

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ВИЩА МАТЕМАТИКА

НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Практикум

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
спеціальності 141 Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка

Укладачі: Н. Л. Денисенко, В. В. Могильова

Електронне мережеве навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2025

УДК 517.31 (076)

ДЗЗ

Укладачі: *Денисенко Наталя Леонідівна*, канд. фіз.-мат. наук
Могильова Вікторія Віталіївна, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Рецензент *Дворник А. В.*, канд. фіз.-мат. наук,
наук. співробітник відділу диференціальних рівнянь та теорії
коливань Інституту Математики НАН України

Відповідальний редактор *Дудкін М. Є.*, докт. фіз.-мат. наук, проф.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 7 від 08.05.2025 р.)
за поданням вченої ради Фізико-математичного факультету
(протокол № 6 від 30.04.2025 р.)*

ДЗЗ **Вища математика. Невизначений інтеграл [Електронний ресурс] : практикум : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра спец. 141 Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: Н. Л. Денисенко, В. В. Могильова. – Електрон. текст. дані (1 файл). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025. – 70 с.**

Навчальний посібник призначений для студентів закладів вищої освіти, які вивчають дисципліну «Вища математика», і присвячений одному із найважливіших розділів курсу вищої математики — інтегральному численню функцій однієї змінної. У посібнику стисло висвітлені теоретичні відомості, такі як, основні поняття і означення, властивості, формулювання теорем, а також наведені відомості про відповідні методи знаходження невизначених інтегралів. Ці методи проілюстровані достатньою кількістю розв'язаних прикладів. Також у посібнику наведено завдання для самоконтролю, до яких надано відповіді.

УДК 517.31 (076)

Реєстр. № НП 24/25-501. Обсяг 3,2 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025

ЗМІСТ

Вступ	4
1. Первісна функція та невизначений інтеграл. Таблиця інтегралів ...	5
1.1. Основні поняття	5
1.2. Властивості невизначеного інтегралу	6
1.3. Таблиця інтегралів	7
2. Основні методи інтегрування	8
2.1. Метод безпосереднього інтегрування, введення функції під знак диференціалу	8
2.2. Метод підстановки (заміни змінної)	16
2.3. Метод інтегрування частинами	17
3. Інтегрування виразів, які містять квадратний тричлен	26
4. Інтегрування раціональних функцій	30
4.1. Розкладання раціонального дроби на елементарні дроби	30
4.2. Інтегрування елементарних дробів	34
4.3. Інтегрування раціональних дробів	36
5. Інтегрування деяких тригонометричних виразів	42
6. Інтегрування деяких ірраціональних та трансцендентних виразів ...	55
7. Інтеграл, що не виражається через елементарні функції	68
Список рекомендованої літератури	70

ВСТУП

Навчальний посібник присвячений одному із найважливіших розділів математичного аналізу і загалом курсу вищої математики — інтегральному численню функцій однієї змінної.

Інтегральне числення розв'язує задачу обернену диференціюванню. А саме, задана похідна $f'(x)$ і треба відновити саму функцію $f(x)$. Такі задачі мають широке застосування в прикладних дисциплінах. Наприклад, в механіці потрібно знайти закон руху тіла, якщо відома швидкість руху як функція часу.

У посібнику стисло висвітлені теоретичні відомості, такі як, основні поняття і означення, властивості, формулювання теорем, а також наведені відомості про відповідні методи знаходження невизначених інтегралів. Ці методи проілюстровані достатньою кількістю розв'язаних прикладів.

Також для більш глибокого засвоєння теми і формування умінь та навичок самостійного розв'язування задач з цієї теми у посібнику наведено завдання для самоконтролю, до яких надано відповіді.

Посібник буде корисний при самостійній роботі студентів під час вивчення теми «Невизначений інтеграл» курсу вищої математики, зокрема, при підготовці до практичних занять, контрольної роботи та екзамену з вищої математики. Викладачі можуть використовувати деякі приклади при організації аудиторного навчання, а завдання для самоконтролю можна запропонувати студентам в якості домашнього завдання.

1. ПЕРВІСНА ФУНКЦІЯ ТА НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ.

ТАБЛИЦЯ ІНТЕГРАЛІВ

1.1. Основні поняття

Означення 1. Функція $F(x)$ називається *первісною* функції $f(x)$ на інтервалі $(a; b)$, якщо у всіх точках цього інтервалу виконується рівність

$$F'(x) = f(x).$$

Наприклад, для функції $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, первісною є функція $F(x) = \frac{x^4}{4}$, оскільки $F'(x) = \left(\frac{x^4}{4}\right)' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 = x^3 = f(x)$. Але оскільки $\left(\frac{x^4}{4} + \text{const}\right)' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 + 0 = x^3 = f(x)$, то множина функцій $F_1(x) = \frac{x^4}{4} + C$, де $C = \text{const}$, також є первісними функції $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Теорема 1.1. Якщо функція $F(x)$ є первісною функції $f(x)$ на інтервалі $(a; b)$, то будь-яка інша первісна функції $f(x)$ має вигляд

$$F(x) + C, \text{ де } C = \text{const}, x \in (a; b).$$

Отже, всю сукупність первісних функції $f(x)$ визначає множина функцій $F(x) + C$, де $F(x)$ — одна з первісних функції $f(x)$, а $C = \text{const}$. При цьому, якщо $F_1(x)$ та $F_2(x)$ — первісні для функції $f(x)$ на інтервалі $(a; b)$, то їх різниця є стала величина, тобто $F_2(x) - F_1(x) = C$.

Означення 2. Якщо $F(x)$ — первісна функції $f(x)$, то вираз $F(x) + C$, де $C = \text{const}$, називається *невизначеним інтегралом* функції $f(x)$ і позначається символом $\int f(x) dx$.

Отже, із означення 2 маємо

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \text{ де } C = \text{const}, \quad (1.1)$$

якщо $F'(x) = f(x)$, $x \in (a; b)$.

При цьому, знак \int називається *знаком інтеграла*; $f(x)$ — *підінтегральною функцією*; $f(x) dx$ — *підінтегральним виразом*; x — *змінною інтегрування*.

Операція знаходження невизначеного інтегралу від функції $f(x)$ називається інтегруванням цієї функції. Якщо існує невизначений інтеграл (1.1), то функцію $f(x)$ називають **інтегровною** на $(a; b)$. З геометричної точки зору $F(x) + C$ це сім'я (множина) кривих на площині, кожна з яких називається інтегральною кривою.

Теорема 1.2. *Якщо функція $f(x)$ неперервна на інтервалі $(a; b)$, то для неї існує первісна $F(x)$, а тому існує невизначений інтеграл від функції $f(x)$.*

1.2. Властивості невизначеного інтегралу

З означення невизначеного інтеграла слідують такі його властивості:

1°) $(\int f(x) dx)' = f(x)$, тобто похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції.

2°) $d(\int f(x) dx) = f(x) dx$, тобто диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу.

3°) $\int d(F(x)) = F(x) + C$, де $C = const$, тобто невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції і довільної сталої C .

4°) Сталий множник можна винести за знак інтеграла:

$$\int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx, \text{ де } a = const \neq 0.$$

5°) $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$, тобто невизначений інтеграл від алгебраїчної суми двох функцій дорівнює алгебраїчній сумі невизначених інтегралів від цих функцій.

Ця властивість справедлива для скінченного числа доданків.

6°) **(інваріантність формули інтегрування)** *Якщо $\int f(x) dx = F(x) + C$, де $C = const$, і $u = \varphi(x)$ — довільна функція, що має неперервну похідну, то $\int f(u) du = F(u) + C$, де $C = const$.*

Таким чином, формула для невизначеного інтегралу залишається справедливою незалежно від того чи є змінна інтегрування x незалежною

змінною, чи є деякою функцією u від аргументу x , що має неперервну похідну.

Наприклад, відомо, що $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$, тоді $\int \text{tg}^3 x d(\text{tg} x) = \frac{(\text{tg} x)^4}{4} + C$;

$$\int (7 - 4x^5)^3 d(7 - 4x^5) = \{ \text{тут } u = 7 - 4x^5 \} = \frac{(7 - 4x^5)^4}{4} + C;$$

$$\int (5 \sin 4x)^3 d(5 \sin 4x) = \{ \text{тут } u = 5 \sin 4x \} = \frac{(5 \sin 4x)^4}{4} + C;$$

$$\int (6 \ln x - 5)^3 d(6 \ln x - 5) = \{ \text{тут } u = 6 \ln x - 5 \} = \frac{(6 \ln x - 5)^4}{4} + C.$$

1.3. Таблиця інтегралів

1. $\int dx = x + C$	15. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C; \\ -\frac{1}{a} \text{arcc} \frac{x}{a} + C; \end{cases}$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1;$	16. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + C;$
3. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C;$	17. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C;$
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	18. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin \frac{x}{a} + C; \\ -\arccos \frac{x}{a} + C; \end{cases}$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$	19. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$
6. $\int e^x dx = e^x + C;$	20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm A}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm A} \right + C, A \in \mathbb{R};$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$	21. $\int \text{tg} x dx = -\ln \cos x + C;$
8. $\int \cos x dx = \sin x + C;$	22. $\int \text{ctg} x dx = \ln \sin x + C;$
9. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \text{tg} x + C;$	23. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left \text{tg} \frac{x}{2} \right + C;$
10. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\text{ctg} x + C;$	24. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left \text{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C;$
11. $\int \text{sh} x dx = \text{ch} x + C;$	25. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right) + C;$
12. $\int \text{ch} x dx = \text{sh} x + C;$	26. $\int \sqrt{x^2 + A} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2 + A} + A \ln \left x + \sqrt{x^2 + A} \right \right) + C; A \in \mathbb{R}.$
13. $\int \frac{1}{\text{ch}^2 x} dx = \text{th} x + C;$	
14. $\int \frac{1}{\text{sh}^2 x} dx = -\text{cth} x + C;$	

Всі ці формули легко перевірити за допомогою диференціювання.

2. ОСНОВНІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

Мистецтво інтегрування полягає в умінні так перетворити підінтегральну функцію, щоб одержати суму (або різницю) декількох простих доданків, інтеграл від кожного з яких або табличний, або легко зводиться до табличного. Є два шляхи такого перетворення:

- 1) за допомогою формул елементарної математики;
- 2) за допомогою спеціальних методів інтегрування.

2.1. Метод безпосереднього інтегрування, введення функції під знак диференціалу

Обчислення інтегралів за допомогою таблиці інтегралів і їх основних властивостей та шляхом тотожного перетворення підінтегральної функції називається *безпосереднім інтегруванням*. Для цього необхідно перетворити підінтегральну функцію в суму декількох простих доданків, інтеграл від кожного з яких є табличним або зводиться до табличного за допомогою формул елементарної математики.

Приклад 2.1. Знайти інтеграли.

$$\text{а)} \quad \int (x^2 + 3) dx = \int x^2 dx + 3 \int dx = \frac{x^3}{3} + 3x + C.$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - 2\sqrt[5]{x^3} \right) dx &= \int \frac{dx}{x} + \int x^{-2} dx - 2 \int x^{\frac{3}{5}} dx = \ln|x| + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} - \\ &- 2 \cdot \frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} + C = \ln|x| - x^{-1} - \frac{5x^{\frac{8}{5}}}{4} + C = \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{5\sqrt[5]{x^8}}{4} + C. \end{aligned}$$

$$\text{в)} \quad \int \left(\frac{2}{\sin^2 x} + 5 \cos x \right) dx = 2 \int \frac{1}{\sin^2 x} dx + 5 \int \cos x dx = -2 \operatorname{ctg} x + 5 \sin x + C.$$

$$\begin{aligned} \text{г)} \quad \int \left(\frac{1}{x^2} + 3x^2 \right)^2 dx &= \int \left(\frac{1}{x^4} + 2 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 3x^2 + 9x^4 \right) dx = \int x^{-4} dx + 6 \int dx + \\ &+ 9 \int x^4 dx = \frac{x^{-3}}{-3} + 6 \cdot x + 9 \cdot \frac{x^5}{5} = -\frac{1}{3x^3} + 6x + \frac{9x^5}{5} + C. \end{aligned}$$

$$\text{д)} \quad \int \frac{x^2}{x^2+7} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{у чисельнику і знаменнику стоять многочлени другого} \\ \text{степеня, які відрізняються тільки сталим доданком} \end{array} \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{(x^2+7)-7}{x^2+7} dx = \int \frac{(x^2+7)}{x^2+7} dx - \int \frac{7}{x^2+7} dx = \int dx - 7 \int \frac{dx}{x^2+(\sqrt{7})^2} = \\
&= x - 7 \cdot \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{7}} + C = x - \sqrt{7} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{7}} + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{е) } \int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} &= \int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{за основною тригонометричною} \\ \text{тотожністю: } \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{array} \right\} = \\
&= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} + \int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \\
&= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.
\end{aligned}$$

Приклад 2.2. Знайти інтеграли.

$$\begin{aligned}
\text{а) } \int \cos 5x d(\cos 5x) &= \left\{ \begin{array}{l} \text{покладемо } u = \cos 5x, \text{ тоді } \int u du = \frac{u^2}{2} + C; \\ \text{далі використаємо властивість 6} \end{array} \right\} = \\
&= \frac{(\cos 5x)^2}{2} + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{б) } \int \cos x^{100} d(x^{100}) &= \left\{ \begin{array}{l} \text{нехай } u = x^{100}, \text{ тоді } \int \cos u du = \sin u + C \\ \Rightarrow \text{за властивістю 6 отримаємо} \end{array} \right\} = \\
&= \sin x^{100} + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{в) } \int 3^{-\operatorname{tg} x} d(-\operatorname{tg} x) &= \left\{ \begin{array}{l} \text{покладемо } u = -\operatorname{tg} x, \text{ тоді } \int 3^u du = \frac{3^u}{\ln 3} + C; \\ \Rightarrow \text{за властивістю 6 отримаємо} \end{array} \right\} = \\
&= \frac{3^{-\operatorname{tg} x}}{\ln 3} + C = \frac{1}{3^{\operatorname{tg} x} \cdot \ln 3} + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{г) } \int \frac{d(1-7x)}{1-7x} &= \left\{ \begin{array}{l} \text{покладемо } u = 1-7x, \text{ тоді } \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C; \end{array} \right\} = \\
&= \ln|1-7x| + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{д) } \int (2x+5)^3 d(2x+5) &= \left\{ \begin{array}{l} \text{нехай } u = 2x+5, \text{ тоді } \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C; \end{array} \right\} = \\
&= \frac{(2x+5)^4}{4} + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{е) } \int \frac{d(x^3)}{25+4x^6} &= \int \frac{d(x^3)}{4\left(\frac{25}{4}+x^6\right)} = \frac{1}{4} \int \frac{d(x^3)}{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + (x^3)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5/2} \operatorname{arctg} \frac{x^3}{5/2} + C = \\
&= \frac{1}{10} \operatorname{arctg} \frac{2x^3}{5} + C.
\end{aligned}$$

При зведенні інтегралу до табличного часто використовують перетворення диференціала і виконують операцію «*введення функції під знак диференціала*».

Нагадаємо, що диференціал функції $y = u(x)$ обчислюється за формулою

$$d(u(x)) = u'(x) dx.$$

При цьому, справедливі такі властивості диференціалів, які будуть використовуватись при обчисленні невизначених інтегралів:

$$1) d(u(x)) = d(u(x) \pm a), \text{ де } a = \text{const};$$

$$2) d(b \cdot u(x)) = b \cdot d(u(x)), \text{ де } b = \text{const} \neq 0;$$

$$\Rightarrow d(u(x)) = \frac{1}{b} \cdot d(b \cdot u(x));$$

$$d(u(x)) = \frac{1}{b} \cdot d(b \cdot u(x) \pm \text{const}), \text{ де } b = \text{const} \neq 0.$$

Якщо $F(x)$ — первісна функції $f(x)$, то $F'(x) = f(x)$. Тоді $F'(x)dx = d(F(x))$, тобто $f(x) dx = d(F(x))$. Отже,

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow f(x)dx = d(F(x)). \quad (2.1)$$

Наприклад:

$$1) \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C; \text{ тут } F(x) = \ln|x| \text{ первісна функції } f(x) = \frac{1}{x}, \text{ тоді } \frac{dx}{x} = d(\ln|x|).$$

$$2) \int x dx = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow x dx = d\left(\frac{x^2}{2}\right) = d\left(\frac{1}{2} \cdot x^2\right) = \frac{1}{2}d(x^2).$$

$$3) \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = d(2\sqrt{x}) = 2d(\sqrt{x}).$$

$$4) \int \cos x dx = \sin x + C \Rightarrow \cos x dx = d(\sin x).$$

$$5) \int \sin x dx = -\cos x + C \Rightarrow \sin x dx = d(-\cos x) = -d(\cos x).$$

Приклад 2.3. Знайти інтеграл $\int (2x + 5)^3 dx$.

$$\begin{aligned} \int (2x + 5)^3 dx &= \int (8x^3 + 3 \cdot 4x^2 \cdot 5 + 3 \cdot 2x \cdot 25 + 125) dx = \\ &= 8 \int x^3 dx + 60 \int x^2 dx + 150 \int x dx + 125 \int dx = \\ &= 8 \cdot \frac{x^4}{4} + 60 \cdot \frac{x^3}{3} + 150 \cdot \frac{x^2}{2} + 125x + C = \end{aligned}$$

$$= 2x^4 + 20x^3 + 75x^2 + 125x + C.$$

2-й спосіб: шляхом введення функції під знак диференціалу

$$\begin{aligned} \int (2x + 5)^3 dx &= \frac{1}{2} \cdot \int (2x + 5)^3 d(2 \cdot x) = \frac{1}{2} \cdot \int (2x + 5)^3 d(2x + 5) = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Візьмемо } u = 2x + 5, \\ \Rightarrow \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x + 5)^4}{4} + C = \frac{(2x + 5)^4}{8} + C. \end{aligned}$$

Приклад 2.4. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{1-7x}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1-7x} &= \frac{1}{-7} \cdot \int \frac{d(-7 \cdot x)}{1-7x} = -\frac{1}{7} \int \frac{d(1-7x)}{1-7x} = \\ &= \left\{ \text{якщо } u = 1 - 7x, \text{ то } \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C \right\} = -\frac{1}{7} \ln|1 - 7x| + C. \end{aligned}$$

Приклад 2.5. Знайти інтеграл $I = \int \operatorname{tg} x dx$.

$$\begin{aligned} I = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx &= \{ \sin x dx = d(-\cos x) = -d(\cos x) \} = - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \\ &= \left\{ \text{якщо } u = \cos x, \text{ то } \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C \right\} = -\ln|\cos x| + C. \end{aligned}$$

Приклад 2.6. Знайти інтеграл $\int \frac{x^3}{\sqrt[7]{2-9x^4}} dx$.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 dx}{\sqrt[7]{2-9x^4}} &= \left\{ x^3 dx = d\left(\frac{x^4}{4}\right) = \frac{1}{4} d(x^4) = \frac{1}{-9} \cdot \frac{1}{4} d(-9 \cdot x^4) = -\frac{1}{36} d(2-9x^4) \right\} = \\ &= -\frac{1}{36} \int \frac{d(2-9x^4)}{\sqrt[7]{2-9x^4}} = \{ \text{позначимо } u = 2 - 9x^4 \} = -\frac{1}{36} \int \frac{du}{\sqrt[7]{u}} = \\ &= -\frac{1}{36} \int u^{-\frac{1}{7}} du = -\frac{1}{36} \cdot \frac{u^{-\frac{1}{7}+1}}{-\frac{1}{7}+1} + C = -\frac{1}{36} \cdot \frac{u^{\frac{6}{7}}}{\frac{6}{7}} + C = \\ &= C - \frac{7}{216} \sqrt[7]{(2-9x^4)^6}. \end{aligned}$$

Приклад 2.7. Знайти інтеграл $I = \int \frac{x^3}{5x^4-2} dx$.

$$I = \int \frac{x^3 dx}{5x^4 - 2} = \left\{ x^3 dx = d\left(\frac{x^4}{4}\right) = \frac{1}{4} d(x^4) \right\} = \int \frac{\frac{1}{4} d(x^4)}{5x^4 - 2} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \int \frac{d(5x^4 - 2)}{5x^4 - 2} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{якщо } u = 5x^4 - 2, \\ \text{то } \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C \end{array} \right\} = \frac{1}{20} \ln|5x^4 - 2| + C.$$

Приклад 2.8. Знайти інтеграл $I = \int \frac{x^3}{5x^8 - 2} dx$.

$$I = \int \frac{x^3 dx}{5x^8 - 2} = \left\{ x^3 dx = \frac{1}{4} d(x^4) \right\} = \frac{1}{4} \int \frac{d(x^4)}{5(x^4)^2 - 2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{4} \int \frac{d(\sqrt{5} \cdot x^4)}{(\sqrt{5}x^4)^2 - (\sqrt{2})^2} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{використаємо формулу} \\ \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u - a}{u + a} \right| + C, \text{ де } u = \sqrt{5}x^4, a = \sqrt{2} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{5}x^4 - \sqrt{2}}{\sqrt{5}x^4 + \sqrt{2}} \right| + C = \frac{\sqrt{10}}{80} \ln \left| \frac{\sqrt{5}x^4 - \sqrt{2}}{\sqrt{5}x^4 + \sqrt{2}} \right| + C.$$

Приклад 2.9. Знайти інтеграл $I = \int \frac{e^{4-3 \operatorname{arctg} \frac{x}{5}}}{25+x^2} dx$.

$$I = \int e^{4-3 \operatorname{arctg} \frac{x}{5}} \cdot \frac{dx}{25+x^2} = \left\{ \frac{dx}{25+x^2} = d\left(-\frac{1}{5} \operatorname{arctg} \frac{x}{5}\right) = -\frac{1}{5} d\left(\operatorname{arctg} \frac{x}{5}\right) \right\} =$$

$$= -\frac{1}{5} \int e^{4-3 \operatorname{arctg} \frac{x}{5}} \cdot d\left(\operatorname{arctg} \frac{x}{5}\right) =$$

$$= -\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{-3} \int e^{4-3 \operatorname{arctg} \frac{x}{5}} \cdot d\left(4 - 3 \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{5}\right) = \frac{1}{15} e^{4-3 \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{5}\right)} + C.$$

Приклад 2.10. Знайти інтеграл $I = \int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 2}}$.

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 2}} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \left\{ \frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x) \right\} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 2}} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{з формули } \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + A}} = \ln|u + \sqrt{u^2 + A}| + C, \text{ де } u = \operatorname{tg} x, A = 2 \end{array} \right\} =$$

$$= \ln|\operatorname{tg} x + \sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 2}| + C.$$

Приклад 2.11. Знайти інтеграли $I_1 = \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$ та $I_2 = \int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$.

Маємо

$$I_1 = \int \frac{\cos 2x dx}{(\frac{1}{2} \sin 2x)^2} = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{\cos 2x d(2 \cdot x)}{\frac{1}{4} \sin^2 2x} = 2 \int \frac{d(\sin 2x)}{\sin^2 2x} = 2 \int (\sin 2x)^{-2} d(\sin 2x) =$$

$$= \left\{ u = \sin 2x \Rightarrow \int u^{-2} du = \frac{u^{-1}}{-1} + C \right\} = 2 \cdot \frac{(\sin 2x)^{-1}}{-1} + C = -\frac{2}{\sin 2x} + C;$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{\sin 2x d(2 \cdot x)}{\frac{1}{4} \sin^2 2x} = 2 \int \frac{d(-\cos 2x)}{\sin^2 2x} = -2 \int \frac{d(\cos 2x)}{1 - \cos^2 2x} = 2 \int \frac{d(\cos 2x)}{(\cos 2x)^2 - 1^2} =$$

$$= \{ \text{використовуємо формулу 17 з таблиці інтегралів} \} =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot 1} \ln \left| \frac{\cos 2x - 1}{\cos 2x + 1} \right| + C = \ln \left| \frac{\cos 2x - 1}{\cos 2x + 1} \right| + C.$$

Приклад 2.12. Знайти інтеграл $I = \int \frac{9^{3 \arcsin \frac{x}{2} + 7}}{\sqrt{4-x^2}} dx$.

$$I = \int 9^{(3 \arcsin \frac{x}{2} + 7)} \cdot \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \left\{ \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = d\left(\arcsin \frac{x}{2}\right) \right\} =$$

$$= \int 9^{3 \arcsin \frac{x}{2} + 7} \cdot d\left(\arcsin \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{3} \int 9^{(3 \arcsin \frac{x}{2} + 7)} d\left(3 \cdot \arcsin \frac{x}{2} + 7\right) =$$

$$= \left\{ \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C, \text{ де } a = 9, u = 3 \arcsin \frac{x}{2} + 7 \right\} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{9^{3 \arcsin \frac{x}{2} + 7}}{\ln 9} + C = \frac{9^{3 \arcsin \frac{x}{2} + 7}}{3 \ln 9} + C.$$

Приклад 2.13. Знайти інтеграли $I_1 = \int \frac{4^{-x} dx}{\sqrt{9-4^{-x}}}$; $I_2 = \int \frac{4^{-x} dx}{\sqrt{9-16^{-x}}}$.

$$I_1 = \int \frac{4^{-x} dx}{\sqrt{9-4^{-x}}} = - \int \frac{4^{-x} d(-1 \cdot x)}{\sqrt{9-4^{-x}}} = \left\{ 4^{-x} d(-x) = d\left(\frac{4^{-x}}{\ln 4}\right) = \frac{1}{\ln 4} \cdot d(4^{-x}) \right\} =$$

$$= - \int \frac{\frac{1}{\ln 4} \cdot d(4^{-x})}{\sqrt{9-4^{-x}}} = -\frac{1}{\ln 4} \cdot (-1) \cdot \int \frac{d(9-1 \cdot 4^{-x})}{\sqrt{9-4^{-x}}} =$$

$$= \left\{ \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C \right\} = \frac{1}{\ln 4} \cdot 2\sqrt{9-4^{-x}} + C = \frac{2\sqrt{9-4^{-x}}}{\ln 4} + C;$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int \frac{4^{-x} dx}{\sqrt{9 - (4^{-x})^2}} = - \int \frac{4^{-x} d(-1 \cdot x)}{\sqrt{9 - 4^{-2x}}} = - \int \frac{\frac{1}{\ln 4} \cdot d(4^{-x})}{\sqrt{9 - 4^{-2x}}} = \\
&= - \frac{1}{\ln 4} \int \frac{d(4^{-x})}{\sqrt{3^2 - (4^{-x})^2}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{використовуємо формулу 18} \\ \text{таблиці інтегралів} \end{array} \right\} = \\
&= - \frac{1}{\ln 4} \cdot \arcsin\left(\frac{4^{-x}}{3}\right) + C = - \frac{1}{\ln 4} \cdot \arcsin\left(\frac{1}{3 \cdot 4^x}\right) + C.
\end{aligned}$$

Приклад 2.14. Знайти інтеграл $I = \int \frac{5x + xe^{7x} + \sin(3 \ln x)}{x} dx$.

$$\begin{aligned}
I &= \int \left(\frac{5x}{x} + \frac{xe^{7x}}{x} + \frac{\sin(3 \ln x)}{x} \right) dx = 5 \int dx + \int e^{7x} dx + \int \sin(3 \ln x) \cdot \frac{dx}{x} = \\
&= 5x + \frac{1}{7} \int e^{7x} d(7 \cdot x) + \int \sin(3 \ln x) \cdot d(\ln x) = 5x + \frac{1}{7} e^{7x} + \\
&+ \frac{1}{3} \cdot \int \sin(3 \ln x) \cdot d(3 \cdot \ln x) = 5x + \frac{e^{7x}}{7} - \frac{1}{3} \cos(3 \ln x) + C.
\end{aligned}$$

Приклад 2.15. Знайти інтеграл $I = \int \frac{x + e^{100 - 7 \arccos \frac{2x}{3}}}{\sqrt{9 - 4x^2}} dx$.

$$\begin{aligned}
I &= \int \left(\frac{x}{\sqrt{9 - 4x^2}} + \frac{e^{100 - 7 \arccos \frac{2x}{3}}}{\sqrt{9 - 4x^2}} \right) dx = \int \frac{x dx}{\sqrt{9 - 4x^2}} + \int \frac{e^{100 - 7 \arccos \frac{2x}{3}}}{\sqrt{9 - 4x^2}} dx = \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Обчислимо окремо ці інтеграли:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{x dx}{\sqrt{9 - 4x^2}} = \int \frac{\frac{1}{2} d(x^2)}{\sqrt{9 - 4x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{\sqrt{9 - 4x^2}} = \frac{1}{-4} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{d(9 - 4 \cdot x^2)}{\sqrt{9 - 4x^2}} \\
&= -\frac{1}{8} \cdot 2\sqrt{9 - 4x^2} + C = -\frac{1}{4} \sqrt{9 - 4x^2} + C;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int \frac{e^{100 - 7 \arccos \frac{2x}{3}}}{\sqrt{9 - (2x)^2}} dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{e^{100 - 7 \arccos \frac{2x}{3}} \cdot d(2 \cdot x)}{\sqrt{3^2 - (2x)^2}} = \\
&= \left\{ \frac{d(2x)}{\sqrt{3^2 - (2x)^2}} = d\left(-\arccos \frac{2x}{3}\right) \right\} = \frac{1}{2} \int e^{100 - 7 \arccos \frac{2x}{3}} \cdot d\left(-\arccos \frac{2x}{3}\right) = \\
&= \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2} \int e^{100 - 7 \arccos \frac{2x}{3}} \cdot d\left(100 - 7 \cdot \arccos \frac{2x}{3}\right) =
\end{aligned}$$

$$= \left\{ \int e^u du = e^u + C, \text{ де } u = 100 - 7 \arccos \frac{2x}{3} \right\} = \frac{1}{14} e^{100-7 \arccos \frac{2x}{3}} + C.$$

Остаточню маємо $I = I_2 + I_1 = \frac{1}{14} e^{100-7 \arccos \frac{2x}{3}} - \frac{1}{4} \sqrt{9-4x^2} + C.$

Приклад 2.16. Знайти інтеграл $I = \int \frac{x \cos(3x^2+1)}{\sqrt[3]{(2-\sin(3x^2+1))^2}} dx.$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\cos(3x^2+1) \cdot \boxed{xdx}}{\sqrt[3]{(2-\sin(3x^2+1))^2}} = \left\{ \boxed{xdx} = \frac{1}{2} d(x^2) \right\} = \int \frac{\cos(3x^2+1) \cdot \frac{1}{2} d(x^2)}{\sqrt[3]{(2-\sin(3x^2+1))^2}} = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{\cos(3x^2+1) d(3 \cdot x^2)}{\sqrt[3]{(2-\sin(3x^2+1))^2}} = \frac{1}{6} \int \frac{\boxed{\cos(3x^2+1) d(3x^2+1)}}{\sqrt[3]{(2-\sin(3x^2+1))^2}} = \\ &= \{ \cos(3x^2+1) d(3x^2+1) = \sin(3x^2+1) \} = \\ &= \frac{1}{6} \int \frac{d(\sin(3x^2+1))}{\sqrt[3]{(2-\sin(3x^2+1))^2}} = \\ &= \frac{1}{6} \int (2-\sin(3x^2+1))^{-\frac{2}{3}} d(\sin(3x^2+1)) = \\ &= -1 \cdot \frac{1}{6} \int (2-\sin(3x^2+1))^{-\frac{2}{3}} d(2-1 \cdot \sin(3x^2+1)) = \\ &= -\frac{1}{6} \cdot \frac{(2-\sin(3x^2+1))^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + C = -\frac{\sqrt[3]{2-\sin(3x^2+1)}}{2} + C. \end{aligned}$$

Приклад 2.17. Знайти інтеграл $I = \int \frac{(6x-5)}{\sqrt{3x^2-5x+6}} dx.$

Помічаємо, що $d(3x^2-5x+6) = (3x^2-5x+6)' dx = (6x-5) dx.$ Тоді позначаємо

$3x^2-5x+6 = u$ і одержимо

$$I = \int \frac{d(3x^2-5x+6)}{\sqrt{3x^2-5x+6}} = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C = 2\sqrt{3x^2-5x+6} + C.$$

2.2. Метод підстановки (заміни змінної)

Основна ідея цього методу полягає у введенні нової змінної інтегрування.

Теорема (про заміну змінної у невизначеному інтегралі).

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на інтервалі $(a; b)$, а $x = \varphi(t)$ неперервно-диференційовна функція при $t \in (\alpha; \beta)$, причому $a < \varphi(t) < b$, та $\varphi(t)$ має обернену функцію на інтервалі $(\alpha; \beta)$.

Тоді виконується рівність

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt. \quad (2.2)$$

Формула (2.2) називається **формулою заміни змінних** у невизначеному інтегралі, а заміна $x = \varphi(t)$ називається **підстановкою**. Після обчислення невизначеного інтегралу необхідно перейти від нової змінної t назад до змінної x .

Зауваження. Іноді буває зручніше підібрати підстановку у вигляді $t = \psi(x)$, щоб даний інтеграл став простішим або табличним. Тоді має місце формула

$$\int f(\psi(x)) \cdot \psi'(x) dx = \int f(t) dt.$$

Приклад 2.18. Знайти інтеграл $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{3x+2}}$.

Зробимо підстановку $3x+2 = t^2$; $x = \frac{t^2-2}{3}$. Тоді $dx = d\left(\frac{t^2-2}{3}\right) \Rightarrow dx = \frac{2t}{3} dt$.

$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{3x+2}} = \int \frac{\frac{2t}{3} dt}{\frac{t^2-2}{3} \cdot t} = 2 \int \frac{dt}{t^2-2} = 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}} \ln \left| \frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}} \right| + C = \ln \left| \frac{\sqrt{3x+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{3x+2}+\sqrt{2}} \right| + C.$$

Приклад 2.19. Знайти інтеграл $I = \int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin x \cdot \cos x} dx$.

Зробимо заміну змінних $\ln \operatorname{tg} x = t$; $dt = (\ln \operatorname{tg} x)' dx = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \frac{dx}{\sin x \cos x}$.

$$\text{Тоді } I = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\ln \operatorname{tg} x)^2}{2} + C.$$

Приклад 2.20. Знайти інтеграл $I = \int \frac{x^7}{(1+x^4)^2} dx$.

Зробимо підстановку $1+x^4 = t$; $d(1+x^4) = dt \Rightarrow 4x^3 dx = dt$. Тоді отримаємо

$$x^7 dx = x^4 \cdot x^3 dx = (t-1) \cdot \frac{1}{4} dt;$$

$$I = \frac{1}{4} \int \frac{t-1}{t^2} dt = \frac{1}{4} \left(\int \frac{1}{t} dt - \int \frac{1}{t^2} dt \right) = \frac{1}{4} \left(\ln |t| + \frac{1}{t} \right) + C = \frac{1}{4} \left(\ln |1+x^4| + \frac{1}{1+x^4} \right) + C.$$

2.3. Метод інтегрування частинами

Теорема. Якщо функції $u = u(x)$, $v = v(x)$ неперервно-диференційовні на інтервалі $(a; b)$ (тобто неперервні функції, які мають неперервні похідні), то має місце формула

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du. \quad (2.3)$$

Формула (2.3) — це *формула інтегрування частинами*.

Отже, $\int f(x) dx = \int u dv$, тоді $f(x) dx = u \cdot dv$. При інтегруванні інтегралу множники u та dv обираємо так, щоб інтеграл у правій частині формули (2.3) був простішим, ніж заданий інтеграл. При обчисленні v довільна стала C не входить до кінцевого результату, а тому її покладають рівною нулю. Іноді формулу (2.3) потрібно застосовувати кілька разів.

Більшу частину інтегралів, які обчислюються інтегруванням частинами, можна розділити на три групи.

Деякі типи інтегралів, які зручно обчислювати методом інтегрування частинами

I. До першої групи належать інтеграли виду $\int P_n(x) e^{kx} dx$, $\int P_n(x) a^{kx} dx$, $\int P_n(x) \sin kx dx$, $\int P_n(x) \cos kx dx$, які схематично запишемо так:

$$\int \underbrace{P_n(x)}_{=u} \cdot \underbrace{\begin{cases} e^{kx}; \\ a^{kx}; \\ \sin kx; \\ \cos kx \end{cases}}_{=dv} dx, \text{ де } P_n(x) \text{ — многочлен степеня } n, k = \text{const}.$$

В цьому випадку беремо: $u = P_n(x) \Rightarrow du = (P_n(x))' \cdot dx;$

$$dv = \begin{cases} e^{kx}; \\ a^{kx}; \\ \sin kx; \\ \cos kx \end{cases} dx \Rightarrow v = \int \{\dots\} dx.$$

Тут $P_n(x)$ — многочлен степеня n , тому формулу (2.3) застосовуємо n разів.

II. До другої групи входять інтеграли виду $\int Q(x) \ln x dx$, $\int Q(x) \arcsin x dx$, $\int Q(x) \arccos x dx$, $\int Q(x) \operatorname{arctg} x dx$, $\int Q(x) \operatorname{arcctg} x dx$, які схематично позначимо так:

$$\int \underbrace{\begin{cases} \ln x \\ \arcsin x \\ \arccos x \\ \operatorname{arctg} x \\ \operatorname{arcctg} x \end{cases}}_{=u} \cdot \underbrace{Q(x) dx}_{=dv}, \text{ де } Q(x) \text{ — дробово-раціональна функція.}$$

В даному випадку беремо: $u = \begin{cases} \ln x \\ \arcsin x \\ \arccos x \\ \operatorname{arctg} x \\ \operatorname{arcctg} x \end{cases} \Rightarrow du = \{\dots\}' \cdot dx;$

$$dv = Q(x) dx \Rightarrow v = \int Q(x) dx.$$

III. До третьої групи входять інтеграли виду

$$\int a^{kx} \cdot \sin bx dx, \int a^{kx} \cdot \cos bx dx, \text{ де } k, b = \text{const}.$$

У цих інтегралах можна приймати $u = a^{kx}$ або ж $u = \sin bx$ (чи $\cos bx$). Тут після двократного застосування формули (2.3) приходять до початкового інтегралу. Отримаємо лінійне рівняння відносно шуканого інтегралу. Розв'язуємо це рівняння і знаходимо інтеграл.

Аналогічно розв'язують такі інтеграли: $\int \sin(\ln x) dx$, $\int \cos(\ln x) dx$.

Приклад 2.21. Знайти інтеграл $I = \int (2x + 1)e^{-3x} dx$.

$$I = \left[\begin{array}{l} \int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du; \\ u = 2x + 1 \Rightarrow du = (2x + 1)' dx = 2 dx; \\ dv = e^{-3x} dx \Rightarrow v = \int e^{-3x} dx = \frac{1}{-3} \int e^{-3x} d(-3x) = -\frac{1}{3} e^{-3x} \end{array} \right] =$$

$$= (2x + 1) \cdot \left(-\frac{1}{3} e^{-3x}\right) - \int \frac{-1}{3} e^{-3x} \cdot 2 dx = -\frac{1}{3} (2x + 1) \cdot e^{-3x} + \frac{2}{3} \int e^{-3x} dx =$$

$$= -\frac{1}{3} (2x + 1) \cdot e^{-3x} + \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3} e^{-3x}\right) + C = -\frac{1}{3} (2x + 1) \cdot e^{-3x} - \frac{2}{9} e^{-3x} + C =$$

$$= C - e^{3x} \left(\frac{2x}{3} + \frac{5}{9}\right).$$

Приклад 2.22. Знайти інтеграл $I = \int (1 - 5x - x^2) \cos 2x dx$.

$$I = \left[\begin{array}{l} \int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du; \\ u = 1 - 5x - x^2 \Rightarrow du = (1 - 5x - x^2)' dx = (-5 - 2x) dx; \\ dv = \cos 2x dx \Rightarrow v = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int \cos 2x d(2x) = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right] =$$

$$= (1 - 5x - x^2) \cdot \frac{1}{2} \sin 2x - \int \frac{1}{2} \sin 2x \cdot (-5 - 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{2} (1 - 5x - x^2) \sin 2x + \frac{1}{2} \int (5 + 2x) \sin 2x dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{ще раз інтегруємо частинами:} \\ u = 5 + 2x \Rightarrow du = (5 + 2x)' dx = 2 dx; \\ dv = \sin 2x dx \Rightarrow v = \int \sin 2x dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x d(2x) = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} (1 - 5x - x^2) \sin 2x + \frac{1}{2} \left((5 + 2x) \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right) - \int \left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right) \cdot 2 dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2} (1 - 5x - x^2) \sin 2x + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} (5 + 2x) \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x d(2x) \right) =$$

$$= \frac{1}{2} (1 - 5x - x^2) \sin 2x + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} (5 + 2x) \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) + C =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - 5x - x^2 \right) \sin 2x - \frac{1}{4} (2x + 5) \cos 2x + C.$$

Приклад 2.23. Знайти інтеграл $I = \int \arccos 5x dx$.

$$\text{Покладаємо } u = \arccos 5x \Rightarrow du = -\frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}} \cdot 5dx;$$

$$dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x.$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді } I &= x \arccos 5x + 5 \int \frac{x}{\sqrt{1-25x^2}} dx = x \arccos 5x + 5 \cdot \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{\sqrt{1-25x^2}} = \\ &= x \arccos 5x + \frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{1}{25}\right) \int (1-25x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-25x^2) = \\ &= x \arccos 5x - \frac{1}{10} \cdot \frac{(1-25x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = x \arccos 5x - \frac{1}{5} \sqrt{1-25x^2} + C. \end{aligned}$$

Приклад 2.24. Знайти інтеграл $I = \int (3x^2 + 3x) \operatorname{arctg} x dx$.

$$\begin{aligned} I &= \left[\begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x \Rightarrow du = (\operatorname{arctg} x)' dx = \frac{1}{1+x^2} dx; \\ dv = (3x^2 + 3x) dx \Rightarrow v = \int (3x^2 + 3x) dx = x^3 + \frac{3x^2}{2} \end{array} \right] = \\ &= \operatorname{arctg} x \cdot \left(x^3 + \frac{3x^2}{2}\right) - \int \left(x^3 + \frac{3x^2}{2}\right) \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \\ &= \left(x^3 + \frac{3x^2}{2}\right) \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x^3 + 3x^2}{x^2 + 1} dx = \frac{-2x^3 + 3x^2}{-3x^2 + 3} \Big|_{\frac{x^2+1}{2x+3}} \\ &= \{ \text{виділяємо цілу частину дробу} \} = \\ &= \left(x^3 + \frac{3x^2}{2}\right) \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \left(2x + 3 + \frac{-2x - 3}{x^2 + 1}\right) dx = \\ &= \left(x^3 + \frac{3x^2}{2}\right) \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \left(x^2 + 3x - 2 \int \frac{x dx}{x^2 + 1} - 3 \int \frac{dx}{x^2 + 1}\right) = \\ &= \left(x^3 + \frac{3x^2}{2}\right) \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \left(x^2 + 3x - 2 \cdot \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} - 3 \operatorname{arctg} x\right) = \\ &= \left(x^3 + \frac{3x^2}{2} + \frac{3}{2}\right) \operatorname{arctg} x - \frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} + \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + C. \end{aligned}$$

Приклад 2.25. Знайти інтеграл $I = \int (6x^2 + 1) \ln^2 3x \, dx$.

$$\begin{aligned}
 I &= \left[\begin{array}{l} \int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du; \\ u = \ln^2 3x \Rightarrow du = (\ln^2 3x)' dx = 2 \ln 3x \cdot \frac{1}{3x} \cdot 3 dx = \frac{2 \ln 3x}{x} dx; \\ dv = (6x^2 + 1) dx \Rightarrow v = \int (6x^2 + 1) dx = 6 \int x^2 dx + \int dx = 2x^3 + x \end{array} \right] = \\
 &= \ln^2 3x \cdot (2x^3 + x) - \int (2x^3 + x) \cdot \frac{2 \ln 3x}{x} dx = \\
 &= (2x^3 + x) \cdot \ln^2 3x - 2 \int (2x^2 + 1) \ln 3x \, dx = \\
 &= \left[\begin{array}{l} \text{ще раз інтегруємо частинами:} \\ u = \ln 3x \Rightarrow du = (\ln 3x)' dx = \frac{1}{3x} \cdot 3 dx = \frac{1}{x} dx; \\ dv = (2x^2 + 1) dx \Rightarrow v = \int (2x^2 + 1) dx = \frac{2x^3}{3} + x; \end{array} \right] = \\
 &= (2x^3 + x) \ln^2 3x - 2 \left[\ln 3x \cdot \left(\frac{2x^3}{3} + x \right) - \int \left(\frac{2x^3}{3} + x \right) \cdot \frac{1}{x} dx \right] = \\
 &= \left[\begin{array}{l} \text{окремо обчислимо інтеграл} \\ \int \left(\frac{2x^3}{3} + x \right) \cdot \frac{1}{x} dx = \int \left(\frac{2x^3}{3x} + \frac{x}{x} \right) dx = \int \left(\frac{2x^2}{3} + 1 \right) dx = \frac{2x^3}{9} + x \end{array} \right] = \\
 &= (2x^3 + x) \ln^2 3x - 2 \left(\frac{2x^3}{3} + x \right) \ln 3x + 2 \left(\frac{2x^3}{9} + x \right) + C.
 \end{aligned}$$

Приклад 2.26. Знайти інтеграл $\int e^{7x} \cdot \sin 3x \, dx$.

$$\begin{aligned}
 &\int e^{7x} \cdot \sin 3x \, dx = \\
 &= \left[\begin{array}{l} u = e^{7x} \Rightarrow du = (e^{7x})' dx = e^{7x} \cdot 7 dx; \\ dv = \sin 3x \, dx \Rightarrow v = \int \sin 3x \, dx = \frac{1}{3} \int \sin 3x \, d(3x) = -\frac{1}{3} \cos 3x \end{array} \right] = \\
 &= e^{7x} \cdot \left(-\frac{1}{3} \cos 3x \right) - \int \left(-\frac{1}{3} \cos 3x \right) \cdot 7e^{7x} \, dx = \\
 &= -\frac{1}{3} e^{7x} \cos 3x + \frac{7}{3} \int e^{7x} \cdot \cos 3x \, dx =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{l} \text{ще раз інтегруємо частинами:} \\ u = e^{7x} \Rightarrow du = e^{7x} \cdot 7 dx; \\ dv = \cos 3x dx \Rightarrow v = \int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \int \cos 3x d(3x) = \frac{1}{3} \sin 3x \end{array} \right] = \\
& = -\frac{1}{3} e^{7x} \cos 3x + \frac{7}{3} \left(e^{7x} \cdot \frac{1}{3} \sin 3x - \int \frac{1}{3} \sin 3x \cdot 7 e^{7x} dx \right) = \\
& = -\frac{1}{3} e^{7x} \cos 3x + \frac{7}{9} e^{7x} \sin 3x - \frac{49}{9} \int e^{7x} \cdot \sin 3x dx.
\end{aligned}$$

Позначимо $\int e^{7x} \cdot \sin 3x dx = I$, тоді отримаємо рівність

$$I = -\frac{1}{3} e^{7x} \cos 3x + \frac{7}{9} e^{7x} \sin 3x - \frac{49}{9} \cdot I \Rightarrow$$

$$I + \frac{49}{9} I = -\frac{1}{3} e^{7x} \cos 3x + \frac{7}{9} e^{7x} \sin 3x \Rightarrow I = \frac{9}{58} \left(\frac{7}{9} e^{7x} \sin 3x - \frac{1}{3} e^{7x} \cos 3x \right);$$

$$\Rightarrow \int e^{7x} \cdot \sin 3x dx = \frac{e^{7x}}{58} (7 \sin 3x - 3 \cos 3x) + C, \text{ де } C = \text{const.}$$

Розглянемо тепер інтеграли, які не належать до трьох вказаних груп.

Приклад 2.27. Знайти інтеграл $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$.

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \left[\begin{array}{l} \int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du; \\ u = \sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot (-2x) dx = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx; \\ dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x \end{array} \right] = \\
&= \sqrt{a^2 - x^2} \cdot x - \int x \cdot \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = x \cdot \sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \\
&= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{(a^2 - x^2) - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \\
&= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx + \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \\
&= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \\
&= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx + a^2 \arcsin \frac{x}{a}.
\end{aligned}$$

Позначимо $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = I$, тоді отримаємо рівність

$$I = x\sqrt{a^2 - x^2} - I + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \Rightarrow 2I = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}; \Rightarrow$$

$$I = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right);$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right) + C.$$

Таким чином, довели формулу 25 з таблиці інтегралів.

Приклад 2.28. Знайти інтеграл $I = \int \cos \ln x dx$.

$$\text{Покладаємо } u = \cos \ln x \Rightarrow du = -\sin \ln x \cdot \frac{1}{x} dx;$$

$$dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x.$$

Тоді за формулою (2.3) маємо

$$I = x \cdot \cos \ln x - \int x \cdot \left(-\sin \ln x \cdot \frac{1}{x} \right) dx = x \cos \ln x + \int \sin \ln x dx,$$

тут візьмемо $u_1 = \sin \ln x$, $du_1 = \cos \ln x \cdot \frac{1}{x} dx$;

$$dv_1 = dx, \quad v_1 = \int dx = x.$$

Тоді за формулою (2.3) маємо $I = x \cos \ln x + x \sin \ln x - \int \cos \ln x dx$.

$$\text{Отже, } I = x \cos \ln x + x \sin \ln x - I.$$

Перенесемо інтеграл I з правої частини рівності в ліву і одержимо:

$$2I = x(\cos \ln x + \sin \ln x) + C_1; \Rightarrow \int \cos \ln x dx = \frac{x}{2}(\cos \ln x + \sin \ln x) + C.$$

Приклад 2.29. Знайти інтеграл $I = \int x \operatorname{tg}^2 x dx$.

$$\text{Покладаємо } u = x, \quad du = dx;$$

$$dv = \operatorname{tg}^2 x dx, \quad v = \int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \operatorname{tg} x - x.$$

Тоді за формулою (2.3) отримаємо

$$I = \int x \operatorname{tg}^2 x dx = x(\operatorname{tg} x - x) - \int (\operatorname{tg} x - x) dx =$$

$$= x(\operatorname{tg} x - x) + \ln |\cos x| + \frac{x^2}{2} + C = x \operatorname{tg} x - \frac{x^2}{2} + \ln |\cos x| + C.$$

Приклад 2.30. Знайти інтеграл $I = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

Покладаємо $u = x^2$, $du = 2x dx$;

$$dv = \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad v = \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+x^2}.$$

Тоді за формулою (2.3) маємо

$$I = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}} = x^2 \sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2} \cdot 2x dx = x^2 \sqrt{1+x^2} - \int (1+x^2)^{\frac{1}{2}} d(1+x^2) =$$

$$= x^2 \sqrt{1+x^2} - \frac{2(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + C = x^2 \sqrt{1+x^2} - \frac{2}{3} (1+x^2) \sqrt{1+x^2} + C =$$

$$= \sqrt{1+x^2} \left(x^2 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} x^2 \right) + C = \frac{1}{3} (x^2 - 2) \sqrt{1+x^2} + C.$$

Завдання для самоконтролю

Обчислити інтеграли.

- 2.1. $\int \frac{\sqrt{x} + x^3 e^{-2x} + 2x^2}{x^3} dx$; 2.2. $\int \frac{7 \cdot 5^x - 2 \cdot 4^x}{4^x} dx$; 2.3. $\int \frac{25 + 2x^2}{x^2(25 + x^2)} dx$;
- 2.4. $\int \sin 8x d(8x)$; 2.5. $\int \frac{d(\cos x)}{\cos^5 x}$; 2.6. $\int \frac{d(2x^5 + 11)}{2x^5 + 11}$;
- 2.7. $\int \frac{d(2 - 3 \ln 5x)}{\sin^2(2 - 3 \ln 5x)}$; 2.8. $\int e^{1-3 \arcsin x} d(1 - 3 \arcsin x)$; 2.9. $\int \frac{d(e^x)}{9 + e^{2x}}$;
- 2.10. $\int \frac{x^6 dx}{\sqrt{25 - x^{14}}}$; 2.11. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot (7 - 9 \operatorname{tg} x)}$; 2.12. $\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{2 - 5x^3}} dx$;
- 2.13. $\int \frac{x^2 dx}{7x^6 - 3}$; 2.14. $\int \frac{dx}{x \cos^2(5 \ln 2x + 1)}$; 2.15. $\int \frac{dx}{(4 + x^2) \left(1 + 3 \operatorname{arctg} \frac{x}{2}\right)^2}$;
- 2.16. $\int \frac{\sin 7x}{\sqrt{\cos^2 7x + 10}} dx$; 2.17. $\int \frac{5^x}{\sin^2(3 - 5^x)} dx$; 2.18. $\int \frac{e^{1-2 \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}}}}{\sqrt{5 - x^2}} dx$;
- 2.19. $\int \frac{7x - 13}{x^2 + 36} dx$; 2.20. $\int \frac{5x - \sqrt[3]{3 + \arcsin 2x}}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx$; 2.21. $\int \frac{x(4 - 5x^2)}{81 + 4x^4} dx$;

2.22. $\int \frac{7x-2}{(x-3)^4} dx;$ **2.23.** $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}};$ **2.24.** $\int \frac{dx}{7+\sqrt{x-1}};$ **2.25.** $\int \frac{\sqrt{3+\ln 5x}}{x \ln 5x} dx;$

Інтегрування частинами

2.26. $\int (4x + 1) \sin 3x dx;$ **2.27.** $\int (7x^2 - 4x) \cdot 6^{-x} dx;$ **2.28.** $\int x \operatorname{arctg} x dx;$

2.29. $\int (x^3 + 6) \cos 5x dx;$ **2.30.** $\int \ln(x^2 + 2) dx;$ **2.31.** $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}} dx;$

2.32. $\int (x^2 + 2x) e^{-3x} dx;$ **2.33.** $\int x^2 \ln(x - 3) dx;$ **2.34.** $\int \frac{\ln^2 2x}{\sqrt{x^3}} dx;$

2.35. $\int e^{-2x} (3\sin 4x + \cos 4x) dx;$ **2.36.** $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx.$ **2.37.** $\int x^5 e^{1-x^2} dx.$

Відповіді. **2.1.** $C - \frac{2}{3x\sqrt{x}} - \frac{e^{-2x}}{2} + 2 \ln|x|.$ **2.2.** $\frac{7}{\ln^{\frac{5}{4}} \left(\frac{5}{4}\right)^x} - 2x + C.$ **2.3.** $\frac{1}{5} \operatorname{arctg} \frac{x}{5} - \frac{1}{x} + C.$

2.4. $-\cos 8x + C.$ **2.5.** $C - \frac{1}{4\cos^4 x}.$ **2.6.** $\ln|2x^5 + 11| + C.$ **2.7.** $-\operatorname{ctg}(2 - 3 \ln 5x) + C.$

2.8. $e^{1-3 \arcsin x} + C.$ **2.9.** $\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{e^x}{3} + C.$ **2.10.** $\frac{1}{7} \arcsin \frac{x^7}{5} + C.$ **2.11.** $C - \frac{1}{9} \ln|7 - 9 \operatorname{tg} x|.$

2.12. $C - \frac{4}{45} \sqrt[4]{(2 - 5x^3)^3}.$ **2.13.** $\frac{1}{6\sqrt{21}} \ln \left| \frac{\sqrt{7} x^3 - \sqrt{3}}{\sqrt{7} x^3 + \sqrt{3}} \right| + C.$ **2.14.** $\frac{1}{5} \operatorname{tg}(5 \ln 2x + 1) + C.$

2.15. $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1+3 \operatorname{arctg} \frac{x}{2}} + C.$ **2.16.** $C - \frac{1}{7} \ln|\cos 7x + \sqrt{\cos^2 7x + 10}|.$ **2.17.** $\frac{1}{\ln 5} \operatorname{ctg}(3 - 5^x) + C.$

2.18. $C - \frac{1}{2} e^{1-2 \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}}}.$ **2.19.** $\frac{7}{2} \ln(x^2 + 36) - \frac{13}{6} \operatorname{arctg} \frac{x}{6} + C.$ **2.20.** $C - \frac{5}{4} \sqrt{1 - 4x^2} -$

$-\frac{3}{8} (\sqrt[3]{\arcsin 2x + 3})^4.$ **2.21.** $\frac{1}{9} \operatorname{arctg} \frac{2x^2}{9} - \frac{5}{16} \ln(4x^4 + 81) + C.$ **2.22.** $C - \frac{7}{2(x-3)^2} - \frac{19}{3(x-3)^3}.$

2.23. $2\sqrt{x} - 2 \ln(1 + \sqrt{x}) + C.$ **2.24.** $2(\sqrt{x-1} - 7 \ln(\sqrt{x-1} + 7)) + C.$

2.25. $2\sqrt{3 + \ln 5x} + \sqrt{3} \ln \left| \frac{\sqrt{3+\ln 5x}-3}{\sqrt{3+\ln 5x}+3} \right| + C.$ **2.26.** $\frac{4}{9} \sin 3x - \frac{1}{3} (4x + 1) \cos 3x + C.$

2.27. $C - 6^{-x} \left(\frac{7x^2-4x}{\ln 6} + \frac{14x-4}{\ln^2 6} + \frac{14}{\ln^3 6} \right).$ **2.28.** $\frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C.$ **2.29.** $\left(\frac{x^3+6}{5} - \frac{6x}{125} \right) \sin 5x +$

$+ \left(\frac{3x^2}{25} - \frac{6}{625} \right) \cos 5x + C.$ **2.30.** $x \ln(x^2 + 2) - 2x + 2\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$

2.31. $2\sqrt{x+1} \arcsin x + 4\sqrt{1-x} + C.$ **2.32.** $-e^{-3x} \left(\frac{x^2}{3} + \frac{8x}{9} + \frac{8}{27} \right) + C.$

2.33. $\frac{x^3}{3} \ln|x-3| - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} - 3x - 9 \ln|x-3| + C.$ **2.34.** $C - \frac{2 \ln^2 2x}{\sqrt{x}} - \frac{8 \ln 2x}{\sqrt{x}} - \frac{16}{\sqrt{x}}.$

2.35. $-\frac{1}{10} e^{-2x} (\sin 4x + 7 \cos 4x) + C.$ **2.36.** $C - \frac{1}{2} x \sqrt{4-x^2} + 2 \arcsin \frac{x}{2}.$

2.37. $C - \frac{1}{2} e^{1-x^2} (x^4 + 2x^2 + 2).$

3. ІНТЕГРУВАННЯ ВИРАЗІВ, ЯКІ МІСТЯТЬ КВАДРАТНИЙ ТРИЧЛЕН

1) Інтегралі виду

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} \quad \text{та} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad (3.1)$$

після виділення повного квадрата у тричлені $ax^2 + bx + c = a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right] =$

$$= a \left[x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right] \quad \text{зводяться до}$$

табличних інтегралів. Причому, якщо у першому інтегралі дискримінант $D = b^2 - 4ac < 0$, то одержимо арктангенс; а якщо $D > 0$, то буде логарифм. В другому інтегралі при $a > 0$ буде логарифм, а при $a < 0$ буде арксинус.

2) Інтегралі виду

$$\int \frac{(mx + n)dx}{ax^2 + bx + c} \quad \text{та} \quad \int \frac{(mx + n)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad (3.2)$$

зводяться до вказаних вище інтегралів після виділення в чисельнику похідної $2ax + b$ від квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$. Або ж після виділення повного квадрата в тричлені можна зробити підстановку $x + \frac{b}{2a} = t$ і прийдемо до табличних інтегралів.

Приклад 3.1. Знайти інтеграл $I = \int \frac{dx}{x^2 + 4x - 5}$.

Виділяємо повний квадрат у знаменнику

$$x^2 + 4x - 5 = (x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 4) - 4 - 5 = (x + 2)^2 - 9,$$

$$\text{тоді} \quad I = \int \frac{dx}{(x + 2)^2 - 9} = \int \frac{d(x + 2)}{(x + 2)^2 - 3^2} = \frac{1}{2 \cdot 3} \ln \left| \frac{(x + 2) - 3}{(x + 2) + 3} \right| + C = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x - 1}{x + 5} \right| + C.$$

Приклад 3.2. Знайти інтеграл $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3x + 5}}$.

Оскільки $x^2 + 3x + 5 = \left(x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot x + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 5 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}$, то

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}}} = \int \frac{d\left(x + \frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}}} = \ln \left| \left(x + \frac{3}{2}\right) + \sqrt{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}} \right| + C = \\ &= \ln \left| x + \frac{3}{2} + \sqrt{x^2 + 3x + 5} \right| + C. \end{aligned}$$

Приклад 3.3. Знайти інтеграл $I = \int \frac{4 - 3x}{5x^2 + 6x + 18} dx$.

Виділяємо повний квадрат у знаменнику

$$5x^2 + 6x + 18 = 5 \left(x^2 + \frac{6}{5}x + \frac{18}{5} \right) = 5 \left(x^2 + 2 \cdot \frac{3}{5}x + \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{18}{5} \right) = 5 \left[\left(x + \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{81}{25} \right].$$

I-й метод. Зробимо підстановку $x + \frac{3}{5} = t \Rightarrow x = t - \frac{3}{5} \Rightarrow dx = d\left(t - \frac{3}{5}\right) = 1 \cdot dt$,

$$\begin{aligned} \text{тоді } I &= \int \frac{4 - 3x}{5 \left[\left(x + \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{81}{25} \right]} dx = \frac{1}{5} \int \frac{4 - 3\left(t - \frac{3}{5}\right)}{t^2 + \frac{81}{25}} dt = \frac{1}{5} \int \frac{-3t + \frac{29}{5}}{t^2 + \frac{81}{25}} dt = \\ &= \frac{1}{5} \left(-3 \int \frac{t dt}{t^2 + \frac{81}{25}} + \frac{29}{5} \int \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{9}{5}\right)^2} \right) = \frac{1}{5} \left(-3 \cdot \frac{1}{2} \int \frac{d\left(t^2 + \frac{81}{25}\right)}{t^2 + \frac{81}{25}} + \frac{29}{5} \cdot \frac{1}{\frac{9}{5}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\frac{9}{5}} \right) = \\ &= -\frac{3}{10} \ln \left| t^2 + \frac{81}{25} \right| + \frac{29}{25} \cdot \frac{5}{9} \operatorname{arctg} \frac{5t}{9} + C = -\frac{3}{10} \ln \left| \left(x + \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{81}{25} \right| + \frac{29}{45} \operatorname{arctg} \frac{5x + 3}{9} + C = \\ &= C - \frac{3}{10} \ln \left| x^2 + \frac{6}{5}x + \frac{18}{5} \right| + \frac{29}{45} \operatorname{arctg} \frac{5x + 3}{9}. \end{aligned}$$

II-й метод. Виділяємо в чисельнику похідну від квадратного тричлена

$$d(5x^2 + 6x + 18) = (10x + 6)dx;$$

$$4 - 3x = -3x + 4 = -\frac{3}{10}(10x + 6) + \frac{9}{5} + 4 = -\frac{3}{10}(10x + 6) + \frac{29}{5}.$$

$$\begin{aligned} \text{Отже, } I &= \int \frac{-\frac{3}{10}(10x + 6) + \frac{29}{5}}{5x^2 + 6x + 18} dx = -\frac{3}{10} \int \frac{(10x + 6)dx}{5x^2 + 6x + 18} + \frac{29}{5} \int \frac{dx}{5 \left[\left(x + \frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{9}{5}\right)^2 \right]} = \\ &= -\frac{3}{10} \int \frac{d(5x^2 + 6x + 18)}{5x^2 + 6x + 18} + \frac{29}{5} \cdot \frac{1}{5} \int \frac{d\left(x + \frac{3}{5}\right)}{\left(x + \frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{9}{5}\right)^2} = -\frac{3}{10} \ln |5x^2 + 6x + 18| + \end{aligned}$$

$$+\frac{29}{25} \cdot \frac{5}{9} \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{3}{5}}{\frac{9}{5}} + C = C - \frac{3}{10} \ln |5x^2 + 6x + 18| + \frac{29}{45} \operatorname{arctg} \frac{5x+3}{9}.$$

Приклад 3.4. Знайти інтеграл $I = \int \frac{(3x-5)dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}.$

Під радикалом виділяємо повний квадрат

$$3+2x-x^2 = -(x^2-2x-3) = -(x^2-2 \cdot x \cdot 1+1-4) = -[(x-1)^2-4] = 4-(x-1)^2.$$

I-й метод. Зробимо підстановку $x-1=t$, звідки $x=t+1 \Rightarrow dx=1 \cdot dt$, тоді

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3x-5}{\sqrt{4-(x-1)^2}} dx = \int \frac{3(t+1)-5}{\sqrt{4-t^2}} dt = \int \frac{3t-2}{\sqrt{4-t^2}} dt = 3 \int \frac{tdt}{\sqrt{4-t^2}} - 2 \int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = \\ &= -3 \cdot \frac{1}{2} \int \frac{d(4-t^2)}{\sqrt{4-t^2}} - 2 \operatorname{arcsin} \frac{t}{2} = -\frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{4-t^2} - 2 \operatorname{arcsin} \frac{t}{2} + C = \\ &= -3\sqrt{4-(x-1)^2} - 2 \operatorname{arcsin} \frac{x-1}{2} + C = C - 3\sqrt{3+2x-x^2} - 2 \operatorname{arcsin} \frac{x-1}{2}. \end{aligned}$$

II-й метод. Виділяємо в чисельнику похідну від квадратного тричлена

$$d(3+2x-x^2) = (2-2x)dx;$$

$$3x-5 = -\frac{3}{2} \left(-2x + \frac{10}{3} \right) = -\frac{3}{2} \left[(-2x+2) + \frac{4}{3} \right] = -\frac{3}{2} (2-2x) - 2.$$

Отже, маємо

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{-\frac{3}{2}(-2x+2)-2}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx = -\frac{3}{2} \int \frac{(-2x+2)dx}{\sqrt{3+2x-x^2}} - 2 \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{2^2-(x-1)^2}} = \\ &= -\frac{3}{2} \int (3+2x-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(3+2x-x^2) - 2 \operatorname{arcsin} \frac{x-1}{2} = \\ &= -\frac{3}{2} \frac{(3+2x-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - 2 \operatorname{arcsin} \frac{x-1}{2} + C = C - 3\sqrt{3+2x-x^2} - 2 \operatorname{arcsin} \frac{x-1}{2}. \end{aligned}$$

3) Інтегралі типу

$$I = \int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx,$$

де $P_n(x)$ – многочлен степеня n , $n \geq 2$, можна обчислювати за допомогою

формули:

$$I = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \quad (3.3)$$

де $Q_{n-1}(x)$ – многочлен степеня $n-1$ з невизначеними коефіцієнтами, λ – теж невизначене число.

Приклад 3.5. Знайти інтеграл $I = \int \sqrt{-1-4x-x^2} dx$.

$$\text{Маємо } I = \int \frac{-1-4x-x^2}{\sqrt{-1-4x-x^2}} dx = (Ax+B)\sqrt{-1-4x-x^2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{-1-4x-x^2}}.$$

Беремо похідні від обох частин цієї рівності:

$$\frac{-1-4x-x^2}{\sqrt{-1-4x-x^2}} = A\sqrt{-1-4x-x^2} + (Ax+B) \cdot \frac{(-4-2x)}{2\sqrt{-1-4x-x^2}} + \lambda \cdot \frac{1}{\sqrt{-1-4x-x^2}}.$$

Застосуємо метод невизначених коефіцієнтів.

$$-1-4x-x^2 = A(-1-4x-x^2) + (-2Ax - Ax^2 - 2B - Bx) + \lambda;$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 \left\{ \begin{array}{l} -A - A = -1; \\ -4A - 2A - B = -4; \\ -A - 2B + \lambda = -1; \end{array} \right. \\ x \\ x^0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = \frac{1}{2}; \\ B = 4 - 6A = 4 - 3 = 1; \\ \lambda = -1 + A + 2B = -1 + \frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}. \end{array}$$

Отже, маємо

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{1}{2}x+1\right)\sqrt{-1-4x-x^2} + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{-1-4x-x^2}} = \left(\frac{x}{2}+1\right)\sqrt{-1-4x-x^2} + \\ &+ \frac{3}{2} \int \frac{d(x+2)}{\sqrt{3-(x+2)^2}} = \left(\frac{x}{2}+1\right)\sqrt{-1-4x-x^2} + \frac{3}{2} \arcsin \frac{x+2}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

Завдання для самоконтролю

Обчислити інтеграли:

3.1. $\int \frac{dx}{x^2-12x+11};$

3.2. $\int \frac{dx}{4x^2+28x+33};$

3.3. $\int \frac{dx}{x^2+22x+123};$

3.4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+14x+33}};$

3.5. $\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-20x+12}};$

3.6. $\int \frac{dx}{\sqrt{-59-16x-x^2}};$

$$3.7. \int \frac{7x-11}{\sqrt{11+10x-x^2}} dx; \quad 3.8. \int \frac{(x+2)dx}{x^2+2x+2}; \quad 3.9. \int \frac{3x+1}{x^2+18x+87} dx;$$

$$3.10. \int \frac{4x-7}{\sqrt{16x^2-8x+3}} dx; \quad 3.11. \int \frac{5-x}{x^2-9x+18} dx; \quad 3.12. \int \frac{x^2}{\sqrt{3+8x-x^2}} dx.$$

Відповіді. 3.1. $\frac{1}{10} \ln \left| \frac{x-11}{x-1} \right| + C$. 3.2. $\frac{1}{16} \ln \left| \frac{2x+3}{2x+11} \right| + C$. 3.3. $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+11}{\sqrt{2}} + C$.

3.4. $\ln|x-7+\sqrt{x^2+14x+33}| + C$. 3.5. $\frac{1}{5} \ln|5x-2+\sqrt{25x^2-20x+12}| + C$.

3.6. $\arcsin \frac{x+8}{\sqrt{5}} + C$. 3.7. $-7\sqrt{11+10x-x^2} + 24\arcsin \frac{x-5}{6} + C$. 3.8. $\frac{1}{2} \ln(x^2+2x+2) +$

$+ \operatorname{arctg}(x+1) + C$. 3.9. $\frac{3}{2} \ln(x^2+18x+87) - \frac{26}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{x+9}{\sqrt{6}} + C$. 3.10. $\frac{1}{4} \sqrt{16x^2-8x+3} +$

$+ \frac{3}{2} \ln|4x-1+\sqrt{16x^2-8x+3}| + C$. 3.11. $-\frac{1}{2} \ln|x^2-9x+18| + \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-6}{x-3} \right| + C$.

3.12. $\left(-\frac{x}{2}-6\right)\sqrt{3+8x-x^2} + \frac{51}{2} \arcsin \frac{x-4}{\sqrt{19}} + C$.

4. ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

4.1. Розкладання раціонального дробу на елементарні дроби

Означення. Дробово-раціональною функцією або раціональним дробом

називається функція вигляду $f(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, де $Q_m(x), P_n(x) \neq 0$ – многочлени степеня m і n відповідно.

Означення. Раціональний дріб $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ називається **правильним**, якщо $m < n$, і **неправильним**, якщо $m \geq n$.

Відомо, що будь-який неправильний раціональний дріб можна подати у вигляді суми многочлена $S_{m-n}(x)$ та правильного раціонального дробу $\frac{R_k(x)}{P_n(x)}$, тобто

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = S_{m-n}(x) + \frac{R_k(x)}{P_n(x)}, \quad k < n. \quad (4.1)$$

Многочлен $S_{m-n}(x)$ (ціла частина) має степінь $m-n$, а остача $R_k(x)$ має степінь, менший ніж n . Тому дріб $\frac{R_k(x)}{P_n(x)}$ правильний.

Означення. Елементарними (найпростішими) раціональними дробами

називають правильні дробі таких чотирьох типів:

$$\text{I) } \frac{A}{x-a}; \quad \text{II) } \frac{A}{(x-a)^n}, \quad n = 2, 3, 4, \dots;$$

$$\text{III) } \frac{Ax+B}{x^2+px+q}; \quad \text{IV) } \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}, \quad n = 2, 3, 4, \dots;$$

де A, B, a, b, p, q – дійсні числа, $D = p^2 - 4q < 0$.

Теорема 4.1 (про розклад правильного дробу на елементарні).

Будь-який правильний раціональний дріб $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, знаменник якого розкладений на множники за формулою

$$P_n(x) = a_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x-x_j)^{k_j}(x^2+p_1x+q_1)^{s_1} \cdot \dots \cdot (x^2+p_mx+q_m)^{s_m},$$

де $n = k_1 + k_2 + \dots + k_j + 2(s_1 + \dots + s_m)$, $D = p_i^2 - 4q_i < 0$ при $i = 1, 2, \dots, m$ (тобто всі квадратні тричлени не мають дійсних коренів), можна єдиним чином подати у вигляді скінченної суми елементарних дробів I, II, III та IV типу за формулою

$$\begin{aligned} \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} &= \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \\ &+ \frac{B_1}{x-x_2} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \dots + \frac{B_{k_2}}{(x-x_2)^{k_2}} + \dots + \\ &+ \frac{C_1}{x-x_j} + \frac{C_2}{(x-x_j)^2} + \dots + \frac{C_{k_j}}{(x-x_j)^{k_j}} + \\ &+ \frac{L_1x+M_1}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{L_2x+M_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \dots + \frac{L_{s_1}x+M_{s_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}} + \dots + \\ &+ \frac{N_1x+T_1}{x^2+p_mx+q_m} + \frac{N_2x+T_2}{(x^2+p_mx+q_m)^2} + \dots + \frac{N_{s_m}x+T_{s_m}}{(x^2+p_mx+q_m)^{s_m}}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

де $A_i, B_i, C_i, L_i, M_i, N_i, T_i$ – деякі дійсні числа (коефіцієнти).

Тобто кожному множнику $(x-a)^k$ знаменника $P_n(x)$ відповідає сума k

доданків виду $\sum_{i=1}^k \frac{A_i}{(x-a)^i}$, а кожному множнику виду $(x^2 + px + q)^s$ відповідає

сума s доданків виду $\sum_{j=1}^s \frac{A_j x + B_j}{(x^2 + px + q)^j}$, де A_i, A_j, B_j – дійсні числа. Наприклад,

$$\frac{5x^2 - 8}{(x-7)(x-4)^3} = \frac{A}{x-7} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{(x-4)^2} + \frac{D}{(x-4)^3};$$

$$\frac{1-2x}{x^2(3x^2+7)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{3x^2+7};$$

$$\frac{3-2x^3}{x(x-5)^2(x^2+3x+5)^4} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-5} + \frac{C}{(x-5)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+3x+5} +$$

$$+ \frac{Mx+N}{(x^2+3x+5)^2} + \frac{Lx+R}{(x^2+3x+5)^3} + \frac{Sx+T}{(x^2+3x+5)^4}.$$

Для знаходження всіх коефіцієнтів виразу (4.2) використовують такі методи:

а) метод невизначених коефіцієнтів

В рівнянні (4.2) помножимо ліву і праву частину на знаменник $P_n(x)$. Отримаємо зліва і справа тотожно рівні многочлени. Прирівнюючи їх коефіцієнти при однакових степенях x , отримаємо систему рівнянь, з якої визначаємо невідомі коефіцієнти.

б) метод окремих значень (зручних значень)

Після множення обох частин рівності (4.2) на знаменник $P_n(x)$, дістанемо два тотожно рівні многочлени. Надаючи в цій тотожності змінній x деякі значення, отримаємо рівняння для визначення коефіцієнтів (зручно замість x обирати значення дійсних коренів знаменника). Іноді користуються *комбінованим методом*, який поєднує обидва метода.

Зауваження. Якщо знаменник $P_n(x)$ правильного раціонального дробу має тільки прості корені, тобто, $P_n(x) = a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$, то в цьому випадку дріб розкладається на суму елементарних дробів лише I типу. Для знаходження коефіцієнтів A_i , $i=1,2,\dots,n$, зручно використовувати «метод

зручних значень», а саме: покладаючи в основній тотожності $x = x_1$, знайдемо A_1 ; при $x = x_2$ одержимо A_2 ; ... ; при $x = x_n$ одержимо A_n .

Приклад 4.1. Розкласти на елементарні дробби $\frac{2x^2 - 40x + 86}{x^3 - 8x^2 + 14x + 68}$.

Цей дріб правильний. Спочатку розкладемо знаменник на множники. Перевіряємо дільники вільного члена: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 17, \pm 34, \pm 68$. Маємо $P(-2) = -8 - 32 - 28 + 68 = 0$, отже, $x_1 = -2$ корінь цього многочлена. Ділимо

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 8x^2 + 14x + 68 & x + 2 \\ \hline -10x^2 + 14x & \\ \hline -10x^2 - 20x & \\ \hline & 34x + 68 \\ & - 34x + 68 \\ \hline & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{кутом знаменник на } x - x_1 = x + 2, \text{ одержимо} \\ \text{частку } x^2 - 10x + 34. \text{ Оскільки дискримінант} \\ \text{частки } D = 100 - 136 = -36 < 0, \text{ то дійсних} \\ \text{коренів більше немає. Отже,} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 - 40x + 86}{x^3 - 8x^2 + 14x + 68} &= \frac{2x^2 - 40x + 86}{(x + 2)(x^2 - 10x + 34)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{Bx + C}{x^2 - 10x + 34} = \\ &= \frac{A(x^2 - 10x + 34) + (Bx + C)(x + 2)}{(x + 2)(x^2 - 10x + 34)}. \end{aligned}$$

У виразі зліва і справа дробби рівні, знаменники рівні, отже, чисельники теж рівні:

$$2x^2 - 40x + 86 = A(x^2 - 10x + 34) + (Bx + C)(x + 2); \Rightarrow$$

$$2x^2 - 40x + 86 = Ax^2 - 10Ax + 34A + Bx^2 + 2Bx + Cx + 2C.$$

Знаходимо коефіцієнти A, B і C , підставляючи у цю рівність число $x = -2$ (корінь знаменника дробу) і прирівнюючи вирази при однакових степенях x :

$$x = -2 \mid 8 + 80 + 86 = A(4 + 20 + 34) + (Bx + C) \cdot 0 \Rightarrow 174A = 58 \Rightarrow A = 3;$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 \mid 2 = A + B; \\ x \mid -40 = -10A + 2B + C; \\ x^0 \mid 86 = 34A + 2C. \end{array} \right\}$$

З першого рівняння: $B = 2 - A = 2 - 3 = -1$. З третього рівняння: $2C = 86 - 34A$;

$$C = \frac{1}{2}(86 - 102) = -8. \text{ Отже,}$$

$$\frac{2x^2 - 40x + 86}{x^3 - 8x^2 + 14x + 68} = \frac{3}{x + 2} + \frac{-x - 8}{x^2 - 10x + 34} = \frac{3}{x + 2} - \frac{x + 8}{x^2 - 10x + 34}.$$

4.2. Інтегрування елементарних дробів

Спочатку розглянемо елементарні дроби I та II типу .

$$1) \int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \ln|x-a| + C.$$

$$2) \int \frac{A}{(x-a)^n} dx = A \int (x-a)^{-n} d(x-a) = \frac{A(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C,$$

де $n = 2, 3, \dots$

Розглянемо тепер елементарний дріб III типу.

$$3) \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{1 дія: Виділяємо повний квадрат у знаменнику} \\ x^2 + px + q = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}, \\ \text{де } D = p^2 - 4q < 0 \Rightarrow q - \frac{p^2}{4} = \frac{4q-p^2}{4} > 0; \\ \text{Зробимо заміну: } x + \frac{p}{2} = t, \text{ тоді } x = t - \frac{p}{2} \Rightarrow dx = \left(t - \frac{p}{2}\right)' dt = 1 dt; \\ \Rightarrow Ax + B = A\left(t - \frac{p}{2}\right) + B = At - \frac{Ap}{2} + B; \quad x^2 + px + q = t^2 + \frac{4q-p^2}{4} \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{At + (B - \frac{Ap}{2})}{t^2 + \frac{4q-p^2}{4}} dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{2 дія: розбиваємо цей інтеграл} \\ \text{на суму двох інтегралів} \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{At dt}{t^2 + \frac{4q-p^2}{4}} + \int \frac{(B - \frac{Ap}{2}) dt}{t^2 + \frac{4q-p^2}{4}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{3 дія: В першому інтегралі} \\ \text{у чисельнику} \\ t dt = d\left(\frac{t^2}{2}\right) = \frac{1}{2} d\left(t^2 + \frac{4q-p^2}{4}\right); \\ \text{4 дія: другий інтеграл табличний;} \end{array} \right\} =$$

$$= A \cdot \frac{1}{2} \int \frac{d\left(t^2 + \frac{4q-p^2}{4}\right)}{t^2 + \frac{4q-p^2}{4}} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\right)^2} = \frac{A}{2} \cdot \ln \left| t^2 + \frac{4q-p^2}{4} \right| +$$

$$+ \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}} \arctg \frac{t}{\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}} = \frac{A}{2} \cdot \ln \left| \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q-p^2}{4} \right| +$$

$$+ \frac{2(B - \frac{Ap}{2})}{\sqrt{4q-p^2}} \arctg \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C = \frac{A}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{2(B - \frac{Ap}{2})}{\sqrt{4q-p^2}} \arctg \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

Приклади таких інтегралів розглянуто у пункті 3.

4) Елементарні дроби IV типу

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{як у попередньому інтегралі всі чотири} \\ \text{дії повторимо;} \\ \text{Зробимо заміну: } x + \frac{p}{2} = t, \text{ тоді } x = t - \frac{p}{2} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{A}{2} \int \frac{d\left(t^2 + \frac{4q-p^2}{4}\right)}{\left(t^2 + \frac{4q-p^2}{4}\right)^n} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dt}{\left(t^2 + \frac{4q-p^2}{4}\right)^n} =$$

$$= \left\{ \text{у другому інтегралі позначимо } a^2 = \frac{4q-p^2}{4} > 0 \right\} =$$

$$= \frac{A}{2} \int \left(t^2 + \frac{4q-p^2}{4}\right)^{-n} \cdot d\left(t^2 + \frac{4q-p^2}{4}\right) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n} =$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \frac{\left(t^2 + \frac{4q-p^2}{4}\right)^{-n+1}}{-n+1} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \cdot I_n + C,$$

де інтеграл $I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$, $n = 2, 3, \dots$, обчислюється за рекурентною формулою

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)a^2} \cdot \left(\frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3) \cdot I_{n-1} \right), \text{ де } n = 2, 3, 4, \dots \quad (4.3)$$

Після обчислення інтегралів необхідно перейти від нової змінної t назад до змінної x .

Приклад 4.2. Знайти інтеграл $I = \int \frac{7x+1}{4x^2+4x+7} dx$.

Це елементарний дріб III типу, дискримінант $D < 0$. Виділяємо повний квадрат у знаменнику $4x^2 + 4x + 7 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2 + 6 = (2x+1)^2 + 6$;

в інтегралі зробимо підстановку: $2x+1 = t \Rightarrow x = \frac{1}{2}(t-1) \Rightarrow dx = \frac{1}{2} \cdot dt$, тоді

$$I = \int \frac{7 \cdot \frac{1}{2}(t-1) + 1}{t^2 + 6} \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{\frac{7}{2}t - \frac{5}{2}}{t^2 + 6} dt = \frac{7}{4} \int \frac{tdt}{t^2 + 6} - \frac{5}{4} \int \frac{dt}{t^2 + \sqrt{6}^2} = \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2 + 6)}{t^2 + 6} -$$

$$- \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{6}} = \frac{7}{8} \ln |t^2 + 6| - \frac{5}{4\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{6}} = \frac{7}{8} \ln((2x+1)^2 + 6) -$$

$$- \frac{5}{4\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{6}} + C = \frac{7}{8} \ln(4x^2 + 4x + 7) - \frac{5\sqrt{6}}{24} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{6}(2x+1)}{6} + C.$$

Приклад 4.3. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{(x^2+4)^3}$.

Використаємо рекурентну формулу (4.3).

При $n = 1$ маємо $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$.

При $n = 2$ маємо $I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+4)^2} = \{\text{тут } n = 2; \text{ число } a^2 = 4\} =$
 $= \frac{1}{2(2-1) \cdot 4} \left[\frac{x}{(x^2+4)^{2-1}} + (2 \cdot 2 - 3) \cdot I_1 \right] + C = \frac{1}{8} \left[\frac{x}{x^2+4} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right] + C$.

При $n = 3$ отримаємо шуканий інтеграл

$I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+4)^3} = \{\text{тут } n = 3; \text{ число } a^2 = 4\} = \frac{1}{2(3-1) \cdot 4} \left[\frac{x}{(x^2+4)^{3-1}} + (2 \cdot 3 - 3) \cdot I_2 \right] +$
 $+ C = \frac{1}{16} \left[\frac{x}{(x^2+4)^2} + \frac{3}{8} \left(\frac{x}{x^2+4} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right) \right] + C$.

4.3. Інтегрування раціональних дробів

Розглянутий у пунктах 4.1 – 4.2 матеріал дозволяє сформулювати загальну схему, за якою будемо інтегрувати раціональні дроби.

Загальна схема інтегрування раціонального дроби

1. Перевіряємо чи дріб правильний. Якщо дріб неправильний, то виділяємо цілу частину і подаємо заданий дріб у вигляді суми многочлена і правильного раціонального дроби.
2. Розкладаємо знаменник правильного дроби на множники.
3. Записуємо правильний дріб у вигляді суми елементарних дробів. При цьому, кожному множнику $(x - a)^k$ знаменника $P_n(x)$ відповідає сума k доданків виду $\sum_{i=1}^k \frac{A_i}{(x - a)^i}$, а кожному множнику виду $(x^2 + px + q)^s$ відповідає сума s доданків виду $\sum_{j=1}^s \frac{A_j x + B_j}{(x^2 + px + q)^j}$, де A_i, A_j, B_j – дійсні числа.
4. Знаходимо інтеграли від одержаних елементарних дробів.

Розглянемо різні приклади.

Приклад 4.4. Знайти інтеграл $I = \int \frac{6x^2 + 73x - 233}{(x-3)(x+7)(x-2)} dx$.

Маємо правильний дріб, який розкладемо на суму елементарних дробів

$$\frac{6x^2 + 73x - 233}{(x-3)(x+7)(x-2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+7} + \frac{C}{x-2}.$$

Множимо ліву і праву частину цієї рівності на $(x-1)(x+3)(x-4)$, отримаємо

$$6x^2 + 73x - 233 = A(x+7)(x-2) + B(x-3)(x-2) + C(x-3)(x+7).$$

Підставимо в цю рівність замість x корені знаменника дробу:

- при $x = 3$ одержимо $10A = 40$; $A = 4$;
- при $x = -7$ знаходимо $90B = -450$; $B = -5$;
- при $x = 2$ маємо $-9C = -63$; $C = 7$.

$$\begin{aligned} \text{Тоді } I &= \int \frac{6x^2 + 73x - 233}{(x-3)(x+7)(x-2)} dx = 4 \int \frac{dx}{x-3} - 5 \int \frac{dx}{x+7} + 7 \int \frac{dx}{x-2} = \\ &= 4 \ln |x-3| - 5 \ln |x+7| + 7 \ln |x-2| + C = \ln \left| \frac{(x-3)^4 (x-2)^7}{(x+7)^5} \right| + C. \end{aligned}$$

Приклад 4.5. Знайти інтеграл $I = \int \frac{2x^2 - 40x + 86}{x^3 - 8x^2 + 14x + 68} dx$.

Під знаком інтеграла задано правильний дріб, який в прикладі 4.1 ми вже розклали на елементарні дробби. Звідки маємо

$$I = 3 \int \frac{dx}{x+2} - \int \frac{x+8}{x^2 - 10x + 34} dx.$$

Обчислимо окремо ці інтеграли.

$$I_1 = 3 \int \frac{dx}{x+2} = 3 \int \frac{d(x+2)}{x+2} = 3 \ln |x+2| + C.$$

$$I_2 = \int \frac{x+8}{x^2 - 10x + 34} dx = \left[\begin{array}{l} x^2 - 10x + 34 = (x^2 - 2 \cdot 5 \cdot x + 5^2) + 9 = (x-5)^2 + 9; \\ \text{Заміна: } x-5 = t; \Rightarrow x = t+5; dx = 1 \cdot dt \end{array} \right] =$$

$$= \int \frac{t+5+8}{t^2+9} dt = \int \frac{tdt}{t^2+9} + \int \frac{13dt}{t^2+9} = \int \frac{\frac{1}{2} dt^2}{t^2+9} + 13 \cdot \frac{1}{3} \arctg \frac{t}{3} = \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2+9)}{t^2+9} + \frac{13}{3} \arctg \frac{t}{3} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln |t^2 + 9| + \frac{13}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + C = [t = x - 5] = \frac{1}{2} \ln((x - 5)^2 + 9) + \frac{13}{3} \operatorname{arctg} \frac{x - 5}{3} + C.$$

Отже, $I = I_1 - I_2 = 3 \ln |x + 2| - \frac{1}{2} \ln(x^2 - 10x + 34) - \frac{13}{3} \operatorname{arctg} \frac{x - 5}{3} + C =$

$$= \ln \left| \frac{(x + 2)^3}{\sqrt{x^2 - 10x + 34}} \right| - \frac{13}{3} \operatorname{arctg} \frac{x - 5}{3} + C.$$

Приклад 4.6. Знайти інтеграл $I = \int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx$.

Підінтегральна функція це неправильний дріб, тому спочатку виділяємо цілу частину цього дробу, виконавши ділення «кутом» чисельника на знаменник, і одержимо

$$\begin{array}{r} x^5 + x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 8 \quad \left| \begin{array}{l} x^3 - 4x \\ x^2 + x + 4 \end{array} \right. \\ \underline{- x^5 - 4x^3} \\ x^4 + 4x^3 + 0x^2 \\ \underline{- x^4 - 4x^2} \\ -4x^3 + 4x^2 + 0x \\ \underline{4x^3 - 4x} \\ 4x^2 + 16x - 8 \end{array}$$

$$\frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} = x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x}.$$

Далі розкладаємо правильний дріб на суму елементарних дробів:

$$\frac{4x^2 + 16x - 8}{x(x - 2)(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x + 2}; \quad | \times x(x - 2)(x + 2);$$

$$4x^2 + 16x - 8 = A(x - 2)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(x - 2).$$

Підставимо в останню рівність замість x корені знаменника дробу:

$$\begin{array}{l} x = 0 \quad \left| \begin{array}{l} 0 + 0 - 8 = A \cdot (-2) \cdot 2 + B \cdot 0 + C \cdot 0 \Rightarrow -4A = -8 \Rightarrow A = 2; \\ x = 2 \quad \left| \begin{array}{l} 16 + 32 - 8 = A \cdot 0 + B \cdot 2 \cdot 4 + C \cdot 0 \Rightarrow 8B = 40 \Rightarrow B = 5; \\ x = -2 \quad \left| \begin{array}{l} 16 - 32 - 8 = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 8 \Rightarrow 8C = -24 \Rightarrow C = -3. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Таким чином, отримали

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx = \int \left(x^2 + x + 4 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x - 2} - \frac{3}{x + 2} \right) dx = \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2 \ln |x| + 5 \ln |x - 2| - 3 \ln |x + 2| + C = \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln \left| \frac{x^2(x - 2)^5}{(x + 2)^3} \right| + C. \end{aligned}$$

Приклад 4.7. Знайти інтеграл $I = \int \frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x^3(x-2)^2} dx$.

Під знаком інтеграла задано правильний дріб, знаменник якого має кратні корені. Отже, розкладаємо цей дріб на суму елементарних дробів:

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x^3(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-2} + \frac{E}{(x-2)^2}; \quad | \times x^3(x-2)^2;$$

$$x^3 - 2x^2 + 4 = Ax^2(x-2)^2 + Bx(x-2)^2 + C(x-2)^2 + Dx^3(x-2) + Ex^3.$$

Підставимо в цю рівність замість x корені знаменника дробу:

$$\begin{array}{l} x=0 \left| \begin{array}{l} 0+0+4 = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 4 + D \cdot 0 + E \cdot 0 \Rightarrow 4C = 4 \Rightarrow C = 1; \\ x=2 \left| \begin{array}{l} 8-8+4 = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D \cdot 0 + E \cdot 8 \Rightarrow 8E = 4 \Rightarrow E = 1/2. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Далі розкриваємо дужки і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x , одержуємо систему для знаходження інших коефіцієнтів:

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 + 4 &= Ax^2(x^2 - 4x + 4) + Bx(x^2 - 4x + 4) + C(x^2 - 4x + 4) + \\ &+ Dx^3(x-2) + Ex^3; \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0x^4 + x^3 - 2x^2 + 0x + 4 &= \\ &= Ax^4 - 4Ax^3 + 4Ax^2 + Bx^3 - 4Bx^2 + 4Bx + Cx^2 - 4Cx + 4C + \\ &+ Dx^4 - 2Dx^3 + Ex^3; \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} x^4 \left| \begin{array}{l} 0 = A + D \\ x^3 \left| \begin{array}{l} 1 = -4A + B - 2D + E; \\ x^2 \left| \begin{array}{l} -2 = 4A - 4B + C; \\ x \left| \begin{array}{l} 0 = 4B - 4C; \\ x^0 \left| \begin{array}{l} 4 = 4C. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Rightarrow A = -D; \Rightarrow D = -1/4; \\ \Rightarrow 4A - 4 + 1 = -2; \Rightarrow A = 1/4; \\ \Rightarrow B = C; \Rightarrow B = 1. \end{array}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{1/4}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1/4}{x-2} + \frac{1/2}{(x-2)^2} \right) dx = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x} + \int x^{-2} dx + \int x^{-3} dx - \frac{1}{4} \int \frac{d(x-2)}{x-2} + \\ &+ \frac{1}{2} \int (x-2)^{-2} d(x-2) = \frac{1}{4} \ln |x| + \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^{-2}}{-2} - \frac{1}{4} \ln |x-2| + \frac{1}{2} \cdot \frac{(x-2)^{-1}}{-1} + C = \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x}{x-2} \right| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2(x-2)} + C. \end{aligned}$$

Приклад 4.8. Знайти інтеграл $I = \int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 2)^2} dx$.

Підінтегральна функція це правильний дріб, розкладаємо цей дріб на суму

елементарних дробів: $\frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 2)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 2)^2}; \quad | \times (x^2 + 2)^2;$

$$(Ax + B)(x^2 + 2) + Cx + D = x^3 + x - 1;$$

$$Ax^3 + Bx^2 + 2Ax + 2B + Cx + D = x^3 + 0 \cdot x^2 + x - 1; \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x^3 | A = 1; \\ x^2 | B = 0; \\ x | 2A + C = 1; \\ x^0 | 2B + D = -1. \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = 1; \\ B = 0; \\ C = -1; \\ D = -1. \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Отже, } I &= \int \left(\frac{x}{x^2 + 2} - \frac{x + 1}{(x^2 + 2)^2} \right) dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 2)}{x^2 + 2} + \int \frac{x dx}{(x^2 + 2)^2} - \int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \ln |x^2 + 2| - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 2)}{(x^2 + 2)^2} - \int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2} = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 2| - \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2 + 2)^{-1}}{-1} - I_2, \end{aligned}$$

де інтеграл I_2 знаходимо за рекурентною формулою (4.3):

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C;$$

$$I_2 = \left[\begin{array}{l} \text{тут } n = 2; \\ a^2 = 2 \end{array} \right] = \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot 2} \left(\frac{x}{(x^2 + 2)} + (4 - 3)I_1 \right) = \frac{x}{4(x^2 + 2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

Тоді остаточно маємо

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \ln |x^2 + 2| + \frac{1}{2(x^2 + 2)} - \frac{x}{4(x^2 + 2)} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln |x^2 + 2| + \frac{2 - x}{4(x^2 + 2)} - \frac{\sqrt{2}}{8} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C. \end{aligned}$$

В деяких випадках можна розкласти підінтегральний дріб на елементарні дроби штучним способом.

Приклад 4.9. Знайти інтеграл $I = \int \frac{dx}{x(x^2 + 8)}$.

Маємо

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{8} \int \frac{8}{x(x^2 + 8)} dx = \frac{1}{8} \int \frac{(8 + x^2) - x^2}{x(x^2 + 8)} dx = \frac{1}{8} \left(\int \frac{dx}{x} - \int \frac{x dx}{x^2 + 8} \right) = \\ &= \frac{1}{8} \left(\ln |x| - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 8)}{x^2 + 8} \right) = \frac{1}{8} \ln |x| - \frac{1}{16} \ln |x^2 + 8| + C = \frac{1}{8} \ln \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + 8}} + C. \end{aligned}$$

Приклад 4.10. Знайти інтеграл $I = \int \frac{x^3 + 6x^2 + 4x + 24}{(x-2)(x+2)^3} dx$.

Перетворимо чисельник:

$$x^3 + 6x^2 + 4x + 24 = (x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 4 + 8) - 8x + 16 = (x+2)^3 - 8(x-2).$$

Тоді

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(x+2)^3 - 8(x-2)}{(x-2)(x+2)^3} dx = \int \frac{(x+2)^3 dx}{(x-2)(x+2)^3} - 8 \int \frac{(x-2) dx}{(x-2)(x+2)^3} = \\ &= \int \frac{d(x-2)}{x-2} - 8 \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^3} = \ln |x-2| - \frac{8(x+2)^{-2}}{-2} + C = \ln |x-2| + \frac{4}{(x+2)^2} + C. \end{aligned}$$

Завдання для самоконтролю

Обчислити інтеграли:

4.1. $\int \frac{(5x-1)dx}{x^2+10x+29}$;

4.2. $\int \frac{(3x-1)dx}{4x^2-4x+17}$;

4.3. $\int \frac{dx}{(x^2+9)^3}$;

4.4. $\int \frac{(1-2x)dx}{(x+1)(x+3)}$;

4.5. $\int \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}$;

4.6. $\int \frac{x^3 dx}{4x^3-x}$;

4.7. $\int \frac{(x^2-3x+2)dx}{x(x^2+2x+1)}$;

4.8. $\int \frac{x^2 dx}{x^3+5x^2+8x+4}$;

4.9. $\int \frac{(x^4-x^2+4)dx}{x^4-x^2}$;

4.10. $\int \frac{(x^3-6x^2+9x+7)dx}{(x-2)^3(x-5)}$;

4.11. $\int \frac{(2x^2-3x-3)dx}{(x-1)(x^2-2x+5)}$;

4.12. $\int \frac{(6x^2-16x+31)dx}{x^3-4x^2+x+26}$;

4.13. $\int \frac{dx}{1+x^3}$;

4.14. $\int \frac{(x^5+2x^3+4x+4)dx}{x^4+2x^3+2x^2}$;

4.15. $\int \frac{dx}{x(1+x^2)(4+x^2)^2}$.

Відповіді. **4.1.** $\frac{5}{2} \ln(x^2 + 10x + 29) - 13 \operatorname{arctg} \frac{x+5}{2} + C$. **4.2.** $\frac{3}{8} \ln(4x^2 - 4x + 17) + \frac{1}{16} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{4} + C$. **4.3.** $\frac{x}{36(x^2+9)^2} + \frac{x}{216(x^2+9)} + \frac{1}{648} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C$. **4.4.** $\frac{3}{2} \ln|x+1| - \frac{7}{2} \ln|x+3| + C$. **4.5.** $\frac{3}{11} \ln|3x+1| + \frac{2}{33} \ln|2x-3| - \frac{1}{3} \ln|x| + C$. **4.6.** $\frac{1}{4} x + \ln|x| - \frac{7}{16} \ln|2x-1| -$

$$\begin{aligned}
& -\frac{9}{16}\ln|2x+1| + C. \quad \mathbf{4.7.} \quad 2\ln|x| - \ln|x+1| + \frac{6}{x+1} + C. \quad \mathbf{4.8.} \quad \frac{4}{x+2} + \ln|x+1| + C. \\
\mathbf{4.9.} \quad & x + \frac{4}{x} + 2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C. \quad \mathbf{4.10.} \quad \frac{3}{2(x-2)^2} + \ln|x-5| + C. \\
\mathbf{4.11.} \quad & C - \ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln|x^2-2x+5| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}. \quad \mathbf{4.12.} \quad 3\ln|x+2| + \frac{3}{2}\ln(x^2-6x+13) + \\
& + \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2} + C. \quad \mathbf{4.13.} \quad \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C. \\
\mathbf{4.14.} \quad & \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + 2\ln(x^2+2x+2) - 2\operatorname{arctg}(x+1) + C. \quad \mathbf{4.15.} \quad \frac{1}{16}\ln|x| - \frac{1}{18}\ln(x^2+1) + \\
& + \frac{7}{288}\ln(x^2+4) - \frac{1}{24(x^2+4)} + C.
\end{aligned}$$

5. ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ВИРАЗІВ

Нехай $R(u; v; \dots; s)$ – раціональна функція від змінних u, v, \dots, s , тобто така функція, в якій над цими змінними та дійсними числами виконується скінченне число арифметичних дій: додавання, віднімання, множення і ділення.

Наприклад, раціональною є функція $R(u; v) = \frac{2u^4 - 5u + v}{1 - u^2v^3}$.

Раціональна функція $R(u; v)$ двох змінних u, v називається

- 1) *непарною відносно змінної u* , якщо $R(-u; v) = -R(u; v)$;
- 2) *непарною відносно змінної v* , якщо $R(u; -v) = -R(u; v)$;
- 3) *парною відносно змінних u та v одночасно*, якщо $R(-u; -v) = R(u; v)$.

Нехай задана раціональна функція $R(\sin x; \cos x)$, де аргументи $u = \sin x$,

$v = \cos x$. Оскільки $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$, то

функція

$$R_1(\sin x; \cos x; \operatorname{tg} x; \operatorname{ctg} x; \sec x; \operatorname{cosec} x) = R(\sin x; \cos x)$$

теж є раціональною функцією, яка залежить від $u = \sin x$ та $v = \cos x$.

Розглянемо тепер інтеграли від деяких таких функцій і покажемо, що в певних випадках вони зводяться до інтегралів від раціональних функцій (або, як кажуть, *раціоналізуються*).

Розглянемо інтеграл вигляду

$$\int R(\sin x; \cos x) dx, \quad (5.1)$$

де $R(\sin x; \cos x)$ – раціональна функція своїх аргументів $u = \sin x$ та $v = \cos x$.

I. Універсальна тригонометрична підстановка

Теорема 5.1. Будь-який інтеграл вигляду (5.1) раціоналізується (тобто зводиться до інтегралів від раціональних функцій) за допомогою

підстановки $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $-\pi < x < \pi$.

Доведення. Маємо $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t$, $x = 2 \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

$$\sin x = \frac{\sin\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right)}{1} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} + \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1} = \frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos x = \frac{\cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right)}{1} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Підставляючи в (5.1), отримаємо

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}; \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int R_1(t) dt, \text{ де } R_1(t) \text{ — деяка}$$

раціональна функція від змінної t , що і треба довести. ■

Зауваження. Заміна $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ називається **універсальною тригонометричною**

підстановкою, при цьому справедливі такі формули

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Але вона часто приводить до громіздких обчислень, тому на практиці в багатьох випадках користуються іншими підстановками, які швидше приводять до мети.

Застосовуємо універсальну тригонометричну підстановку, якщо $\sin x$ і $\cos x$ входять в підінтегральну функцію в першому степені. Наприклад, при

обчисленні інтегралів виду $\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}$, де $a, b, c = \text{const}$.

Приклад 5.1. Знайти інтеграл $I = \int \frac{dx}{5 - 4\sin x + 3\cos x}$.

Зробимо підстановку $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, тоді $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Отже,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2dt}{(1+t^2) \left(5 - \frac{8t}{1+t^2} + \frac{3-3t^2}{1+t^2} \right)} = 2 \int \frac{dt}{5 + 5t^2 - 8t + 3 - 3t^2} = \int \frac{dt}{t^2 - 4t + 4} = \\ &= \int \frac{dt}{(t-2)^2} = \int (t-2)^{-2} d(t-2) = \frac{(t-2)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{t-2} + C = \frac{1}{2 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + C. \end{aligned}$$

II. Розглянемо використання інших підстановок. Мають місце наступні теореми.

Теорема 5.2. Якщо підінтегральна функція $R(\sin x; \cos x)$ непарна відносно $\cos x$, тобто $R(\sin x; -\cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, то підстановка

$$\boxed{\sin x = t}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \quad \text{раціоналізує інтеграл (5.1).}$$

Теорема 5.3. Якщо функція $R(\sin x, \cos x)$ непарна відносно $u = \sin x$, тобто

$$R(-\sin x; \cos x) = -R(\sin x; \cos x), \quad \text{то підстановка } \boxed{\cos x = t},$$

$0 < x < \pi$, раціоналізує інтеграл (5.1).

Теорема 5.4. Якщо підінтегральна функція $R(\sin x, \cos x)$ парна відносно

змінних $\sin x$ і $\cos x$ одночасно, тобто, $R(-\sin x; -\cos x) =$

$$= R(\sin x; \cos x), \quad \text{то підстановка } \boxed{\operatorname{tg} x = t}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},$$

раціоналізує інтеграл (5.1).

Застосовуємо підстановку $t = \operatorname{tg} x$, якщо у підінтегральній функції $\sin x$ та $\cos x$ мають парні степені (зокрема, від'ємні). Наприклад, для

обчислення інтегралів виду $\int \frac{dx}{a \sin^2 x + b \cos^2 x + c}$, де $a, b, c = \text{const}$.

При цьому справедливі такі формули переходу до нової змінної

$$t = \operatorname{tg} x \Rightarrow x = \operatorname{arctg} t; \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}; \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}; \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}.$$

Приклад 5.2. Знайти інтеграл $I = \int \frac{dx}{4 - 3\cos^2 x + 5\sin^2 x}$.

Перетворимо знаменник наступним чином: $4 \cdot 1 - 3\cos^2 x + 5\sin^2 x =$
 $= 4(\sin^2 x + \cos^2 x) - 3\cos^2 x + 5\sin^2 x = \cos^2 x + 9\sin^2 x = \cos^2 x \cdot (1 + 9\operatorname{tg}^2 x).$

$$I = \int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot (1 + 9\operatorname{tg}^2 x)} = \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t; \\ \frac{dx}{\cos^2 x} = dt; \end{array} \right] = \int \frac{dt}{1 + 9t^2} = \frac{1}{9} \int \frac{dt}{\frac{1}{9} + t^2} =$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\frac{1}{3}} + C = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} 3t + C = \frac{1}{3} \operatorname{arctg}(3\operatorname{tg} x) + C.$$

III. Наведемо частинні випадки теорем 5.2 - 5.4. Розглянемо інтеграл виду

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx,$$

де m та n – цілі числа. Для обчислення таких інтегралів використовують наступні прийоми.

а) Нехай хоч одне з чисел m або n — непарне додатне число.

- Якщо m — непарне додатне число, то

$$\int \sin^{2k+1} x \cdot \cos^n x \, dx = \int \sin^{2k} x \cdot \cos^n x \cdot \sin x \, dx = -\int (\sin^2 x)^k \cdot \cos^n x \cdot d(\cos x) =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \cos x = t; \\ \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2 \end{array} \right] = -\int (1 - t^2)^k \cdot t^n \, dt = -\int R_1(t) \, dt,$$

де $R_1(t)$ – раціональна функція від змінної t .

- Якщо n — непарне додатне число, то

$$\int \sin^m x \cdot \cos^{2k+1} x \, dx = \int \sin^m x \cdot \cos^{2k} x \cdot \cos x \, dx = \int \sin^m x \cdot (\cos^2 x)^k \cdot d(\sin x) =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \sin x = t; \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2 \end{array} \right] = \int t^m (1 - t^2)^k \, dt = \int R_1(t) \, dt.$$

Отже, схематично запишемо так:

якщо m — непарне додатне число, \Rightarrow $\sin x \, dx = -d(\cos x)$; $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, то робимо підстановку $\cos x = t$;	якщо n — непарне додатне число, \Rightarrow $\cos x \, dx = d(\sin x)$; $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, то робимо підстановку $\sin x = t$.
--	---

Приклад 5.3. Знайти інтеграл $I = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^{20} x} dx$.

Оскільки в чисельнику задано косинус в непарному степені, то відділимо $\cos x$ і введемо цю функцію під знак диференціалу:

$$I = \int \frac{\cos^2 x \cdot \cos x \, dx}{\sin^{20} x} = \int \frac{\cos^2 x \cdot d(\sin x)}{\sin^{20} x} = \left[\begin{array}{l} \text{заміна } \sin x = t; \Rightarrow \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2; \end{array} \right] = \int \frac{1-t^2}{t^{20}} dt =$$

$$= \int \frac{1}{t^{20}} dt - \int \frac{t^2}{t^{20}} dt = \int t^{-20} dt - \int t^{-18} dt = \frac{t^{-19}}{-19} - \frac{t^{-17}}{-17} + C = -\frac{1}{19 \sin^{19} x} + \frac{1}{17 \sin^{17} x} + C.$$

б) Нехай обидва числа m і n — парні невід'ємні числа.

Тоді маємо інтеграли виду $\int \sin^{2k} x \, dx$, $\int \cos^{2k} x \, dx$, $\int \sin^{2k} x \cdot \cos^{2s} x \, dx$, які зводимо до одного розглянутих раніше випадків або до табличних інтегралів за допомогою формул пониження степеня:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x); \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x); \quad \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

в) Нехай $m + n = -2k$, тобто обидва числа m і n — парні (або непарні) числа, але хоч одне з них від'ємне.

Тоді виконуємо такі перетворення $\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x)$; $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x$;
 $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ і далі застосовується підстанівка $t = \operatorname{tg} x$

Або $\frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\operatorname{ctg} x)$; $\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \operatorname{ctg}^2 x$; $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$ і далі застосовується підстанівка $t = \operatorname{ctg} x$.

Приклад 5.4. Знайти інтеграл $I = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^{10} x} dx$.

Перетворимо підінтегральний вираз: $\frac{\sin^2 x dx}{\cos^{10} x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^3 \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} =$

$$= \operatorname{tg}^2 x \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x)^3 \cdot d(\operatorname{tg} x) = \operatorname{tg}^2 x \cdot (1 + 3\operatorname{tg}^2 x + 3(\operatorname{tg}^2 x)^2 + (\operatorname{tg}^2 x)^3) \cdot d(\operatorname{tg} x).$$

$$I = \int \operatorname{tg}^2 x \cdot (1 + 3\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^6 x) d(\operatorname{tg} x) = \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t; \\ d(\operatorname{tg} x) = dt \end{array} \right] =$$

$$= \int t^2 \cdot (1 + 3t^2 + 3t^4 + t^6) dt = \int (t^2 + 3t^4 + 3t^6 + t^8) dt = \frac{t^3}{3} + 3\frac{t^5}{5} + 3\frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + C =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{3\operatorname{tg}^5 x}{5} + \frac{3\operatorname{tg}^7 x}{7} + \frac{\operatorname{tg}^9 x}{9} + C.$$

IV. Інтеграл виду

- $\int R(\operatorname{tg} x) dx$ раціоналізується підстановкою $t = \operatorname{tg} x$.

□ Дійсно,

$$\int R(\operatorname{tg} x) dx = \int R(\operatorname{tg} x) \cdot \cos^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int R(\operatorname{tg} x) \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \cdot d(\operatorname{tg} x) =$$

$$= \{ \operatorname{tg} x = t \} = \int \frac{R(t)}{1 + t^2} dt, \text{ де } R_1(t) = \frac{R(t)}{1 + t^2} \text{ – раціональна функція. } \blacksquare$$

- $\int R(\operatorname{ctg} x) dx$ раціоналізується підстановкою $t = \operatorname{ctg} x$.

V. Для обчислення інтегралів виду

$$\int \sin ax \cdot \cos bx dx; \int \sin ax \cdot \sin bx dx; \int \cos ax \cdot \cos bx dx, \text{ де } a \neq b,$$

застосовуються відповідні тригонометричні формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму, а саме:

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)];$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)];$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)].$$

Приклад 5.5. Знайти інтеграл $I = \int \cos 5x \sin 3x dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{2} (\sin(3x - 5x) + \sin(3x + 5x)) dx = \frac{1}{2} \left(\int (-\sin 2x) dx + \int \sin 8x dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \int \sin 2x d(2x) + \frac{1}{8} \int \sin 8x d(8x) \right) = \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 8x + C. \end{aligned}$$

Розглянемо різні приклади інтегрування тригонометричних виразів.

Приклад 5.6. Знайти інтеграл $I = \int \cos x \cos 2x \cos 3x dx$.

Маємо випадок V, перетворюємо підінтегральний вираз на суму:

$$\begin{aligned} \cos x \cdot (\cos 2x \cos 3x) &= \frac{1}{2} \cos x (\cos(-x) + \cos 5x) = \frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{1}{2} \cos x \cos 5x = \\ &= \frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{1}{2} \cos x \cos 5x = \frac{1}{4} (1 + \cos 2x) + \frac{1}{4} (\cos 6x + \cos 4x) = \\ &= \frac{1}{4} (1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x), \end{aligned}$$

то
$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4} \int (1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x) dx = \frac{1}{4} \left(\int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x d(2x) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{4} \int \cos 4x d(4x) + \frac{1}{6} \int \cos 6x d(6x) \right) = \frac{1}{4} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 4x + \frac{1}{6} \sin 6x \right) + C. \end{aligned}$$

Приклад 5.7. Знайти інтеграл $I = \int \frac{dx}{\sin^8 x}$.

Це випадок III (в), тому перетворимо підінтегральний вираз наступним чином:

$$\frac{dx}{\sin^8 x} = \left(\frac{1}{\sin^2 x} \right)^3 \cdot \frac{1}{\sin^2 x} dx = (1 + \operatorname{ctg}^2 x)^3 \cdot (-d(\operatorname{ctg} x)) = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x)^3 \cdot d(\operatorname{ctg} x).$$

Тоді
$$\begin{aligned} I &= -\int (1 + \operatorname{ctg}^2 x)^3 d(\operatorname{ctg} x) = \left[\begin{array}{l} \operatorname{ctg} x = t; \\ d(\operatorname{ctg} x) = dt; \end{array} \right] = -\int (1 + 3t^2 + 3t^4 + t^6) dt = \\ &= -\left(t + t^3 + \frac{3}{5} t^5 + \frac{1}{7} t^7 \right) + C = C - \left(\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}^3 x + \frac{3}{5} \operatorname{ctg}^5 x + \frac{1}{7} \operatorname{ctg}^7 x \right). \end{aligned}$$

Приклад 5.8. Знайти інтеграл $I = \int \cos^7 x dx$.

Маємо випадок III (а), степінь косинуса — непарне додатне число, тому виконуємо наступні перетворення:

$$\begin{aligned}
 I &= \int \cos^6 x \cdot \cos x dx = \int (\cos^2 x)^3 d(\sin x) = \left[\begin{array}{l} \sin x = t; \Rightarrow d(\sin x) = dt; \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2; \end{array} \right] = \\
 &= \int (1 - t^2)^3 dt = \int (1 - 3t^2 + 3t^4 - t^6) dt = t - 3\frac{t^3}{3} + 3\frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + C = \\
 &= \sin x - \sin^3 x + \frac{3}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x + C.
 \end{aligned}$$

Приклад 5.9. Знайти інтеграл $I = \int \sin^2 3x \cos^6 3x dx$.

Маємо випадок III (б), тому понижуємо степінь підінтегральної функції:

$$\begin{aligned}
 \sin^2 3x \cdot \cos^6 3x &= (\sin^2 3x \cdot \cos^2 3x) \cdot \cos^4 3x = (\sin 3x \cos 3x)^2 \cdot (\cos^2 3x)^2 = \\
 &= \left(\frac{1}{2} \sin 6x\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}(1 + \cos 6x)\right)^2 = \frac{1}{16} \sin^2 6x \cdot (1 + 2\cos 6x + \cos^2 6x) = \\
 &= \frac{1}{16} (\sin^2 6x + 2\sin^2 6x \cdot \cos 6x + (\sin 6x \cdot \cos 6x)^2) = \\
 &= \frac{1}{16} \left(\sin^2 6x + 2\sin^2 6x \cdot \cos 6x + \left(\frac{1}{2} \sin 12x\right)^2 \right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Тоді } I &= \frac{1}{16} \left(\int \sin^2 6x dx + 2 \int \sin^2 6x \cdot \cos 6x dx + \frac{1}{4} \int \sin^2 12x dx \right) = \\
 &= \left\{ \text{в другому інтегралі: } \cos 6x \cdot dx = \frac{1}{6} \cdot \cos 6x \cdot d(6x) = \frac{1}{6} d(\sin 6x) \right\} = \\
 &= \frac{1}{16} \left(\int \frac{1}{2} (1 - \cos 12x) dx + 2 \cdot \frac{1}{6} \int \sin^2 6x d(\sin 6x) + \frac{1}{4} \int \frac{1}{2} (1 - \cos 24x) dx \right) = \\
 &= \frac{1}{16} \left(\frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} \int \cos 12x d(12x) + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin^3 6x}{3} + \frac{1}{8} \int dx - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{24} \int \cos 24x d(24x) \right) = \\
 &= \frac{1}{16} \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 12x}{24} + \frac{\sin^3 6x}{9} + \frac{x}{8} - \frac{\sin 24x}{192} \right) + C = \frac{5x}{128} - \frac{\sin 12x}{384} + \frac{\sin^3 6x}{144} - \frac{\sin 24x}{3072} + C.
 \end{aligned}$$

Приклад 5.10. Знайти інтеграл $I = \int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}$.

Розв'яжемо цей приклад декількома способами.

I-й спосіб. $I = \int \frac{1}{\cos x \cdot \sin^3 x} dx = \int \frac{1}{\cos x \cdot \sin x} \cdot \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\sin^2 x} \cdot \frac{dx}{\sin^2 x} =$

$$= \left[\begin{array}{l} \frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\operatorname{ctg} x); \quad \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x; \\ \frac{1}{\sin^2 x} = \operatorname{ctg}^2 x + 1; \end{array} \right] = - \int \frac{1}{\operatorname{ctg} x} \cdot (\operatorname{ctg}^2 x + 1) d(\operatorname{ctg} x) =$$

$$= - \int \left(\operatorname{ctg} x + \frac{1}{\operatorname{ctg} x} \right) d(\operatorname{ctg} x) = - \int \operatorname{ctg} x d(\operatorname{ctg} x) - \int \frac{d(\operatorname{ctg} x)}{\operatorname{ctg} x} =$$

$$= - \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} - \ln |\operatorname{ctg} x| + C = - \frac{1}{2 \operatorname{tg}^2 x} - \ln |(\operatorname{tg} x)^{-1}| + C =$$

$$= \ln |\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2 \operatorname{tg}^2 x} + C.$$

II-й спосіб. $I = \int \frac{1}{\cos x \cdot \sin^3 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \frac{\sin^3 x}{\cos x}} = \int \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx =$

$$= \left[\begin{array}{l} \frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x); \quad \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x; \\ \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1; \Rightarrow \\ \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 1}; \end{array} \right] = \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 1}} = \int \frac{(\operatorname{tg}^2 x + 1)}{\operatorname{tg}^3 x} d(\operatorname{tg} x) =$$

$$= [\operatorname{tg} x = t] = \int \frac{(t^2 + 1)}{t^3} dt = \int \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^3} \right) dt = \ln |t| + \frac{t^{-2}}{-2} + C =$$

$$= \ln |\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2 \operatorname{tg}^2 x} + C.$$

III-й спосіб. Підінтегральну функцію множимо і ділимо на $\cos x$:

$$I = \int \frac{1}{\cos x \sin^3 x} dx = \int \frac{\cos x \cdot dx}{\cos^2 x \sin^3 x} = \{ \cos x dx = d(\sin x) \} = \int \frac{d(\sin x)}{\cos^2 x \cdot \sin^3 x} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{підстановка } \sin x = t; \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2; \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{(1 - t^2)t^3} = - \int \frac{1}{(t + 1)(t - 1)t^3} dt.$$

Під знаком інтеграла маємо правильний раціональний дріб, розкладаємо його на суму елементарних дробів:

$$\frac{1}{(t + 1)(t - 1)t^3} = \frac{A}{t + 1} + \frac{B}{t - 1} + \frac{C}{t} + \frac{D}{t^2} + \frac{K}{t^3}; \quad | \times (t + 1)(t - 1)t^3;$$

$$1 = A(t-1)t^3 + B(t+1)t^3 + C(t-1)(t+1)t^2 + D(t-1)(t+1)t + K(t-1)(t+1);$$

$$\Rightarrow At^4 - At^3 + Bt^4 + Bt^3 + Ct^4 - Ct^2 + Dt^3 - Dt + Kt^2 - K = 1;$$

$$t=0 \quad \left| \quad -K=1 \Rightarrow K=-1;$$

$$t=1 \quad \left| \quad 2B=1 \Rightarrow B=\frac{1}{2};$$

$$t=-1 \quad \left| \quad 2A=1 \Rightarrow A=\frac{1}{2};$$

$$t^4 \quad \left| \quad A+B+C=0 \Rightarrow C=-1;$$

$$t^3 \quad \left| \quad -A+B+D=0 \Rightarrow D=0.$$

Тоді $I = -\int \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} - \frac{1}{t^3} \right) dt = -\int \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} - \frac{1}{t^3} \right) dt =$

$$= -\left(\frac{1}{2} \int \frac{d(t+1)}{t+1} + \frac{1}{2} \int \frac{d(t-1)}{t-1} - \int \frac{dt}{t} - \int t^{-3} dt \right) =$$

$$= -\left(\frac{1}{2} \ln|t+1| + \frac{1}{2} \ln|t-1| - \ln|t| - \frac{t^{-2}}{-2} \right) + C =$$

$$= \frac{1}{2} (-\ln|t+1| - \ln|t-1| + 2\ln|t|) - \frac{1}{2t^2} + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t^2}{t^2-1} \right| - \frac{1}{2t^2} + C =$$

$$= \{ t = \sin x \} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x - 1} \right| - \frac{1}{2\sin^2 x} + C =$$

$$= \frac{1}{2} \ln|-tg^2 x| - \frac{1}{2\sin^2 x} + C = \frac{1}{2} \cdot 2 \ln|tg x| - \frac{1}{2\sin^2 x} + C =$$

$$= \ln|tg x| - \frac{1}{2\sin^2 x} + C.$$

Приклад 5.11. Знайти інтеграл $I = \int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x} dx$.

Представимо інтеграл у вигляді суми двох інтегралів:

$$I = \int \frac{2}{2 + \cos x} dx + \int \frac{-\sin x}{2 + \cos x} dx = I_1 + I_2.$$

$$I_1 = \int \frac{2}{2 + \cos x} dx = \left[\begin{array}{l} \text{застосуємо універсальну тригонометричну підстановку} \\ t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2 \operatorname{arctg} t; dx = \frac{2dt}{1+t^2}; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int \frac{2dt}{(1+t^2) \left(2 + \frac{1-t^2}{1+t^2} \right)} = 4 \int \frac{dt}{2+2t^2+1-t^2} = 4 \int \frac{dt}{t^2+3} = \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} + C_1 = \\
&= \left[t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right] = \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C_1; \\
I_2 &= \int \frac{-\sin x dx}{2+\cos x} = \int \frac{d(2+\cos x)}{2+\cos x} = \ln |2+\cos x| + C_2.
\end{aligned}$$

Отже, остаточно маємо $I = \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + \ln |2+\cos x| + C$.

Приклад 5.12. Знайти інтеграл $I = \int \operatorname{tg}^{11} x dx$.

Маємо випадок IV, тому зробимо підстановку $t = \operatorname{tg} x \Rightarrow x = \operatorname{arctg} t$;

$dx = \frac{dt}{1+t^2}$. Тоді $I = \int t^{11} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{t^{11}}{t^2+1} dt$. Підінтегральна функція це неправиль-

ний дріб; виділяючи його цілу частину, отримаємо

$$\begin{aligned}
I &= \int \left(t^9 - t^7 + t^5 - t^3 + t - \frac{t}{t^2+1} \right) dt = \\
&= \frac{t^{10}}{10} - \frac{t^8}{8} + \frac{t^6}{6} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} = \\
&= \frac{t^{10}}{10} - \frac{t^8}{8} + \frac{t^6}{6} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \ln |t^2+1| + C = \\
&= \frac{\operatorname{tg}^{10} x}{10} - \frac{\operatorname{tg}^8 x}{8} + \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} - \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \frac{1}{2} \ln |\operatorname{tg}^2 x + 1| + C = \\
&= \left[\ln |\operatorname{tg}^2 x + 1| = \ln \left| \frac{1}{\cos^2 x} \right| = \ln |(\cos x)^{-2}| = -2 \ln |\cos x| \right] = \\
&= \frac{\operatorname{tg}^{10} x}{10} - \frac{\operatorname{tg}^8 x}{8} + \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} - \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln |\cos x| + C.
\end{aligned}$$

II спосіб. Також можна обчислити цей інтеграл не вводячи підстановку, а виконавши тотожні перетворення підінтегральної функції:

$$I = \int \operatorname{tg}^9 x \cdot \operatorname{tg}^2 x dx = \int \operatorname{tg}^9 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \operatorname{tg}^9 x \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \operatorname{tg}^7 x \cdot \operatorname{tg}^2 x dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int \operatorname{tg}^9 x d(\operatorname{tg} x) - \int \operatorname{tg}^7 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \frac{\operatorname{tg}^{10} x}{10} - \int \operatorname{tg}^7 x \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \operatorname{tg}^5 x \cdot \operatorname{tg}^2 x dx = \\
&= \frac{\operatorname{tg}^{10} x}{10} - \int \operatorname{tg}^7 x d(\operatorname{tg} x) + \int \operatorname{tg}^5 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \frac{\operatorname{tg}^{10} x}{10} - \frac{\operatorname{tg}^8 x}{8} + \\
&+ \int \operatorname{tg}^5 x d(\operatorname{tg} x) - \int \operatorname{tg}^3 x \cdot \operatorname{tg}^2 x dx = \frac{\operatorname{tg}^{10} x}{10} - \frac{\operatorname{tg}^8 x}{8} + \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} - \int \operatorname{tg}^3 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \\
&= \frac{\operatorname{tg}^{10} x}{10} - \frac{\operatorname{tg}^8 x}{8} + \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} - \left(\int \operatorname{tg}^3 x \cdot d(\operatorname{tg} x) - \int \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}^2 x dx \right) = \\
&= \frac{\operatorname{tg}^{10} x}{10} - \frac{\operatorname{tg}^8 x}{8} + \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} - \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + \int \operatorname{tg} x \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \\
&= \frac{\operatorname{tg}^{10} x}{10} - \frac{\operatorname{tg}^8 x}{8} + \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} - \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + \int \operatorname{tg} x \cdot d(\operatorname{tg} x) - \int \operatorname{tg} x dx = \\
&= \frac{\operatorname{tg}^{10} x}{10} - \frac{\operatorname{tg}^8 x}{8} + \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} - \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln |\cos x| + C.
\end{aligned}$$

Приклад 5.13. Знайти інтеграл $I = \int \frac{dx}{\sin 2x - 2\sin x}$.

Маємо $I = \int \frac{dx}{2\sin x \cos x - 2\sin x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin x(\cos x - 1)}$. Розв'яжемо цей приклад

двома способами.

І спосіб. Застосуємо універсальну тригонометричну підстановку $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$;

$\Rightarrow x = 2 \operatorname{arctg} t$; $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$; $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$. Тоді отримаємо

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2} \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} - 1 \right)} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t \left(\frac{1-t^2 - (1+t^2)}{1+t^2} \right)} = \frac{1}{2} \int \frac{(1+t^2)dt}{t(-2t^2)} = -\frac{1}{4} \int \frac{1+t^2}{t^3} dt = \\
&= -\frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{t^3} + \frac{t^2}{t^3} \right) dt = -\frac{1}{4} \left(\int t^{-3} dt + \int \frac{dt}{t} \right) = -\frac{1}{4} \left(\frac{t^{-2}}{-2} + \ln |t| \right) = \left\{ t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right\} = \\
&= \frac{1}{8 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} - \frac{1}{4} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.
\end{aligned}$$

II спосіб. Множимо і чисельник, і знаменник підінтегральної функції на $\sin x$.

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x (\cos x - 1)} = \left[\begin{array}{l} \text{у чисельнику} \\ \sin x dx = -d(\cos x) \end{array} \right] = -\frac{1}{2} \int \frac{d(\cos x)}{\sin^2 x (\cos x - 1)} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{підстановка: } \cos x = t \Rightarrow \\ \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2 \end{array} \right] = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{(1-t^2)(t-1)} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{(t^2-1)(t-1)}.$$

Під знаком інтеграла маємо правильний дріб, розкладаємо його на суму

елементарних дробів: $\frac{1}{(t-1)^2(t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{(t-1)^2} + \frac{C}{t+1}$; $| \times (t-1)^2(t+1)$;

$$1 = A(t-1)(t+1) + B(t+1) + C(t-1)^2;$$

$$\Rightarrow 0 \cdot t^2 + 1 = At^2 - A + Bt + B + Ct^2 - 2Ct + C;$$

$$\begin{array}{l|l} t=1 & 1=0+2B+0 \Rightarrow B=\frac{1}{2}; \\ t=-1 & 1=0+0+4C \Rightarrow C=\frac{1}{4}; \\ t^2 & 0=A+C \Rightarrow A=-\frac{1}{4}. \end{array}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \int \left(\frac{-\frac{1}{4}}{t-1} + \frac{\frac{1}{2}}{(t-1)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{t+1} \right) dt = -\frac{1}{8} \int \frac{d(t-1)}{t-1} + \frac{1}{4} \int (t-1)^{-2} d(t-1) + \frac{1}{8} \int \frac{d(t+1)}{t+1} =$$

$$= -\frac{1}{8} \ln |t-1| + \frac{1}{4} \cdot \frac{(t-1)^{-1}}{-1} + \frac{1}{8} \ln |t+1| + C = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| - \frac{1}{4(t-1)} + C =$$

$$= [t = \cos x] = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{\cos x + 1}{\cos x - 1} \right| - \frac{1}{4(\cos x - 1)} + C.$$

Завдання для самоконтролю

Обчислити інтеграли:

5.1. $\int \cos^2 x dx$; **5.2.** $\int \sin 2x \sin 5x dx$; **5.3.** $\int \cos 2x \cos 3x \sin x dx$;

5.4. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^4 x}$; **5.5.** $\int \frac{\sin^3 z}{\sqrt{\cos z}} dz$; **5.6.** $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$;

5.7. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$; **5.8.** $\int \sin^5 x dx$; **5.9.** $\int \sin^4 x dx$;

5.10. $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$; **5.11.** $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$; **5.12.** $\int \frac{dx}{\cos^3 x \sin^3 x}$;

5.13. $\int \cos^6 x dx$; **5.14.** $\int \operatorname{tg}^5 x dx$; **5.15.** $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$;

$$5.16. \int \frac{dx}{5-3 \cos x}; \quad 5.17. \int \frac{dx}{5+4 \sin x}; \quad 5.18. \int \frac{dx}{1+\sin^2 x};$$

$$5.19. \int \frac{dx}{4 \sin^2 x+5 \cos^2 x}; \quad 5.20. \int \frac{dx}{\sin^2 x+\operatorname{tg}^2 x}; \quad 5.21. \int \frac{dx}{4+\operatorname{tg} x+4 \operatorname{ctg} x}.$$

Відповіді. 5.1. $\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$. 5.2. $\frac{1}{6} \sin 3x - \frac{1}{14} \sin 7x + C$. 5.3. $-\frac{1}{8} \cos 2x + \frac{1}{16} \cos 4x - \frac{1}{24} \cos 6x + C$. 5.4. $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3 \sin^3 x} + C$. 5.5. $2\sqrt{\cos z} \left(\frac{\cos^2 z}{5} - 1 \right) + C$. 5.6. $\operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C$. 5.7. $\frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C$. 5.8. $-\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x + C$.

5.9. $\frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C$. 5.10. $-\operatorname{ctg} x - \frac{2}{3} \operatorname{ctg}^3 x - \frac{1}{5} \operatorname{ctg}^5 x + C$.

5.11. $\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C$. 5.12. $\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x + 2 \ln |\operatorname{tg} x| + C$.

5.13. $\frac{5}{16} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C$. 5.14. $\frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln |\cos x| + C$.

5.15. $\frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{8} + \frac{x}{2} \right) \right| + C$. 5.16. $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C$. 5.17. $\frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{5 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 4}{3} + C$.

5.18. $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C$. 5.19. $\frac{1}{2\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2 \operatorname{tg} x}{\sqrt{5}} \right) + C$. 5.20. $C - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} x - \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right)$.

5.21. $\frac{4}{25} x - \frac{3}{25} \ln |\operatorname{tg} x + 2| + \frac{2}{5(\operatorname{tg} x + 2)} - \frac{3}{25} \ln |\cos x| + C$.

6. ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ТА ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ ВИРАЗІВ

Насамперед зауважимо, що інтеграли від ірраціональних та трансцендентних функцій не завжди обчислюються в елементарних функціях. Розглянемо деякі типи інтегралів, які за допомогою певних підстановок можна звести до табличних інтегралів або інтегралів від раціональних функцій.

I. Розглянемо інтеграл виду

$$I = \int R \left(x; (ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}}; \dots; (ax+b)^{\frac{m_s}{n_s}} \right) dx,$$

де R – раціональна функція; $\frac{m_1}{n_1}, \dots, \frac{m_s}{n_s}$ – нескоротні дроби, $m_1, \dots, m_s \in \mathbb{Z}$,

$n_1, \dots, n_s \in \mathbb{N}$; $a \neq 0$, b – дійсні числа. Цей інтеграл раціоналізується за допомогою

підстановки $ax + b = t^k$, де k – найменше спільне кратне чисел n_1, n_2, \dots, n_s .

Наслідок. Інтеграл $\int R(x; \sqrt[n]{ax+b}) dx$, де R – раціональна функція ($n \in \mathbb{N}$, a, b – дійсні числа), раціоналізується підстановкою $ax + b = t^n$.

Зауваження. Аналогічно робимо для наступних інтегралів:

1) інтеграл виду $I = \int R \left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_s}{n_s}} \right) dx$ раціоналізується

підстановкою $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, де k – найменше спільне кратне чисел

n_1, n_2, \dots, n_s (тут R – раціональна функція, $\frac{m_1}{n_1}, \dots, \frac{m_s}{n_s}$ – нескоротні дроби,

$m_1, \dots, m_s \in \mathbb{Z}$, $n_1, \dots, n_s \in \mathbb{N}$; a, b, c, d – дійсні числа, $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$);

2) інтеграл $\int R \left(x; \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \right) dx$ раціоналізується підстановкою $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$.

Приклад 6.1. Знайти інтеграл $I = \int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} dx = \int \frac{x + x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{6}}}{x(1 + x^{\frac{1}{3}})} dx$.

Зробимо підстановку $x = t^6$, де $k = \text{Н.С.К.}(3;6)=6$, звідки маємо $x = t^6$; $dx = 6t^5 dt$.

$$I = \int \frac{(t^6 + t^4 + t) \cdot 6t^5 dt}{t^6(1+t^2)} = 6 \int \frac{t^5 + t^3 + 1}{1+t^2} dt = \frac{t^5 + t^3 + 1}{1} \Big|_{t^3}^{t^2+1}$$

$$= 6 \left(\int t^3 dt + \int \frac{dt}{t^2+1} \right) = 6 \left(\frac{t^4}{4} + \arctg t \right) + C = \left[t = \sqrt[6]{x} \right] = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + 6 \arctg \sqrt[6]{x} + C.$$

II. Квадратичні ірраціональності

а) Інтеграл виду

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \quad (6.1)$$

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx, \quad (6.2)$$

$$\int \frac{(Ax + B)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \quad (6.3)$$

де a, b, c, A, B — деякі дійсні числа.

В інтегралах (6.1) і (6.2) під радикалом виділяємо повний квадрат, потім робимо підстановку $t = x + \frac{b}{2a}$ і зводимо цей інтеграл до табличного.

Інтеграл (6.3) інтегруються подібно до елементарного дробу третього типу.

б) Для інтегралів виду

$$\int \frac{dx}{(x-d) \cdot \sqrt{ax^2 + bx + c}}; \quad \int \frac{dx}{(x-d)^2 \cdot \sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

застосовується підстанова $x-d = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{1}{t^2} dt$, після чого вони зводяться до інтегралів вигляду (6.1) або (6.3), які розглянуті вище.

Для інтеграла виду

$$I = \int \frac{dx}{(x-d)^k \cdot \sqrt{ax^2 + bx + c}}, \quad k \in \mathbb{N},$$

застосовується така ж підстанова $x-d = \frac{1}{t}$, а після тотожних перетворень

одержимо інтеграл $I = \int \frac{t^{k-1} dt}{\sqrt{a_1 t^2 + b_1 t + c_1}}$, де $a_1 = ad^2 + bd + c$, $b_1 = 2ad + b$, $c_1 = a$.

Після цього потрібно застосувати формулу (3.3) з пункту 3.

Приклад 6.2. Знайти інтеграл $I = \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}$.

$$I = \left[\begin{array}{l} \text{зробимо підстановку: } x+1 = \frac{1}{t}; \Rightarrow x = \frac{1}{t} - 1; \\ \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt; \quad t = \frac{1}{x+1}; \end{array} \right] = \int \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1}{t} - 1\right) \frac{1}{t}}} =$$

$$= - \int \frac{dt}{t^2 \cdot \frac{1}{t} \sqrt{\frac{t^2 + t - 1}{t^2}}} = - \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + t - 1}} = \left\{ \begin{array}{l} t^2 + t - 1 = \\ \left(t^2 + 2 \cdot t \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{4} - 1 = \left(t + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{5}{4} \end{array} \right\} =$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}}} = -\int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}}} = -\ln \left| \left(t+\frac{1}{2}\right) + \sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}} \right| + C =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x+1 = \frac{1}{t}; \\ \Rightarrow t = \frac{1}{x+1}; \end{array} \right\} = -\ln \left| \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}} \right| + C = C - \ln \left| \frac{3+x+2\sqrt{1-x-x^2}}{2(x+1)} \right|.$$

в) Тригонометричні підстановки

Інтеграли виду

$$1) \quad \int R(x; \sqrt{a^2 - x^2}) dx; \quad (6.4)$$

$$2) \quad \int R(x; \sqrt{x^2 - a^2}) dx; \quad (6.5)$$

$$3) \quad \int R(x; \sqrt{x^2 + a^2}) dx \quad (6.6)$$

зводяться до інтегралів вигляду $\int R(\sin t, \cos t) dt$ за допомогою відповідних тригонометричних підстановок:

- 1) $x = a \cos t, 0 < t < \pi,$ (або $x = a \sin t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$);
- 2) $x = \frac{a}{\cos t}, 0 < t < \pi,$ (або $x = \frac{a}{\sin t}, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$);
- 3) $x = a \operatorname{tg} t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2},$ (або $x = a \operatorname{ctg} t, 0 < t < \pi$).

Дійсно, якщо підінтегральна функція містить $\sqrt{a^2 - x^2}$, то виконуючи підстановку $x = a \sin t$, маємо

$$a^2 - x^2 = a^2 - a^2 \sin^2 t = a^2 (1 - \sin^2 t) = a^2 \cos^2 t; \quad \sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t$$

і ірраціональність зникає. Одержимо раціональну функцію від $\sin t$ і $\cos t$.

У другому випадку: якщо є $\sqrt{x^2 - a^2}$, то виконуючи підстановку

$$x = \frac{a}{\cos t}, \quad \text{одержимо} \quad x^2 - a^2 = a^2 \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1 \right) = a^2 \operatorname{tg}^2 t; \quad \sqrt{x^2 - a^2} = a \operatorname{tg} t.$$

Оскільки $\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$, то одержимо раціональну функцію від $\sin t$ і $\cos t$.

У третьому випадку: якщо є вираз $\sqrt{a^2 + x^2}$, то робимо підстановку $x = a \operatorname{tg} t$. Тоді $a^2 + x^2 = a^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 t = a^2(1 + \operatorname{tg}^2 t) = \frac{a^2}{\cos^2 t}$; $\sqrt{a^2 + x^2} = \frac{a}{\cos t}$ і одержимо раціональну функцію від $\sin t$ і $\cos t$.

г) Інтеграл виду

$$\int R(x; \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx. \quad (6.7)$$

Тут підінтегральна функція це раціональна функція відносно x і $\sqrt{ax^2 + bx + c}$. Під радикалом виділяємо повний квадрат і виконуємо підстановку $t = x + \frac{b}{2a}$. Тоді інтеграл (6.7) зводиться до інтегралу виду (6.4), (6.5) або (6.6), які обчислюємо за допомогою тригонометричних підстановок.

Зауваження. Такі інтегралі також виражаються через раціональні функції за допомогою *підстановок Ейлера*, а саме:

- 1) якщо $a > 0$, то $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm x\sqrt{a} + t$;
- 2) якщо $c > 0$, то $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}$;
- 3) якщо $b^2 - 4ac > 0$, то $\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \gamma)t$, де γ – корінь тричлена $ax^2 + bx + c$.

Приклад 6.3. Знайти інтеграл $I = \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}$.

$$\begin{aligned}
 I &= \left[\begin{array}{l} \text{зробимо другу підстановку Ейлера } \sqrt{1-x-x^2} = xt - 1; \\ \Rightarrow 1-x-x^2 = x^2t^2 - 2xt + 1; \Rightarrow 1+x = -xt^2 + 2t; \Rightarrow \\ x = \frac{2t-1}{t^2+1} \Rightarrow dx = \frac{2(t^2+1)-(2t-1)2t}{(t^2+1)^2} dt = \frac{-2t^2+2t+2}{(t^2+1)^2} dt; \end{array} \right] = \\
 &= \int \frac{1}{\left(1 + \frac{2t-1}{t^2+1}\right) \left(\frac{2t-1}{t^2+1}t - 1\right)} \cdot \frac{-2t^2+2t+2}{(t^2+1)^2} dt = \\
 &= \int \frac{-2(t^2-t-1)dt}{\frac{t^2+1+2t-1}{t^2+1} \cdot \frac{2t^2-t-t^2-1}{t^2+1} \cdot (t^2+1)^2} = \int \frac{-2dt}{t^2+2t} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2 \int \frac{dt}{(t^2 + 2t + 1) - 1} = -2 \int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2 - 1} = -2 \cdot \frac{1}{2 \cdot 1} \ln \left| \frac{(t+1) - 1}{(t+1) + 1} \right| + C = \\
&= \left[\begin{array}{l} \text{підстановка} \\ t = \frac{\sqrt{1-x-x^2} + 1}{x} \end{array} \right] = -\ln \left| \frac{\frac{\sqrt{1-x-x^2} + 1}{x}}{\frac{\sqrt{1-x-x^2} + 1}{x} + 2} \right| + C = \\
&= -\ln \left| \frac{\sqrt{1-x-x^2} + 1}{\sqrt{1-x-x^2} + 1 + 2x} \right| + C.
\end{aligned}$$

III. Диференціальні біноми

Означення. Диференціальним біномом називається вираз виду

$$x^m(a + bx^n)^p, \text{ де } m, n, p - \text{раціональні числа, } a \text{ і } b - \text{дійсні числа.}$$

Інтеграл від диференціального біному вигляду

$$\int x^m(a + bx^n)^p dx \quad (6.8)$$

раціоналізується такими підстановками:

- 1) якщо число $p \in \mathbb{Z}$, то застосовуємо підстановку $x = t^k$, де k – найменше спільне кратне знаменників чисел m та n ;
- 2) якщо $p \notin \mathbb{Z}$, але $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, то застосовується підстанова $a + bx^n = t^s$, де s – знаменник дробу p ;
- 3) якщо ж $p \notin \mathbb{Z}$ та $\frac{m+1}{n} \notin \mathbb{Z}$, але $\left(\frac{m+1}{n} + p\right) \in \mathbb{Z}$, то робимо підстановку $a + bx^n = x^n t^s$ або $ax^{-n} + b = t^s$, де s – знаменник дробу p .

Теорема П.Л. Чебишева. Інтеграл від диференціального біному (6.8)

виражається через елементарні функції лише тоді, коли хоча б одне

з чисел p , $\frac{m+1}{n}$ або $\frac{m+1}{n} + p$ є цілим.

В усіх інших випадках такі інтеграли не виражаються через елементарні функції.

Приклад 6.4. Знайти інтеграл $I = \int \sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})^4 dx$.

Оскільки $m = \frac{1}{2}$; $n = \frac{1}{3}$; а число $p = 4 \in \mathbb{Z}$, то робимо заміну $x = t^6$;

$dx = 6t^5 dt$; $t = \sqrt[6]{x}$. Тоді

$$\begin{aligned} I &= \int t^3(1+t^2)^4 6t^5 dt = 6 \int t^8(1+4t^2+6t^4+4t^6+t^8) dt = \\ &= 6 \int (t^8 + 4t^{10} + 6t^{12} + 4t^{14} + t^{16}) dt = 6 \left(\frac{t^9}{9} + 4 \frac{t^{11}}{11} + 6 \frac{t^{13}}{13} + 4 \frac{t^{15}}{15} + \frac{t^{17}}{17} \right) + C = \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + \frac{4}{11} \sqrt[6]{x^{11}} + \frac{6}{13} \sqrt[6]{x^{13}} + \frac{4}{15} \sqrt{x^5} + \frac{1}{17} \sqrt[6]{x^{17}} + C = \\ &= \frac{2}{3} x \sqrt{x} + \frac{4}{11} x \sqrt[6]{x^5} + \frac{6}{13} x^2 \sqrt[6]{x} + \frac{4}{15} x^2 \sqrt{x} + \frac{1}{17} x^2 \sqrt[6]{x^5} + C. \end{aligned}$$

Приклад 6.5. Знайти інтеграл $I = \int x^5 \sqrt[3]{(1+x^3)^2} dx$.

Маємо $I = \int x^5 (1+x^3)^{\frac{2}{3}} dx$, тоді маємо числа $m = 5$; $n = 3$; $p = \frac{2}{3}$. Оскільки

$p = \frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$, а число $\frac{m+1}{n} = 2 \in \mathbb{Z}$, то робимо підстановку $1+x^3 = t^3$. Звідси

$d(1+x^3) = d(t^3)$; $\Rightarrow 3x^2 dx = 3t^2 dt$; $\Rightarrow dx = x^{-2} t^2 dt$, де $x^3 = t^3 - 1$.

$$\begin{aligned} I &= \int x^5 t^2 x^{-2} t^2 dt = \int x^3 t^4 dt = \int (t^3 - 1) t^4 dt = \int (t^7 - t^4) dt = \frac{t^8}{8} - \frac{t^5}{5} + C = \\ &= \left[\begin{array}{l} 1+x^3 = t^3; \\ \Rightarrow t = \sqrt[3]{1+x^3}; \end{array} \right] = \frac{\sqrt[3]{(1+x^3)^8}}{8} - \frac{\sqrt[3]{(1+x^3)^5}}{5} + C = \\ &= \frac{1}{40} (5x^3 - 3)(x^3 + 1) \sqrt[3]{(1+x^3)^2} + C. \end{aligned}$$

Приклад 6.6. Знайти інтеграл $I = \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x}}}{x \cdot \sqrt[15]{x^4}} dx$.

Маємо $I = \int x^{-\frac{19}{15}} (1+x^{\frac{1}{5}})^{\frac{1}{3}} dx$, тому числа $m = -\frac{19}{15}$; $n = \frac{1}{5}$; $p = \frac{1}{3}$. Оскільки

$p = \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$, $\frac{m+1}{n} = -\frac{4}{3} \notin \mathbb{Z}$, але число $\frac{m+1}{n} + p = -1 \in \mathbb{Z}$, то маємо третій випадок

і робимо підстановку $1 + x^{\frac{1}{5}} = x^{\frac{1}{5}}t^3 \Rightarrow x^{-\frac{1}{5}} + 1 = t^3$. Звідси

$$d(x^{-\frac{1}{5}} + 1) = d(t^3) \Rightarrow -\frac{1}{5}x^{-\frac{6}{5}}dx = 3t^2 dt; dx = -15x^{\frac{6}{5}}t^2 dt, x^{-\frac{1}{5}} = t^3 - 1.$$

$$I = \int x^{-\frac{19}{15}}(t^3 x^{\frac{1}{5}})^{\frac{1}{3}}(-15)x^{\frac{6}{5}}t^2 dt = -15 \int x^{-\frac{19}{15} + \frac{1}{15} + \frac{6}{5}}t^3 dt = -15 \int x^0 t^3 dt =$$

$$= -15 \int t^3 dt = -15 \frac{t^4}{4} + C = \left[\begin{array}{l} x^{-\frac{1}{5}} + 1 = t^3; \Rightarrow t = \sqrt[3]{x^{-\frac{1}{5}} + 1} = \\ = \sqrt[3]{\frac{1}{x^{\frac{1}{5}} + 1}} = \sqrt[3]{\frac{1 + \sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{x}}}; \end{array} \right] = -\frac{15}{4} \left(\sqrt[3]{\frac{1 + \sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{x}}} \right)^4 + C.$$

IV. Інтеграл вигляду $\int R(e^x) dx$ раціоналізуються за допомогою

підстановки $e^x = t$. Дійсно,

$$\int R(e^x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{заміна } e^x = t; \Rightarrow \\ x = \ln t; dx = \frac{1}{t} dt; \end{array} \right\} = \int R(t) \cdot \frac{1}{t} dt = \int R_1(t) dt, \quad \text{де } R_1(t) = R(t) \cdot \frac{1}{t}$$

— раціональна функція.

Розглянемо різні приклади інтегрування деяких ірраціональних і трансцендентних функцій.

Приклад 6.7. Знайти інтеграл $I = \int \frac{1}{(x-3)^2} \sqrt{\frac{x-3}{x+2}} dx$.

Маємо випадок I, робимо заміну $\frac{x-3}{x+2} = t^2$, тоді $x-3 = t^2(x+2)$, $x - t^2 x = 2t^2 + 3$,

$$x = \frac{2t^2 + 3}{1-t^2}; dx = \left(\frac{2t^2 + 3}{1-t^2} \right)' dt = \frac{10t}{(1-t^2)^2} dt; x-3 = \frac{2t^2 + 3}{1-t^2} - 3 = \frac{5t^2}{1-t^2}. \text{ Звідки маємо}$$

$$I = \int \frac{1}{\left(\frac{5t^2}{1-t^2} \right)^2} \cdot t \cdot \frac{10t}{(1-t^2)^2} dt = \int \frac{10t^2}{25t^4} dt = \frac{2}{5} \int \frac{dt}{t^2} = \frac{2}{5} \int t^{-2} dt = \frac{2}{5} \cdot \frac{t^{-1}}{-1} + C =$$

$$= -\frac{2}{5t} + C = C - \frac{2}{5} \sqrt{\frac{x+2}{x-3}}.$$

Приклад 6.8. Знайти інтеграл $I = \int \frac{\sqrt[4]{5x-1}}{\sqrt{5x-1} - 2\sqrt[3]{5x-1}} dx$.

Маємо під радикалами лінійну функцію, корені з різними показниками, тоді маємо випадок I та виконаємо підстановку $5x-1=t^k$, де k є найменше спільне кратне цих показників. Тут Н.С.К.(2;3;4)=12, тому заміна: $5x-1=t^{12}$; звідки $x = \frac{1}{5}(t^{12} + 1)$; $dx = \frac{12}{5}t^{11} dt$. Тоді

$$I = \int \frac{\sqrt[4]{t^{12}}}{\sqrt{t^{12}} - 2\sqrt[3]{t^{12}}} \cdot \frac{12}{5}t^{11} dt = \frac{12}{5} \int \frac{t^3 \cdot t^{11}}{t^6 - 2t^4} dt = \frac{12}{5} \int \frac{t^{14}}{t^4(t^2 - 2)} dt = \frac{12}{5} \int \frac{t^{10}}{t^2 - 2} dt.$$

Підінтегральна функція це неправильний дріб, $\frac{t^{10}}{t^{10} - 2t^8} = \frac{t^2 - 2}{t^8 + 2t^6 + 4t^4 + 8t^2 + 16}$ тоді, виділяючи його цілу частину, отримаємо

$$\begin{aligned} I &= \frac{12}{5} \int \left(t^8 + 2t^6 + 4t^4 + 8t^2 + 16 + \frac{32}{t^2 - 2} \right) dt = \\ &= \frac{12}{5} \left(\frac{t^9}{9} + 2\frac{t^7}{7} + 4\frac{t^5}{5} + 8\frac{t^3}{3} + 16t + 32 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}} \ln \left| \frac{t - \sqrt{2}}{t + \sqrt{2}} \right| \right) + C = \left\{ t = (5x - 1)^{\frac{1}{12}} \right\} = \\ &= \frac{12}{5} \left(\frac{(5x - 1)^{\frac{3}{4}}}{9} + \frac{2(5x - 1)^{\frac{7}{12}}}{7} + \frac{4(5x - 1)^{\frac{5}{12}}}{5} + \frac{8(5x - 1)^{\frac{1}{4}}}{3} + 16(5x - 1)^{\frac{1}{12}} + \right. \\ &\quad \left. + 8\sqrt{2} \ln \left| \frac{(5x - 1)^{\frac{1}{12}} - \sqrt{2}}{(5x - 1)^{\frac{1}{12}} + \sqrt{2}} \right| \right) + C = \frac{12}{5} \left(\frac{\sqrt[4]{(5x - 1)^3}}{9} + \frac{2\sqrt[12]{(5x - 1)^7}}{7} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4\sqrt[12]{(5x - 1)^5}}{5} + \frac{8\sqrt[4]{5x - 1}}{3} + 16\sqrt[12]{5x - 1} + 8\sqrt{2} \ln \left| \frac{\sqrt[12]{5x - 1} - \sqrt{2}}{\sqrt[12]{5x - 1} + \sqrt{2}} \right| \right) + C. \end{aligned}$$

Приклад 6.9. Знайти інтеграл $I = \int \frac{1}{x\sqrt{x^2 + 4x - 4}} dx$.

Маємо випадок II (б), тому виконуємо підстановку: $x = \frac{1}{t}$; звідки $dx = -\frac{1}{t^2} dt$;

$$x^2 + 4x - 4 = \frac{1}{t^2} + \frac{4}{t} - 4 = \frac{1 + 4t - 4t^2}{t^2}. \text{ Тоді}$$

$$I = \int \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t} \cdot \frac{\sqrt{1+4t-4t^2}}{t}} = \left[\begin{array}{l} 1+4t-4t^2 = -(4t^2-4t-1) = \\ = -((2t)^2 - 2 \cdot 2t \cdot 1 + 1 - 2) = \\ = -((2t-1)^2 - 2) = 2 - (2t-1)^2; \end{array} \right] = -\int \frac{dt}{\sqrt{2-(2t-1)^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{d(2t-1)}{\sqrt{2-(2t-1)^2}} = -\frac{1}{2} \arcsin \frac{2t-1}{\sqrt{2}} + C = -\frac{1}{2} \arcsin \frac{2-x}{x\sqrt{2}} + C.$$

Приклад 6.10. Знайти інтеграл $I = \int \frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}} dx$.

Це інтеграл виду (6.4) (випадок II(в)), тому виконаємо тригонометричну підстановку $x = 5 \sin t$; $dx = 5 \cos t dt$. Тоді

$$\sqrt{25-x^2} = \sqrt{25-25\sin^2 t} = 5\sqrt{1-\sin^2 t} = 5\sqrt{\cos^2 t} = 5 \cos t,$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{25 \sin^2 t \cdot 5 \cos t}{5 \cos t} dt = 25 \int \sin^2 t dt = 25 \int \frac{1}{2} (1 - \cos 2t) dt =$$

$$= \frac{25}{2} \left(\int dt - \frac{1}{2} \int \cos 2t d(2t) \right) = \frac{25}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C.$$

Оскільки $\sin t = \frac{x}{5}$; $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-\frac{x^2}{25}} = \frac{\sqrt{25-x^2}}{5}$, то остаточно маємо

$$I = \frac{25}{2} \left(\arcsin \frac{x}{5} - \frac{x \sqrt{25-x^2}}{25} \right) + C = \frac{25}{2} \arcsin \frac{x}{5} - \frac{x}{2} \sqrt{25-x^2} + C.$$

Приклад 6.11. Знайти інтеграл $I = \int \frac{dx}{\sqrt{(3+x^2)^3}}$.

Це інтеграл виду (6.6), тому виконаємо тригонометричну підстановку $x = \sqrt{3} \operatorname{tg} t$;

тоді $dx = \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t} dt$, $\sqrt{3+x^2} = \sqrt{3+3\operatorname{tg}^2 t} = \sqrt{3(1+\operatorname{tg}^2 t)} = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\cos t} = \frac{\sqrt{3}}{\cos t}$, звідси

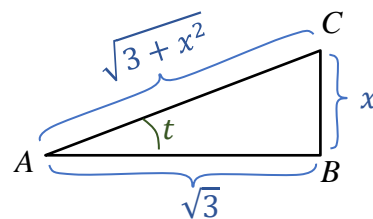
$$I = \int \frac{\frac{\sqrt{3} dt}{\cos^2 t}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{\cos t} \right)^3} = \frac{1}{3} \int \frac{\cos^3 t}{\cos^2 t} dt = \frac{1}{3} \int \cos t dt = \frac{1}{3} \sin t + C.$$

Оскільки $\operatorname{tg} t = \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{BC}{AB}$, то за теоремою Піфагора з

трикутника ABC: якщо $AB = \sqrt{3}$, $BC = x$, то

$AC = \sqrt{3+x^2}$; звідки маємо $\sin t = \frac{BC}{AC} = \frac{x}{\sqrt{3+x^2}}$,

$\cos t = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+x^2}}$. Тоді остаточно отримаємо $I = \frac{x}{3\sqrt{3+x^2}} + C$.



Приклад 6.12. Знайти інтеграл $I = \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-7)^3}}$.

Це інтеграл виду (6.5) (випадок II (в)), тому виконаємо тригонометричну

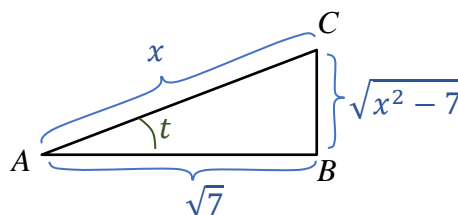
підстановку $x = \frac{\sqrt{7}}{\cos t}$. Тоді $dx = \frac{\sqrt{7} \sin t}{\cos^2 t} dt$, $\sqrt{x^2-7} = \sqrt{\frac{7}{\cos^2 t} - 7} = \sqrt{7\left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1\right)} =$

$= \sqrt{7 \operatorname{tg}^2 t} = \sqrt{7} \operatorname{tg} t$; звідки маємо

$$I = \int \frac{\frac{\sqrt{7} \sin t}{\cos^2 t} dt}{(\sqrt{7} \operatorname{tg} t)^3} = \frac{1}{7} \int \frac{\sin t}{\cos^2 t \cdot \frac{\sin^3 t}{\cos^3 t}} dt = \frac{1}{7} \int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t} = \frac{1}{7} \int (\sin t)^{-2} d \sin t =$$

$$= \frac{1}{7} \frac{(\sin t)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{7 \sin t} + C.$$

Оскільки з підстановки $x = \frac{\sqrt{7}}{\cos t}$ маємо



$\cos t = \frac{\sqrt{7}}{x} = \frac{AB}{AC}$, то за теоремою Піфагора $BC = \sqrt{x^2-7}$, $\sin t = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{x^2-7}}{x}$,

тоді остаточно отримаємо $I = -\frac{x}{7\sqrt{x^2-7}} + C$.

Приклад 6.13. Знайти інтеграл $I = \int \frac{dx}{e^x+1}$.

Підінтегральна функція є раціональною функцією від e^x , маємо випадок IV.

Виконаємо підстановку $e^x = t \Rightarrow d(e^x) = d(t)$; $e^x dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$;

$$I = \int \frac{dt}{t+1} = \int \frac{dt}{t(t+1)} = \int \frac{dt}{t^2+t} = \left\{ t^2+t = t^2 + 2 \cdot t \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \right\} =$$

$$= \int \frac{d\left(t + \frac{1}{2}\right)}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} \ln \left| \frac{\left(t + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}}{\left(t + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}} \right| + C = \ln \left| \frac{t}{t+1} \right| + C = \ln \left| \frac{e^x}{e^x+1} \right| + C.$$

Приклад 6.14. Знайти інтеграл $I = \int \sqrt{(e^{2x}-1)^3} dx$.

Зробимо підстановку $e^{2x} = t \Rightarrow d(e^{2x}) = dt$; $2e^{2x} dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{2t}$. Тоді

$$I = \int \sqrt{(t-1)^3} \cdot \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2} \int \frac{(t-1)^{\frac{3}{2}}}{t} dt = \left[\begin{array}{l} \text{Зробимо наступну заміну: } t-1 = u^2; \\ \Rightarrow t = u^2 + 1; \quad dt = 2u du \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{(u^2)^{\frac{3}{2}}}{u^2+1} \cdot 2u du = \int \frac{u^4}{u^2+1} du.$$

Виділяємо цілу частину дробу:

$$\frac{-\frac{u^4}{u^2+1}}{-u^2} \quad \left| \frac{u^2+1}{u^2-1} \right.$$

$$\frac{-u^2}{-u^2-1} \quad \left| \frac{1}{1} \right.$$

$$\Rightarrow I = \int \left(u^2 - 1 + \frac{1}{u^2+1} \right) du = \left(\frac{u^3}{3} - u + \operatorname{arctg} u \right) + C = \left[\begin{array}{l} u^2 = t - 1; \Rightarrow u^2 = e^x - 1; \\ u = \sqrt{e^x - 1}; \end{array} \right] =$$

$$= \frac{(\sqrt{e^{2x}-1})^3}{3} - \sqrt{e^{2x}-1} + \operatorname{arctg} \sqrt{e^{2x}-1} + C = \frac{1}{3} \sqrt{e^{2x}-1} (e^{2x}-4) + \operatorname{arctg} \sqrt{e^{2x}-1} + C.$$

Зауваження. У цьому прикладі замість виконання двох заміни можна було зробити одну заміну: $e^{2x} - 1 = u^2$.

Приклад 6.15. Знайти інтеграл $I = \int 3^{-\sqrt{x}} dx$.

Зробимо заміну змінної $x = t^2$; $dx = 2tdt$. Тоді

$$I = \int 3^{-t} \cdot 2tdt = \left[\begin{array}{l} \text{інтегруємо частинами: } \int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du; \\ u = 2t; \Rightarrow du = 2dt; \\ dv = 3^{-t} dt; \Rightarrow v = \int 3^{-t} dt = -\int 3^{-t} d(-t) = -\frac{3^{-t}}{\ln 3}; \end{array} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= 2t \left(-\frac{3^{-t}}{\ln 3} \right) - \int \left(-\frac{3^{-t}}{\ln 3} \right) \cdot 2dt = -\frac{2t \cdot 3^{-t}}{\ln 3} + \frac{2}{\ln 3} \int 3^{-t} dt = \\
&= -\frac{2t \cdot 3^{-t}}{\ln 3} - \frac{2}{\ln 3} \int 3^{-t} d(-t) = -\frac{2t \cdot 3^{-t}}{\ln 3} - \frac{2}{\ln 3} \cdot \frac{3^{-t}}{\ln 3} + C = \\
&= \{ t = \sqrt{x} \} = -\frac{2\sqrt{x} \cdot 3^{-\sqrt{x}}}{\ln 3} - \frac{2 \cdot 3^{-\sqrt{x}}}{\ln^2 3} + C = C - 2 \cdot \frac{3^{-\sqrt{x}}}{\ln 3} \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\ln 3} \right).
\end{aligned}$$

Завдання для самоконтролю

Обчислити інтеграли:

- | | | |
|---|---|---|
| 6.1. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}};$ | 6.2. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}};$ | 6.3. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}-1)};$ |
| 6.4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}};$ | 6.5. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}};$ | 6.6. $\int \frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2})};$ |
| 6.7. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}};$ | 6.8. $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} dx;$ | 6.9. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x};$ |
| 6.10. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}};$ | 6.11. $\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}};$ | 6.12. $\int \sqrt{x^2-2x-1} dx;$ |
| 6.13. $\int \frac{\sqrt{1+x^2} dx}{x^4};$ | 6.14. $\int x^2\sqrt{4-x^2} dx;$ | 6.15. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}};$ |
| 6.16. $\int x^{-1}(1+\sqrt[3]{x})^{-3} dx;$ | 6.17. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx;$ | 6.18. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x^4\sqrt{x^3}} dx;$ |
| 6.19. $\int \frac{e^{x-2}}{e^x+3} dx;$ | 6.20. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}};$ | 6.21. $\int \sin \sqrt[3]{x} dx.$ |

- Відповіді.** **6.1.** $\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}} - 3(x+1)^{\frac{1}{3}} + 3 \ln|1 + \sqrt[3]{x+1}| + C.$ **6.2.** $x + \frac{6\sqrt[6]{x^5}}{5} + \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} + 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6 \ln|\sqrt[6]{x} - 1| + C.$ **6.3.** $3\sqrt[3]{x} + 3 \ln|\sqrt[3]{x} - 1| + C.$
- 6.4.** $2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4 \ln(1 + \sqrt[4]{x}) + C.$ **6.5.** $\frac{6}{5} [\sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt[12]{x^5} + 2 \ln|\sqrt[12]{x^5} - 1|] + C.$
- 6.6.** $\ln|x| - 10 \ln|\sqrt[10]{x} + 1| + \frac{10}{\sqrt[10]{x}} - \frac{5}{\sqrt[5]{x}} + \frac{10}{3\sqrt[10]{x^3}} - \frac{5}{2\sqrt[5]{x^2}} + C.$
- 6.7.** $6 \left[\frac{1}{9} \sqrt{(x+1)^3} - \frac{1}{8} \sqrt[3]{(x+1)^4} + \frac{1}{7} \sqrt[6]{(x+1)^7} - \frac{x+1}{6} + \frac{1}{5} \sqrt[6]{(x+1)^5} - \frac{1}{4} \sqrt[3]{(x+1)^2} \right] + C.$
- 6.8.** $\frac{1}{3} \sqrt{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3} + C.$ **6.9.** $\ln \left| \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \right| + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C.$ **6.10.** $C - \ln \left| \frac{2+x+2\sqrt{x^2+x+1}}{2x} \right|.$

6.11. $C - \frac{1}{15} \ln \left| \frac{x+6+\sqrt{15(4x-x^2)}}{2x-3} \right|$. **6.12.** $\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x-1} - \ln|x-1+\sqrt{x^2-2x-1}| + C$.
6.13. $C - \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}$. **6.14.** $\frac{x}{4}(x^2-2)\sqrt{4-x^2} + 2 \arcsin \frac{x}{2} + C$. **6.15.** $\frac{\sqrt{x^2-9}}{9x} + C$.
6.16. $3 \left(\ln \left| \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} \right| + \frac{2\sqrt[3]{x}+3}{2(1+\sqrt[3]{x})^2} \right) + C$. **6.17.** $\frac{3}{7}(1+\sqrt[4]{x})^{\frac{4}{3}}(4\sqrt[4]{x}-3) + C$. **6.18.** $-\frac{4}{3} \left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}} \right)^3 + C$.
6.19. $\frac{5}{3} \ln(3+e^x) - \frac{2}{3} \ln e^x + C$. **6.20.** $\ln \frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1} + C$. **6.21.** $3(2-\sqrt[3]{x^2}) \cos \sqrt[3]{x} + 6\sqrt[3]{x} \sin \sqrt[3]{x} + C$.

7. ІНТЕГРАЛИ, ЩО НЕ ВИРАЖАЮТЬСЯ ЧЕРЕЗ ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ

Інтегрування елементарних функцій не завжди знову приводить до елементарних функцій. Строго доведено, що існують елементарні функції, інтеграли від яких не є елементарними функціями. Про такі інтеграли кажуть, що вони не обчислюються в скінченному вигляді або «не беруться».

Наприклад, розглянемо інтеграл $\int \frac{x^3}{\sqrt[4]{1-x^7}} dx = \int x^3(1-x^7)^{-\frac{1}{4}} dx$. Оскільки

$$m=3, n=7, p=-\frac{1}{4}, \text{ а числа } p=-\frac{1}{4}, \frac{m+1}{n}=\frac{3+1}{7}=\frac{4}{7} \text{ та } \frac{m+1}{n}+p=\frac{4}{7}-\frac{1}{4}=\frac{9}{28}$$

— дробові, то за теоремою Чебишева заданий інтеграл «не береться», тобто, немає елементарної функції, через яку цей інтеграл виражається в скінченному вигляді.

В таких випадках первісна є деякою новою неелементарною функцією, тобто функцією, яка не виражається через скінченне число арифметичних дій і суперпозицій над основними елементарними функціями. Багато з таких функцій досить добре вивчені і широко використовуються в технічних дисциплінах, наприклад,

$$\int e^{-x^2} dx \quad \text{— інтеграл Пуассона;}$$

$$\int \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{— інтегральний синус;}$$

$\int \frac{\cos x}{x} dx$ — інтегральний косинус;

$\int \cos x^2 dx$, $\int \sin x^2 dx$ — інтеграли Френеля;

$\int \frac{dx}{\ln x} = \int \frac{e^x}{x} dx$ — інтегральний логарифм.

Первісні від функцій e^{-x^2} , $\cos x^2$, $\frac{1}{\ln x}$ та інших досить добре вивчені, складені детальні таблиці значень цих функцій для різних значень аргументу x .

На завершення відмітимо: розглянуті способи та методи інтегрування не вичерпують усіх можливих класів аналітично інтегровних елементарних функцій.

Для досконалого обчислення інтегралів необхідно мати відповідні знання, навички та винахідливість, які досягаються лише практикою розв'язування достатньо великого числа прикладів, а успіх розв'язування інтегралів і задоволення від результату насамперед залежить від кількості розв'язаних прикладів, а також методичності цих занять.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Дубовик В. П., Юрик І. І.* Вища математика: Навч. посібн. — К.: А.С.К., 2006. — 648 с.: іл.
2. *Дубовик В. П., Юрик І. І.* Вища математика. Збірник задач / Київ: А.С.К., 2005. — 480 с.
3. Вища математика: Підручник / *Домбровський В. А., Крижанівський І. М., Мацьків Р. С., Мигович Ф. М., Неміш В. М., Окрепкий Б. С., Хома Г. П., Шелестовська М. Я.*; за редакцією Шинкарика М. І. — Тернопіль: Видавництво Карп'юка, 2003. — 480 с. — ISBN 966-7946-15-0.
4. *Герасимчук В. С., Васильченко Г. С., Кравцов В. І.* Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах. Невизначений, визначений та невласні інтеграли. Звичайні диференціальні рівняння. Прикладні задачі. Навч. посіб. — К.: Книги України ЛТД, 2010. — 470 с. — ISBN 978-966-2331-05-9.
5. *Клепко В. Ю., Голець В. Л.* Вища математика в прикладах і задачах: Навчальний посібник. 2-ге видання. — К.: Центр учбової літератури, 2009. — 594 с. — ISBN 978-966-364-928-3.