{2}$; 8)-1; 9) $\frac{1}{4}$; 10) $\cos\alpha$; 11) ∞; 12) 0.

4.2.12. 1) $-\frac{6}{5}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) -2; 6) ∞; 7) $\frac{1}{8}$; 8) 2; 9) $\frac{1}{2\pi}$; 10) $\frac{1}{2}$; 11) $\frac{4\ln 2}{\pi}$; 12) $-\frac{1}{4\pi}$; 13) $\frac{3}{2}$; 14) $-\frac{9}{4\pi}$.

4.2.13. 1) 1; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 5π; 4) $-\frac{2}{3}$; 5) $-\frac{\pi^2}{2}$; 6) $\frac{1}{2}$; 7) $\frac{2}{\pi}$; 8) 0; 9) 1.

4.2.14. 1) 0; 2) -2; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $-\infty$.

4.2.15. 1) e^{ab}; 2) $\frac{1}{e}$; 3) e^{10}; 4) e^{5}; 5) $1/e^{2}$; 6) 0; 7) e; 8) 0; 9) e^{3}; 10) 0 при $x \to +\infty$, ∞ при $x \to -\infty$; 11) ∞ при $x \to +\infty$, 0 при $x \to -\infty$; 12) 0 при $z \to +\infty$, ∞ при $z \to -\infty$; 13) -4; 14) ∞.

4.2.16. 1) $\frac{4}{3}$; 2) $\sqrt{e}$; 3) $-\frac{1}{5}$; 4) 5; 5) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{e}$; 7) $\frac{a}{b}$; 8) e; 9) 2; 10) 1; 11) e^{2}; 12) e^{4}; 13) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; 14) $e^{\operatorname{ctg} 2}$; 15) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; 16) $\frac{1}{e}$; 17) $e^{\operatorname{ctg} 1}$; 18) $e^{\frac{1}{3}}$; 19) e^{-1}; 20) e^{3}; 21) $e^{-\frac{1}{2}}$.

4.2.21. 1) одного порядку малості; 2) одного порядку малості; 3) $\alpha = \text{o}(\beta)$; 4) $\beta = \text{o}(\alpha)$; 5) $\alpha \sim \beta$, 6) $\alpha \sim \beta$, 7) $\alpha = \text{o}(\beta)$; 8) непорівнянні нескінченно малі; 9) одного порядку малості.

4.2.22. 1) $\alpha(x)$ нескінченно мала порядку $\frac{1}{2}$ щодо $\beta(x)$; 2) $\alpha(x)$ нескінченно мала 10-го порядку щодо $\beta(x)$; 3) $\alpha(x)$ нескінченно мала 2-го порядку щодо $\beta(x)$; 4) $\alpha(x)$ нескінченно мала порядку $\frac{1}{3}$ щодо $\beta(x)$; 5) $\alpha(x)$ нескінченно мала порядку $\frac{1}{2}$ щодо $\beta(x)$.

4.2.23. 1) -2; 2) -1; 3) 3; 4) 1; 5) $-\infty$; 6) 8; 7) $\frac{2}{3}$; 8) -1; 9) 5; 10) 1; 11) 0; 12) $-\frac{4}{27}$; 13) $\frac{1}{22}$; 14)$-\frac{1}{2}$; 15) $\frac{81}{20}$; 16) $\frac{2}{e}$; 17) $-\frac{3}{2}$; 18) $\frac{1}{2\ln^2 3}$; 19) $\frac{8}{3}$; 20) $-e^{-5}$; 21) 8.

Повернутися до завдань.

Відповіді до Теми 4.3.

4.3.1. $A = 6$;

4.3.2. $a = 1$;

4.3.3. $f(0) = 0$;

4.3.4. 1) $x = 2$ - точка розриву 1-го роду, усувна, $f(2) = \pi$, 2) $x = 2$ - точка розриву 2-го роду, ні.

4.3.5. 1) $x = 2, x = -3$ - точки розриву 2-го роду; 2) $x = 2$ - точка розриву 1-го роду, усувна; 3) $x = 3$ - точка розриву 1-го роду, стрибок; 4) $x = 2$ - точка розриву 2-го роду; 5) $x = 1$ - точка розриву 2-го роду; 6) $x = 0$ - точка розриву 1-го роду, усувна; 7) $x = \pm 3$ - точки розриву 2-го роду; 8) $x = 1$ - точка розриву 1-го роду, стрибок; 9) $x = 0$ - точка розриву 1-го роду, стрибок; 10) $x = -3$ - точка розриву 2-го роду; 11) $x = \frac{\pi}{2}(2k+1),\ k = \pm 1, \pm 2, \dots$ - точки розриву 1-го роду; 12) $x = 2$ - точка розриву 1-го роду, усувна, $x = -2$ - точка розриву 2-го роду; 13) $x = 0$ - точка розриву 1-го роду, усувна, $x = k\pi,\ k = \pm 1, \pm 2, \dots$ - точки розриву 2-го роду; 14) $x = 0$ - точка розриву 1-го роду, усувна, $x = \frac{1}{k}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ - точки розриву 2-го роду; 15) $x = 1, x = 2$ - точки розриву 2-го роду, $x = \frac{3}{2}$ - точка розриву 1-го роду, усувна; 16) $x = 3$ – усувний розрив; 17) $x = -\frac{3}{2}$ - точка розриву 1-го роду, типу стрибок, 18) $x = 0$ - точка розриву 2-го роду.

4.3.6. 1) в точці $x = 1$ функція неперервна; 2) $x = 2$ - точка розриву 1-го роду; 3) $x = -1$ - точка розриву 1-го роду, стрибок, $x = 2$ - точка неперервності; 4) $x = 0$ - точка розриву 2-го роду, $x = 3$ - точка розриву 1-го роду, стрибок; 5) $x = -\frac{\pi}{2}$ - точка розриву 1-го роду, стрибок, $x = \pi$ - точка розриву 1-го роду, усувна; 6) $x = 1$ - точка розриву 2-го роду, $x = 2$ - точка неперервності; 7) функція неперервна $\forall x \in \mathbb{R}$.

4.3.7. 1) $x = \sqrt{y-1} - 1,\ y \in [5, +\infty)$; 2) $x = 1 - e^y,\ y \in (-\infty, \ln 2]$; 3) $x = -\frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} y$, $y \in (-\infty, +\infty)$.

4.3.8. 1) так; 2) ні; 3) ні; 4) так.

4.3.10. 1) $[1, 2]$; 2) $[0, 1]$; 3) $[3, 4]$.

4.3.11. 1) $x_1 \in [-4, -3]$, $x_2 \in [-2, -1]$; 2) $x_1 \in [0, 2]$;
3) $x_1 \in [-2, -1]$, $x_2 \in [1, 2]$, $x_3 \in [5, 6]$.

Повернутися до завдань.

Відповіді до Теми 5.1.

5.1.1. 1) 0,21; 2) ln 1,2; 3) $\frac{2}{9}$; 4) $\sqrt{2}\cos\left(2a + \frac{\pi}{4}\right)$.

5.1.2. 1) 4,52; 2) $2{,}5(\sqrt[3]{1{,}8} - 1)$; 3) $\sqrt{2} - 1$, 4) $-\frac{3}{\pi}$.

5.1.3. 1) $2\Delta x(2 + \Delta x)$, 4; 2) $\sqrt{\Delta x + 1} - 1$, $\frac{1}{2}$; 3) $\log_2(1 + \Delta x)$, $\frac{1}{\ln 2}$; 4) $\frac{\sin \Delta x}{\cos\left(\frac{\pi}{3} + \Delta x\right)\cos\frac{\pi}{3}}$, 4.

5.1.4. 1) 12; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 2; 4) $-\frac{1}{2}$.

5.1.5. 1) $-\frac{1}{15}$; 2) $\frac{2}{7}$, 3) $\frac{12\sqrt{3}}{3\pi}$; 4) 2,5.

5.1.6. 1) 10 $\frac{\text{см}}{\text{хв}}$; 2) 34 $\frac{\text{см}}{\text{хв}}$.

5.1.7. 1) 8,8 $\frac{\text{м}}{\text{сек}}$; 2) 10 $\frac{\text{м}}{\text{сек}}$.

5.1.8. 1) $-16(b - a)$ $\frac{\text{м}}{\text{сек}}$; 2) $-16\sqrt{10}$ $\frac{\text{м}}{\text{сек}}$; 3) $-32t$ $\frac{\text{м}}{\text{сек}}$.

5.1.9. 1) 4 $\frac{\text{г}}{\text{см}}$; 2) 40 $\frac{\text{г}}{\text{см}}$; 3) $4x$ $\frac{\text{г}}{\text{см}}$; де x-довжина AM.

5.1.10. $-\frac{200}{V^2}$.

5.1.11. $8\pi R$, 16π.

5.1.12. 1) $y' = 3x^2 + x - 5$; 2) $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; 3) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$; 4) $y' = \frac{0{,}1}{\sqrt[4]{x^3}} - 10x^2 - \frac{0{,}2}{x^3}$; 5) $y' = 2x(3x^4 - 28x^2 + 49)$; 6) $y' = -x^{-3/2}$; 7) $y' = 19 + 4\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$; 8) $y' = -\frac{2}{(x-1)^2}$; 9) $s' = \frac{3t^2 - 6t - 1}{(t-1)^2}$; 10)$y' = \frac{4x + 23}{(x+4)\sqrt[3]{x+4}}$; 11) $y'\left(\frac{1}{4}\right) = 13$; 12) $s'(0) = \frac{3}{25}$, $s'(2) = \frac{17}{15}$; 13) $F'(0) = 11$, $F'(1) = 2$, $F'(2) = -1$.

5.1.13. 1) $y' = x^2 \sin x$; 2) $y' = 2 - 15\cos^2 x \sin x$; 3) $y' = \frac{\cos x + \sin x - x(\cos x - \sin x)}{\cos x + \sin x}$; 4) $y' = \frac{-2x^2}{(1+x^2)^2}$; 5) $y' = \frac{(1+\mathrm{tg}x)(\sin x + x\cos x) - x\sin x\sec^2 x}{(1+\mathrm{tg}x)^2}$; 6) $y' = \frac{1}{\sqrt{1+2\,\mathrm{tg}\,x}\cdot\cos^2 x}$; 7) $y' = -3\sin 3x\sin 2(\cos 3x)$; 8) $y' = -\frac{2x}{3\sin^2\sqrt[3]{1+x^2}\cdot\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}$; 9) $y' = \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}$; 10) $y' = \frac{1-\mathrm{tg}^3 t + \mathrm{tg}^6 t}{\cos^2 t}$; 11) $y' = (2x-5)\cos(x^2-5x+1) - \frac{6}{x^2\cos^2\frac{6}{x}}$; 12) $y' = \frac{(2x+2\mathrm{cosec}^2 2x)\sin 3x - 3(x^2 - \mathrm{ctg}2x)\cos 3x}{\sin^2 3x}$.

5.1.14. 1) $y' = \frac{-2x}{1-x^2}$; 2) $y' = \frac{2x}{\ln 3(x^2-1)}$; 3) $y' = \frac{2}{\ln 2}\mathrm{ctg}2x$; 4) $y' = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x+1}} + \frac{1}{2(x+\sqrt{x})}$; 5) $y' = \frac{1}{x\log_5\log_3(\log_5 x)\ln 2\cdot\ln 3\cdot\ln 5}$; 6) $y' = \frac{\mathrm{ctg}\frac{x+3}{4}}{12\sqrt[3]{\ln^2\sin\frac{x+3}{4}}}$; 7) $y' = \frac{x^2}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$.

5.1.15. 1) $y' = \frac{-5(1-2\sqrt{x})^4}{\sqrt{x}}$; 2) $y' = \frac{e^x + xe^x + 1}{2\sqrt{xe^x + x}}$; 3) $y' = -\frac{2\cdot 10^x\ln 10}{(1+10^x)^2}$; 4) $y' = \frac{2e^x - 3^x\ln 3}{3\sqrt[3]{(2e^x - 3^x + 1)^2}} + \frac{6\ln^5 x}{x}$; 5) $y' = \frac{(\ln x - 1)\ln 2}{\ln^2 x}\cdot 2^{\frac{x}{\ln x}}$; 6) $y' = -12\ln 10\cdot\left(10^{1-\sin^4 3x}\right)\sin^3 3x\cos 3x$; 7) $y' = \frac{(2ax+b)e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}}{2(ax^2+bx+c)\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}$.

5.1.16. 1) $y' = \arcsin x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; 2) $y' = \arcsin x$; 3) $y' = x\,\mathrm{arctg}x$; 4) $y' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\arcsin x}}$; 5) $y' = -\frac{1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}$; 6) $y' = \frac{2e^{-2x}}{(1+e^{-4x})(\mathrm{arctg}e^{-2x})^2}$; 7) $y' = -\frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{\mathrm{arcctg}\,x}} + \frac{3\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}}$; 8) $y' = \frac{1}{2(1+x^2)}$.

5.1.17. 1) $y' = \frac{2x\mathrm{ch}x - x^2\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}^2 x}$; 2) $y' = -\mathrm{th}^2 x$; 3) $y' = \frac{-3(x\ln x - \mathrm{ch}x\mathrm{sh}x}{x\ln^2 x\mathrm{sh}^2 x}$; 4) $y' = 3\mathrm{sh}^2 x\cdot\mathrm{ch}x$; 5) $y' = 2\mathrm{sh}2xe^{\mathrm{ch}^2 x} + \frac{\mathrm{sh}x}{2\sqrt{\mathrm{ch}x}}$; 6) $y' = \frac{1}{x\mathrm{ch}^2(\ln x)} + 2\mathrm{th}(2x)$.

5.1.18. 1) $y' = e^x\sin x\cos^3 x(1 + \mathrm{ctg}x - 3\mathrm{tg}x)$; 2) $y' = \frac{54\sqrt[5]{x^4}}{55\sqrt[11]{\left(9+6\sqrt[5]{x^9}\right)^{10}}}$; 3) $y' = \frac{x^2}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$; 4) $y' = \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin^2 x}$; 5) $y' = \frac{\mathrm{ctg}\sqrt[3]{\mathrm{arctg}\,e^{3x}}\cdot e^{3x}}{(1+e^{6x})\sqrt[3]{(\mathrm{arctg}\,e^{3x})^2}}$; 6) $y' = \frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x}$; 7) $y' = \frac{24x^2}{(1+8x^2)^2}$; 8) $y' = \frac{1+x^4}{1+x^6}$.

5.1.21. 1) $\frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}, x \neq 1$; $\frac{2-n(n+1)x^{n-1} + 2(n^2-1)x^n - n(n-1)x^{n+1}}{(1-x)^3}, x \neq 1$.

5.1.22. 1) $y' = \sqrt{1-y^2}\cdot e^{-\arcsin y}$ і $y' = \frac{\cos\ln x}{x}$; 2) $t' = \frac{e^t}{1-t}$, 3) $x' = -\frac{(1+x^4)^2}{8x^3}$, $x' = -\frac{1}{2\sqrt[4]{(1-y)^2(1+y)^2}}$; 4) Виконується; 5) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3y^2-4}$; 6) $s' = \frac{\sqrt{1-4^s}}{2^s\ln 2}$.

5.1.23. 1) $y' = \frac{3ay-2x}{2y-3ax}$; 2) $y' = \frac{e^y}{1-xe^y}$; 3) $y' = -\frac{y\sin(xy)+1}{x\sin(xy)}$; 4) $y' = \frac{\cos(x+y)}{1-\cos(x+y)}$; 5) $y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$;

6) $y' = 2^{x-y}\frac{2^y-1}{1-2^x}$; 7) $y' = \frac{1+y^2}{y^2}$; 8) $y' = \frac{\sqrt{1-y^2}\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)}{\sqrt{1-x^2}\left(1-\sqrt{1-y^2}\right)}$; 9) $y' = \frac{y^2-xy\ln y}{x^2-xy\ln x}$;

10) $y' = \frac{\sin y}{2\sin 2y-\sin y-x\cos y}$; 11) $y' = \frac{1}{2(1+\ln y)}$; 12) $y' = -\frac{b^2x}{a^2y}$;

13) $y' = -\frac{y\cos^2(x+y)\left(\cos(xy)-\sin(xy)\right)-1}{x\cos^2(x+y)\left(\cos(xy)-\sin(xy)\right)-1}$.

5.1.24. 1) $y' = -\frac{b}{\mathrm{a}}\mathrm{tg}\varphi$; 2) $y' = -\frac{2}{3}$; 3) $y' = \mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2}$; 4) $y' = \frac{t}{2}$; 5) $y' = \frac{1+t^2}{t(2+3t-t^2)}$; 6) $y' = \frac{1-\mathrm{tg}t}{1+\mathrm{tg}t}$;

7) $y' = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$; 8) $y'_x = \frac{2\sin t}{\cos t+\cos^3 t}$, $y'_x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{3}$.

5.1.25. 1) $y' = (\sin x)^{\cos x}\left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x\cdot\ln\sin x\right)$; 2) $y' = (\ln x)^x\left(\frac{1}{\ln x} + \ln\ln x\right)$;

3) $y' = x^2e^{x^2}\sin 2x(3 + 2x^2 + 2x\mathrm{ctg}2x)$; 4) $y' = -\frac{2(x-2)(x^2+11x+1)}{3(x-5)^4\sqrt[3]{(x+1)^2}}$; 5) $y' = x^{x^2+1}(2\ln x + 1)$;

6) $y' = x^{x^x}\cdot x^x\left(\ln^2 x + \ln x + \frac{1}{x}\right)$; 7) $y' = \left(\frac{3}{x+1} + \frac{1}{4(x-2)} - \frac{2}{5(x-3)}\right)\frac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{(x+4)^2\sqrt[5]{(x-3)^2}}$.

5.1.26. 1) $y^{(20)}(x) = (x^2 - 379)\sin x - 40x\cos x$;

2) $y^{(4)}(x) = 32e^{4x+3}(8x^3 + 24x^2 + 18x + 19)$; 3) $y^{(n)} = 2\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) 6;

6) $y^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.

5.1.27. 1) $y'' = 6(5x^4 + 6x^2 + 1)$; 2) $y'' = \frac{2x}{1+x^2} + 2\mathrm{arctg}x$; 3) $y'' = -\frac{\arcsin x+x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$;

4) $y'' = -\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$; 5) $y'' = \frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{4x\sqrt{x}}$; 6) $y'' = x^x\left[(\ln x + 1)^2 + \frac{1}{x}\right]$; 7) $y^{(n)} = (-1)^n\frac{(n-2)!}{x^{n-1}}$, $n \geq 2$; 8) $y^{(n)} = (-1)^n\frac{n!}{2}\left[\frac{1}{(x+1)^{n+1}} + \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$; 9) $y^{(n)} = (-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$.

5.1.22. 1) $y'' = -\frac{2a^3xy}{(y^2-ax)^3}$; 2) $y'' = -\frac{y(x-1)^2+(y-1)^2}{x^2(y-1)^3}$; 3) $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{(3-s)e^{2s}}{(2-s)^3}$; 4) $\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{3r^2x}{y^5}$;

5) $y'' = -\frac{y}{(1-\cos(x+y))^3}$.

5.1.30. 1) $\frac{d^2y}{dx^2} = 9t^3$; 2) $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b}{a^2\sin^3 t}$; 3) $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{a(1-\cos\varphi)^2}$; 4) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\cos^2 t-4\sin^2 t}{9a^2\sin^3 t\cdot\cos^2 t}$;

5) $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{1-t^2}$; 6) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2+t^2}{a(\cos t-t\sin t)^3}$.

5.1.32. 1) $dy = -\frac{3dx}{2\sin^2 3x\sqrt{1+\mathrm{ctg}3x}}$; 2) $dy = \left[(2x+4)\left(x^2-\sqrt{x}\right)+(x^2+4x+1)\left(2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]dx$; 3) $dy = \frac{6x^2dx}{(x^3-1)^2}$; 4) $dy = 3\left(x^2-2\sqrt{x}+2\right)^2\left(2x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$; 5) $dy = e^{\ln \mathrm{tg}x}\cdot\frac{2}{\sin 2x}dx$; 6) $dy = -2^{-\frac{1}{\cos x}}\cdot\ln 2\cdot\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$; 7) $dy = -\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}}$; 8) $dy = \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{arctg}x}}-\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$; 9) $dy = \left(\frac{5}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{1+x^2}\right)\frac{dx}{2}$; 10) $d\rho = -\frac{k\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}d\varphi$.

5.1.33. 1) $ds = -\frac{t}{2}\sin\frac{t^2-1}{2}$; 2) $ds = \frac{(4u-3)du}{2\sqrt{2u^2-3u+1}}$; 3) $dz = -ds$.

5.1.34. 1) $\approx 0{,}995$; 2) $\approx 1{,}18$; 3) $\approx 0{,}987$; 4) $\approx 1{,}97$; 5) $\approx 0{,}355$; 6) $\approx 0{,}77$; 7) $\approx 0{,}795$; 8) $\approx 0{,}52164$; 9) $\approx 0{,}694$.

5.1.35. $\approx 0{,}00582$.

5.1.36. 1) $d^2y = 4(x+1)(5x^2-2x-1)dx^2$; 2) $d^2y = 4^{-x^2}2\ln 4(2x^2\ln 4-1)dx^2$; 3) $d^2y = \frac{4\ln x-4-\ln^2 x}{x^2\sqrt{(\ln^2 x-4)^3}}dx^2$; 4) $d^2\rho = \pm\frac{3a\sec^2\varphi}{4\sqrt{\mathrm{tg}\varphi}}(1+5\mathrm{tg}^2\varphi)d\varphi^2$; 5) а) $d^2y = \frac{4x}{x^4-1}d^2x-\frac{4(1+3x^4)}{(x^4-1)^2}dx^2$; б) $d^2y = -4\sec^2 2t dt^2$; 6) а) $d^2y = \cos z d^2z-\sin z dz^2$; б) $d^2y = a^x\cos(a^x)\ln a d^2x - a^x\ln^2 a\,(a^x\sin a^x-\cos a^x)dx^2$; в) $d^2y = a^{t^2}\ln a\left[\cos a^{t^2}(6t+9t^4\ln a)-a^{t^2}\sin a^{t^2}9t^4\ln a\right]dt^2$; 7) $d^3y = m(m-1)(m-2)x^{m-3}dx^3$; 8) $d^3y = 4\sin 2x$.

Повернутися до завдань.

Відповіді до Теми 5.2.

5.2.1. Умови теореми виконуються: $c_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; $c_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

5.2.2. Вказівка: Обчислити похідну першого порядку $P'(x)$ і переконатись в рівності $P'(-3) = P'(1)$.

5.2.3. $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

5.2.5. $c_1 = \frac{1}{2}$; $c_2 = \frac{5}{3}$.

5.2.6. $f'(x) = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} \in [0,\pi]$.

5.2.7. 1) $\frac{24}{49}$; 2) 0; 3) 1; 4) $\frac{\ln 2-\ln 3}{\ln 4-\ln 5}$; 5) $\frac{2}{3\sqrt[6]{5}}$; 6) -2; 7) $\frac{1}{3}$; 8) $\cos a$; 9) 2; 10) 1; 11) 1; 12) 16; 13) 0; 14) $\frac{1}{2}$; 15) 0; 16) 1; 17) 1; 18) e; 19) e^2; 20) e^{π}; 21) 1; 22) $-\frac{2}{\pi}$; 23) 0; 24) $\frac{1}{e}$; 25) $\frac{\alpha}{\beta}$; 26) $\frac{4a^2}{\pi}$; 27) $\frac{1}{128}$; 28) 0.

5.2.8. 1) $y=-7x+3$ – дотична; $y=\frac{1}{7}x+\frac{71}{7}$ – нормаль; 2) $y=e$ – дотична; $x=0$ – нормаль; 3) $y+4x+4=0$ – дотична; $8y-2x+15=0$ – нормаль.

5.2.9. $y=x, y=-x$.

5.2.10. $3x+y+6=0$.

5.2.11. $x-y+1=0$.

5.2.12. $y=2x-2, y=2x+2$.

5.2.13. $2x-y\pm 1=0$.

5.2.14. $O(0;0)\,, A(1;1), B(2;0)$.

5.2.15. $\alpha_1=\operatorname{arctg}\frac{1}{7}, \alpha_2=\operatorname{arctg}\frac{1}{13}$; $\alpha_1=\frac{\pi}{2}, \alpha_2=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$; $\alpha=\operatorname{arctg}3$.

5.2.16. Криві перетинаються в трьох точках під кутами $\alpha_1=\alpha_2=30^{\circ}\,, \alpha_3=0^{\circ}$.

5.2.17. $k=-\frac{4}{3}$.

5.2.18. $A\left(3;\frac{16}{3}\right)$, $B\left(-3;-\frac{16}{3}\right)$.

5.2.19. 1) $f(x)=(x-4)^4+11(x-4)^3+37(x-4)^2+21(x-4)-56$;
2) $f(x)=(x+1)^3-5(x+1)+8$; 3) $f(x)=x^6-9x^5+30x^4-45x^3+30x^2-9x+1$.

5.2.20. $f(x)=1-6(x-1)+(x-1)^2+\cdots$, $f(1{,}03)\approx 0{,}82$.

5.2.21. $f(-1)=143$, $f'(0)=-60$, $f''(1)=26$.

5.2.22. 1) $f(x)=x+\frac{x^3}{3}+\cdots$; 2) $f(x)=x-\frac{x^3}{2}+\cdots$; 3) $f(x)=-x+\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+\cdots$;
4) $f(x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots$.

5.2.23. 1) $f(x)=-1+\frac{1}{3}(x+1)+\frac{1}{9}(x+1)^2+\frac{5}{81}(x+1)^3+\frac{10}{243}(x+1)^4+\cdots$;
2) $f(x)=-1+\frac{9}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2-\frac{27}{8}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^4+\cdots$;
3) $f(x)=e+\frac{e}{3}(x-3)+\frac{e}{2!3^2}(x-3)^2+\frac{e}{3!3^3}(x-3)^3+\frac{e}{4!3^4}(x-3)^4+\cdots$.

5.2.24. 1) $\approx 3{,}1072$; 2) $\approx 8{,}367$; 3) $\approx 1{,}648$; 4) $\approx 2{,}0022$; 5) $\approx 0{,}309$; 6) $\approx 0{,}9848$.

5.2.25. $0{,}4 < \ln 1{,}5 < 1{,}41$, $\varepsilon = 10^{-2}$.

5.2.26. 1) $f(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!\,(x-4)^n}{n!(n-1)!2^{4n-2}} +$ $+ \frac{(2n)!\,(x-4)^{n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}\cdot\sqrt{[4+\theta(x-4)]^{2n+1}}}$, де $0 < \theta < 1$; 2) $f(x) = -1 - (x+1) - (x+1)^2 - \cdots$ $-(x+1)^n + \frac{(-1)^{n+1}\,(x+1)^{n+1}}{[-1+\theta(x+1)]^{n+2}}$, де $0 < \theta < 1$; 3) $f(x) = \frac{2}{2!}x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \frac{2^5}{6!}x^6 - \frac{2^7}{8!}x^8 + \cdots$ $+ \frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}\,x^{2n}}{(2n)!} + \frac{(-1)^n 2^{2n}\,x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin(2\theta x)$, де $0 < \theta < 1$; 4) $f(x) = x - 1 + \frac{5}{2!}(x-1)^2 +$ $+ \frac{1}{3!}(x-1)^3 + \frac{6}{4!}(x-1)^4 + \cdots + \frac{(-1)^n 6\,(x-1)^n}{(n-3)(n-2)(n-1)n} + \frac{(-1)^{n+1}6\,(x-1)^{n+1}}{(n-2)(n-1)n(n+1)\cdot[1+\theta(x-1)]^{n-2}}$, де $0 < \theta < 1$.

5.2.27. 1) $f(x) \nearrow$ для $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (3; +\infty)$, $f(x) \searrow$ для $x \in \left(\frac{1}{2}; 3\right)$;

2) $f(x) \nearrow$ для $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{11}{18}; +\infty\right)$, $f(x) \searrow$ для $x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{11}{18}\right)$;

3) $f(x) \nearrow$ для $x \in \left(-\sqrt{8}; -2\right) \cup (0; 2)$; $f(x) \searrow$ для $x \in (-2; 0) \cup \left(2; \sqrt{8}\right)$;

4) $f(x) \nearrow$ для $x \in (-\infty; 0)$, $f(x) \searrow$ для $x \in (0; +\infty)$;

5) $f(x) \searrow$ для $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$, $f(x) \nearrow$ для $x \in (0; 2)$;

6) $f(x) \searrow$ для $x \in (0; 1) \cup (1; e)$, $f(x) \nearrow$ для $x \in (e; +\infty)$;

7) $f(x) = const$ для $x \in (-\infty; e)$; $f(x) \searrow$ для $x \in (e; +\infty)$;

8) $f(x) \nearrow$ для $x \in \bigcup_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3+4k}; \frac{2}{1+4k}\right)$; $f(x) \searrow$ для $x \in (2; +\infty) \cup \bigcup_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5+4k}; \frac{2}{3+4k}\right)$.

5.2.30. 1) $f(x) \nearrow$ для $x \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$, $f(x) \searrow$ для $x \in (0; 1), x_{min} = 1, x_{max} = 0$;

2) $f(x) \nearrow$ для $x \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$, $f(x) \searrow$ для $x \in (-1; 3), x_{min} = 3, x_{max} = -1$;

3) $f(x) \searrow$ для $x \in (-1; 0)$, $f(x) \nearrow$ для $x \in (0; \infty), x_{min} = 0$;

4) $f(x) \nearrow$ для $x \in (-\infty; 0)$, $f(x) \searrow$ для $x \in (0; \infty), x_{max} = 0$;

5) $f(x) \nearrow$ для $x \in (0; 2)$; $f(x) \searrow$ для $x \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty), x_{min} = 0, x_{max} = 2$;

6) $f(x) \nearrow$ для $x \in (e; +\infty)$; $f(x) \searrow$ для $x \in (0; 1) \cup (1; e)$, $x_{min} = e$;

7) $f(x) \nearrow$ скрізь.

5.2.31. 1) $x_1 = \frac{3}{5}$, $x_2 = 1$, $y_{min}(1) = 0$, $y_{max}\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{9}{25}}$;

2) $x_1 = -1$ (не входить в область визначення), $x_2 = 1,\ y_{min}(1) = \frac{1}{2}$;

3) $y_{max} = 4$ при $x = 0, y_{min} = \frac{8}{3}$, при $x = -2$; 4) Монотонно зростає;

5) $y_{min} = 2,$ при $x = \frac{2}{3}$; 6) $y_{max} = \frac{1}{ln3}$, при $x = -3$;

7) $y_{max} = 2$ при $x = 0, y_{min} = \sqrt[3]{4}$, при $x = 2$;

8) $y_{max} = 2{,}5$ при $x = 1,\ y_{min} = \frac{e(4-e)}{2}$, при $x = e$; 9) $y_{max} = \frac{\sqrt{205}}{10}$ при $x = \frac{12}{5}$;

10) $y_{max} = \frac{81}{8}\sqrt[3]{18}$ при $x = \frac{1}{2}$; $y_{min} = 0$, при $x = -1$ і при $x = 5$;

5.2.32. 1) $y_{max} = 3,\ y_{min} = -13$; 2) $y_{max} = 13,\ y_{min} = 4$; 3) $y_{max} = 16,\ y_{min} = 0$;

4) $y_{max} = 10, y_{min} = 0$; 5) $y_{max} = 2, y_{min} = -10$; 6) $y_{max} = 1, y_{min} = \frac{3}{5}$;

7) $y_{max} = 1, y_{min}$ – немає; 8) $y_{min} = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$, y_{max} – немає; 9) $y_{max} = \frac{\pi}{4}, y_{min} = 0$;

10) $y_{max} = \frac{6\pi\sqrt{3}-\pi^2+18}{36}$, $y_{min} = 1$; 11) $y_{max} = \frac{\pi}{2}, y_{min} = -\frac{\pi}{2}$.

5.2.33. 1) опукла для $x \in \left(-\infty, \frac{5}{3}\right)$, вгнута для $x \in \left(\frac{5}{3}, +\infty\right)$, точки перегину $y\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{250}{27}$;

2) опукла для $x \in (2,4)$, вгнута для $x \in (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$, точки перегину $y(2) = 62$, $y(4) = 206$;

3) опукла для $x \in (-\infty, 2)$, вгнута для $x \in (2, +\infty)$, точки перегину $y(2) = 1$;

4) опукла для $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, вгнута для $x \in (-1, 1)$, точки перегину $y(\pm 1) = \ln 2$;

5) скрізь вгнута;

6) опукла для $x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup (0, \sqrt{3})$, вгнута для $x \in \left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup (\sqrt{3}, \infty)$, точки перегину $y\left(-\sqrt{3}\right) = -\sqrt{3}/4$; $y(0) = 0$; $y\left(\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}/4$;

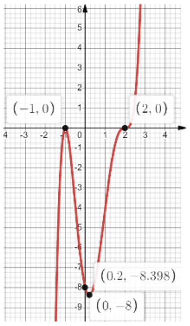
7) скрізь опукла;

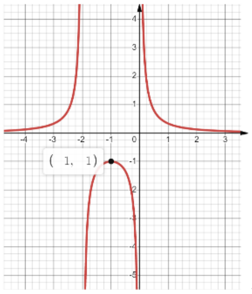
8) опукла для $x \in (-3{,}0) \cup (3, +\infty)$, вгнута для $x \in (-\infty, -3) \cup (0{,}3)$, точки перегину $y(-3) = -\frac{9}{4}, y(0) = 0, y(3) = \frac{9}{4}$;

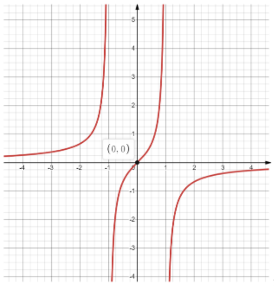
9) опукла для $x \in (0{,}1)$, вгнута для $x \in (1, +\infty)$, точка перегину $y(1) = -7$.

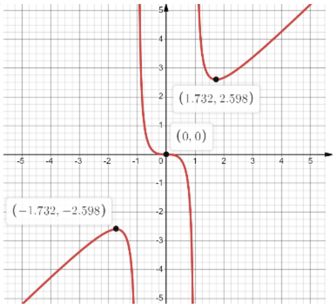
5.2.34. 1) $y = 0$; 2) $x = 2, y = 3$; 3) $x = -1, y = \frac{1}{2}x - 1$; 4) $x = -\frac{1}{e},\ y = x + \frac{1}{e}$;

5) $x=0,\ y=x+3$; 6) $x=0, y=2x$; 7) $x=2,\ y=x+1,\ y=-x-1$; 8) $y=2x\pm\frac{\pi}{2}$.

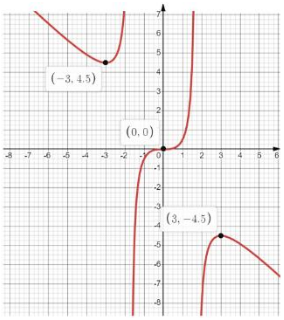
5.2.35. 1) 

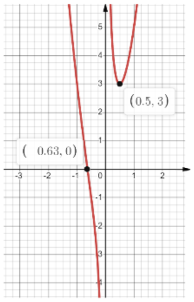
; 2) 

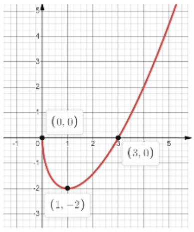
; 3) 

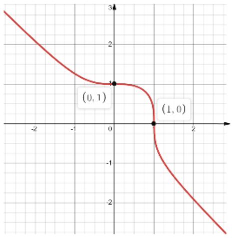
; 4) 

;

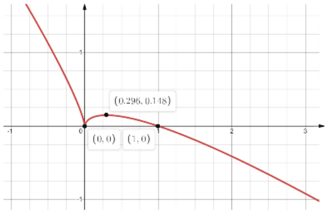
5) 

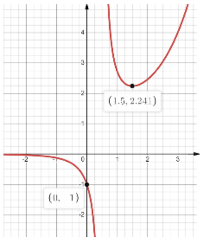
; 6) 

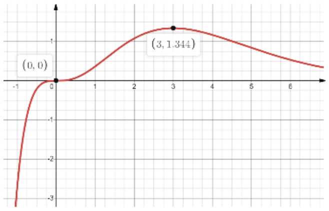
; 7) 

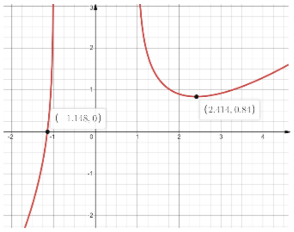
; 8) 

;

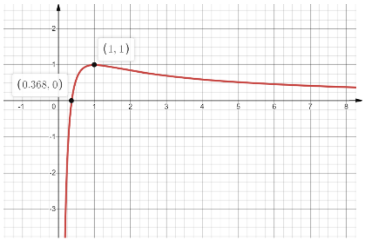
9) 

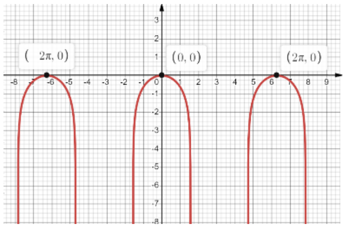
; 10) 

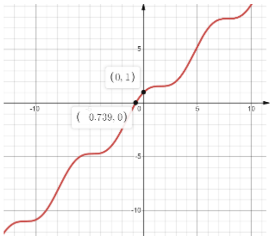
; 11) 

; 12) 

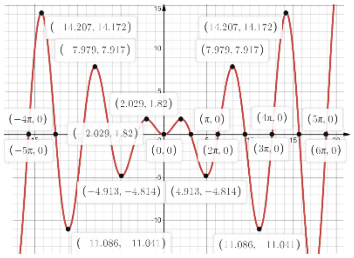
;

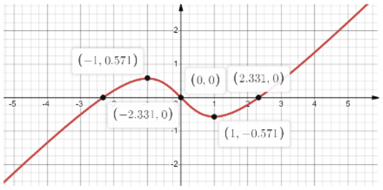
13) 

; 14) 

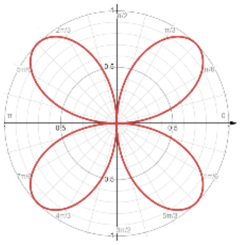
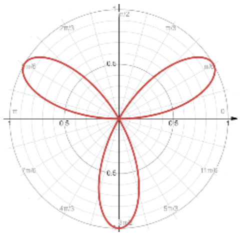
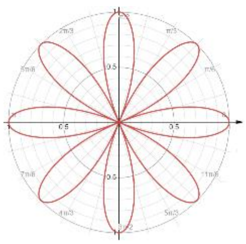
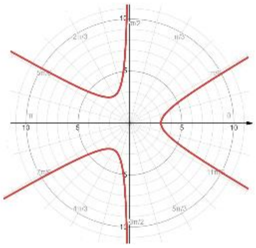
; 15) 

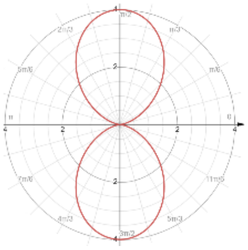
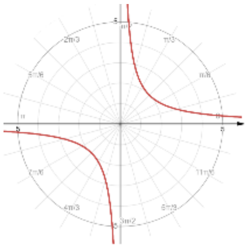
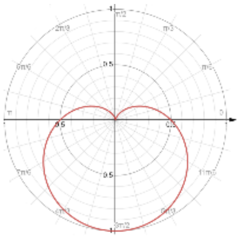
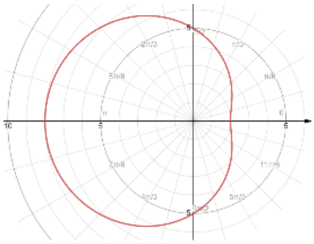
;

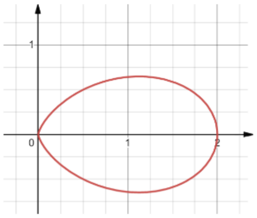
16) 

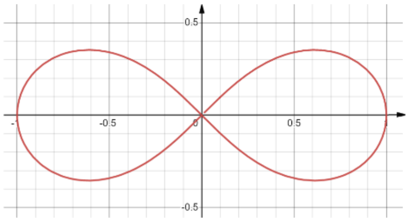
; 17) 

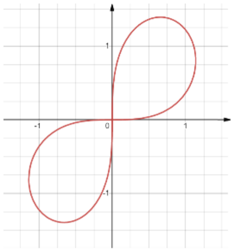
.

5.2.36. 1) 
; 2) 
; 3) 
; 4) 
;

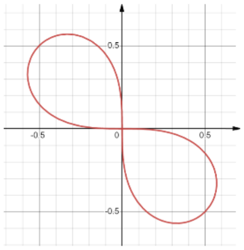
5)  ; 6)  ; 7)  ; 8)  .

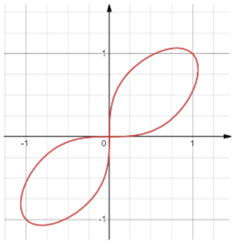
5.2.37. 1) 

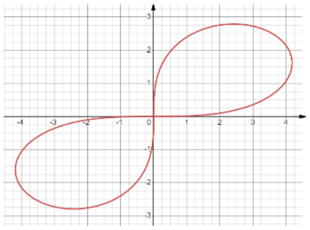
; 2) 

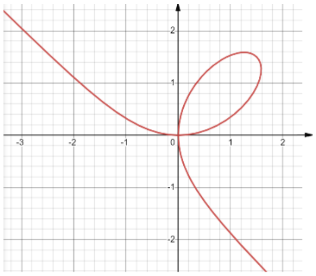
; 3) 

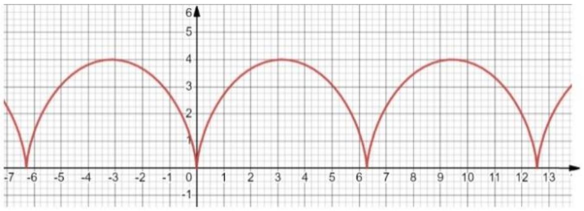
;

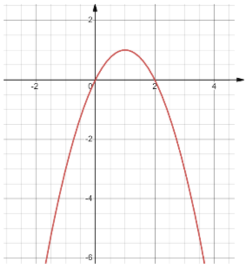
4) 

; 5) 

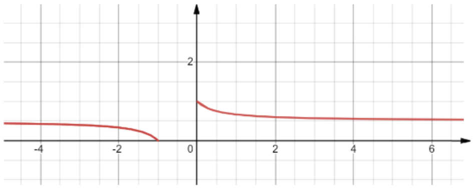
; 6)  ;

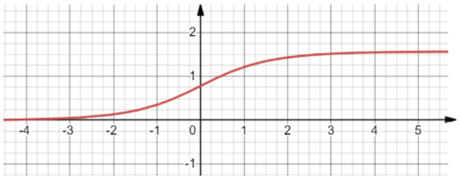
5.2.38. 1) 

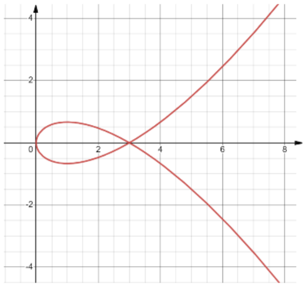
; 2) 

; 3) 

;

4) 

; 5) 

; 6) 

.

Повернутися до завдань.

Відповіді до Теми 6.1.

6.1.2. 1) x^4 ; 2) $2\sqrt{x}$; 3) $-\cos x$; 4) $\ln x$; 5) $\operatorname{arctg} x$; 6) $\frac{3^x}{\ln 3}$.

6.1.3. 1) $t^3 + C$; 2) $(2x+9)^3 + C$; 3) $\cos^3 x + C$; 4) $\ln^3(x+3) + C$.

6.1.4. 1) $\frac{2}{7}\sqrt{x^7} + \frac{15}{7}\sqrt[3]{x^7} + \frac{3}{4x^4} - 4\sqrt[4]{x} + \mathrm{C}$; 2) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$; 3) $\frac{2}{5}x\sqrt{x} + x + C$;

4) $\frac{x^3}{3} - 2\ln|x| - \frac{1}{3x^3} + C$; 5) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{3^x}{\ln 3} - \ln x + \mathrm{C}$; 6) $3\sqrt[6]{x^7} - 2\sqrt[4]{x^3} + C$;

7) $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{6}{5}\sqrt[3]{x^5} + \frac{3}{11}\sqrt[3]{x^{11}} + \mathrm{C}$; 8) $2\sqrt{x} + 3x + 2x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2} + C$; 9) $\frac{(ae)^x}{\ln a+1} + C$;

10) $2x + 5e^x + C$; 11) $\frac{4}{\ln\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{2}\right)^x + C$; 12) $\frac{5\cdot 7^x}{3^x \ln\frac{7}{3}} - \frac{2\cdot 2^x}{\ln 2} + \mathrm{C}$; 13) $-2\cos x + C$;

14) $-a\ln|\cos x| + b\,\mathrm{tg}\,x + C$; 15) $\frac{1}{2}(x + \sin x) + C$; 16) $-\mathrm{ctg}x - x + \mathrm{C}$; 17) $x - \sin x + \mathrm{C}$;

18) $-\mathrm{ctg}\,x + C$; 19) $2\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right| - \ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right| + C$; 20) $\frac{1}{2}(\mathrm{tg}\,x + x) + C$; 21) $C - \mathrm{ctg}\,x - \mathrm{tg}\,x$;

22) $\mathrm{tg}\,x + C$; 23) $\frac{\ln 2}{3}\arcsin 3x + C$; 24) $\frac{1}{5}\mathrm{arctg}\,5x + C$; 25) $\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\sqrt{3}x + C$;

26) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{3} + C$; 27) $\frac{1}{3\sqrt{3}}\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}} + C$; 28) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$; 29) $\frac{1}{5}\ln\left|x + \sqrt{x^2+2}\right| + C$;

30) $\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C$; 31) $-\frac{1}{x} + \mathrm{arctg}x + \mathrm{C}$.

6.1.5. 1) $-\frac{1}{3}\cos 3x + C$; 2) $\frac{1}{2}e^{2x} + \mathrm{C}$; 3) $-\frac{a^{-x}}{\ln a} + C$; 4) $-\frac{3^{9-x}}{\ln 3} + \mathrm{C}$; 5) $\frac{1}{8}\sin(3 + 8x) + \mathrm{C}$;

6) $-\frac{1}{3}\cos(2-3x) + C$; 7) $-\frac{1}{5}e^{-5x+1} + C$; 8) $\frac{1}{42}(7x+4)^5 + \mathrm{C}$; 9) $-\frac{1}{12(3x-1)^4} + \mathrm{C}$;

10) $-\frac{5}{22}\sqrt[5]{(3-2x)^{11}} + C$; 11) $\frac{1}{8}\sqrt{8x+4} + \mathrm{C}$; 12) $-\frac{1}{9}\ln|6-9x| + \mathrm{C}$; 13) $-\frac{1}{4}\mathrm{ctg}(4x-1) + \mathrm{C}$;

14) $-\frac{1}{3}\mathrm{tg}(1-3x) + \mathrm{C}$; 15) $\frac{1}{8}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{4} + \mathrm{C}$; 16) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-5}\right| + \mathrm{C}$;

17) $-\frac{1}{5}\ln\left|2 - 5x + \sqrt{3 + (2-5x)^2}\right| + \mathrm{C}$; 18) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{3+2x}{2} + \mathrm{C}$.

6.1.6. 1) $\int x\sqrt{1+x^2}dx$; $\frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} + \mathrm{C}$; 2) $\sqrt{x^2-1} + C$; 3) $-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$; 4) $-\frac{1}{3}e^{-x^3} + C$;

5) $\frac{1}{3}\sin x^3 + C$; 6) $\frac{1}{4}\ln|1+x^4| + \mathrm{C}$; 7) $\frac{4^{x^5}}{5\ln 4} + \mathrm{C}$; 8) $-\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4-x^4)^4} + C$; 9) $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x^2 + C$;

10) $\frac{1}{4}\mathrm{arsin}\,x^4 + C$; 11) $\ln|x^2 - 5x + 3| + C$; 12) $2\sqrt{3x^2 + 7x - 1} + C$; 13) $\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3} + C$;

14) $\ln|\ln x| + \mathrm{C}$; 15) $\ln\left|\ln x + \sqrt{1 + \ln^2 x}\right| + \mathrm{C}$; 16) $\mathrm{tg}(\ln x + 1) + C$; 17) $\frac{1}{1-n}(\ln x)^{1-n}$,

якщо $n \neq 1$ і $\ln|\ln x|$, якщо $n = 1$; 18) $-\cos e^x + \mathrm{C}$; 19) $\frac{1}{2}\ln(e^{2x} + a^2) + C$;

20) $\mathrm{arctg}(e^x) + C$; 21) $\arcsin e^x + \mathrm{C}$; 22) $-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}\right| + C$; 23) $-e^{\cos x} + \mathrm{C}$;

24) $-\frac{1}{\sin x}+C$; 25) $-3\sqrt[3]{\cos x}+C$; 26) $\frac{1}{4}\text{arctg}\frac{\sin x}{4}+\text{C}$; 27) $-\frac{2}{5}\cos^5 x+C$; 28) $-\frac{1}{2\sin^2 x}+C$;

29) $e^{\text{tg}\,x}+\text{C}$; 30) $-\frac{\text{ctg}^5 x}{5}+\text{C}$; 31) $-\frac{1}{3}\text{ctg}^3 x+C$; 32) $\frac{\text{tg}\,x}{2}\sqrt{4-\text{tg}^2 x}+2\arcsin\left(\frac{\text{tg}\,x}{2}\right)+C$;

33) $2\sqrt{1+\text{tg}x}+C$; 34) $\frac{1}{2}\sin\sqrt{x}+\text{C}$; 35) $\frac{1}{2}\arcsin^2 x+\text{C}$; 36) $-\frac{1}{2(\arccos x)^2}+C$;

37) $\frac{1}{4}\text{arctg}^4 x+\text{C}$; 38) $\frac{1}{n+1}(\text{arctg}\,x)^{n+1}$, якщо $n\neq-1$ і $\ln|\text{arctg}\,x|$, якщо $n=-1$;

39) $-2\sqrt{1-x^2}-\frac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3}+C$; 40) $-\frac{1}{9}\left(\sqrt{1-9x^2}+\arccos^3 3x\right)+C$.

6.1.7. 1) $\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$; 2) $-\frac{1}{5}\left(x\cos 5x-\frac{1}{5}\sin 5x\right)+C$; 3) $\frac{5^x}{\ln^2 5}(x\ln 5-1)+C$;

4) $(3x-1)\sin x+3\cos x+C$; 5) $-e^{-x}(x^2+2x+2)+C$;

6) $-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$; 7) $\frac{1}{2}e^{2x}\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right)+C$;

8) $x\,\text{tg}\,x-\frac{x^2}{2}+\ln|\cos x|+C$; 9) $e^x(x^3-3x^2+6x-6)+C$;

10) $\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}x^2\sin 2x+\frac{1}{4}x\cos 2x-\frac{1}{8}\sin 2x+C$; 11) $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right)+C$;

12) $\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x+1)-\frac{1}{2}(\frac{x^2}{2}-x)+C$; 13) $\frac{x^2}{2}\left(\ln^2 x-\ln x+\frac{1}{2}\right)+C$;

14) $\frac{1}{2}(x^2+1)\text{arctg}x-\frac{x}{2}+C$; 15)$x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$;

16) $\sqrt{x^2+1}\,\text{arctg}\,x-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$; 17) $\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$;

18) $\frac{1}{13}e^{3x}(\sin 2x-5\cos 2x)+C$; 19) $x^2\sqrt{1+x^2}-\frac{2}{3}\sqrt{(1+x^2)^3}+C$;

20) $-\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\text{arctg}\,x+C$; 21) $\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$;

22) $\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$.

6.1.8. 1) $2\left[\sqrt{x+1}-\ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)\right]+C$; 2) $\frac{2}{15}\sqrt{x-1}(3x^2+4x+8)+C$;

3) $\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C$; 4) $2\text{arctg}\sqrt{x}+C$; 5) $2\left(\sqrt{x}+\text{arctg}\sqrt{x}\right)+C$;

6) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}-3\sqrt[3]{x+1}+3\ln\left|1+\sqrt[3]{x+1}\right|+C$; 7) $3\sqrt[3]{x}+3\ln\left|\sqrt[3]{x}-1\right|+C$;

8) $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln\left(1+\sqrt[4]{x}\right)+C$;

9) $x+\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C$;

10) $x+4\sqrt{x+1}+4\ln\left|\sqrt{x+1}-1\right|+C$; 11) $-\frac{1}{8(x+9)^8}+\frac{1}{(x+9)^9}+C$;

12) $-\frac{1}{4(x-5)^4}-\frac{2}{(x-5)^5}-\frac{25}{6(x-5)^6}+C$; 13) $2\sqrt{e^x-1}-2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}+C$; 14) $\ln\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}+C$.

6.1.9. 1) $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+\operatorname{arctg}(x+1)+C$; 2) $-2\ln|2x^2-3x+1|+\ln\left|\frac{x-1}{x-0{,}5}\right|+C$;

3) $3\ln|x+3|+\frac{11}{x+3}+C$; 4) $-\sqrt{3-2x-x^2}-4\arcsin\frac{x+1}{2}+C$;

5) $-\frac{1}{3}\ln|2-3x|+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{3x-2}{3x}\right|+C$; 6) $-8\sqrt{5+2x-x^2}-3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}}+C$;

7) $\frac{3}{8}\left[\ln(4x^2-4x+17)+\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{4}\right]+C$;

8) $3\sqrt{x^2+2x+2}-4\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)+C$; 9) $\ln\frac{(x-4)^2}{|x-3|}+C$;

10) $\frac{2}{9}\sqrt{9x^2+6x+2}+\frac{13}{9}\ln\left(3x+1+\sqrt{9x^2+6x+2}\right)+C$; 11) $-\ln|2x^2-3x+1|+C$.

6.1.10. 1) $\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{2x-1}}+\mathrm{C}$; 2) $\ln|x-2|+\ln|x+5|+\mathrm{C}$; 3) $\frac{1}{4}\ln|x-1|+\frac{1}{12}\ln|3x+1|+\mathrm{C}$;

4) $\frac{1}{5}\ln\left[(x-2)^2\sqrt{2x+1}\right]+C$; 5) $\ln\frac{\sqrt{(x+1)(x-3)^5}}{(x-2)^2}+\mathrm{C}$;

6) $\frac{3}{11}\ln|3x+1|+\frac{2}{33}\ln|2x-3|-\frac{1}{3}\ln|x|+C$;

7) $\frac{1}{4}x+\ln|x|-\frac{7}{16}\ln|2x-1|-\frac{9}{16}\ln|2x+1|+\mathrm{C}$; 8) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^3}\right|+\mathrm{C}$; 9) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-2}{x^2-1}\right|+\mathrm{C}$;

10) $x+\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{9}{2}\ln|x-2|+\frac{28}{3}\ln|x-3|+\mathrm{C}$; 11) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|+\mathrm{C}$;

12) $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+\mathrm{C}$.

6.1.11. 1) $\frac{1}{x}+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+\mathrm{C}$; 2) $4\ln|x|-3\ln|x-1|-9(x-1)^{-1}+\mathrm{C}$; 3) $\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\mathrm{C}$;

4) $-\frac{4}{3(x-1)}+\frac{20}{9}\ln|x-1|+\frac{7}{9}\ln|x+2|+\mathrm{C}$; 5) $x+\frac{1}{x}+\ln\frac{(x-1)^2}{|x|}+\mathrm{C}$; 6) $\frac{4}{x+2}+\ln|x+1|+\mathrm{C}$;

7) $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+\mathrm{C}$; 8) $-\frac{x}{(x^2-1)^2}+\mathrm{C}$; 9) $-\frac{1}{3(x-2)^3}+\frac{1}{2(x-2)^2}+\ln|x-2|+\mathrm{C}$;

10) $-\frac{5x-6}{x^2-3x+2}+4\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|+\mathrm{C}$.

6.1.12. 1) $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\mathrm{C}$; 2) $\frac{1}{3}\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\mathrm{C}$;

3) $\frac{1}{4}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1}+\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}x+\mathrm{C}$; 4) $x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\operatorname{arctg}x+\mathrm{C}$;

5) $\ln\frac{\sqrt{(x^2-2x+5)^3}}{|x-1|}+\frac{1}{2}\text{ arctg }\frac{x-1}{2}+\mathrm{C}$; 6) $\ln\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{3}{2}\text{ arctg }\frac{x}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\text{ arctg }\frac{x\sqrt{2}}{2}+\mathrm{C}$;

7) $\frac{x^2}{2}+x+\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}}-\text{arctg }x+C$;

8) $\frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+2\ln(x^2+2x+2)-2\text{ arctg}(x+1)+C$;

9) $\ln\left|\frac{x}{1+x}\right|-\frac{2}{\sqrt{3}}\text{ arctg }\frac{1+2x}{\sqrt{3}}+\mathrm{C}$; 10) $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\text{ arctg }\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+\mathrm{C}$.

6.1.13. 1) $\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\text{ arctg }x+C$; 2) $\frac{15x^5+40x^3+33x}{48(x^2+1)^3}+\frac{15}{48}\text{ arctg }x+C$;

3) $\frac{x}{216(x^2+9)}+\frac{x}{36(x^2+9)^2}+\frac{1}{648}\text{ arctg}\frac{x}{3}+C$; 4) $\frac{13x-159}{8(x^2-6x+13)}+\frac{53}{16}\text{ arctg}\frac{x-3}{2}+C$;

5) $\frac{2-x}{4(x^2+2)}+\frac{1}{2}\ln(x^2+2)-\frac{1}{4\sqrt{2}}\text{ arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$; 6) $\frac{1}{4}\left(\frac{2x^6-3x^2}{x^4-1}+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|\right)+C$;

7) $\frac{x-1}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+C$;

8) $\frac{1}{16}\ln|x|-\frac{1}{18}\ln(x^2+1)+\frac{7}{288}\ln(x^2+4)-\frac{1}{24(x^2+4)}+C$.

6.1.14. 1) $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln\left(1+\sqrt[4]{x}\right)+\mathrm{C}$; 2) $\frac{6}{5}\left(\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt[12]{x^5}+2\ln|\sqrt[12]{x^5}-1|\right)+\mathrm{C}$;

3) $\ln\frac{x}{\left(\sqrt[6]{x}+1\right)^6}+\mathrm{C}$; 4) $\ln\frac{x}{\left(1+\sqrt[10]{x}\right)^{10}}+\frac{10}{\sqrt[10]{x}}-\frac{5}{\sqrt[5]{x}}+\frac{10}{3\sqrt[10]{x^3}}-\frac{5}{2\sqrt[5]{x^2}}+\mathrm{C}$;

5) $6\left(\frac{1}{9}(x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{8}(x+1)^{\frac{4}{3}}+\frac{1}{7}(x+1)^{\frac{7}{6}}-\frac{1}{6}(x+1)+\frac{1}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}}-\frac{1}{4}(x+1)^{\frac{2}{3}}\right)+\mathrm{C}$;

6) $6(x+1)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{16}(x+1)^2-\frac{1}{5}(x+1)+\frac{1}{7}(x+1)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}\right)+\mathrm{C}$;

7) $\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+2\text{ arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\mathrm{C}$; 8) $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+C$; 9) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2}+C$; 10) $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+\mathrm{C}$;

11) $\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\mathrm{C}$; 12) $-\frac{x(x^2-3)}{2\sqrt{1-x^2}}-\frac{3}{2}\arcsin x+C$; 13) $\mathrm{C}-\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}$;

14) $\mathrm{C}-\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x}$; 15) $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+\mathrm{C}$; 16) $\mathrm{C}-\frac{\sqrt{(4-x^2)^5}}{20x^5}$; 17) $\frac{\sqrt{(x^2-8)^3}}{24x^3}+C$; 18) $\mathrm{C}-\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}$;

19) $\frac{1}{3}\arccos\frac{3}{x}+C$; 20) $\frac{\sqrt{(4+x^2)^3}(x^2-6)}{120x^5}+C$; 21) $\frac{x}{9}(x^2-3)\sqrt{9-x^2}+3\arcsin\frac{x}{3}+\mathrm{C}$;

22) $\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x-1}-\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x-1}\right|+\mathrm{C}$; 23) $\frac{2}{3}\cdot\frac{2x+1}{\sqrt{1+x+x^2}}+C$;

24) $\frac{1}{2}\arccos\frac{2-x}{x\sqrt{2}}+\mathrm{C}$; 25) $\mathrm{C}-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2+x-x^2}+\sqrt{2}}{x}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right|$; 26) $\mathrm{C}-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{3+3x+2\sqrt{3(x^2+x+1)}}{x-1}\right|$;

27) $\arcsin\frac{x-1}{x\sqrt{2}}+C$; 28) $-\frac{1}{\sqrt{15}}\ln\left|\frac{x+6+\sqrt{60x-15x^2}}{2x-3}\right|+C$;

29) $\frac{1}{2}(3-x)\sqrt{1-2x-x^2}+2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+\mathrm{C}$;

30) $\frac{1}{2}(19-3x)\sqrt{3-2x-x^2}+14\arcsin\frac{x+1}{2}+C$;

31) $x\sqrt{x^2-2x+5}-5\ln\left(x-1+\sqrt{x^2-2x+5}\right)+C$;

32) $\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}\right)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{5}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C$;

33) $\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x-1}-\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x-1}\right|+C$.

6.1.15. 1) $3\ln\left|\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right|+\frac{2\sqrt[3]{x}+3}{2\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}+\mathrm{C}$;

2) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{24}{11}x\sqrt[6]{x^5}+\frac{36}{13}x^2\sqrt[6]{x}+\frac{8}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{6}{17}x^2\sqrt[6]{x^5}+C$; 3) $3\,\mathrm{arctg}\,\sqrt[6]{x}-\frac{3\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}+1}+\mathrm{C}$;

4) $\frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8}-\frac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5}+\mathrm{C}$;

5) $\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt[3]{x^2+1}-1\right)-\frac{1}{4}\ln\left(\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}+1\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{arctg}\frac{2\sqrt[3]{x^2+1}+1}{\sqrt{3}}+C$;

6) $\frac{1}{10}\sqrt{(x^4+1)^5}\ --\frac{1}{6}\sqrt{(x^4+1)^3}+\mathrm{C}$; 7) $\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{1-x^4}+1}{x^2}-\frac{1}{4}\frac{\sqrt{1-x^4}}{x^4}+C$;

8) $12\left(\frac{\sqrt[3]{t^{13}}}{13}-\frac{3\sqrt[3]{t^{10}}}{10}+\frac{3\sqrt[3]{t^7}}{7}-\frac{\sqrt[3]{t^4}}{4}\right)+C$, де $t=1+\sqrt[4]{x}$;

9) $\frac{3}{7}\left(4+\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-3\right)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}+\mathrm{C}$; 10) $\frac{1}{6}\ln\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$, де $t=\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}$;

11) $\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\ \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}+\mathrm{C}$;

12) $-\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1+x^3}+x}{x\sqrt{3}}-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt[3]{1+x^3}+x}{\sqrt{\sqrt[3]{(1+x^3)^2}+x\sqrt[3]{1+x^3}+x^2}}\right|+C$; 13) $-\frac{1}{8}\frac{4+3x^3}{x(2+x^3)^{2/3}}+\mathrm{C}$;

14) $-2\sqrt[3]{\left(x^{-\frac{3}{4}}+1\right)^2}+\mathrm{C}$.

6.1.16. 1) $\frac{\cos^5 x}{5}-\frac{\cos^3 x}{5}+\mathrm{C}$; 2) $\frac{\sin^5 x}{5}-\frac{2\sin^7 x}{7}+\frac{\sin^9 x}{9}+\mathrm{C}$; 3) $\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}-\frac{\sin^3 2x}{48}+\mathrm{C}$;

4) $\sin x-\sin^3 x+\frac{3\sin^5 x}{5}-\frac{\sin^7 x}{7}+\mathrm{C}$; 5) $-\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{3\cos^3 x}+\mathrm{C}$; 6) $\mathrm{tg}\,x-\frac{3}{2}x+\frac{\sin\ 2x}{4}+\mathrm{C}$;

7) $\frac{\mathrm{tg}^3 x}{3}+\frac{\mathrm{tg}^5 x}{5}+\mathrm{C}$; 9) $-\mathrm{ctg}x-\frac{2}{3}\mathrm{ctg}^3x-\frac{1}{5}\mathrm{ctg}^5x+C$; 10) $\ln|\,\mathrm{tg}\,x|-\frac{1}{2\sin^2 x}+\mathrm{C}$;

11) $\frac{1}{2}(\mathrm{tg}^2 x-\mathrm{ctg}^2 x)+2\ln|\,tg\,x|+\mathrm{C}$; 12) $\frac{(\mathrm{tg}^2 x-1)\,(\mathrm{tg}^4 x+10\,\mathrm{tg}^2 x+1)}{3\mathrm{tg}^3 x}+\mathrm{C}$;

13) $\frac{1}{4}\mathrm{tg}^4x-\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2x-\ln|\cos x|+C$; 14) $x-\frac{1}{3}\mathrm{ctg}^{\,3}x+\mathrm{tg}\,x+\mathrm{C}$;

15) $-\frac{1}{16}\cos 8x+\frac{1}{4}\cos 2x+\mathrm{C}$; 16) $\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{14}\sin 7x+\mathrm{C}$; 17) $\frac{1}{10}\sin 5x+\frac{1}{2}\sin x+C$;

18) $-\frac{1}{8}\sin 4x-\frac{1}{12}\cos 6x+C$; 19) $\frac{2\mathrm{tg}^2 x-3}{3\sqrt{\mathrm{tg}\,x}}+\mathrm{C}$; 20) $\frac{1}{2}(x+\ln|\sin x+\cos x|)+\mathrm{C}$;

21) $\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\frac{x}{2}-\frac{1}{6}\mathrm{ctg}^{\,3}\frac{x}{2}+\mathrm{C}$; 22) $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,x\right)+\mathrm{C}$; 23) $C-\frac{1}{2}\left(\mathrm{ctg}x+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}x}{\sqrt{2}}\right)\right)$;

24) $\frac{1}{3}\mathrm{arctg}\,(3\mathrm{tg}\,x)+\mathrm{C}$; 25) $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{5}-\mathrm{tg}\frac{x}{2}}\right|+\mathrm{C}$; 26) $\frac{2}{3}\mathrm{arctg}\left(\frac{5\mathrm{tg}\frac{x}{2}+4}{3}\right)+C$;

27) $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\mathrm{tg}(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2})\right|+\mathrm{C}$; 28) $\ln(2+\cos x)+\frac{4}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)+\mathrm{C}$;

29) $\mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1\right)+\mathrm{C}$; 30) $\frac{1}{2-\mathrm{tg}\frac{x}{2}}+C$; 31) $\frac{12}{13}x-\frac{5}{13}\ln|2\sin x+3\cos x|+\mathrm{C}$.

Повернутися до завдань.

Відповіді до Теми 6.2.

6.2.1. 1) $\frac{45}{4}$; 2) $\frac{19}{15}$; 3) $\frac{7}{64}$; 4) $\frac{5}{3}$; 5) $5\left(\sqrt[5]{2}-1\right)$; 6) 12; 7) $\frac{e-1}{4}$; 8) $\frac{\pi}{2}$; 9) 2; 10) $e-\sqrt{e}$;

11) $\mathrm{arctg}\frac{1}{7}$; 12) $\frac{1}{3}\mathrm{arctg}\frac{1}{3}$; 13) $\frac{1}{5}\ln\frac{4}{3}$; 14) $\ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$; 15) $\frac{\pi}{6}$; 16) 2; 17) $\frac{2}{7}$; 18) $\frac{4}{3}$; 19) 0,236 …;

20) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$.

6.2.2. 1) $-2e^{-1}+1$; 2) $e-2$; 3) $\frac{\pi}{2}-1$; 4) $\pi^3-6\pi$; 5) $\frac{\pi}{3}+\frac{2-\sqrt{3}}{2}$; 6) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$; 7) 1;

8) $\frac{\pi\left(9-4\sqrt{3}\right)}{36}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$; 9) $\frac{1}{18}\left(5\pi\sqrt{3}-9\ln 3\right)$; 10) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$; 11) $\frac{141}{20}a^3\sqrt[3]{a}$; 12) $\frac{1}{5}(e^{\pi}-2)$.

6.2.3. 1) $\frac{5}{3}-2\ln 2$; 2) $2-\frac{\pi}{2}$; 3) $7+2\ln 2$; 4) $\frac{32}{3}$; 5) $\frac{\pi}{6}$; 6) $\frac{2}{5}$; 7) $\ln\frac{e+\sqrt{e^2+1}}{1+\sqrt{2}}$; 8) $\frac{\pi}{2}$; 9) $\frac{\pi}{16}$;

10) $\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}+\ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$; 11) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$; 12) $\frac{\pi}{32}$; 13) $\frac{\pi}{3}$; 14) $\ln\frac{7+2\sqrt{7}}{9}$; 15) $\frac{8}{35}$; 16) $\frac{5\pi}{16}$.

Повернутися до завдань.

Відповіді до Теми 6.3.

6.3.1. 1) $\frac{1}{4}$; 2) розб.; 3) $\ln 2$; 4) розб.; 5) $\frac{1}{k}$; 6) розб.; 7) розб.; 8) π; 9) $\frac{\pi}{4}$; 10) $\frac{1}{2}$; 11) 2 ; 12) $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$; 13) розб.; 14) розб.; 15) $\frac{1}{2}$; 16) $\frac{\pi}{4}$.

6.3.2. 1) розб.; 2) збіж.; 3) збіж.; 4) збіж.; 5) збіж.; 6) розб.; 7) розб.; 8) розб.; 9) абс. збіж.; 10) збіж.

6.3.3. 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{8}{3}$; 3) $\sqrt{5}$; 4) розб.; 5) 2; 6) 1; 7) $-\frac{1}{4}$; 8) розб.; 9) розб.; 10) $\frac{10}{7}$; 11) розб.; 12) $14\frac{4}{7}$; 13) π; 14) $\frac{33\pi}{2}$.

6.3.4. 1) збіж.; 2) збіж.; 3) розб.; 4) збіжн.; 5) збіжн.; 6) розб.

Повернутися до завдань.

Відповіді до Теми 6.4.

6.4.1. $\frac{32}{3}$.

6.4.2. $\frac{1}{3}$.

6.4.3. $\frac{32}{3}$.

6.4.4. $\frac{9}{4}$.

6.4.5. $\frac{9}{2}$.

6.4.6. $\frac{16}{3}$.

6.4.7. $\frac{9}{4}$.

6.4.8. $\frac{32}{6}p^2$.

6.4.9. $\frac{32\sqrt{6}}{3}$.

6.4.10. $e+\frac{1}{e}-2$.

6.4.11. $\frac{3}{2}(3\pi-2)$.

6.4.12. $4\ln 2-1$.

6.4.13. $3-e$.

6.4.14. $2\pi+\frac{4}{3}$ i $6\pi-\frac{4}{3}$.

6.4.15. $\frac{4}{3}(4\pi+\sqrt{3})$ i $\frac{4}{3}(8\pi-\sqrt{3})$.

6.4.16. $\sqrt{2}-1$.

6.4.17. $\frac{1}{12}$.

6.4.18. 4.

6.4.19. $b-a$.

6.4.20. $2-\sqrt{2}$

6.4.21. $\frac{1}{3}+\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6.4.22. $3\pi a^2$.

6.4.23. $\frac{3}{8}\pi ab$.

6.4.24. $\frac{72\sqrt{3}}{5}$.

6.4.25. $\frac{8}{15}$.

6.4.26. $\frac{4}{3}a^2\pi^3$.

6.4.27. $16a^2\pi^3$.

6.4.28. $\frac{a^2\pi}{4}$.

6.4.29. $\frac{a^2\pi}{4}$.

6.4.30. $\frac{3a^2\pi}{2}$.

6.4.31. a^2.

6.4.32. $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$.

6.4.33. a^2.

6.4.34. $a^2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$.

6.4.35. $\frac{5\pi+3\sqrt{3}+6}{4}$.

6.4.36. $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

6.4.37. $\ln 3-\frac{1}{2}$.

6.4.38. $\operatorname{sh}\frac{b}{a}$.

6.4.39. 2.

6.4.40. $4\sqrt{3}$.

6.4.41. $\frac{1}{2}\pi^2 R$.

6.4.42. $6a$.

6.4.43. $\rho = a(1+\cos\varphi)$.

6.4.44. $8\left(2-\sqrt{3}\right)$.

6.4.45. $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$.

6.4.46. $\frac{5}{12}+\ln\frac{3}{2}$.

6.4.47. $\frac{3a\pi}{2}$.

6.4.48. $2\pi\sqrt{a^2+b^2}$.

6.4.49. $2a\sqrt{6}$.

6.4.50. $\frac{4}{3}\pi ab^2$.

6.4.51. $\frac{3}{10}\pi$.

6.4.52. 1) $\frac{1}{7}\pi$; 2) $\frac{2}{5}\pi$.

6.4.53. $\frac{\pi}{4}(e^2-1)$.

6.4.54. $\frac{64\pi}{3}$.

6.4.55. $\frac{8\pi}{3}$.

6.4.56. $(\frac{15}{2}-4\ln 4)\pi$.

6.4.57. $\frac{\pi}{3}h^2(3a+h)$.

6.4.58. $\pi(\frac{\pi^2}{4}-2)$.

6.4.59. $5\pi^2a^3$.

6.4.60. $\frac{4\pi abc}{3}$.

6.4.61. $\pi\sqrt{2}$.

6.4.62. 36π.

6.4.63. $V_1=\pi\sqrt{2}(2\sqrt{6}-\frac{11}{3})$, $V_2=\pi\sqrt{2}(2\sqrt{6}+\frac{11}{3})$.

6.4.64. 8π.

6.4.65. $\frac{56}{3}\pi$.

6.4.66. $\frac{\pi}{9}(\sqrt{(1-a^4)^3}-1)$.

6.4.67. $\frac{\pi a^2}{4}(e^2-e^{-2}+4)$.

6.4.68. $\frac{64}{3}\pi a^2$.

6.4.69. $\frac{32}{5}\pi a^2$.

6.4.70. mgR.

6.4.71. 0,25 Дж.

6.4.72. 1 Дж.

6.4.73. $2066\ln 2$ Дж.

6.4.74. $\frac{1}{2}\pi\gamma R^2H^2$.

6.4.75. $\frac{1}{12}\pi\gamma R^2H^2$.

6.4.76. $\frac{1}{3}\pi\gamma R^2H^2$.

6.4.77. $\frac{1}{12}\pi\gamma a^2H^2$, $\approx 1{,}63\cdot 10^{11}$ кгм.

6.4.78. $\frac{1}{12}\pi\gamma R^2H^2$.

6.4.79. $\frac{1}{4}\pi\gamma R^4$.

6.4.80. 20,625 кг.

6.4.81. $\frac{b^2}{2}+\frac{ab}{2\varepsilon},\varepsilon=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$.

6.4.82. $2\pi a^2$.

6.4.83. 1) $x_c = 0, y_c = \frac{2R}{\pi}$; 2) центр тяжіння лежить на бісектрисі центрального кута, що стягує дугу, на відстані $2R\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha}$ від початку координат; 3) $x_c = 0,\ y_c = a\frac{e^4+4e^2-1}{4e(e^2-1)}$; 4) $x_c = \pi a,\ y_c = \frac{4a}{3}$; 5) $x_c = \frac{2a}{5},\ y_c = \frac{2a}{5}$; 6) $x_c = -\frac{a}{5}\frac{2e^{2\pi}+e^{\pi}}{e^{\pi}-e^{0,5\pi}},\ y_c = \frac{a}{5}\frac{e^{2\pi}-2e^{\pi}}{e^{\pi}-e^{0,5\pi}}$; 7) $x_c = \frac{4a}{5}, y_c = \frac{4a}{5}$; 8) $x_c = y_c = \frac{2R}{\pi}$.

6.4.84. πR^3.

6.4.85. $\frac{\pi}{4}R^2$.

6.4.86. $\frac{\sqrt{(1+e)^3}-2\sqrt{2}}{3}$.

6.4.87. $I_x = \frac{256}{15}a^3,\ I_y = 16a^3\left(\pi^2 - \frac{128}{45}\right)$.

6.4.88. $M_x = \frac{b}{2}\sqrt{a^2+b^2},\ M_y = \frac{a}{2}\sqrt{a^2+b^2}$.

6.4.89. $\frac{\left((1+e)^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{3}{2}}\right)}{3}$.

6.4.90. $\frac{ah^2}{2}$.

6.4.91. $\frac{a^3}{6},\ \frac{a^3}{6}, \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

6.4.92. 1) $\frac{\pi}{2}+\frac{4}{5}$; 2) $\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}$; 3) $\frac{3}{20}$.

6.4.93. 1) $x_c = 0, y_c = \frac{4R}{3\pi}$; 2) $x_c = \frac{4a}{3\pi}, y_c = \frac{4b}{3\pi}$; 3) $x_c = \frac{\pi}{2}, y_c = \frac{\pi}{8}$; 4) $x_c = \pi a, y_c = \frac{5}{6}a$; 5) $x_c = y_c = \frac{256a}{315\pi}$; 6) $x_c = \frac{6a(4-\pi^2)}{\pi^3}, y_c = \frac{2a(\pi^2-6)}{\pi^3}$; 7) центр тяжіння лежить на осі симетрії сектора на відстані $\frac{2R\sin\alpha}{3\alpha}$ від початку координат; 8) $x_c = \frac{5a}{6}, y_c = 0$; 9) $x_c = \frac{\sqrt{2}}{8}\pi a, y_c = 0$.

6.4.94. $M_{oy} = M_{ox} = \frac{a^3}{6},\ x_c = y_c = \frac{a}{3}$.

6.4.95. $\frac{ab^3}{3}$.

6.4.96. $\frac{\pi R^4}{8}$.

6.4.97. $\frac{\pi R^4}{2}$.

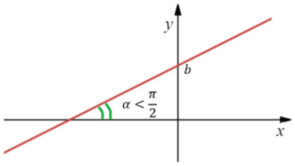
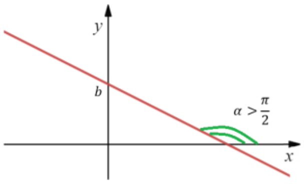
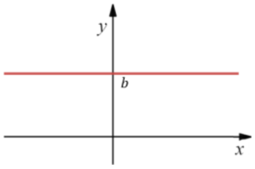
6.4.98. $\frac{4ba^3}{15}$

6.4.99. $I_a = \frac{\pi}{4} ab^3, \ I_b = \frac{\pi}{4} ba^3.$

Повернутися до завдань.

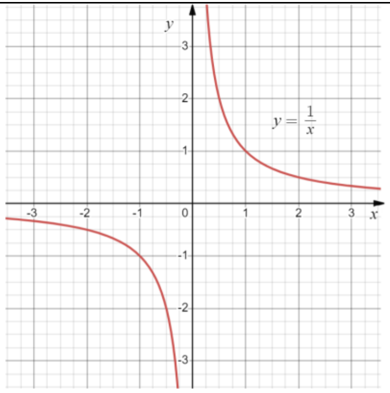
Основні елементарні функції, їхні властивості та графіки

Лінійна функція $y = kx + b$

Похила пряма для $k > 0$ та довільного b	Похила пряма для $k < 0$ та довільного b	Горизонтальна пряма для $k = 0$ та довільного b
		

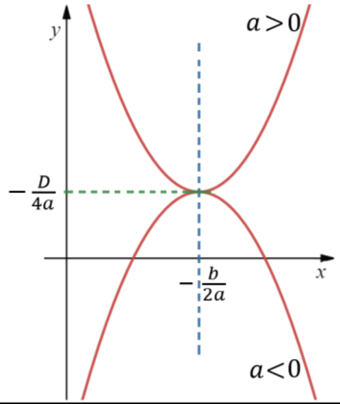
Обернена пропорційність $y = \frac{k}{x}$

- Графік функції називається гіперболою;
- $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;
- $E(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;
- Пряма $y = 0$ називається горизонтальною асимптотою;
- Пряма $x = 0$ називається вертикальною асимптотою.



Квадратична функція $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$

- Графік функції називається параболою;
- $D(f) = (-\infty, +\infty)$;
- $a > 0 \Rightarrow E(f) = \left(-\frac{D}{4a}, +\infty\right)$;
- $a < 0 \Rightarrow E(f) = \left(-\infty, -\frac{D}{4a}\right)$;
- Вершина параболи $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$, де $D = b^2 - 4ac$;
- Крива має симетрію відносно вертикальної прямої $x = -\frac{b}{2a}$.

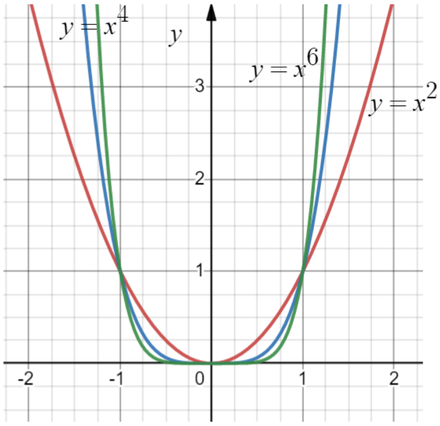


Степенева функція $y = x^n, n > 0$ – ціле число

<table>
<tr>
<td>

Якщо n парне, то $y = x^n$

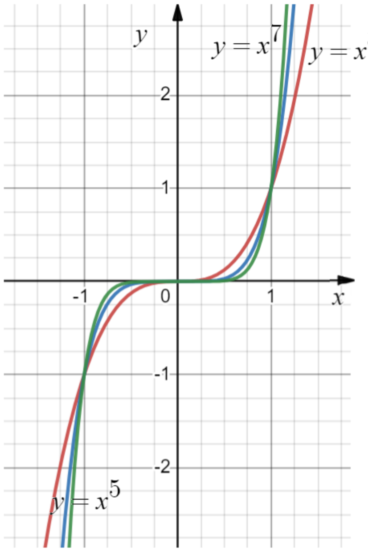
- $D(f) = (-\infty, +\infty)$;
- $E(f) = [0, +\infty)$;
- завжди проходить через точки (0,0), (±1,1);
- парна функція.



</td>
<td>

Якщо n непарне, то $y = x^n$

- $D(f) = (-\infty, +\infty)$;
- $E(f) = (-\infty, +\infty)$;
- завжди проходить через точки (0,0), (1,1) та (–1,–1);
- непарна функція;



</td>
</tr>
</table>

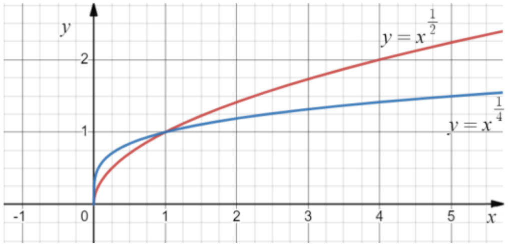
Обернена степенева функція $y = \sqrt[n]{x}, n > 0$ – ціле число

<table>
<tr>
<td>

Якщо n парне, то $y = \sqrt[n]{x}$

- $D(f) = [0, +\infty)$;
- $E(f) = [0, +\infty)$;
- завжди проходить через точки (0,0), (1,1).

</td>
<td>

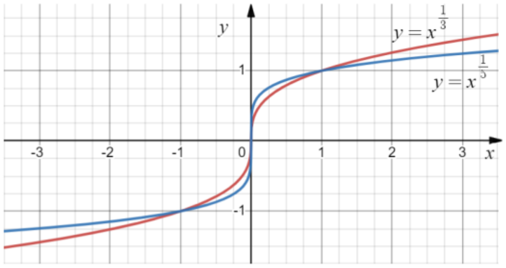


</td>
</tr>
<tr>
<td>

Якщо n непарне, то $y = \sqrt[n]{x}$

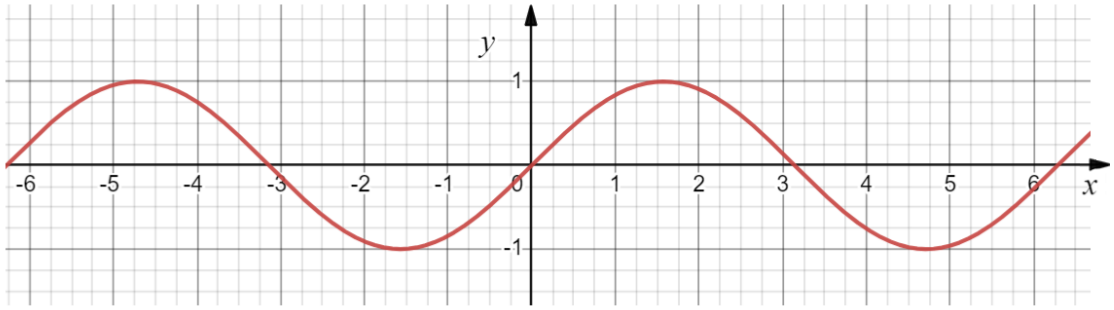
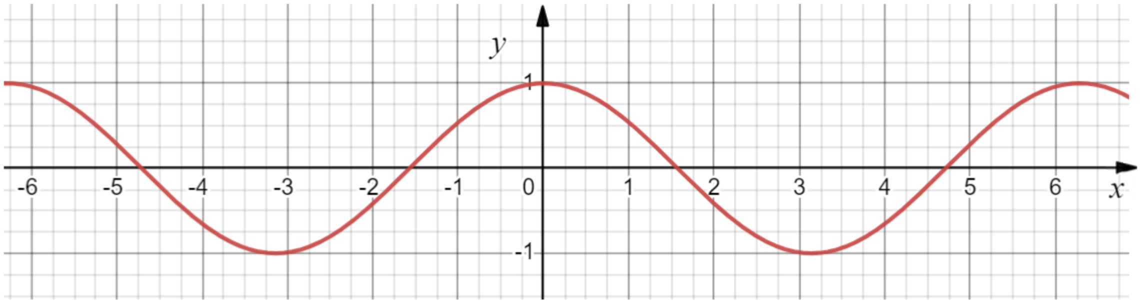
- $D(f) = (-\infty, +\infty)$;
- $E(f) = (-\infty, +\infty)$;
- завжди проходить через точки (0,0), (1,1) та (–1,–1);
- є непарною функцією.

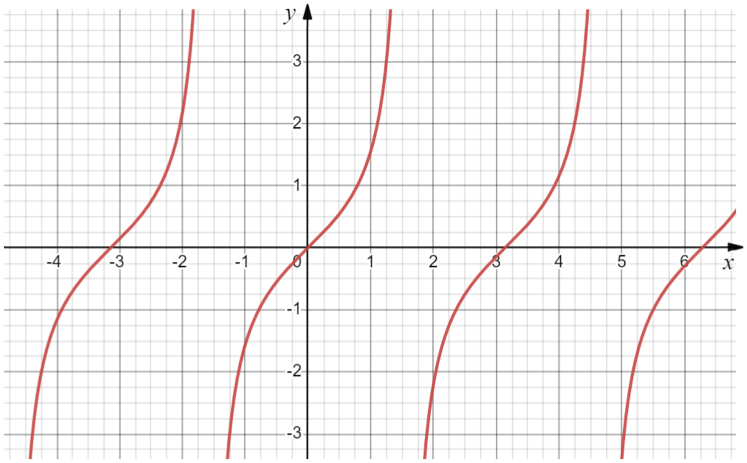
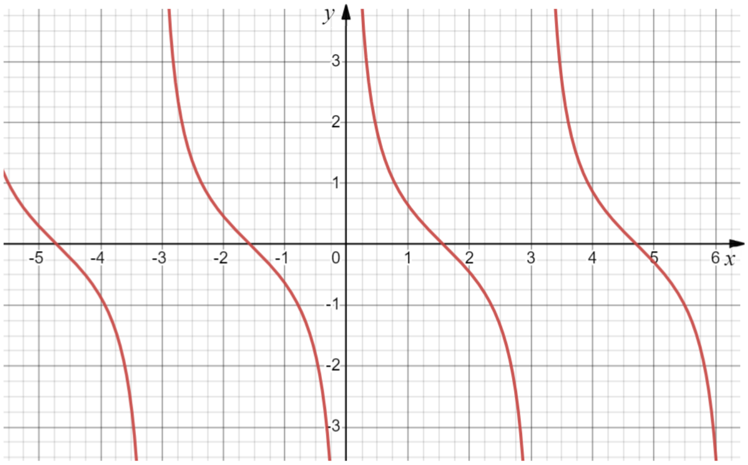
</td>
<td>



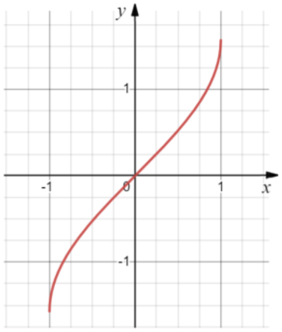
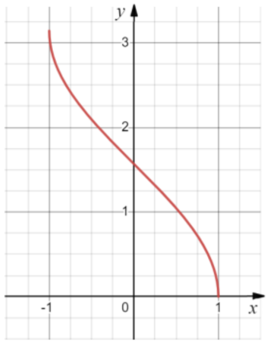
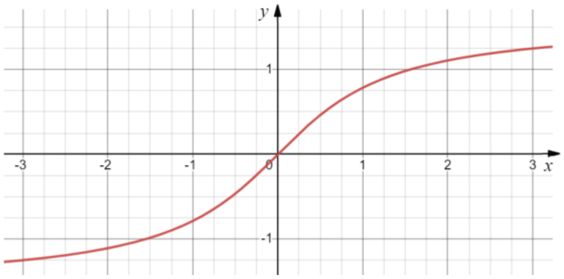
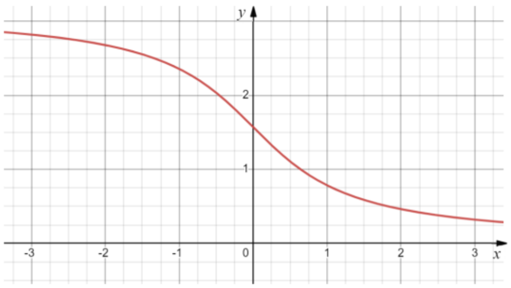
</td>
</tr>
</table>

Тригонометричні функції

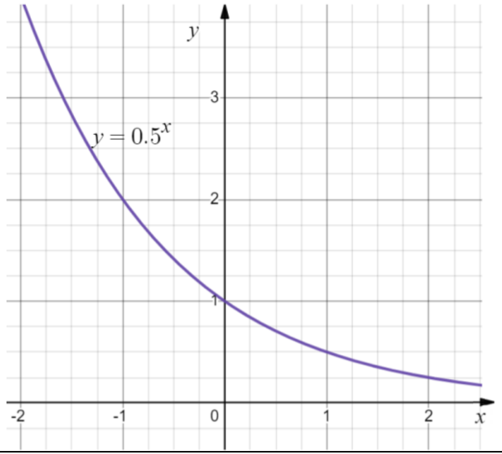
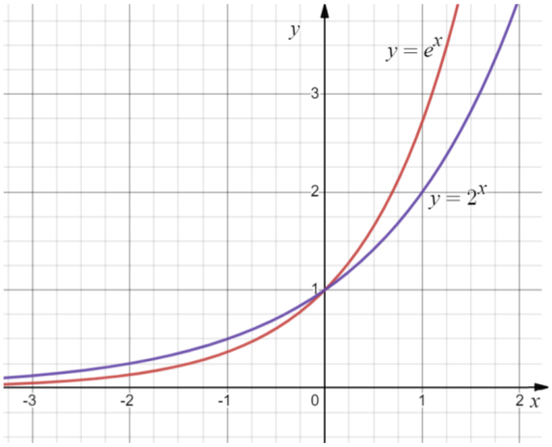
$y = \sin x$	• $D(y) = (-\infty,\ +\infty)$; $E(y) = [-1, 1]$; • періодична функція, $T = 2\pi$ – період; • непарна функція; • $\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi n, n \in Z$; • $\sin x > 0 \Rightarrow x \in (2\pi n, \pi + 2\pi n), n \in Z$, • $\sin x < 0 \Rightarrow x \in (\pi + 2\pi n, 2\pi + 2\pi n), n \in Z$; • зростає для $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in Z$; • спадає для $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in Z$; 
$y = \cos x$	• $D(y) = (-\infty,\ +\infty)$; $E(y) = [-1, 1]$; • періодична функція, $T = 2\pi$ – період; • парна функція • $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$; • $\cos x > 0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in Z$; • $\cos x < 0 \Rightarrow x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in Z$; • зростає для $x \in (\pi + 2\pi n, 2\pi + 2\pi n), n \in Z$; • спадає для $x \in (2\pi n, \pi + 2\pi n), n \in Z$; 

$y = \operatorname{tg} x$	• $D(y): x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ \ n \in \mathrm{Z};\ \ E(y) = (-\infty,\ \ +\infty);$ • періодична функція, $T = \pi$ – період; • непарна функція; • $\operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow x = \pi n, n \in Z;$ • $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ \ n \in \mathrm{Z},$ – вертикальна асимптота; • $\operatorname{tg} x > 0 \Rightarrow x \in \left(\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z;$ • $\operatorname{tg} x < 0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \pi n\right), n \in Z;$ • зростає для $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z;$ 
$y = \operatorname{ctg} x$	• $D(y): x \neq \pi n,\ \ n \in \mathrm{Z};\ \ E(y) = (-\infty,\ \ +\infty);$ • періодична функція, $T = \pi$ – період; • непарна функція; • $\operatorname{ctg} x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$ • $x = \pi n,\ \ n \in \mathrm{Z},$ – вертикальна асимптота; • $\operatorname{ctg} x > 0 \Rightarrow x \in \left(\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z;$ • $\operatorname{ctg} x < 0 \Rightarrow x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi n, \pi + \pi n\right), n \in Z;$ • спадає для $x \in (\pi n, \pi + \pi n), n \in Z;$ 

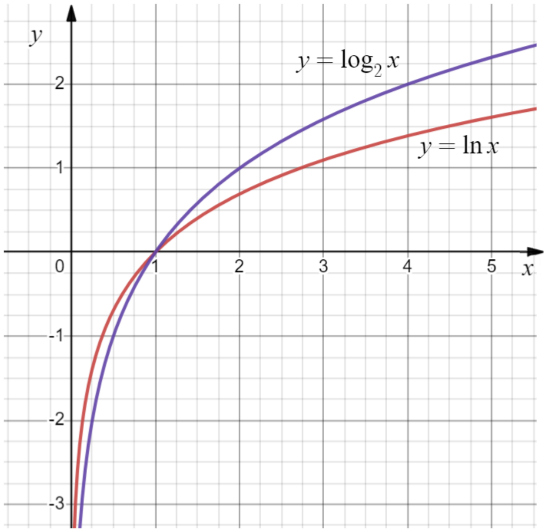
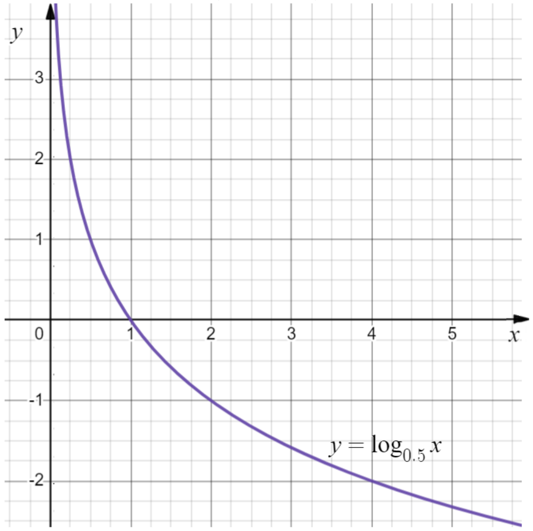
Обернені тригонометричні функції

$y = \arcsin x$	• $D(y) = [-1, 1]$; $E(y) = \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$; • непарна функція; • $\arcsin x = 0 \Rightarrow x = 0$; • $\arcsin x > 0 \Rightarrow x \in (0, 1]$; • $\arcsin x < 0 \Rightarrow x \in [-1, 0)$; • зростає для $x \in [-1, 1]$; 
$y = \arccos x$	• $D(y) = [-1, 1]$; $E(y) = [0, \pi]$; • $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$; • $\arccos x = 0 \Rightarrow x = 1$; • $\arccos x > 0 \Rightarrow x \in [-1, 1)$; • спадає для $x \in [-1, 1]$; 
$y = \operatorname{arctg} x$	•$D(y) = (-\infty,\ +\infty)$; $E(y) = \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$; • непарна функція; • $\operatorname{arctg} x = 0 \Rightarrow x = 0$; • $y = \pm\frac{\pi}{2}$ – горизонтальні асимптоти; • $\operatorname{arctg} x > 0 \Rightarrow x \in (0, +\infty)$; • $\operatorname{arctg} x < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0)$; • зростає для $x \in (-\infty, +\infty)$; 
$y = \operatorname{arcctg} x$	• $D(y) = (-\infty,\ +\infty)$; $E(y) = (0, \pi)$; • $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$; • $y = 0,\ y = \pi -$ горизонтальні асимптоти; • $\operatorname{arcctg} x > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, +\infty)$; • спадає для $x \in (-\infty, +\infty)$; 

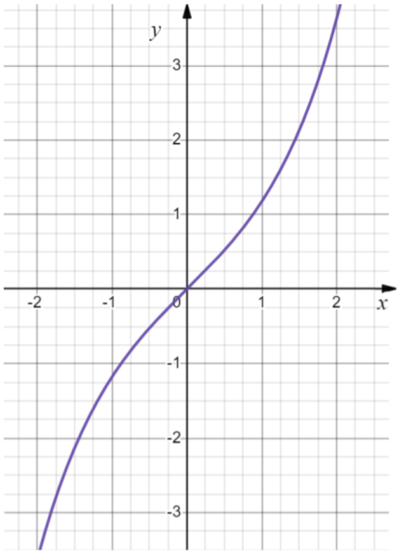
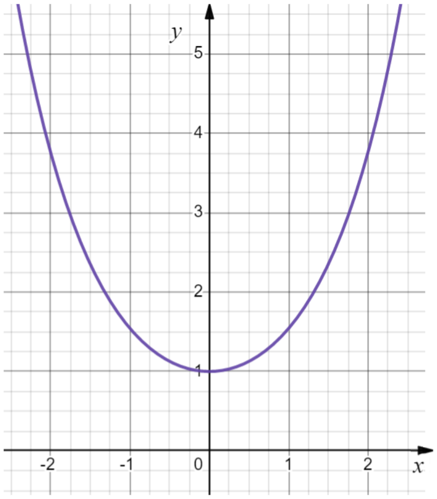
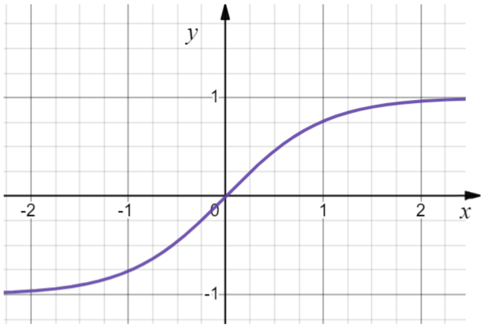
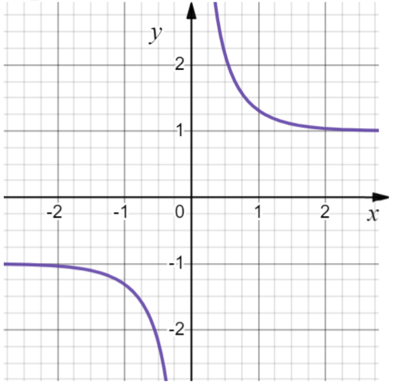
Показникова функція

$y = a^x$, $0 < a < 1$	$y = a^x$, $a > 1$
• $D(y) = (-\infty,\ +\infty)$; • $E(y) = (0,\ +\infty)$; • $a^x > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, +\infty)$; • точка перетину з віссю ОУ – $(0,\ 1)$; • $y = 0$ – горизонтальна асимптота; • спадає для $x \in (-\infty, +\infty)$; 	• $D(y) = (-\infty,\ +\infty)$; • $E(y) = (0,\ +\infty)$; • $a^x > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, +\infty)$;; • точка перетину з віссю ОУ – $(0,\ 1)$; • $y = 0$ – горизонтальна асимптота; • зростає для $x \in (-\infty, +\infty)$; 

Логарифмічна функція

$y = \log_a x$, $a > 1$	$y = \log_a x$, $0 < a < 1$
• $D(y) = (0,\ +\infty)$; • $E(y) = (-\infty,\ +\infty)$; • точка перетину з віссю ОХ – $(1, 0)$; • x=0 – вертикальна асимптота; • зростає для $x \in (0, +\infty)$; 	• $D(y) = (0,\ +\infty)$; • $E(y) = (-\infty,\ +\infty)$; • точка перетину з віссю ОХ – $(1, 0)$; • x=0 – вертикальна асимптота; • спадає для $x \in (0, +\infty)$; 

Гіперболічні функції

$y = \operatorname{sh} x$	$y = \operatorname{ch} x$
• $D(y) = (-\infty,\ +\infty)$; • $E(y) = (-\infty,\ +\infty)$; • $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$; • непарна функція; 	• $D(y) = (-\infty,\ +\infty)$; • $E(y) = (1,\ +\infty)$; • $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; • парна функція; 
$y = \operatorname{th} x$	$y = \operatorname{cth} x$
•$D(y) = (-\infty,\ +\infty)$; • $E(y) = (-1,\ 1)$; • $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; • $y = \pm 1$ – горизонтальні асимптоти; 	•$D(y) = (-\infty, 0) \cup (0,\ +\infty)$; • $E(y) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; • $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ • $y = \pm 1$ – горизонтальні асимптоти; • x=0 – вертикальна асимптота; 

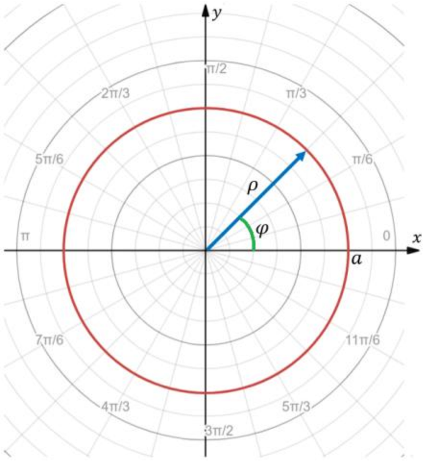
$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1; \quad 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}; \quad 1 - \operatorname{cth}^2 x = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x};$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh}^2 x; \quad \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x;$$

$$\operatorname{ch} 2x - 1 = 2 \operatorname{sh}^2 x; \qquad \operatorname{ch} 2x + 1 = 2 \operatorname{ch}^2 x;$$

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y; \quad \operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y;$$

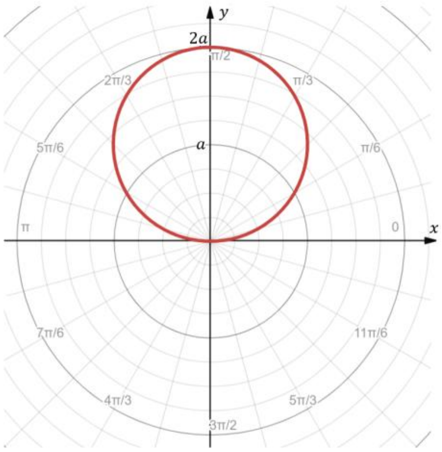
Графіки деяких функцій в полярних координатах



Коло

$$x^2 + y^2 = a^2$$

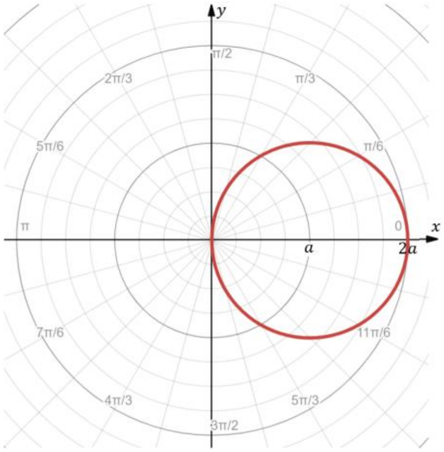
$$\rho = a$$



Коло

$$x^2 + y^2 = 2ay$$

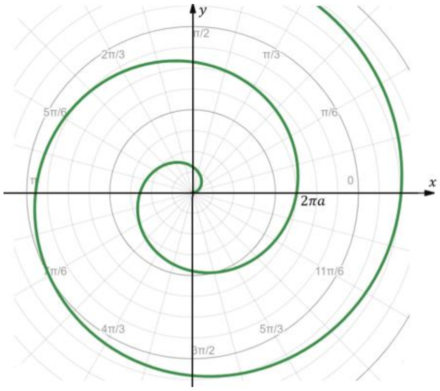
$$\rho = 2a \sin\varphi$$



Коло

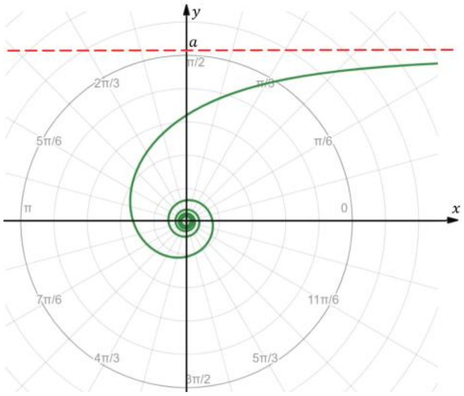
$$x^2 + y^2 = 2ax$$

$$\rho = 2a \cos\varphi$$



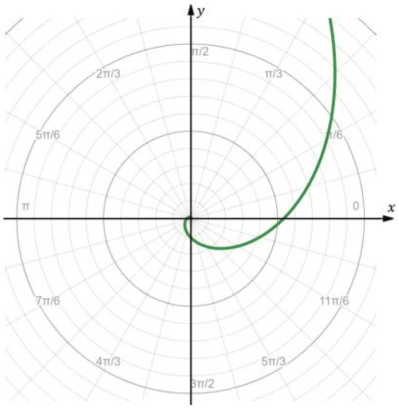
Спіраль Архімеда

$$\rho = a\varphi$$



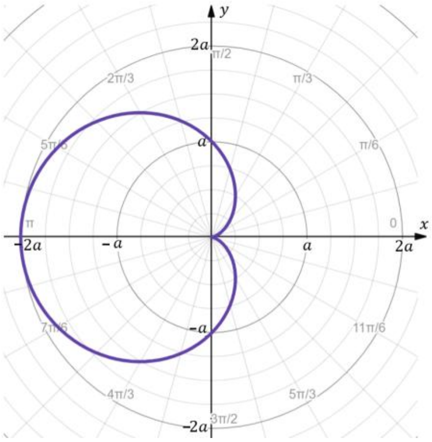
Гіперболічна спіраль

$$\rho = \frac{a}{\varphi}$$



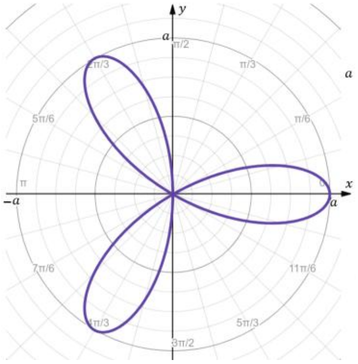
Логарифмічна спіраль

$$\rho = e^{a\varphi}$$



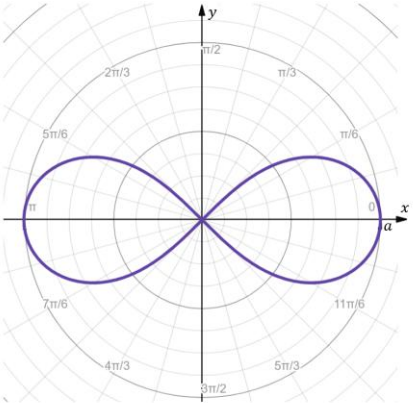
Кардіоїда

$$\rho = a(1 - \cos\varphi)$$



Трьохпелюсткова троянда

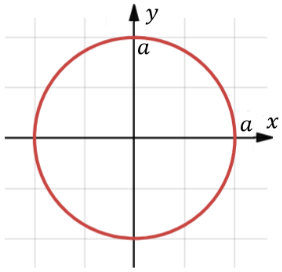
$$\rho = a \cos 3\varphi$$



Лемніската Бернуллі

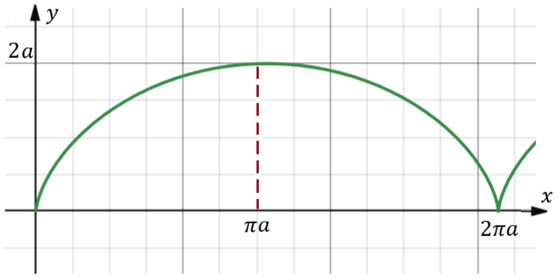
$$\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$$

Графіки деяких функцій заданих параметрично



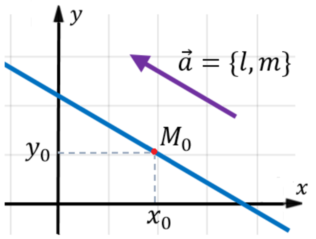
Коло

$$\begin{cases} x = a\cos t\,, \\ y = a\sin t\,, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$



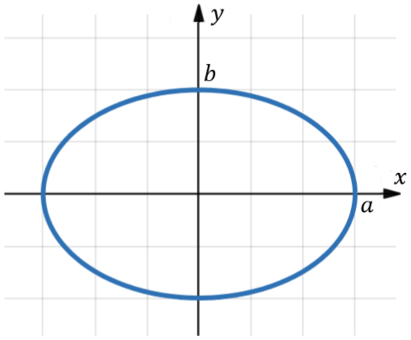
Циклоїда

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$



Пряма

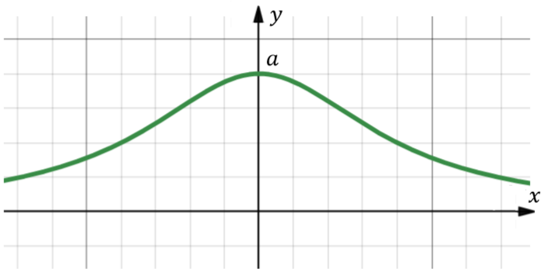
$$\begin{cases} x = lt + x_0, \\ y = mt + y_0, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$



Еліпс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

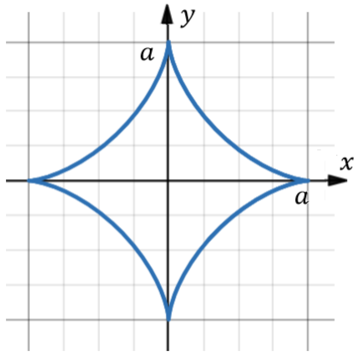
$$\begin{cases} x = a\cos t\,, \\ y = b\sin t\,, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$



Локон Аньєзі

$$y(x^2 + a^2) = a^3$$

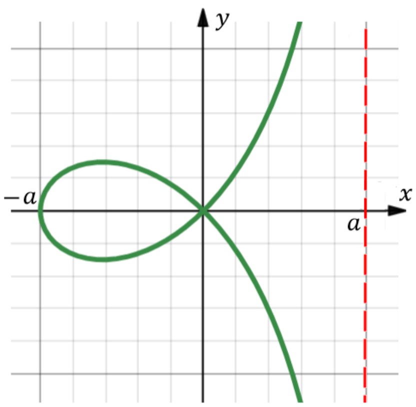
$$\begin{cases} x = at, \\ y = \dfrac{a}{t^2 + 1}, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$



Астроїда

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

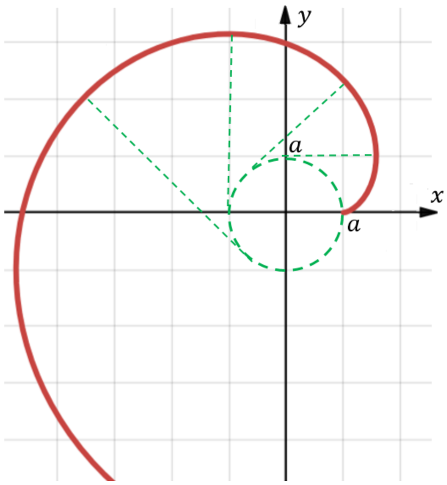
$$\begin{cases} x = a\cos^3 t\,, \\ y = a\sin^3 t\,, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$



Строфоїда

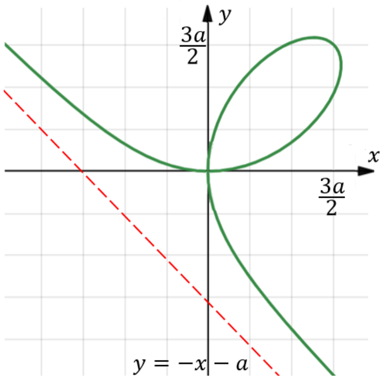
$$y^2(a - x) = x^2(a + x)$$

$$\begin{cases} x = a\dfrac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \\ y = at\dfrac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$



Інволюта кола

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t), \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$



Лист Декарта

$$y^3 + x^3 = 3axy$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{t^3 + 1}, \\ y = \dfrac{3at^2}{t^3 + 1}, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Список використаної літератури

1. Дубовик В.П. Вища математика. Збірник задач: навч. посібн./ Дубовик В.П., Юрик І.І. – К.: А.С.К., 2005. – 648 с.
2. G.N. Berman A Problem Book in Mathematical Analysis/ G.N. Berman -Arihant Publications India Limited, – 2018 – 472 p. ISBN-13 : 978-9351762546
3. B. Demidovich Problems in Mathematical Analysis/ B. Demidovich – Mir Publisher – 1976 – 496 p.
4. Теорія границь. Диференціальне числення функції однієї змінної. Невизначений інтеграл. Збірник задач [Електронний ресурс] : навч. пос. для студентів першого курсу спеціальності «Прикладна механіка» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: Журавська Г. В., Карпалюк Т. О., Копась І. М., Кулик Г. М., Рева Н. В., Степаненко Н. В. – Електронні текстові дані (1 файл: 3.99 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. – 97 с.
5. Копась, І. М. Лінійна алгебра і аналітична геометрія. Збірник задач [Електронний ресурс] : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю 131 Прикладна механіка / І. М. Копась, Г. М. Кулик, Т. А. Самойленко, Н. В. Степаненко ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,6 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. – 130 с.
6. Математика в технічному університеті. Том 1 / І.В. Алексєєва, В.О. Гайдей, О.О. Диховичний, Л.Б. Федорова. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 496 с.
7. Кушлик-Дивульська О.І. Елементи лінійної, векторної алгебри. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу [Електронний ресурс] / О.І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Поліщук. – Київ : НТУУ «КПІ», 2017. – 141 с.
8. Діскант В.І. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії. / Діскант В.І., Береза Л.Р., Грижук О.П., Захаренко Л.М. – Київ. Вища школа, 2001. – 300 с.
9. Лінійна алгебра в задачах та прикладах [Електронний ресурс] / Т.В. Авдєєва, В. М. Шраменко. – Київ : НТУУ «КПІ», 2016. – 205 с.