МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
"КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО"

Т. В. Авдєєва, В. М. Горбачук

Лінійна алгебра: збірник завдань для індивідуальної роботи

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського

як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра

за освітньою програмою «Страхова та фінансова математика»

спеціальності E7 Математика

Електронне мережеве навчальне видання

КИЇВ
КПІ ІМ. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО
2025

УДК 512.8(07)+512.64(075.8)
А 18

Автори: Т. В. Авдєєва, ст.викладач
В. М. Горбачук, д.ф.-м.н., проф. каф

Рецензент: Іллічева Л.М., канд. фіз.-мат. наук, доц. каф. прикладної математики факультету комп'ютерних наук та технологій (ФКНТ) Національного авіаційного університету

Відповідальний редактор: Дудкін М.Є., д-р фіз.-мат. наук, проф

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 9 від 26.06.2025 р.)
за поданням вченої ради Фізико-математичного факультету
(протокол № 7 від 04.06.2025 р.)

А 18
Авдєєва Т.В.
Лінійна алгебра: збірник завдань для індивідуальної роботи [Електронний ресурс]: навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освіт. програмою «Страхова та фінансова математика» спец. Е7 (111) Математика / Т. В. Авдєєва, В. М. Горбачук; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електрон. текст. дані (1 файл). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025. – 127 с.

Посібник містить задачі, які необхідні для оволодіння курсом лінійної алгебри, що читається студентам фізико-математичного факультету "КПІ ім. Ігоря Сікорського". Він містить завдання з таких розділів: комплексні числа, матриці, визначники, системи лінійних рівнянь, лінійні простори, евклідові та унітарні простори, лінійні, білінійні та квадратичні форми, многочлени. Збірник буде корисним не тільки для студентів фізико-математичного факультету, але й для студентів інших спеціальностей, де курс лінійної алгебри виділено в окрему дисципліну.

УДК 512.8(07)+512.64(075.8)

Реєстр. № НП 24/25-606. Обсяг 7 авт. арк.
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056
https://kpi.ua
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© Т. В. Авдєєва, В. М. Горбачук, 2025
© "КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025"

ЗМІСТ

1. Вступ

Лінійна алгебра відіграє фундаментальну роль в математичній освіті. Адже поняття абстрактного векторного простору, вектора, як його елемента, базису та координат вектора в базисі, лінійних та полілінійних відображень використовують всі галузі математики та комп'ютерних наук. Лінійна алгебра оперує досить абстрактними поняттями, такими як лінійні простори, лінійні відображення, полілінійні та білінійні форми, власні числа, власні вектори тощо. Ці поняття є достатньо складними, вимагають уміння аналізувати дані, будувати моделі та вирішувати складні питання, які є фундаментом для багатьох інших галузей математики (наприклад, функціонального аналізу), інформатики, фізики, інженерії, статистики та економіки. Сучасне розуміння векторів і матриць є критично важливим для машинного навчання, комп'ютерної графіки, обробки сигналів, квантової механіки та багатьох інших сучасних технологій. Під час роботи в аудиторії на практичних заняттях або на лекції студенти мають можливість познайомитися із алгоритмами дій на базі теоретичного матеріалу, але при індивідуальному розв'язуванні задач стикаються із певними труднощами. Це відбувається тому, що задачі з лінійної алгебри часто вимагають нестандартного підходу та комбінації різних методів. Самостійні спроби знайти розв'язок поставленої задачі під час виконання індивідуальних завдань навчають студента аналізувати проблему, виділяти ключові елементи, розробляти стратегію розв'язання та перевіряти отримані результати. Самостійне розв'язування задач допомагає студенту зрозуміти внутрішню логіку лінійно-алгебраїчних методів, що полегшує їх подальше застосування в більш складних контекстах. Самостійна робота студента завжди відіграє фундаментальну роль у глибокому розумінні предмета та розвитку ключових математичних навичок. Спроба самостійно розібратися з означеннями, теоремами та їх наслідками, а потім застосувати їх у задачах, сприяє формуванню міцних нейронних зв'язків і кращому запам'ятовуванню матеріалу. Самостійна робота без корекції викладача перетворює студента з пасивного слухача на активного учасника навчального процесу. Він самостійно шукає шляхи розв'язання, аналізує доступну інформацію, виправляє свої помилки та вчиться на них. Це також сприяє розвитку навичок самоконтролю та самооцінки. Студент вчиться об'єктивно оцінювати свій рівень розуміння матеріалу та визначати області, які потребують додаткового опрацювання. Даний збірник завдань для індивідуальної роботи з лінійної алгебри спрямовано на організацію поза аудиторної роботи студентів математичних спеціальностей.

Запропонований збірник містить 30 варіантів типових індивідуальних завдань із таких тем: комплексні числа, матриці, визначники, системи лінійних рівнянь, лінійні простори, евклідові та унітарні простори, лінійні, білінійні та квадратичні форми, многочлени. Для виконання завдань варіанта розрахункової роботи укладачі рекомендують студентам ознайомитися з відповідними темами та прикладами розв'язування типових задач зі списку рекомендованої літератури або за конспектом лекцій. Збірник завдань також можна використовувати як варіанти перевірочних робіт (самостійних або контрольних) за певною темою, вибираючи із запропонованого переліку потрібні завдання.

Пам'ятаємо, що «Дорогу осилить лише той, хто йде»!

Подолання труднощів у процесі самостійного розв'язування виховує наполегливість, терпіння та впевненість у власних силах!

Успіхів у навчанні та натхнення у праці!

2. Варіанти для індивідуального опрацювання

2.1. **Варіант 1.**

Комплексні числа

1) Записати комплексне число $z = \frac{2-6i}{1-i} + (1+i)^4 - i^7$ в алгебраїчної формe, знайти дійсну та уявну частину даного комплексного числа, модуль та аргумент цього комплексного числа.
2) Подати число у тригонометричній формі, вказати модуль та аргумент комплексного числа. Використовуючи формулу Муавра (піднесення до степеня комплексного числа) знайдіть 16-ий степінь числа $z = \sqrt{3} + i$.
3) Знайти всі значення $\sqrt[5]{3i}$ та зобразити всі ці значення на комплексній площини.
4) На комплексной площині зобразити область, що задовольняє умовам $|z-3-2i| \le 3, \quad 3 \le |z-6+i|$.
5) Розв'язати рівняння $z^4 + 13z^2 + 36 = 0$.

Матриці, визначники, обернена матриця

1) Знайти значення вказаного матричного виразу $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $(A^T \cdot B) - (B^T \cdot A)$.
2) Розв'язати матричне рівняння $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.
3) Знайти значення многочлену $f(A)$ від матриці A, якщо $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + 4, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
4) Використовуючи елементарні властивості матриць, з'ясувати за якої умови на матриці A та B буде мати місце рівність $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?
5) Обчисліть визначники четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.
6) Розв'язати рівняння : $\begin{vmatrix} 3x-1 & 1 \\ x+1 & x \end{vmatrix} = 0$.
7) Обчислити обернену матрицю A^{-1} для наведеної матриці A: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Результат перевірте $A \cdot A^{-1} = E$.

8) Розв'язати рівняння: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 13 & 9 \end{pmatrix}$.

9) Використовуючи метод елементарних перетворень рядків, знайти для даної матриці обернену: $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

10) Методом обрамляючих мінорів для даної матриці знайти який–небудь базисний мінор та визначите ранг матриці: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & -1 & 10 & -1 \\ -1 & -2 & -5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

11) Використовуючи елементарні перетворення рядків або стовпчиків знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & -6 & -1 & 13 \end{pmatrix}$.

Системи лінійних рівнянь

1) Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера, методом Ґаусса та матричним методом $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8, \\ -2x_1 + 3x_2 = 13, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 8. \end{cases}$

2) Розв'язати методом Ґаусса систему лінійних неоднорідних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 + 2x_5 = 6, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 4, \\ 6x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 = -1, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 3. \end{cases}$$

3) Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь $\begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 - x_3 + x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ -3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

Лінійні простори

1) З'ясувати, чи є лінійним простором множина векторів з R^3, що є колінеарними до вектора $\overrightarrow{a} = (4; 5; -1)$. Операції додавання елементів та множення на скаляр визначаються звичайним чином.

2) Вказати який-небудь лінійний простір, що містить дані вектори, та встановіть лінійну залежність або незалежність даної системи векторів:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$.

3) Знайти всі базисі системи векторів: $\overrightarrow{a_1} = (1; 2; 0; 0)$, $\overrightarrow{a_2} = (1; 2; 3; 4)$, $\overrightarrow{a_3} = (3; 6; 0; 0)$, $\overrightarrow{a_4} = (2; 1; -4; 5)$.

4) Знайти базис та розмірність лінійного простору векторів з R^3, що компланарні з векторами $\overrightarrow{a} = (0; -2; 3)$ та $\overrightarrow{b} = (1; 5; 4)$.

5) Знайти координати останнього вектора в базисі, утвореному першими чотирма векторами: $\overrightarrow{a_1} = (-1; 4; 3; 2)$, $\overrightarrow{a_2} = (0; 5; 5; 7)$, $\overrightarrow{a_3} = (2; 4; 4; 8)$, $\overrightarrow{a_4} = (6; 3; -1; -5)$, $\overrightarrow{a_5} = (-1; -2; 1; 10)$.

6) Відомі координати вектора $\overrightarrow{b}$ в деякому базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$. Знайти координати цього вектора $\overrightarrow{b}$ в базисі $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$, якщо відомий зв'язок між базисними векторами. Записати матрицю переходу від базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ до базису $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$.
$\overrightarrow{b} = (-2; 1; 2)$, $\overrightarrow{f_1} = -\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + 3\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{f_3} = -\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + 3\overrightarrow{e_3}$.

7) Знайти базис і розмірність суми та розмірність перетину підпросторів L_1 та L_2 простору R^4, якщо L_1 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$, а L_2 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$, якщо
$\overrightarrow{a_1} = (1, 1, 2, -1), \overrightarrow{a_2} = (1, -1, 1, 2), \overrightarrow{a_3} = (-1, 5, 1, 8)$,
$\overrightarrow{b_1} = (0, -4, -2, 6), \overrightarrow{b_2} = (2, 1, 1, -1), \overrightarrow{b_3} = (4, 0, 1, 1)$.

Унітарний та евклідів простори

1) Нехай L – лінійний простір над полем дійсних чисел. Перевірити можливість введення скалярного добутку у просторі L вказаним способом:
L – простір матриць порядку 2. Для довільних $f = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & u_1 \end{pmatrix}$ та $g = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & u_2 \end{pmatrix}$ визначимо $(f, g) = x_1 x_2 + y_1 y_2$.

2) В евклідовому та унітарному просторах, елементами яких є набори $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n)$ відповідно дійсних та комплексних чисел, задано скалярні добутки. Побудувати матрицю Грама для векторів $\overrightarrow{f_i}$ та дослідити на лінійну залежність цю систему векторів:
$\overrightarrow{f_1} = (1; 1; 0)$, $\overrightarrow{f_2} = (-1; 1; 0), \overrightarrow{f_3} = (0; 0; 1)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1\overline{y_1} - ix_1\overline{y_2} + ix_2\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2} + (2+i)x_2\overline{y_3} + (2-i)x_3\overline{y_2} + 6x_3\overline{y_3}$.

3) Координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Використовуючи процес ортогоналізації Грама-Шмідта побудувати ортонормований базис підпростору, що є лінійною оболонкою векторів
$\overrightarrow{a_1} = (0; -1; 5; 1)$, $\overrightarrow{a_2} = (4; 1; 2; -1)$, $\overrightarrow{a_3} = (6; 1; 1; 9)$.

4) В деякому ортонормованому базисі задано L - лінійну оболонку векторів. Знайти базис ортогонального доповнення $L^{\perp}$ до лінійного підпростору L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (5; 5; -1; 6)$, $\overrightarrow{a_2} = (2; 3; 4; 0)$.

5) Знайти систему рівнянь, якою задається підпростір L, якщо його ортогональне доповнення $L^{\perp}$ підпростору $L^{\perp} \subset R^4$ задається наступною системою рівнянь:
$-4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0,$
$5x_1 + 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 0.$

6) Нехай координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та $\overrightarrow{x}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{x}$ на підпростір L, що є лінійною оболонкою векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та визначити кут і відстань між $\overrightarrow{x}$ та L, якщо
$\overrightarrow{a_1} = (1; 2; -1; 1),\ \overrightarrow{a_2} = (3; 1; 2; 2),\ \overrightarrow{a_3} = (1; 4; 5; 3),\ \overrightarrow{x} = (-1; 0; 3; 1).$

7) У дійсному лінійному просторі задано стандартний скалярний добуток. Застосовуючи матрицю Грама знайти об'єм тетраедра, побудованого на векторах $\overrightarrow{e_1} = (2; 1; 5),\quad \overrightarrow{e_2} = (-2; 1; -3),\quad \overrightarrow{e_3} = (1; 1; -4).$

Білінійні та квадратичні форми

1) Методом Лагранжа звести квадратичну форму до канонічного та нормального виглядів. Записати невироджене лінійне перетворення, яке зводить форму до нормального вигляду:
$-4x_1^2+11x_2^2+11x_3^2+15x_4^2-4x_1x_2-4x_1x_3-4x_1x_4-14x_2x_3+10x_2x_4-26x_3x_4.$

2) Методом Якобі звести квадратичну форму до канонічного вигляду:
$4x_1^2 + 13x_2^2 + 12x_3^2 + 8x_1x_2 + 8x_1x_3 - 10x_2x_3.$

3) За допомогою критерію Сільвестра з'ясувати знакосталість квадратичної форми $x_1^2 + 2x_2^2 + 47x_3^2 - x_1x_2 - 12x_1x_3 + 6x_2x_3$
.

Многочлени

1) За допомогою схеми Горнера визначити кратність кореня $c = 4$ для многочлена $f(x) = 2x^5 - 24x^4 + 97x^3 - 140x^2 + 48x - 64.$

2) Знайти всі раціональні корені многочлена $f(x) = 6x^4 - x^3 + 22x^2 - 4x - 8.$

3) Розкласти многочлен у добуток незвідних множників над полем R та полем C: $f(x) = x^4 - 9x^2 + 64.$

4) За допомогою схеми Горнера розкласти даний правильний дріб на найпростіші дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{3x^5 + x^3 + 6x - 1}{(x+1)^6}.$

5) Методом невизначених коефіцієнтів розкласти даний правильний дріб на елементарні дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{3x^3 - 11x^2 - 8x - 24}{(x^2+1)(x-2)(x+1)}.$

6) Використовуючи алгоритм Евклида, знайти найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ та $g(x)$:
$f(x) = x^5 + 3x^3 - x^2 + 2x - 1, \qquad g(x) = x^6 + x^4 + 3x^3 + x^2 + 3x + 1.$

2.2. Варіант 2.

Комплексні числа

1) Записати комплексне число $z = \frac{5+15i}{2i-1} + (1-i)^5 + i^9$ в алгебричній формі, знайти дійсну та уявну частину даного комплексного числа, модуль та аргумент цього комплексного числа.
2) Подати число у тригонометричній формі, вказати модуль та аргумент комплексного числа. Використовуючи формулу Муавра (піднесення до степеня комплексного числа) знайдіть n-ий степінь числа $z = 4 + 4i$, $n = 43$.
3) Знайти всі значення $\sqrt[4]{-2i}$ та зобразити всі ці значення на комплексній площини.
4) На комплексной площині зобразити область, що задовольняє умовам $|z - 1 - 3i| \le 4, \quad -1 \le \mathrm{Re}z < 4, \quad \mathrm{Im}z \le 5.$
5) Розв'язати рівняння $z^4 + 5z^2 + 4 = 0$.

Матриці, визначники, обернена матриця

1) Знайти значення вказаного матричного виразу $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -5 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix}$; $(AB)^T - B^T A^T$.
2) Розв'язати матричне рівняння $3 \cdot X + \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.
3) Знайти значення многочлену $f(A)$ від матриці A, якщо $f(x) = x^3 + 5x^2 + 2x - 3, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
4) Використовуючи елементарні властивості матриць, знайти всі матриці B, що комутують з матрицею $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, тобто $AB = BA$.
5) Обчисліть визначники четвертого порядку: $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 7 & -3 \end{vmatrix}$.
6) Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} 1-x & 4 \\ 2-x & x \end{vmatrix} \le -4$.

7) Обчислити обернену матрицю A^{-1} для наведеної матриці A: $\begin{pmatrix} 7 & -1 & 7 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Результат перевірте $A \cdot A^{-1} = E$.

8) Розв'язати рівняння: $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

9) Використовуючи метод елементарних перетворень рядків, знайти для даної матриці обернену: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

10) Методом обрамляючих мінорів для даної матриці знайти який–небудь базисний мінор та визначите ранг матриці: $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & 0 & 7 & 6 \\ 1 & 8 & 2 & 11 & 12 \end{pmatrix}$.

11) Використовуючи елементарні перетворення рядків або стовпчиків знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 4 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & -3 \\ 4 & -2 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Системи лінійних рівнянь

1) Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера, методом Ґаусса та матричним методом $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10, \\ -3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = -3, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$

2) Розв'язати методом Ґаусса систему лінійних неоднорідних рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_5 = -2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 1, \\ -3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 2. \end{cases}$$

3) Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ -2x_1 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

Лінійні простори

1) З'ясувати, чи є множина векторів з R^3, що є компланарними з векторами $\overrightarrow{a} = (1;2;3)$ та $\overrightarrow{b} = (-2;3;0)$ лінійним простором. Операції додавання елементів та множення на скаляр визначаються звичайним чином.

2) Вказати який-небудь лінійний простір, що містить дані вектори, та встановіть лінійну залежність або незалежність даної системи векторів: $f_1(x) = x^2 - x - 1,\ f_2(x) = x^2 + 3,\ f_3(x) = 2x^2 - 4x - 7.$

3) Знайти всі базисі системи векторів: $\overrightarrow{a_1} = (1;2;3;4),\ \overrightarrow{a_2} = (2;3;4;5),$ $\overrightarrow{a_3} = (3;4;5;6),\ \overrightarrow{a_4} = (4;5;6;7).$

4) Знайти базис та розмірність лінійного простору векторів з R^3, що компланарні з векторами $\overrightarrow{a} = (1;7;4)$ та $\overrightarrow{b} = (3;8;1)$.

5) Знайти координати останнього вектора в базисі, утвореному першими чотирма векторами: $f_1(x) = 3x^3 + 2x^2 + 7x + 1,\ f_2(x) = 4x^3 - x + 2,$ $f_3(x) = 5x^3+3x^2+2x+8,\ f_4(x) = 6x^3+x^2+4x+7,\ f_5(x) = 14x^3+x^2+12x+9.$

6) Відомі координати вектора $\overrightarrow{b}$ в деякому базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$. Знайти координати цього вектора $\overrightarrow{b}$ в базисі $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$, якщо відомий зв'язок між базисними векторами. Записати матрицю переходу від базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ до базису $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$.
$\overrightarrow{b} = (-1;2;1),\ \overrightarrow{f_1} = -\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{f_3} = 3\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}.$

7) Знайти базис і розмірність суми та розмірність перетину підпросторів L_1 та L_2 простору R^4, якщо L_1 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$, а L_2 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$, якщо
$\overrightarrow{a_1} = (-1,2,1,0), \overrightarrow{a_2} = (1,-1,2,1), \overrightarrow{a_3} = (2,-1,7,3),$
$\overrightarrow{b_1} = (4,-6,6,2), \overrightarrow{b_2} = (2,1,-1,2), \overrightarrow{b_3} = (0,-8,8,-2).$

Унітарний та евклідів простори

1) Нехай L – лінійний простір над полем дійсних чисел. Перевірити можливість введення скалярного добутку у просторі L вказаним способом:
$L = R^3$. Для довільних $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in L$ визначимо $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = |\overrightarrow{x}||\overrightarrow{y}|.$

2) В евклідовому та унітарному просторах, елементами яких є набори $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n)$ відповідно дійсних та комплексних чисел, задано скалярні добутки. Побудувати матрицю Грама для векторів $\overrightarrow{f_i}$ та дослідити на лінійну залежність цю систему векторів:
$\overrightarrow{f_1} = (1;-2i),\ \overrightarrow{f_2} = (i;2),$
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 2x_1\overline{y_1} + (1+i)x_1\overline{y_2} + (1-i)x_2\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2}.$

3) Координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Використовуючи процес ортогоналізації Грама-Шмідта побудувати ортонормований базис підпростору, що є лінійною оболонкою векторів
$\overrightarrow{a_1} = (6;5;2;1),\ \overrightarrow{a_2} = (1;1;2;1),\ \overrightarrow{a_3} = (2;-2;2;3).$

4) В деякому ортонормованому базисі задано L - лінійну оболонку векторів. Знайти базис ортогонального доповнення $L^{\perp}$ до лінійного підпростору L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (1;-2;3;4),\ \overrightarrow{a_2} = (2;0;5;1),\ \overrightarrow{a_3} = (4;-1;2;5).$

5) Знайти систему рівнянь, якою задається підпростір L, якщо його ортогональне доповнення $L^{\perp}$ підпростору $L^{\perp} \subset R^4$ задається рівнянням $5x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 = 0$.
6) Нехай координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та $\overrightarrow{x}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{x}$ на підпростір L, що є лінійною оболонкою векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та визначити кут і відстань між $\overrightarrow{x}$ та L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (1;1;0;1)$, $\overrightarrow{a_2} = (2;-1;3;3)$, $\overrightarrow{a_3} = (-3;0;2;4)$, $\overrightarrow{x} = (3;2;5;1)$.
7) Нехай координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та $\overrightarrow{x}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{x}$ на підпростір L, що є лінійною оболонкою векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та визначити кут і відстань між $\overrightarrow{x}$ та L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (2;0;0;3)$, $\overrightarrow{a_2} = (3;-2;1;4)$, $\overrightarrow{a_3} = (1;-5;1;0)$, $\overrightarrow{x} = (4;1;2;6)$.
8) У дійсному лінійному просторі задано стандартний скалярний добуток. Застосовуючи матрицю Грама знайти розклад вектора $\overrightarrow{a} = (6;7;7)$ за векторами $\overrightarrow{e_1} = (2;1;5)$, $\overrightarrow{e_2} = (3;2;1)$, $\overrightarrow{e_3} = (4;1;1)$.

Білінійні та квадратичні форми

1) Методом Лагранжа звести квадратичну форму до канонічного та нормального виглядів. Записати невироджене лінійне перетворення, яке зводить форму до нормального вигляду:
$$-4x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 - 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 8x_1x_4 - 26x_2x_3 + 10x_2x_4 - 24x_3x_4.$$
2) Методом Якобі звести квадратичну форму до канонічного вигляду:
$$-4x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 - 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 26x_2x_3.$$
3) За допомогою критерію Сільвестра з'ясувати знакосталість квадратичної форми $x_1^2 + 2x_2^2 + 19x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 6x_2x_3$.

Многочлени

1) За допомогою схеми Горнера визначити кратність кореня $c = 2$ для многочлена $f(x) = 5x^5 - 20x^4 + 22x^3 - 7x^2 + 4x + 4$.
2) Знайти всі раціональні корені многочлена $f(x) = 18x^4 + 21x^3 + 30x^2 + 28x + 8$.
3) Розкласти многочлен у добуток незвідних множників над полем R та полем C: $f(x) = x^6 - 8$.
4) За допомогою схеми Горнера розкласти даний правильний дріб на найпростіші дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{x^5 + 2x^4 - x + 1}{(x-2)^6}$.
5) Методом невизначених коефіцієнтів розкласти даний правильний дріб на елементарні дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{x^3 + 16x^2 - 44x - 4}{(x^2 - 2x + 2)(x-3)(x+4)}$.
6) Використовуючи алгоритм Евклида, знайти найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ та $g(x)$:
$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 3, \qquad g(x) = x^5 + 2x^3 + x^2 + x + 1.$$

2.3. **Варіант 3.**

Комплексні числа

1) Записати комплексне число z в алгебричній формі, знайти дійсну та уявну частину даного комплексного числа, модуль та аргумент цього комплексного числа $z = \frac{5+10i}{-1-2i} + (1+2i)^3 - 3i^{13}$.
2) Подати число у тригонометричній формі, вказати модуль та аргумент комплексного числа. Використовуючи формулу Муавра (піднесення до степеня комплексного числа) знайдіть n-ий степінь числа $z = 5 + 5i\sqrt{3}$, $n = 15$.
3) Знайти всі значення $\sqrt[5]{2i+2}$ та зобразити всі ці значення на комплексній площини.
4) На комплексной площині зобразити область, що задовольняє умовам $|z+1+2i| \leq 3,\ 2 \leq \mathrm{Re}z,\quad \mathrm{Im}z \leq 5$.
5) Розв'язати рівняння $z^4 - 3z^2 - 4 = 0$.

Матриці, визначники, обернена матриця

1) Знайти значення вказаного матричного виразу $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ 7 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$; $AB - BA$.
2) Розв'язати матричне рівняння $3 \cdot X - 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -9 & -5 \end{pmatrix}$.
3) Знайти значення многочлену $f(A)$ від матриці A, якщо $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x + 1,\ A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.
4) Використовуючи елементарні властивості матриць, знайти всі матриці X, що задовольняють рівняння $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 30 & 33 \end{pmatrix}$.
5) Обчисліть визначники четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 7 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.
6) Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} 2+3x & x+6 \\ 2 & x \end{vmatrix} > 0$.
7) Обчислити обернену матрицю A^{-1} для наведеної матриці A: $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \\ 1 & -5 & -6 \end{pmatrix}$.

   Результат перевірте $A \cdot A^{-1} = E$.

8) Розв'язати рівняння: $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$.

9) Використовуючи метод елементарних перетворень рядків, знайти для даної матриці обернену: $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

10) Методом обрамляючих мінорів для даної матриці знайти який–небудь базисний мінор та визначите ранг матриці: $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -8 & 1 \end{pmatrix}$.

11) Використовуючи елементарні перетворення рядків або стовпчиків знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -4 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Системи лінійних рівнянь

1) Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера, методом Ґаусса та матричним методом $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -5, \\ 3x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$

2) Розв'язати методом Ґаусса систему лінійних неоднорідних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 11, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 - 2x_5 = -4, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 + x_5 = -1. \end{cases}$$

3) Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$

Лінійні простори

1) З'ясувати, чи є лінійним простором множина векторів з R^3, довжина яких не перевищує одиниці. Операції додавання елементів та множення на скаляр визначаються звичайним чином.

2) Вказати який-небудь лінійний простір, що містить дані вектори, та встановіть лінійну залежність або незалежність даної системи векторів: $\overrightarrow{a_1} = (5; -4; 3; 5)$, $\overrightarrow{a_2} = (1; 5; 0; -9)$, $\overrightarrow{a_3} = (3; -14; 3; 23)$.

3) Знайти всі базисі системи векторів: $\overrightarrow{a_1} = (-1; 4; 3; 5)$, $\overrightarrow{a_2} = (2; 1; 0; 1)$, $\overrightarrow{a_3} = (3; 6; 3; 7)$.

4) Знайти базис та розмірність лінійного простору векторів з R^3, що ортогональні до векторів $\overrightarrow{a} = (2; -1; 4)$ та $\overrightarrow{b} = (3; 1; 8)$.

5) Знайти координати останнього вектора в базисі, утвореному першими чотирма векторами: $x_1 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, $x_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$, $x_5 = \begin{pmatrix} 22 & 16 \\ 35 & 52 \end{pmatrix}$.

6) Відомі координати вектора $\overrightarrow{b}$ в деякому базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$. Знайти координати цього вектора $\overrightarrow{b}$ в базисі $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$, якщо відомий зв'язок між базисними векторами. Записати матрицю переходу від базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ до базису $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$.
   $\overrightarrow{b} = (0; 1; 1)$,
   $\overrightarrow{f_1} = 2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{f_3} = -\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$.

7) Знайти базис і розмірність суми та розмірність перетину підпросторів L_1 та L_2 простору R^4, якщо L_1 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$, а L_2 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$, якщо
   $\overrightarrow{a_1} = (1, -1, 1, -1), \overrightarrow{a_2} = (1, 1, -2, 1), \overrightarrow{a_3} = (4, -2, 1, -2)$,
   $\overrightarrow{b_1} = (5, 1, -4, 1), \overrightarrow{b_2} = (3, 1, 0, 1), \overrightarrow{b_3} = (5, 1, -1, 1)$.

Унітарний та евклідів простори

1) Нехай L – лінійний простір над полем дійсних чисел. Перевірити можливість введення скалярного добутку у просторі L вказаним способом:
   L – простір дійсних многочленів, степінь яких не перевищує 3. Для довільних $f, g \in L$ визначимо $(f, g) = \int\limits_0^1 f'(x)g'(x)dx$.

2) В евклідовому та унітарному просторах, елементами яких є набори $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n)$ відповідно дійсних та комплексних чисел, задано скалярні добутки. Побудувати матрицю Грама для векторів $\overrightarrow{f_i}$ та дослідити на лінійну залежність цю систему векторів:
   $\overrightarrow{f_1} = (10; 0; 1)$, $\overrightarrow{f_2} = (0; 7; 1), \overrightarrow{f_3} = (1; -1; 1)$,
   $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3$.

3) Координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Використовуючи процес ортогоналізації Грама-Шмідта побудувати ортонормований базис підпростору, що є лінійною оболонкою векторів
   $\overrightarrow{a_1} = (1; -2; 3; 4)$, $\overrightarrow{a_2} = (2; 0; 5; 1)$, $\overrightarrow{a_3} = (4; -1; 2; 5)$.

4) В деякому ортонормованому базисі задано L - лінійну оболонку векторів. Знайти базис ортогонального доповнення $L^{\perp}$ до лінійного підпростору L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (6; 4; 3; 1)$.

5) Знайти систему рівнянь, якою задається підпростір L, якщо його ортогональне доповнення $L^{\perp}$ підпростору $L^{\perp} \subset R^4$ задається наступною системою рівнянь:
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0,\\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0,\\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 &= 0. \end{aligned}$$

6) Нехай координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та $\overrightarrow{x}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{x}$ на підпростір L, що є лінійною оболонкою векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та визначити кут і відстань між $\overrightarrow{x}$ та L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (3; -1; 2; 0)$, $\overrightarrow{a_2} = (1; 1; 2; 3)$, $\overrightarrow{a_3} = (2; 1; -1; 1)$, $\overrightarrow{x} = (0; 1; 0; 1)$.

7) У дійсному лінійному просторі задано стандартний скалярний добуток. Застосовуючи матрицю Грама знайти відстань між прямими
$$l_1 : \begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 2 + 3t, \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad \text{та} \quad l_2 : \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 3 - 2t, \\ z = 2 + 3t \end{cases} \quad t \in R.$$

Білінійні та квадратичні форми

1) Методом Лагранжа звести квадратичну форму до канонічного та нормального виглядів. Записати невироджене лінійне перетворення, яке зводить форму до нормального вигляду:
$$9x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + 18x_1x_2 + 18x_1x_3 + 18x_1x_4 + 26x_2x_3 + 10x_2x_4 + 28x_3x_4.$$

2) Методом Якобі звести квадратичну форму до канонічного вигляду:
$$-9x_1^2 - x_3^2 - 18x_1x_2 - 18x_1x_3 - 36x_2x_3.$$

3) За допомогою критерію Сільвестра з'ясувати знакосталість квадратичної форми $-x_1^2 - 5x_2^2 - 21x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 20x_2x_3$.

Многочлени

1) За допомогою схеми Горнера визначити кратність кореня $c = 2$ для многочлена $f(x) = 3x^5 - 12x^4 + 10x^3 + 9x^2 - 12x + 4$.

2) Знайти всі раціональні корені многочлена $f(x) = 12x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x - 2$.

3) Розкласти многочлен у добуток незвідних множників над полем R та полем C: $f(x) = x^5 - 4x^3 + 36x$.

4) За допомогою схеми Горнера розкласти даний правильний дріб на найпростіші дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{x^5 - 4x^3 + x^2 - 7x + 10}{(x+3)^6}$.

5) Методом невизначених коефіцієнтів розкласти даний правильний дріб на елементарні дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{x^3 - 20x^2 - 19x - 30}{(x^2+1)(x+3)(x-3)}$.

6) Використовуючи алгоритм Евклида, знайти найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ та $g(x)$:
$$f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 2x + 1, \qquad g(x) = x^5 + x^4 + x^2 + 3x + 2.$$

2.4. **Варіант 4.**

Комплексні числа

1) Записати комплексне число z в алгебричній формі, знайти дійсну та уявну частину даного комплексного числа, модуль та аргумент цього комплексного числа $z = \frac{10+20i}{1+3i} + (2-i)^4 + i^{11}$.
2) Подати число у тригонометричній формі, вказати модуль та аргумент комплексного числа. Використовуючи формулу Муавра (піднесення до степеня комплексного числа) знайдіть n-ий степінь числа $z = -5+5i\sqrt{3}$, $n = 39$.
3) Знайти всі значення $\sqrt[5]{\sqrt{3}-3i}$ та зобразити всі ці значення на комплексній площини.
4) На комплексной площині зобразити область, що задовольняє умовам $|z+2-3i| > 2, \quad 1 \leq \mathrm{Im} z \leq 6$.
5) Розв'язати рівняння $z^4 + 3z^2 - 4 = 0$.

Матриці, визначники, обернена матриця

1) Знайти значення вказаного матричного виразу $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; $(A+B)(B-A) + (A^2 - B^2)$.
2) Розв'язати матричне рівняння $2 \cdot X + \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$.
3) Знайти значення многочлену $f(A)$ від матриці A, якщо $f(x) = -x^4 + 3x^3 + x + 2, \;\; A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.
4) Використовуючи елементарні властивості матриць, знайти всі матриці порядку 2, для яких $\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}(E - A)$.
5) Обчисліть визначники четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.
6) Розв'язати рівняння: $\begin{vmatrix} 2x^2 - 3 & x+2 \\ x & 1 \end{vmatrix} = 0$.

7) Обчислити обернену матрицю A^{-1} для наведеної матриці A: $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Результат перевірте $A \cdot A^{-1} = E$.

8) Розв'язати рівняння: $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

9) Використовуючи метод елементарних перетворень рядків, знайти для даної матриці обернену: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

10) Методом обрамляючих мінорів для даної матриці знайти який–небудь базисний мінор та визначите ранг матриці: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & 7 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

11) Використовуючи елементарні перетворення рядків або стовпчиків знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 2 & -5 \\ 3 & 4 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Системи лінійних рівнянь

1) Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера, методом Ґаусса та матричним методом $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + 15x_3 = -1. \end{cases}$

2) Розв'язати методом Ґаусса систему лінійних неоднорідних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = -6, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 - x_5 = 4, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 - 4x_4 + x_5 = 3. \end{cases}$$

3) Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 0, \\ -x_1 - 7x_2 - 3x_3 - 15x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

Лінійні простори

1) З'ясувати, чи є лінійним простором множина квадратних матриць, сліди яких дорівнюють нулю. Операції додавання елементів та множення на скаляр визначаються звичайним чином.

2) Вказати який-небудь лінійний простір, що містить дані вектори, та встановіть лінійну залежність або незалежність даної системи векторів: $f_1(x) = 1,\ f_2(x) = \arcsin x,\ f_3(x) = \arccos x,\ x \in [-1; 1]$.

3) Знайти всі базисі системи векторів: $\overrightarrow{a_1} = (1; 2; 0; -1; 4),\ \overrightarrow{a_2} = (3; 1; 3; 3; 1),$ $\overrightarrow{a_3} = (7; 3; 2; 8; 1),\ \overrightarrow{a_4} = (4; 2; -1; 5; 0)$.

4) Знайти базис та розмірність лінійного простору матриць порядку 2, що комутують з матрицею $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$.

5) Знайти координати останнього вектора в базисі, утвореному першими чотирма векторами: $\overrightarrow{a_1} = (6; 2; 6; 3),\ \overrightarrow{a_2} = (7; 8; 1; -5),\ \overrightarrow{a_3} = (2; 3; 8; 4),$ $\overrightarrow{a_4} = (6; 1; 1; 9),\ \overrightarrow{a_5} = (13; -1; 15; 30)$.

6) Відомі координати вектора $\overrightarrow{b}$ в деякому базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$. Знайти координати цього вектора $\overrightarrow{b}$ в базисі $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$, якщо відомий зв'язок між базисними векторами. Записати матрицю переходу від базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ до базису $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$.
   $\overrightarrow{b} = (5; 7; 7),$
   $\overrightarrow{f_1} = -\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2} + 4\overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_2} = 2\overrightarrow{e_1} + 5\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_3} = 3\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}.$

7) Знайти базис і розмірність суми та розмірність перетину підпросторів L_1 та L_2 простору R^4, якщо L_1 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$, а L_2 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$, якщо
   $\overrightarrow{a_1} = (1, 1, -1, 1), \overrightarrow{a_2} = (1, 1, 1, -1), \overrightarrow{a_3} = (3, 3, -1, 1),$
   $\overrightarrow{b_1} = (2, 2, -6, 6), \overrightarrow{b_2} = (2, 3, 1, -1), \overrightarrow{b_3} = (4, 5, 1, -1).$

Унітарний та евклідів простори

1) Нехай L – лінійний простір над полем дійсних чисел. Перевірити можливість введення скалярного добутку у просторі L вказаним способом:
   L – простір матриць порядку 2. Для довільних $f = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & u_1 \end{pmatrix}$ та $g = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & u_2 \end{pmatrix}$ визначимо $(f, g) = x_1x_2 + u_1u_2$.

2) В евклідовому та унітарному просторах, елементами яких є набори $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n)$ відповідно дійсних та комплексних чисел, задано скалярні добутки. Побудувати матрицю Грама для векторів $\overrightarrow{f_i}$ та дослідити на лінійну залежність цю систему векторів:
   $\overrightarrow{f_1} = (0; 1 + i),\ \overrightarrow{f_2} = (1 + i; 2i),$
   $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 2x_1\overline{y_1} + (1 + i)x_1\overline{y_2} + (1 - i)x_2\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2}.$

3) Координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Використовуючи процес ортогоналізації Грама-Шмідта побудувати ортонормований базис підпростору, що є лінійною оболонкою векторів

$\overrightarrow{a_1} = (-4; 2; 1; 8)$, $\overrightarrow{a_2} = (6; 3; 2; -6)$, $\overrightarrow{a_3} = (4; -1; 3; 6)$.

4) В деякому ортонормованому базисі задано L - лінійну оболонку векторів. Знайти базис ортогонального доповнення $L^{\perp}$ до лінійного підпростору L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (-4; 5; 2; 6)$, $\overrightarrow{a_2} = (7; 3; 1; 2)$, $\overrightarrow{a_3} = (4; 3; 0; 5)$.

5) Знайти систему рівнянь, якою задається підпростір L, якщо його ортогональне доповнення $L^{\perp}$ підпростору $L^{\perp} \subset R^4$ задається наступною системою рівнянь:
$x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0,$
$-2x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0.$

6) Нехай координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та $\overrightarrow{x}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{x}$ на підпростір L, що є лінійною оболонкою векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та визначити кут і відстань між $\overrightarrow{x}$ та L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (4; 1; 2; 5)$, $\overrightarrow{a_2} = (-2; 1; 3; 0)$, $\overrightarrow{a_3} = (6; 1; 2; 1)$, $\overrightarrow{x} = (0; 1; 1; 1)$.

7) У дійсному лінійному просторі задано стандартний скалярний добуток. Застосовуючи матрицю Грама знайти площу паралелограма побудованого на векторах $\overrightarrow{e_1} = (-2; 1; 3)$, $\overrightarrow{e_2} = (1; 3; -2)$.

Білінійні та квадратичні форми

1) Методом Лагранжа звести квадратичну форму до канонічного та нормального виглядів. Записати невироджене лінійне перетворення, яке зводить форму до нормального вигляду:
$3x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 + 9x_4^2 + 6x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_1x_4 + 2x_2x_3 + 10x_2x_4.$

2) Методом Якобі звести квадратичну форму до канонічного вигляду:
$9x_1^2 + 18x_2^2 + 17x_3^2 + 18x_1x_2 + 18x_1x_3.$

3) За допомогою критерію Сільвестра з'ясувати знакосталість квадратичної форми $x_1^2 + 18x_2^2 + 62x_3^2 - 6x_1x_2 - 10x_1x_3 - 6x_2x_3$.

Многочлени

1) За допомогою схеми Горнера визначити кратність кореня $c = -4$ для многочлена $f(x) = -3x^5 - 25x^4 - 56x^3 - 14x^2 + 16x + 32$.

2) Знайти всі раціональні корені многочлена
$f(x) = 12x^4 - 14x^3 + 22x^2 - 21x + 6$.

3) Розкласти многочлен у добуток незвідних множників над полем R та полем C: $f(x) = x^6 + 125$.

4) За допомогою схеми Горнера розкласти даний правильний дріб на найпростіші дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{x^5 + 5x^4 + 6x^2 - 3x - 2}{(x+2)^6}$.

5) Методом невизначених коефіцієнтів розкласти даний правильний дріб на елементарні дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{2x^3 + 17x^2 - 22x - 42}{(x^2 + 2x + 3)(x-4)(x+6)}$.

6) Використовуючи алгоритм Евклида, знайти найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ та $g(x)$:
$f(x) = x^6 + x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1, \quad g(x) = x^6 + x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 2.$

2.5. **Варіант 5.**

Комплексні числа

1) Записати комплексне число z в алгебричній формі, знайти дійсну та уявну частину даного комплексного числа, модуль та аргумент цього комплексного числа $z = \frac{10i-20}{3i-1} - (2+3i)^3 + i^{14}$.
2) Подати число у тригонометричній формі, вказати модуль та аргумент комплексного числа. Використовуючи формулу Муавра (піднесення до степеня комплексного числа) знайдіть n-ий степінь числа $z = -2,\ \ n = 18$.
3) Знайти всі значення $\sqrt[5]{6+2i\sqrt{3}}$ та зобразити всі ці значення на комплексній площини.
4) На комплексной площині зобразити область, що задовольняє умовам $-1 \leq \mathrm{Re}z \leq 4, \quad -3 \leq \mathrm{Im}z, \quad -\pi/3 \leq \arg z < \pi/2$.
5) Розв'язати рівняння $z^4 - 5z^2 - 36 = 0$.

Матриці, визначники, обернена матриця

1) Знайти значення вказаного матричного виразу $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$;

   $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -5 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$; $AB - BA$.
2) Розв'язати матричне рівняння $2 \cdot X - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.
3) Знайти значення многочлену $f(A)$ від матриці A, якщо
   $f(x) = 2x^4 - x^3 + 3x^2 + 2, \ \ A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
4) Використовуючи елементарні властивості матриць, знайти всі матриці X, що задовольняють рівняння $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 2 & 24 \end{pmatrix}$.
5) Обчисліть визначники четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.
6) $\begin{vmatrix} x+1 & 4x \\ 2 & x-3 \end{vmatrix} \geq 8$.
7) Обчислити обернену матрицю A^{-1} для наведеної матриці A: $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Результат перевірте $A \cdot A^{-1} = E$.

8) Розв'язати рівняння: $\begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 9 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$.

9) Використовуючи метод елементарних перетворень рядків, знайти для даної матриці обернену: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

10) Методом обрамляючих мінорів для даної матриці знайти який–небудь базисний мінор та визначите ранг матриці: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 11 & -6 & 5 \end{pmatrix}$.

11) Використовуючи елементарні перетворення рядків або стовпчиків знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & -5 \\ 3 & -4 & 1 & -3 \\ 5 & -4 & 7 & 13 \end{pmatrix}$.

Системи лінійних рівнянь

1) Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера, методом Ґаусса та матричним методом $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -4, \\ 4x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -14, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5. \end{cases}$

2) Розв'язати методом Ґаусса систему лінійних неоднорідних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 2, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 = -2, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = -2, \\ 3x_1 - 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

3) Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь $\begin{cases} x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 0, \\ -3x_2 - 6x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

Лінійні простори

1) З'ясувати, чи є лінійним простором множина функцій, неперервних на відрізку $[a; b]$. Операції додавання елементів та множення на скаляр визначаються звичайним чином.

2) Вказати який-небудь лінійний простір, що містить дані вектори, та встановіть лінійну залежність або незалежність даної системи векторів:
$A = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 13 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -11 & 8 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3) Знайти всі базисі системи векторів: $\overrightarrow{a_1} = (2; -6; 0; 1)$, $\overrightarrow{a_2} = (5; 4; -3; 4)$, $\overrightarrow{a_3} = (7; 1; -2; 8)$, $\overrightarrow{a_4} = (5; 5; -6; 0)$.

4) Знайти базис та розмірність лінійного простору векторів з R^3, що ортогональні до вектора $\overrightarrow{a} = (4; 2; 9)$.

5) Знайти координати останнього вектора в базисі, утвореному першими чотирма векторами: $f_1(x) = 2x^3 + x^2 + 5x + 4$, $f_2(x) = 3x^3 - 6x^2 + 5$,
$f_3(x) = 4x^3 + 8x^2 + x + 7$, $f_4(x) = 6x^3 + 6x^2 + 2x + 3$,
$f_5(x) = 4x^3 + 23x^2 + 16x + 9$.

6) Відомі координати вектора $\overrightarrow{b}$ в деякому базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$. Знайти координати цього вектора $\overrightarrow{b}$ в базисі $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$, якщо відомий зв'язок між базисними векторами. Записати матрицю переходу від базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ до базису $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$.
$\overrightarrow{b} = (2; 2; 0)$,
$\overrightarrow{f_1} = -\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{f_3} = -\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$.

7) Знайти базис і розмірність суми та розмірність перетину підпросторів L_1 та L_2 простору R^4, якщо L_1 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$, а L_2 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$, якщо
$\overrightarrow{a_1} = (-1, -1, 1, 1)$, $\overrightarrow{a_2} = (1, -1, -1, 1)$, $\overrightarrow{a_3} = (-1, -3, 1, 3)$,
$\overrightarrow{b_1} = (0, -4, 0, 4)$, $\overrightarrow{b_2} = (2, 1, 2, -1)$, $\overrightarrow{b_3} = (-2, -3, 6, 3)$.

Унітарний та евклідів простори

1) Нехай L – лінійний простір над полем дійсних чисел. Перевірити можливість введення скалярного добутку у просторі L вказаним способом:
$L = R^3$. Для довільних $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in L$ визначимо $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = |\overrightarrow{x}||\overrightarrow{y}|\sin\alpha$, де α – кут між векторами.

2) В евклідовому та унітарному просторах, елементами яких є набори $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n)$ відповідно дійсних та комплексних чисел, задано скалярні добутки. Побудувати матрицю Грама для векторів $\overrightarrow{f_i}$ та дослідити на лінійну залежність цю систему векторів:
$\overrightarrow{f_1} = (3; -2; 1 + i)$, $\overrightarrow{f_2} = (-1; 0; 2i)$, $\overrightarrow{f_3} = (1; 0; 1)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1\overline{y_1} - ix_1\overline{y_2} + ix_2\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2} + (2 + i)x_2\overline{y_3} + (2 - i)x_3\overline{y_2} + 6x_3\overline{y_3}$.

3) Координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Використовуючи процес ортогоналізації Грама-Шмідта побудувати ортонормований базис підпростору, що є лінійною оболонкою векторів
$\overrightarrow{a_1} = (5; 5; 1; 4)$, $\overrightarrow{a_2} = (2; 2; 2; 1)$, $\overrightarrow{a_3} = (7; 7; 3; 5)$.

4) В деякому ортонормованому базисі задано L - лінійну оболонку векторів. Знайти базис ортогонального доповнення $L^{\perp}$ до лінійного підпростору L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (3; 7; 1; 4)$, $\overrightarrow{a_2} = (-5; 2; 6; 8)$.

5) Знайти систему рівнянь, якою задається підпростір L, якщо його ортогональне доповнення $L^{\perp}$ підпростору $L^{\perp} \subset R^4$ задається рівнянням $-4x_1 - x_2 + 6x_3 - 7x_4 = 0$.
6) Нехай координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та $\overrightarrow{x}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{x}$ на підпростір L, що є лінійною оболонкою векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та визначити кут і відстань між $\overrightarrow{x}$ та L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (2; 1; 2; 1)$, $\overrightarrow{a_2} = (1; -1; 4; 1)$, $\overrightarrow{a_3} = (5; 0; 1; -3)$, $\overrightarrow{x} = (3; 2; 5; 1)$.
7) У дійсному лінійному просторі задано стандартний скалярний добуток. Застосовуючи матрицю Грама знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{e_1} = (3; 2; -3)$, $\overrightarrow{e_2} = (2; 1; 1)$, $\overrightarrow{e_3} = (4; -1; 3)$.

Білінійні та квадратичні форми

1) Методом Лагранжа звести квадратичну форму до канонічного та нормального виглядів. Записати невироджене лінійне перетворення, яке зводить форму до нормального вигляду:
$x_1^2 + x_3^2 - 22x_4^2 - 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_1x_4 + 20x_2x_3 - 24x_2x_4 + 12x_3x_4$.
2) Методом Якобі звести квадратичну форму до канонічного вигляду:
$x_1^2 + 10x_2^2 + 9x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 16x_2x_3$.
3) За допомогою критерію Сільвестра з'ясувати знакосталість квадратичної форми $-3x_1^2 - 4x_2^2 - 40x_3^2 + 6x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3$.

Многочлени

1) За допомогою схеми Горнера визначити кратність кореня $c = 2$ для многочлена $f(x) = 3x^5 - 12x^4 + 10x^3 + 9x^2 - 12x + 4$.
2) Знайти всі раціональні корені многочлена $f(x) = 12x^4 - 5x^3 + 22x^2 - 10x - 4$.
3) Розкласти многочлен у добуток незвідних множників над полем R та полем C: $f(x) = x^4 - 3x^2 + 9$.
4) За допомогою схеми Горнера розкласти даний правильний дріб на найпростіші дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{5x^4 - 7x^3 + 3x - 2}{(x-1)^6}$.
5) Методом невизначених коефіцієнтів розкласти даний правильний дріб на елементарні дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{3x^3 + 21x^2 + 20x + 16}{(x^2 + x + 4)(x + 4)(x - 1)}$.
6) Використовуючи алгоритм Евклида, знайти найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ та $g(x)$:
$f(x) = x^4 + 3x^3 + 3x - 1, \quad g(x) = x^6 + x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 2$.

2.6. **Варіант 6.**

Комплексні числа

1) Записати комплексне число z в алгебричній формі, знайти дійсну та уявну частину даного комплексного числа, модуль та аргумент цього комплексного числа $z = \frac{13-26i}{3i-2} + (2+i)^3 + 3i^9$.
2) Подати число у тригонометричній формі, вказати модуль та аргумент комплексного числа. Використовуючи формулу Муавра (піднесення до степеня комплексного числа) знайдіть n-ий степінь числа
$z = 5\sqrt{3} + 15i, \quad n = 24$.
3) Знайти всі значення $\sqrt[6]{2i}$ та зобразити всі ці значення на комплексній площини.
4) На комплексной площині зобразити область, що задовольняє умовам
$|z-4-2i| \le 6, \quad 1 \le |z-7-4i|$.
5) Розв'язати рівняння $z^4 + 10z^2 + 9 = 0$.

Матриці, визначники, обернена матриця

1) Знайти значення вказаного матричного виразу $A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$;
$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 7 \end{pmatrix}$; $(A^T \cdot B) - (B^T \cdot A)$.
2) Розв'язати матричне рівняння $X - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 9 & -2 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
3) Знайти значення многочлену $f(A)$ від матриці A, якщо
$f(x) = 7x^3 + 2x^2 - 3x + 5, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
4) Використовуючи елементарні властивості матриць, знайти всі матриці B, що комутують з матрицею $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, тобто $AB = BA$.
5) Обчисліть визначники четвертого порядку: $\begin{vmatrix} -7 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 5 \end{vmatrix}$.
6) Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} 2x-1 & x-2 \\ 3 & x \end{vmatrix} \le 12$.
7) Обчислити обернену матрицю A^{-1} для наведеної матриці A: $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

   Результат перевірте $A \cdot A^{-1} = E$.

8) Розв'язати рівняння: $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

9) Використовуючи метод елементарних перетворень рядків, знайти для даної матриці обернену: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

10) Методом обрамляючих мінорів для даної матриці знайти який–небудь базисний мінор та визначите ранг матриці: $\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$.

11) Використовуючи елементарні перетворення рядків або стовпчиків знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & -1 & 13 \end{pmatrix}$.

Системи лінійних рівнянь

1) Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера, методом Ґаусса та матричним методом $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -1, \\ 7x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = -7. \end{cases}$

2) Розв'язати методом Ґаусса систему лінійних неоднорідних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - 3x_5 = 2. \end{cases}$$

3) Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 + 9x_4 = 0, \\ 6x_1 + 3x_2 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

Лінійні простори

1) З'ясувати, чи є лінійним простором множина розв'язків рівняння $x + 2y + 3z = 0$. Операції додавання елементів та множення на скаляр визначаються звичайним чином.

2) Вказати який-небудь лінійний простір, що містить дані вектори, та встановіть лінійну залежність або незалежність даної системи векторів: $f_1(x) = x^3 + x + 1,\ f_2(x) = 2x^3 + x - 2,\ f_3(x) = x^3 + 2x + 5.$

3) Знайти всі базисі системи векторів: $\overrightarrow{a_1} = (3; -2; 1; -1), \overrightarrow{a_2} = (5; 2; -3; 6)$, $\overrightarrow{a_3} = (8; 0; -2; 5), \overrightarrow{a_4} = (2; 4; -4; 7)$.

4) Векторів з R^3, що колінеарні вектору $\overrightarrow{a} = (1; -1; 3)$.

5) Знайти координати останнього вектора в базисі, утвореному першими чотирма векторами: $x_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, $x_4 = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $x_5 = \begin{pmatrix} -4 & -18 \\ 14 & 14 \end{pmatrix}$.

6) Відомі координати вектора $\overrightarrow{b}$ в деякому базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$. Знайти координати цього вектора $\overrightarrow{b}$ в базисі $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$, якщо відомий зв'язок між базисними векторами. Записати матрицю переходу від базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ до базису $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$.
   $\overrightarrow{b} = (-1; 2; -1)$, $\overrightarrow{f_1} = 3\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{f_3} = 2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$.

7) Знайти базис і розмірність суми та розмірність перетину підпросторів L_1 та L_2 простору R^4, якщо L_1 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$, а L_2 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$, якщо
   $\overrightarrow{a_1} = (1, 1, 1, 1), \overrightarrow{a_2} = (1, -1, 1, -1), \overrightarrow{a_3} = (1, 3, 1, 3)$,
   $\overrightarrow{b_1} = (1, 2, 0, 2), \overrightarrow{b_2} = (1, 2, 1, 2), \overrightarrow{b_3} = (3, 1, 3, 1)$.

Унітарний та евклідів простори

1) Нехай L – лінійний простір над полем дійсних чисел. Перевірити можливість введення скалярного добутку у просторі L вказаним способом:
   L – простір дійсних многочленів, степінь яких не перевищує 2. Для довільних $f, g \in L$ визначимо $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)dx + \int\limits_0^1 f'(x)g'(x)dx$.

2) В евклідовому та унітарному просторах, елементами яких є набори $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n)$ відповідно дійсних та комплексних чисел, задано скалярні добутки. Побудувати матрицю Грама для векторів $\overrightarrow{f_i}$ та дослідити на лінійну залежність цю систему векторів:
   $\overrightarrow{f_1} = (4; 1; -1)$, $\overrightarrow{f_2} = (2; 1; 2), \overrightarrow{f_3} = (0; 1; 0)$,
   $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3$.

3) Координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Використовуючи процес ортогоналізації Грама-Шмідта побудувати ортонормований базис підпростору, що є лінійною оболонкою векторів
   $\overrightarrow{a_1} = (2; -2; 5; 0)$, $\overrightarrow{a_2} = (1; 2; 3; 4)$, $\overrightarrow{a_3} = (4; 3; 2; 1)$.

4) В деякому ортонормованому базисі задано L - лінійну оболонку векторів. Знайти базис ортогонального доповнення $L^{\perp}$ до лінійного підпростору L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (8; 1; -5; 4)$.

5) Знайти систему рівнянь, якою задається підпростір L, якщо його ортогональне доповнення $L^{\perp}$ підпростору $L^{\perp} \subset R^4$ задається наступною системою рівнянь:

$6x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 0,$
$3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 0,$
$2x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 0.$

6) Нехай координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та $\overrightarrow{x}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{x}$ на підпростір L, що є лінійною оболонкою векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та визначити кут і відстань між $\overrightarrow{x}$ та L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (5; 2; 0; -1)$, $\overrightarrow{a_2} = (4; 2; 1; 3)$, $\overrightarrow{a_3} = (1; 1; 1; 1)$, $\overrightarrow{x} = (1; 2; 0; 3)$.

7) У дійсному лінійному просторі задано стандартний скалярний добуток. Застосовуючи матрицю Грама знайти відстань між прямими
$l_1: \ \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-4}{1}$ та $l_2: \ \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-1}{-2}.$

Білінійні та квадратичні форми

1) Методом Лагранжа звести квадратичну форму до канонічного та нормального виглядів. Записати невироджене лінійне перетворення, яке зводить форму до нормального вигляду:
$4x_1^2 + 3x_2^2 - 6x_3^2 - 10x_4^2 + 8x_1x_2 + 8x_1x_3 + 8x_1x_4 + 10x_2x_3 + 6x_2x_4 + 28x_3x_4.$

2) Методом Якобі звести квадратичну форму до канонічного вигляду:
$-4x_1^2 - x_3^2 + 8x_1x_2 - 8x_1x_3.$

3) За допомогою критерію Сільвестра з'ясувати знакосталість квадратичної форми $-x_1^2 - 5x_2^2 - 10x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3.$

Многочлени

1) За допомогою схеми Горнера визначити кратність кореня $c = 2$ для многочлена $f(x) = 2x^5 - 16x^4 + 51x^3 - 82x^2 + 68x - 24.$

2) Знайти всі раціональні корені многочлена
$f(x) = 12x^4 + 11x^3 + 38x^2 + 33x + 6.$

3) Розкласти многочлен у добуток незвідних множників над полем R та полем C: $f(x) = x^5 + 4x^3 + 16x.$

4) За допомогою схеми Горнера розкласти даний правильний дріб на найпростіші дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{x^5 - x^4 - 3x^3 - 9x + 1}{(x-3)^6}.$

5) Методом невизначених коефіцієнтів розкласти даний правильний дріб на елементарні дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{2x^3 + 14x^2 + 5x + 6}{(x^2 + x + 1)(x-4)(x+2)}.$

6) Використовуючи алгоритм Евклида, знайти найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ та $g(x)$:
$f(x) = x^5 + 3x^3 + 2x^2 + 2x + 2, \quad g(x) = x^6 + x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x - 2.$

2.7. Варіант 7.

Комплексні числа

1) Записати комплексне число z в алгебричній формі, знайти дійсну та уявну частину даного комплексного числа, модуль та аргумент цього комплексного числа $z = \frac{13i-26}{2+3i} + 2(1+i)^5 - i^{10}$.

2) Подати число у тригонометричній формі, вказати модуль та аргумент комплексного числа. Використовуючи формулу Муавра (піднесення до степеня комплексного числа) знайдіть n-ий степінь числа
$z = 2\sqrt{3} + 6i, \quad n = 36$.

3) Знайти всі значення $\sqrt[6]{6}$ та зобразити всі ці значення на комплексній площини.

4) На комплексной площині зобразити область, що задовольняє умовам
$|z - 3 + i| \le 4, \quad 1 \le \mathrm{Re} z, \quad -3 < \mathrm{Im} z$.

5) Розв'язати рівняння $z^4 - 8z^2 - 9 = 0$.

Матриці, визначники, обернена матриця

1) Знайти значення вказаного матричного виразу $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$;

$B = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ -4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$; $(AB)^T - B^T A^T$.

2) Розв'язати матричне рівняння $2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} - 3 \cdot X = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.

3) Знайти значення многочлену $f(A)$ від матриці A, якщо
$f(x) = -3x^4 + x^2 - 5x + 1, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

4) Використовуючи елементарні властивості матриць, знайти всі матриці X, що задовольняють рівняння $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 2 & 24 \end{pmatrix}$.

5) Обчисліть визначники четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

6) Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} x+1 & 2x \\ 3 & x-2 \end{vmatrix} < 12 - 2x$.

7) Обчислити обернену матрицю A^{-1} для наведеної матриці A: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

   Результат перевірте $A \cdot A^{-1} = E$.

8) Розв'язати рівняння: $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$.

9) Використовуючи метод елементарних перетворень рядків, знайти для даної матриці обернену: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 3 & -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

10) Методом обрамляючих мінорів для даної матриці знайти який–небудь базисний мінор та визначите ранг матриці: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & -6 & -1 & 13 \end{pmatrix}$.

11) Використовуючи елементарні перетворення рядків або стовпчиків знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 10 & 5 \\ 6 & -6 & 10 & 7 \\ 0 & -2 & -10 & -3 \\ 5 & -7 & 0 & 3 \\ 3 & -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Системи лінійних рівнянь

1) Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера, методом Ґаусса та матричним методом $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 1, \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -4. \end{cases}$

2) Розв'язати методом Ґаусса систему лінійних неоднорідних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 + 3x_5 = 3. \end{cases}$$

3) Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$

Лінійні простори

1) З'ясувати, чи є лінійним простором множина многочленів другого степеня. Операції додавання елементів та множення на скаляр визначаються звичайним чином.

2) Вказати який-небудь лінійний простір, що містить дані вектори, та встановіть лінійну залежність або незалежність даної системи векторів:

$\overrightarrow{a_1} = (2;3;4;5)$, $\overrightarrow{a_2} = (5;4;3;2)$, $\overrightarrow{a_3} = (1;-1;1;-1)$.

3) Знайти всі базисі системи векторів: $\overrightarrow{a_1} = (2;3;0;-1)$, $\overrightarrow{a_2} = (-4;-6;0;2)$, $\overrightarrow{a_3} = (6;9;0;-3)$, $\overrightarrow{a_4} = (8;12;0;-4)$.

4) Знайти базис та розмірність лінійного простору матриць порядку 2, що комутують з матрицею $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.

5) Знайти координати останнього вектора в базисі, утвореному першими чотирма векторами: $\overrightarrow{a_1} = (0;5;1;8)$, $\overrightarrow{a_2} = (2;4;6;5)$, $\overrightarrow{a_3} = (4;3;-2;1)$, $\overrightarrow{a_4} = (2;5;7;4)$, $\overrightarrow{a_5} = (10;25;5;31)$.

6) Відомі координати вектора $\overrightarrow{b}$ в деякому базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$. Знайти координати цього вектора $\overrightarrow{b}$ в базисі $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$, якщо відомий зв'язок між базисними векторами. Записати матрицю переходу від базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ до базису $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$.
$\overrightarrow{b} = (1;1;-1)$, $\overrightarrow{f_1} = 4\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$.

7) Знайти базис і розмірність суми та розмірність перетину підпросторів L_1 та L_2 простору R^4, якщо L_1 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$, а L_2 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$, якщо
$\overrightarrow{a_1} = (1,-2,2,1), \overrightarrow{a_2} = (1,1,-2,2), \overrightarrow{a_3} = (1,-5,6,0)$,
$\overrightarrow{b_1} = (5,-4,2,7), \overrightarrow{b_2} = (2,1-1,1), \overrightarrow{b_3} = (3,-4,5,1)$.

Унітарний та евклідів простори

1) Нехай L – лінійний простір над полем дійсних чисел. Перевірити можливість введення скалярного добутку у просторі L вказаним способом:
L – простір матриць порядку 2. Для довільних $f = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & u_1 \end{pmatrix}$ та $g = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & u_2 \end{pmatrix}$ визначимо $(f,g) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 + u_1u_2$.

2) В евклідовому та унітарному просторах, елементами яких є набори $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n)$ відповідно дійсних та комплексних чисел, задано скалярні добутки. Побудувати матрицю Грама для векторів $\overrightarrow{f_i}$ та дослідити на лінійну залежність цю систему векторів:
$\overrightarrow{f_1} = (1-i;2i-1)$, $\overrightarrow{f_2} = (0;2)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 2x_1\overline{y_1} + (1+i)x_1\overline{y_2} + (1-i)x_2\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2}$.

3) Координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Використовуючи процес ортогоналізації Грама-Шмідта побудувати ортонормований базис підпростору, що є лінійною оболонкою векторів
$\overrightarrow{a_1} = (2;-1;2;1)$, $\overrightarrow{a_2} = (3;0;6;2)$, $\overrightarrow{a_3} = (4;3;2;1)$.

4) В деякому ортонормованому базисі задано L - лінійну оболонку векторів. Знайти базис ортогонального доповнення $L^{\perp}$ до лінійного підпростору L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (1;3;2;8)$, $\overrightarrow{a_2} = (4;-1;5;6)$, $\overrightarrow{a_3} = (6;2;5;1)$.

5) Знайти систему рівнянь, якою задається підпростір L, якщо його ортогональне доповнення $L^{\perp}$ підпростору $L^{\perp} \subset R^4$ задається наступною системою рівнянь:
$2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0,$
$5x_1 + 7x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0.$

6) Нехай координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та $\overrightarrow{x}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{x}$ на підпростір L, що є лінійною оболонкою векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та визначити кут і відстань між $\overrightarrow{x}$ та L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (2; 3; 2; 3)$, $\overrightarrow{a_2} = (3; 2; 3; 2)$, $\overrightarrow{a_3} = (1; 2; 3; 4)$, $\overrightarrow{x} = (6; 5; 4; 3)$.

7) У дійсному лінійному просторі задано стандартний скалярний добуток. Застосовуючи матрицю Грама знайти об'єм тетраедра, побудованого на векторах $\overrightarrow{e_1} = (1; 2; 4)$, $\overrightarrow{e_2} = (-2; 1; 4)$, $\overrightarrow{e_3} = (4; 0; -2)$.

Білінійні та квадратичні форми

1) Методом Лагранжа звести квадратичну форму до канонічного та нормального виглядів. Записати невироджене лінійне перетворення, яке зводить форму до нормального вигляду:
$4x_1^2 + 18x_2^2 + 41x_3^2 + 5x_4^2 + 12x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_1x_4 - 42x_2x_3 + 12x_2x_4 - -42x_3x_4.$

2) Методом Якобі звести квадратичну форму до канонічного вигляду:
$-4x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 + 8x_1x_2 - 8x_1x_3 + 26x_2x_3.$

3) За допомогою критерію Сільвестра з'ясувати знакосталість квадратичної форми $x_1^2 + 2x_2^2 + 11x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 8x_2x_3$.

Многочлени

1) За допомогою схеми Горнера визначити кратність кореня $c = 2$ для многочлена $f(x) = 2x^5 - 15x^4 + 44x^3 - 64x^2 + 48x - 16$.

2) Знайти всі раціональні корені многочлена
$f(x) = 12x^4 - 11x^3 + 50x^2 - 44x + 8$.

3) Розкласти многочлен у добуток незвідних множників над полем R та полем C: $f(x) = x^6 - 1$.

4) За допомогою схеми Горнера розкласти даний правильний дріб на найпростіші дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{-x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 5}{(x+1)^6}$.

5) Методом невизначених коефіцієнтів розкласти даний правильний дріб на елементарні дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{x^3 - 11x^2 + 25x - 20}{(x^2 - 2x + 2)(x-2)(x-1)}$.

6) Використовуючи алгоритм Евклида, знайти найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ та $g(x)$:
$f(x) = 2x^5 + x^3 + x^2 - x + 1, \quad g(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1.$

2.8. **Варіант 8.**

Комплексні числа

1) Записати комплексне число z в алгебричній формі, знайти дійсну та уявну частину даного комплексного числа, модуль та аргумент цього комплексного числа $z = \frac{4+10i}{1-i} + (1+3i)^3 + 4i^7$.

2) Подати число у тригонометричній формі, вказати модуль та аргумент комплексного числа. Використовуючи формулу Муавра (піднесення до степеня комплексного числа) знайдіть n-ий степінь числа $z = 2i - 2\sqrt{3}$, $n = 42$.

3) Знайти всі значення $\sqrt[4]{3i-3}$ та зобразити всі ці значення на комплексній площини.

4) На комплексной площині зобразити область, що задовольняє умовам $\mathrm{Re}z \le 4, \quad \mathrm{Im}z \le 2, \ -\pi/4 \le \arg z \le \pi/3$.

5) Розв'язати рівняння $z^4 - 2z^2 + 25 = 0$.

Матриці, визначники, обернена матриця

1) Знайти значення вказаного матричного виразу $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 7 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & -6 \end{pmatrix}$;
$B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $(A+B)(B-A) + (A^2 - B^2)$.

2) Розв'язати матричне рівняння $3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$.

3) Знайти значення многочлену $f(A)$ від матриці A, якщо
$f(x) = 2x^4 - x^3 + 2x + 7, \ \ A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

4) Використовуючи елементарні властивості матриць, навести приклад матриці порядку 2, яка відмінна від E і O, для якої $A^2 = A$.

5) Обчисліть визначники четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

6) Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} x+3 & x \\ 9 & 2x-1 \end{vmatrix} < 3$.

7) Обчислити обернену матрицю A^{-1} для наведеної матриці A: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

   Результат перевірте $A \cdot A^{-1} = E$.

8) Розв'язати рівняння: $\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

9) Використовуючи метод елементарних перетворень рядків, знайти для даної матриці обернену: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

10) Методом обрамляючих мінорів для даної матриці знайти який–небудь базисний мінор та визначите ранг матриці: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

11) Використовуючи елементарні перетворення рядків або стовпчиків знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Системи лінійних рівнянь

1) Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера, методом Ґаусса та матричним методом $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -8, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -5, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

2) Розв'язати методом Ґаусса систему лінійних неоднорідних рівнянь

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 10, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 = -5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 = 2. \end{cases}$$

3) Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь $\begin{cases} -2x_1 - x_3 + x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_4 - 4x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

Лінійні простори

1) З'ясувати, чи є лінійним простором множина обмежених на відрізку $[a; b]$ функцій. Операції додавання елементів та множення на скаляр визначаються звичайним чином.

2) Вказати який-небудь лінійний простір, що містить дані вектори, та встановіть лінійну залежність або незалежність даної системи векторів: $f_1(x) = 3,\ f_2(x) = \operatorname{tg} x,\ f_3(x) = \operatorname{ctg} x,\ x \in (0; \frac{\pi}{2})$.

3) Знайти всі базисі системи векторів: $\overrightarrow{a_1} = (7; 1; -2; 4), \overrightarrow{a_2} = (1; 3; -3; 2)$, $\overrightarrow{a_3} = (1; -1; 1; 2)$, $\overrightarrow{a_4} = (7; 5; -6; 4)$.

4) Знайти базис та розмірність лінійного простору парних функцій, що є многочленами не вище четвертого порядку.

5) Знайти координати останнього вектора в базисі, утвореному першими чотирма векторами: $f_1(x) = x^3 - x^2 - x$, $f_2(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x + 7$, $f_3(x) = 4x^3 + 2x^2 + 5x + 6$, $f_4(x) = -3x^3 + x^2 + 1$, $f_5(x) = 2x^3 + x + 8$.

6) Відомі координати вектора $\overrightarrow{b}$ в деякому базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$. Знайти координати цього вектора $\overrightarrow{b}$ в базисі $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$, якщо відомий зв'язок між базисними векторами. Записати матрицю переходу від базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ до базису $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$.
$\overrightarrow{b} = (3; 0; 1)$, $\overrightarrow{f_1} = -\overrightarrow{e_1} + 4\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{f_2} = 2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$.

7) Знайти базис і розмірність суми та розмірність перетину підпросторів L_1 та L_2 простору R^4, якщо L_1 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$, а L_2 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$, якщо
$\overrightarrow{a_1} = (1, 1, 3, 1), \overrightarrow{a_2} = (1, -1, 2, 1), \overrightarrow{a_3} = (-1, 5, 0, -1)$,
$\overrightarrow{b_1} = (-1, 3, -1, -1), \overrightarrow{b_2} = (3, 1, 2, 1), \overrightarrow{b_3} = (1, 5, 5, 1)$.

Унітарний та евклідів простори

1) Нехай L – лінійний простір над полем дійсних чисел. Перевірити можливість введення скалярного добутку у просторі L вказаним способом:
$L = R^3$. Для довільних $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in L$ визначимо $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 2|\overrightarrow{x}||\overrightarrow{y}|\cos\alpha$, де α – кут між векторами.

2) В евклідовому та унітарному просторах, елементами яких є набори $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n)$ відповідно дійсних та комплексних чисел, задано скалярні добутки. Побудувати матрицю Грама для векторів $\overrightarrow{f_i}$ та дослідити на лінійну залежність цю систему векторів:
$\overrightarrow{f_1} = (0; 0; 1 + i)$, $\overrightarrow{f_2} = (1 - i; i; 0), \overrightarrow{f_3} = (4; 0; 2)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1\overline{y_1} - ix_1\overline{y_2} + ix_2\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2} + (2 + i)x_2\overline{y_3} + (2 - i)x_3\overline{y_2} + 6x_3\overline{y_3}$.

3) Координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Використовуючи процес ортогоналізації Грама-Шмідта побудувати ортонормований базис підпростору, що є лінійною оболонкою векторів
$\overrightarrow{a_1} = (6; -1; 0; 5)$, $\overrightarrow{a_2} = (2; 4; -1; 3)$, $\overrightarrow{a_3} = (9; -1; 3; 4)$.

4) В деякому ортонормованому базисі задано L - лінійну оболонку векторів. Знайти базис ортогонального доповнення $L^\perp$ до лінійного підпростору L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (1; 0; 6; 1)$, $\overrightarrow{a_2} = (-4; 3; 2; 5)$.

5) Знайти систему рівнянь, якою задається підпростір L, якщо його ортогональне доповнення $L^\perp$ підпростору $L^\perp \subset R^4$ задається рівнянням $-2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0$.

6) Нехай координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та $\overrightarrow{x}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{x}$ на підпростір L, що є лінійною

оболонкою векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та визначити кут і відстань між $\overrightarrow{x}$ та L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (1; -1; 2; 4)$, $\overrightarrow{a_2} = (1; -3; 4; 3)$, $\overrightarrow{a_3} = (5; 7; 2; 1)$, $\overrightarrow{x} = (3; 0; 0; 1)$.

7) У дійсному лінійному просторі задано стандартний скалярний добуток. Застосовуючи матрицю Грама знайти розклад вектора $\overrightarrow{a} = (-1; 1; -4)$ за векторами $\overrightarrow{e_1} = (3; 2; -3)$, $\overrightarrow{e_2} = (1; -3; 2)$, $\overrightarrow{e_3} = (-1; -3; 2)$.

Білінійні та квадратичні форми

1) Методом Лагранжа звести квадратичну форму до канонічного та нормального виглядів. Записати невироджене лінійне перетворення, яке зводить форму до нормального вигляду:
$x_1^2 + 13x_2^2 + 12x_3^2 + 6x_4^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 - 26x_2x_3 + 14x_2x_4 - 12x_3x_4$.

2) Методом Якобі звести квадратичну форму до канонічного вигляду:
$x_1^2 + 13x_2^2 + 17x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$.

3) За допомогою критерію Сільвестра з'ясувати знакосталість квадратичної форми $x_1^2 - 4x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

Многочлени

1) За допомогою схеми Горнера визначити кратність кореня $c = 2$ для многочлена $f(x) = 3x^5 - 18x^4 + 38x^3 - 36x^2 + 24x - 16$.

2) Знайти всі раціональні корені многочлена
$f(x) = 24x^4 + 46x^3 + 71x^2 + 19x - 10$.

3) Розкласти многочлен у добуток незвідних множників над полем R та полем C: $f(x) = x^4 + 7x^2 + 64$.

4) За допомогою схеми Горнера розкласти даний правильний дріб на найпростіші дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{2x^5 - 3x^4 - 5x + 10}{(x-2)^6}$.

5) Методом невизначених коефіцієнтів розкласти даний правильний дріб на елементарні дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{4x^3 - 4x^2 + 7x - 69}{(x^2 + 2x + 5)(x-2)(x+1)}$.

6) Використовуючи алгоритм Евклида, знайти найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ та $g(x)$:
$f(x) = x^4 - x^3 + 6x^2 - 3x + 9, \quad g(x) = x^5 - x^3 + 3x^2 - 12x + 9$.

2.9. **Варіант 9.**

Комплексні числа

1) Записати комплексне число z в алгебричній формі, знайти дійсну та уявну частину даного комплексного числа, модуль та аргумент цього комплексного числа $z = \frac{6-2i}{1+i} + (3+i)^3 - 4i^9$.
2) Подати число у тригонометричній формі, вказати модуль та аргумент комплексного числа. Використовуючи формулу Муавра (піднесення до степеня комплексного числа) знайдіть n-ий степінь числа $z = 3 - 3i\sqrt{3}$, $n = 41$.
3) Знайти всі значення $\sqrt[4]{-3+i\sqrt{3}}$ та зобразити всі ці значення на комплексній площини.
4) На комплексной площині зобразити область, що задовольняє умовам $|z-5-2i| \leq 4, \quad |z-2+2i| \leq 5$.
5) Розв'язати рівняння $z^4 + 5z^2 + 9 = 0$.

Матриці, визначники, обернена матриця

1) Знайти значення вказаного матричного виразу $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 1 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$; $(AB)^T - B^T A^T$.
2) Розв'язати матричне рівняння $4 \cdot X - 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$.
3) Знайти значення многочлену $f(A)$ від матриці A, якщо $f(x) = 3x^4 - x^3 - 3x^2 + 4x - 1, \ \ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
4) Використовуючи елементарні властивості матриць, знайти всі матриці X, що задовольняють рівняння $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 12 & -21 \\ 16 & -28 \end{pmatrix}$.
5) Обчисліть визначники четвертого порядку: $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$.
6) Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} 2x+3 & x-1 \\ 4 & x \end{vmatrix} < 7$.
7) Обчислити обернену матрицю A^{-1} для наведеної матриці A: $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

   Результат перевірте $A \cdot A^{-1} = E$.

8) Розв'язати рівняння: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

9) Використовуючи метод елементарних перетворень рядків, знайти для даної матриці обернену: $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

10) Методом обрамляючих мінорів для даної матриці знайти який–небудь базисний мінор та визначите ранг матриці: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & -5 \\ 3 & -4 & 1 & -3 \\ 5 & -4 & 7 & -13 \end{pmatrix}$.

11) Використовуючи елементарні перетворення рядків або стовпчиків знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 6 & -6 & 10 & 7 \\ 3 & -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Системи лінійних рівнянь

1) Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера, методом Ґаусса та матричним методом $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ 5x_1 + x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$

2) Розв'язати методом Ґаусса систему лінійних неоднорідних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 6, \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = -3, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 2. \end{cases}$$

3) Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$

Лінійні простори

1) З'ясувати, чи є лінійним простором множина многочленів третього степеня. Операції додавання елементів та множення на скаляр визначаються звичайним чином.
2) Вказати який-небудь лінійний простір, що містить дані вектори, та встановіть лінійну залежність або незалежність даної системи векторів:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3) Знайти всі базисі системи векторів: $\overrightarrow{a_1} = (-1;2;3)$, $\overrightarrow{a_2} = (1;2;-3)$, $\overrightarrow{a_3} = (5;-6;0)$, $\overrightarrow{a_4} = (1;-4;5)$.

4) Знайти базис та розмірність лінійного простору многочленів степеня не вище другого, для яких $f'(1) = f(1)$.

5) Знайти координати останнього вектора в базисі, утвореному першими чотирма векторами: $x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $x_4 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $x_5 = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}$.

6) Відомі координати вектора $\overrightarrow{b}$ в деякому базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$. Знайти координати цього вектора $\overrightarrow{b}$ в базисі $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$, якщо відомий зв'язок між базисними векторами. Записати матрицю переходу від базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ до базису $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$.
$\overrightarrow{b} = (-1;-1;-1)$,
$\overrightarrow{f_1} = -\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$.

7) Знайти базис і розмірність суми та розмірність перетину підпросторів L_1 та L_2 простору R^4, якщо L_1 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$, а L_2 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$, якщо
$\overrightarrow{a_1} = (1,2,2,2), \overrightarrow{a_2} = (1,-1,2,-2), \overrightarrow{a_3} = (3,3,6,2)$,
$\overrightarrow{b_1} = (1,-7,2,-10), \overrightarrow{b_2} = (2,1,1,-1), \overrightarrow{b_3} = (2,4,1,3)$.

Унітарний та евклідів простори

1) Нехай L – лінійний простір над полем дійсних чисел. Перевірити можливість введення скалярного добутку у просторі L вказаним способом:
L – простір дійсних многочленів, степінь яких не перевищує 3. Для довільних $f, g \in L$ визначимо $(f,g) = \int_0^1 f'(x)g(x)dx + \int_0^1 f(x)g'(x)dx$.

2) В евклідовому та унітарному просторах, елементами яких є набори $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n)$ відповідно дійсних та комплексних чисел, задано скалярні добутки. Побудувати матрицю Грама для векторів $\overrightarrow{f_i}$ та дослідити на лінійну залежність цю систему векторів:
$\overrightarrow{f_1} = (2;1;2)$, $\overrightarrow{f_2} = (-1;-3;1), \overrightarrow{f_3} = (2;-1;2)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3$.

3) Координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Використовуючи процес ортогоналізації Грама-Шмідта побудувати ортонормований базис підпростору, що є лінійною оболонкою векторів
$\overrightarrow{a_1} = (-4;2;1;1)$, $\overrightarrow{a_2} = (3;-3;3;1)$, $\overrightarrow{a_3} = (0;0;1;-7)$.

4) В деякому ортонормованому базисі задано L - лінійну оболонку векторів. Знайти базис ортогонального доповнення $L^{\perp}$ до лінійного підпростору L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (-2;-1;3;1)$.

5) Знайти систему рівнянь, якою задається підпростір L, якщо його ортогональне доповнення $L^{\perp}$ підпростору $L^{\perp} \subset R^4$ задається наступною системою рівнянь:
$7x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0,$
$x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0,$
$6x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0.$

6) Нехай координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та $\overrightarrow{x}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{x}$ на підпростір L, що є лінійною оболонкою векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та визначити кут і відстань між $\overrightarrow{x}$ та L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (4; 2; -1; 3)$, $\overrightarrow{a_2} = (0; -1; 0; 3)$, $\overrightarrow{a_3} = (5; 0; 1; 2)$, $\overrightarrow{x} = (2; 3; 1; 5)$.

7) У дійсному лінійному просторі задано стандартний скалярний добуток. Застосовуючи матрицю Грама знайти відстань між прямими
$$l_1 : \begin{cases} x = 1 - 4t, \\ y = 2 + 2t, \\ z = -2 + t \end{cases} \text{ та } l_2 : \begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = 2t, \\ z = -2 + 3t \end{cases} \quad t \in R.$$

Білінійні та квадратичні форми

1) Методом Лагранжа звести квадратичну форму до канонічного та нормального виглядів. Записати невироджене лінійне перетворення, яке зводить форму до нормального вигляду:
$4x_1^2 + 5x_2^2 + 17x_3^2 + 6x_4^2 + 4x_1x_2 + 12x_1x_3 + 4x_1x_4 - 2x_2x_3 + 10x_2x_4 - 10x_3x_4.$

2) Методом Якобі звести квадратичну форму до канонічного вигляду:
$x_1^2 + 18x_2^2 + 39x_3^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 - 24x_2x_3.$

3) За допомогою критерію Сільвестра з'ясувати знакосталість квадратичної форми $x_1^2 + 10x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 10x_2x_3$.

Многочлени

1) За допомогою схеми Горнера визначити кратність кореня $c = 2$ для многочлена $f(x) = 2x^5 - 12x^4 + 25x^3 - 22x^2 + 12x - 8$.

2) Знайти всі раціональні корені многочлена $f(x) = 6x^4 - 7x^3 + 5x^2 - 20x + 12$.

3) Розкласти многочлен у добуток незвідних множників над полем R та полем C: $f(x) = x^4 + 16x^2 + 100$.

4) За допомогою схеми Горнера розкласти даний правильний дріб на найпростіші дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{-2x^5 + x^3 + x^2 + 3x - 6}{(x+3)^6}$.

5) Методом невизначених коефіцієнтів розкласти даний правильний дріб на елементарні дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{2x^3 + 7x^2 + 2x + 37}{(x^2 + x + 10)(x + 1)(x - 1)}$.

6) Використовуючи алгоритм Евклида, знайти найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ та $g(x)$:
$f(x) = x^5 + x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 4, \quad g(x) = x^4 + x^3 + 7x^2 + 2x + 10.$

2.10. Варіант 10.

Комплексні числа

1) Записати комплексне число z в алгебричній формі, знайти дійсну та уявну частину даного комплексного числа, модуль та аргумент цього комплексного числа $z = \frac{2+8i}{i-1} + (2+2i)^4 - 3i^{15}$.
2) Подати число у тригонометричній формі, вказати модуль та аргумент комплексного числа. Використовуючи формулу Муавра (піднесення до степеня комплексного числа) знайдіть n-ий степінь числа $z = -4 + 4i$, $n = 33$.
3) Знайти всі значення $\sqrt[5]{3 - i\sqrt{3}}$ та зобразити всі ці значення на комплексній площини.
4) На комплексной площині зобразити область, що задовольняє умовам $|z - 4 + i| > 2, \quad -1 \leq \mathrm{Re}z, \quad -4 \leq \mathrm{Im}z$.
5) Розв'язати рівняння $z^4 + 5z^2 + 16 = 0$.

Матриці, визначники, обернена матриця

1) Знайти значення вказаного матричного виразу $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 7 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -7 \\ 1 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$; $AB - BA$.
2) Розв'язати матричне рівняння $4 \cdot X - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
3) Знайти значення многочлену $f(A)$ від матриці A, якщо $f(x) = x^4 - x^3 - 3x - 3, \;\; A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.
4) Використовуючи елементарні властивості матриць, знайти відповідь на питання: За якої умови на A та B має місце $(AB)^T = A^T B^T$?
5) Обчисліть визначники четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ -7 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.
6) Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} x+3 & x-1 \\ 4 & 2x \end{vmatrix} \leq 16$.
7) Обчислити обернену матрицю A^{-1} для наведеної матриці A: $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

   Результат перевірте $A \cdot A^{-1} = E$.

8) Розв'язати рівняння: $\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

9) Використовуючи метод елементарних перетворень рядків, знайти для даної матриці обернену: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

10) Методом обрамляючих мінорів для даної матриці знайти який–небудь базисний мінор та визначите ранг матриці: $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

11) Використовуючи елементарні перетворення рядків або стовпчиків знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -5 & 3 \\ 2 & -1 & -3 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ -8 & 0 & 6 & 13 \end{pmatrix}$.

Системи лінійних рівнянь

1) Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера, методом Ґаусса та матричним методом $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 11, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 4, \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$

2) Розв'язати методом Ґаусса систему лінійних неоднорідних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + x_5 = 6, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = -2, \\ 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 5. \end{cases}$$

3) Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 + x_5 = 0, \\ 6x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

Лінійні простори

1) З'ясувати, чи є лінійним простором множина неперервно диференційовних на R функцій, для яких $f'(0) = -1$. Операції додавання елементів та множення на скаляр визначаються звичайним чином.

2) Вказати який-небудь лінійний простір, що містить дані вектори, та встановіть лінійну залежність або незалежність даної системи векторів:

$f_1(x) = x^3 - x + 1,\ f_2(x) = 5x^2 - 4x + 3,\ f_3(x) = x^3.$

3) Знайти всі базисі системи векторів: $\overrightarrow{a_1} = (2; 3; 7; -8),\ \overrightarrow{a_2} = (0; 0; 1; -1),$ $\overrightarrow{a_3} = (1; -1; 0; 0),\ \overrightarrow{a_4} = (-3; -2; -8; 9).$
4) Знайти базис та розмірність лінійного простору симетричних матриць порядку 2.
5) Знайти координати останнього вектора в базисі, утвореному першими чотирма векторами: $\overrightarrow{a_1} = (2; 1; 5; 7),\ \overrightarrow{a_2} = (6; 4; 3; 1),\ \overrightarrow{a_3} = (-5; 2; 6; 8),$ $\overrightarrow{a_4} = (3; 7; 4; 2),\quad \overrightarrow{a_5} = (5; -3; 14; 20).$
6) Відомі координати вектора $\overrightarrow{b}$ в деякому базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$. Знайти координати цього вектора $\overrightarrow{b}$ в базисі $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$, якщо відомий зв'язок між базисними векторами. Записати матрицю переходу від базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ до базису $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$.
   $\overrightarrow{b} = (-1; -1; 1),$
   $\overrightarrow{f_1} = 3\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_2} = 2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}.$
7) Знайти базис і розмірність суми та розмірність перетину підпросторів L_1 та L_2 простору R^4, якщо L_1 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$, а L_2 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$, якщо
   $\overrightarrow{a_1} = (1, -2, -1, -1), \overrightarrow{a_2} = (3, 0, 1, 1), \overrightarrow{a_3} = (5, -4, -1, -1),$
   $\overrightarrow{b_1} = (1, 4, 3, 3), \overrightarrow{b_2} = (1, 2, 1, -1), \overrightarrow{b_3} = (4, -6, -2, 0).$

Унітарний та евклідів простори

1) Нехай L – лінійний простір над полем дійсних чисел. Перевірити можливість введення скалярного добутку у просторі L вказаним способом:
   L – простір матриць порядку 2. Для довільних $f = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & u_1 \end{pmatrix}$ та $g = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & u_2 \end{pmatrix}$ визначимо $(f, g) = 2x_1y_2 + 2x_2y_1$.
2) В евклідовому та унітарному просторах, елементами яких є набори $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n)$ відповідно дійсних та комплексних чисел, задано скалярні добутки. Побудувати матрицю Грама для векторів $\overrightarrow{f_i}$ та дослідити на лінійну залежність цю систему векторів:
   $\overrightarrow{f_1} = (3; -2i),\ \overrightarrow{f_2} = (1 + i; 2 - i),$
   $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 2x_1\overline{y_1} + (1 + i)x_1\overline{y_2} + (1 - i)x_2\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2}.$
3) Координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Використовуючи процес ортогоналізації Грама-Шмідта побудувати ортонормований базис підпростору, що є лінійною оболонкою векторів
   $\overrightarrow{a_1} = (1; -4; 2; 8),\ \overrightarrow{a_2} = (2; 0; 3; 0),\ \overrightarrow{a_3} = (4; 1; 6; -5).$
4) В деякому ортонормованому базисі задано L - лінійну оболонку векторів. Знайти базис ортогонального доповнення $L^{\perp}$ до лінійного підпростору L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (3; 2; -1; 4),\ \overrightarrow{a_2} = (5; 2; 1; 1),\ \overrightarrow{a_3} = (0; -1; 1; 3).$

5) Знайти систему рівнянь, якою задається підпростір L, якщо його ортогональне доповнення $L^{\perp}$ підпростору $L^{\perp} \subset R^4$ задається наступною системою рівнянь:
$5x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0,$
$9x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 = 0.$

6) Нехай координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та $\overrightarrow{x}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{x}$ на підпростір L, що є лінійною оболонкою векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та визначити кут і відстань між $\overrightarrow{x}$ та L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (2; 2; 1; 1)$, $\overrightarrow{a_2} = (-1; 1; 0; 4)$, $\overrightarrow{a_3} = (3; 1; 2; 4)$, $\overrightarrow{x} = (0; 1; 2; 3)$.

7) У дійсному лінійному просторі задано стандартний скалярний добуток. Застосовуючи матрицю Грама знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{e_1} = (3; -2; 1)$, $\overrightarrow{e_2} = (1; 3; 2)$.

Білінійні та квадратичні форми

1) Методом Лагранжа звести квадратичну форму до канонічного та нормального виглядів. Записати невироджене лінійне перетворення, яке зводить форму до нормального вигляду:
$x_1^2 + 8x_2^2 + 18x_3^2 + 56x_4^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_1x_4 - 12x_2x_3 + 12x_2x_4 - 58x_3x_4.$

2) Методом Якобі звести квадратичну форму до канонічного вигляду:
$-4x_1^2 + 24x_3^2 - 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 32x_2x_3.$

3) За допомогою критерію Сільвестра з'ясувати знакосталість квадратичної форми $4x_1^2 + 73x_2^2 + 182x_3^2 - 32x_1x_2 + 48x_1x_3 - 228x_2x_3$.

Многочлени

1) За допомогою схеми Горнера визначити кратність кореня $c = -2$ для многочлена $f(x) = 2x^5 + 12x^4 + 27x^3 + 34x^2 + 36x + 24$.

2) Знайти всі раціональні корені многочлена $f(x) = 6x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 10x - 12$.

3) Розкласти многочлен у добуток незвідних множників над полем R та полем C: $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$.

4) За допомогою схеми Горнера розкласти даний правильний дріб на найпростіші дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{2x^5 - 3x^4 + x^3 - 3x^2 - 5}{(x+2)^6}$.

5) Методом невизначених коефіцієнтів розкласти даний правильний дріб на елементарні дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{x^3 - 12x^2 - 16x + 8}{(x^2 + x + 2)(x + 2)(x - 2)}$.

6) Використовуючи алгоритм Евклида, знайти найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ та $g(x)$:
$f(x) = x^5 + 4x^3 + x^2 + 4x + 2, \quad g(x) = x^4 + x^3 + 2x - 4.$

2.11. Варіант 11.

Комплексні числа

1) Записати комплексне число z в алгебричній форме, знайти дійсну та уявну частину даного комплексного числа, модуль та аргумент цього комплексного числа $z = \frac{4+10i}{i-1} + (3+2i)^3 + i^{17}$.
2) Подати число у тригонометричній формі, вказати модуль та аргумент комплексного числа. Використовуючи формулу Муавра (піднесення до степеня комплексного числа) знайдіть n-ий степінь числа $z = 6 - 2i\sqrt{3}$, $n = 25$.
3) Знайти всі значення $\sqrt[6]{2\sqrt{3} - 6i}$ та зобразити всі ці значення на комплексній площини.
4) На комплексной площині зобразити область, що задовольняє умовам $|z - 4 - i| \leq 2, \quad 3 \leq \mathrm{Re} z, \quad 0 \leq \mathrm{Im} z$.
5) Розв'язати рівняння $z^4 + 3z^2 + 9 = 0$.

Матриці, визначники, обернена матриця

1) Знайти значення вказаного матричного виразу $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

   $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -3 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; $(A^T \cdot B) - (B^T \cdot A)$.
2) Розв'язати матричне рівняння $2 \cdot X + 5 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$.
3) Знайти значення многочлену $f(A)$ від матриці A, якщо $f(x) = -4x^4 + x^2 - 5x + 3, \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$.
4) Використовуючи елементарні властивості матриць, знайти усі матриці X, що задовольняють рівнянню $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 18 & 45 \end{pmatrix}$.
5) Обчисліть визначники четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 7 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.
6) Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} 2x - 1 & 9 \\ x & x + 3 \end{vmatrix} > -3$.
7) Обчислити обернену матрицю A^{-1} для наведеної матриці A: $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

   Результат перевірте $A \cdot A^{-1} = E$.

8) Розв'язати рівняння: $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

9) Використовуючи метод елементарних перетворень рядків, знайти для даної матриці обернену: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \\ 3 & -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

10) Методом обрамляючих мінорів для даної матриці знайти який–небудь базисний мінор та визначите ранг матриці: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

11) Використовуючи елементарні перетворення рядків або стовпчиків знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Системи лінійних рівнянь

1) Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера, методом Ґаусса та матричним методом $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -15, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 24, \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 = -5. \end{cases}$

2) Розв'язати методом Ґаусса систему лінійних неоднорідних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 10, \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = -4, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1. \end{cases}$$

3) Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь $\begin{cases} x_1 - 2x_3 - 3x_4 - 4x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

Лінійні простори

1) З'ясувати, чи є лінійним простором множина матриць, що комутують з матрицею $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Операції додавання елементів та множення на скаляр визначаються звичайним чином.

2) Вказати який-небудь лінійний простір, що містить дані вектори, та встановіть лінійну залежність або незалежність даної системи векторів:
$\overrightarrow{a_1} = (1;0;1;1),\ \overrightarrow{a_2} = (2;0;1;-2),\ \overrightarrow{a_3} = (1;0;2;5).$

3) Знайти всі базисі системи векторів: $\overrightarrow{a_1} = (4;-2;7;6;1),\ \overrightarrow{a_2} = (2;0;-3;2;1),$
$\overrightarrow{a_3} = (2;-6;23;6;-1).$

4) Знайти базис та розмірність лінійного простору многочленів степеня не вище другого, для яких $f(0) = 0$.

5) Знайти координати останнього вектора в базисі, утвореному першими чотирма векторами: $f_1(x) = 5x^3 + 5x^2 + x + 3,\ f_2(x) = 4x^3 + 2x^2 + x,$
$f_3(x) = -x^3 + 6x^2 + 2x + 3,\ f_4(x) = 4x^3 + 7x^2 + 5x + 2,$
$f_5(x) = 25x^3 + 12x^2 + 5x + 5.$

6) Відомі координати вектора $\overrightarrow{b}$ в деякому базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$. Знайти координати цього вектора $\overrightarrow{b}$ в базисі $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$, якщо відомий зв'язок між базисними векторами. Записати матрицю переходу від базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ до базису $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$.
$\overrightarrow{b} = (1;2;1),\ \overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_3} = 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}.$

7) Знайти базис і розмірність суми та розмірність перетину підпросторів L_1 та L_2 простору R^4, якщо L_1 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$, а L_2 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$, якщо
$\overrightarrow{a_1} = (1,-2,3,1), \overrightarrow{a_2} = (1,3,-1,-1), \overrightarrow{a_3} = (1,-7,7,3),$
$\overrightarrow{b_1} = (6,-2,10,2), \overrightarrow{b_2} = (1,2,1,-1), \overrightarrow{b_3} = (2,2,0,0).$

Унітарний та евклідів простори

1) Нехай L – лінійний простір над полем дійсних чисел. Перевірити можливість введення скалярного добутку у просторі L вказаним способом:
$L = R^3$. Для довільних $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in L$ визначимо $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = |\overrightarrow{x}|^2 + |\overrightarrow{y}|^2.$

2) В евклідовому та унітарному просторах, елементами яких є набори $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n)$ відповідно дійсних та комплексних чисел, задано скалярні добутки. Побудувати матрицю Грама для векторів $\overrightarrow{f_i}$ та дослідити на лінійну залежність цю систему векторів:
$\overrightarrow{f_1} = (2;1;0),\ \overrightarrow{f_2} = (i;0;2i), \overrightarrow{f_3} = (-1+i;2;0),$
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1\overline{y_1} - ix_1\overline{y_2} + ix_2\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2} + (2+i)x_2\overline{y_3} + (2-i)x_3\overline{y_2} + 6x_3\overline{y_3}.$

3) Координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Використовуючи процес ортогоналізації Грама-Шмідта побудувати ортонормований базис підпростору, що є лінійною оболонкою векторів
$\overrightarrow{a_1} = (0;-2;1;0),\ \overrightarrow{a_2} = (3;0;5;2),\ \overrightarrow{a_3} = (1;-6;4;0).$

4) В деякому ортонормованому базисі задано L - лінійну оболонку векторів. Знайти базис ортогонального доповнення $L^{\perp}$ до лінійного підпростору L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (3;1;5;8),\ \overrightarrow{a_2} = (2;4;0;2).$

5) Знайти систему рівнянь, якою задається підпростір L, якщо його ортогональне доповнення $L^{\perp}$ підпростору $L^{\perp} \subset R^4$ задається рівнянням $5x_1 - 3x_2 + 7x_3 - 4x_4 = 0.$

6) Нехай координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та $\overrightarrow{x}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{x}$ на підпростір L, що є лінійною оболонкою векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та визначити кут і відстань між $\overrightarrow{x}$ та L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (4; 1; 2; 1)$, $\overrightarrow{a_2} = (0; -1; 1; 2)$, $\overrightarrow{a_3} = (-1; 0; 3; 5)$, $\overrightarrow{x} = (1; 1; 1; 1)$.

7) У дійсному лінійному просторі задано стандартний скалярний добуток. Застосовуючи матрицю Грама знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{e_1} = (5; 0; -3)$, $\overrightarrow{e_2} = (2; 4; 1)$, $\overrightarrow{e_3} = (0; 1; -1)$.

Білінійні та квадратичні форми

1) Методом Лагранжа звести квадратичну форму до канонічного та нормального виглядів. Записати невироджене лінійне перетворення, яке зводить форму до нормального вигляду:
$x_1^2+2x_2^2+9x_3^2+18x_4^2-2x_1x_2-2x_1x_3+4x_1x_4-2x_2x_3+2x_2x_4-24x_3x_4.$

2) Методом Якобі звести квадратичну форму до канонічного вигляду:
$4x_1^2+7x_2^2-x_3^2+16x_1x_2+24x_1x_3+84x_2x_3;$

3) За допомогою критерію Сільвестра з'ясувати знакосталість квадратичної форми $4x_1^2+37x_2^2+20x_3^2-24x_1x_2-16x_1x_3+50x_2x_3$.

Многочлени

1) За допомогою схеми Горнера визначити кратність кореня $c = -2$ для многочлена $f(x) = 3x^5+18x^4+38x^3+36x^2+24x+16$.

2) Знайти всі раціональні корені многочлена $f(x) = 6x^4-5x^3+12x^2-15x-18$.

3) Розкласти многочлен у добуток незвідних множників над полем R та полем C: $f(x) = x^4+4x^2-5$.

4) За допомогою схеми Горнера розкласти даний правильний дріб на найпростіші дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{x^4-x^4+3x^3-12}{(x-1)^6}$.

5) Методом невизначених коефіцієнтів розкласти даний правильний дріб на елементарні дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{2x^3-29x^2+6x+41}{(4x^2+1)(x-3)(x-5)}$.

6) Використовуючи алгоритм Евклида, знайти найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ та $g(x)$:
$f(x) = x^5+2x^4+2x^3+7x^2+6, \quad g(x) = x^4-3x^3+4x^2-6x+4.$

2.12. **Варіант 12.**

Комплексні числа

1) Записати комплексне число z в алгебричній форме, знайти дійсну та уявну частину даного комплексного числа, модуль та аргумент цього комплексного числа $z = \frac{2-12i}{i-1} - \frac{2+3i}{i^{15}}$.
2) Подати число у тригонометричній формі, вказати модуль та аргумент комплексного числа. Використовуючи формулу Муавра (піднесення до степеня комплексного числа) знайдіть n-ий степінь числа $z = 7i, \quad n = 35$.
3) Знайти всі значення $\sqrt[6]{-i\sqrt{3}-1}$ та зобразити всі ці значення на комплексній площини.
4) На комплексной площині зобразити область, що задовольняє умовам $|z+4+i| > 3, \quad -\pi/2 \leq \arg(z+4-i) \leq 2\pi/3$.
5) Розв'язати рівняння $z^4 + z^2 + 16 = 0$.

Матриці, визначники, обернена матриця

1) Знайти значення вказаного матричного виразу $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$; $(AB)^T - B^T A^T$.
2) Розв'язати матричне рівняння $X - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
3) Знайти значення многочлену $f(A)$ від матриці A, якщо $f(x) = 7x^3 + 2x^2 - 3x - 2, \ \ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.
4) Використовуючи елементарні властивості матриць, довести, що $\mathrm{tr}AB = \mathrm{tr}BA$.
5) Обчисліть визначники четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.
6) Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} x+5 & x \\ 2 & x-1 \end{vmatrix} \geq -2$.
7) Обчислити обернену матрицю A^{-1} для наведеної матриці A: $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

   Результат перевірте $A \cdot A^{-1} = E$.

8) Розв'язати рівняння: $\begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

9) Використовуючи метод елементарних перетворень рядків, знайти для даної матриці обернену: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

10) Методом обрамляючих мінорів для даної матриці знайти який–небудь базисний мінор та визначите ранг матриці: $\begin{pmatrix} 6 & 7 & 1 & 9 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 4 & -2 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

11) Використовуючи елементарні перетворення рядків або стовпчиків знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 5 & -2 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Системи лінійних рівнянь

1) Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера, методом Ґаусса та матричним методом $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 16, \\ 3x_1 - 5x_2 - 5x_3 = -7, \\ -5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -3. \end{cases}$

2) Розв'язати методом Ґаусса систему лінійних неоднорідних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 2, \\ 5x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 1, \\ 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 12x_4 = 16, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 6. \end{cases}$$

3) Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь $\begin{cases} x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 0. \end{cases}$

Лінійні простори

1) З'ясувати, чи є лінійним простором множина многочленів степеня, що не перевищує два. Операції додавання елементів та множення на скаляр визначаються звичайним чином.

2) Вказати який-небудь лінійний простір, що містить дані вектори, та встановіть лінійну залежність або незалежність даної системи векторів:

$f_1(x) = \frac{3}{\sin^2 x},\ f_2(x) = \operatorname{ctg}^2 x,\ f_3(x) = 5,\ x \in (0; \pi).$

3) Знайти всі базисі системи векторів: $\overrightarrow{a_1} = (5; -2; 3; -2)$, $\overrightarrow{a_2} = (-1; 3; 6; 4)$, $\overrightarrow{a_3} = (4; 1; 9; 2)$, $\overrightarrow{a_4} = (3; 4; 15; 6)$.

4) Знайти базис та розмірність лінійного простору матриць порядку 2, що комутують з матрицею $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5) Знайти координати останнього вектора в базисі, утвореному першими чотирма векторами: $x_1 = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $x_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $x_5 = \begin{pmatrix} 20 & 11 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$.

6) Відомі координати вектора $\overrightarrow{b}$ в деякому базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$. Знайти координати цього вектора $\overrightarrow{b}$ в базисі $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$, якщо відомий зв'язок між базисними векторами. Записати матрицю переходу від базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ до базису $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$.
$\overrightarrow{b} = (1; 3; 0)$, $\overrightarrow{f_1} = 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{f_3} = 2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$.

7) Знайти базис і розмірність суми та розмірність перетину підпросторів L_1 та L_2 простору R^4, якщо L_1 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$, а L_2 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$, якщо
$\overrightarrow{a_1} = (-1, -1, -1, 2), \overrightarrow{a_2} = (2, 1, -1, 1), \overrightarrow{a_3} = (0, -1, -3, 5)$,
$\overrightarrow{b_1} = (5, 3, -1, 4), \overrightarrow{b_2} = (1, 2, -1, 1), \overrightarrow{b_3} = (3, 4, -4, 5)$.

Унітарний та евклідів простори

1) Нехай L – лінійний простір над полем дійсних чисел. Перевірити можливість введення скалярного добутку у просторі L вказаним способом:
L – простір дійсних многочленів, степінь яких не перевищує 2. Для довільних $f, g \in L$ визначимо $(f, g) = f(0)g(0)$.

2) В евклідовому та унітарному просторах, елементами яких є набори $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n)$ відповідно дійсних та комплексних чисел, задано скалярні добутки. Побудувати матрицю Грама для векторів $\overrightarrow{f_i}$ та дослідити на лінійну залежність цю систему векторів:
$\overrightarrow{f_1} = (0; 0; -3)$, $\overrightarrow{f_2} = (5; 0; -1), \overrightarrow{f_3} = (2; 0; 1)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3$.

3) Координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Використовуючи процес ортогоналізації Грама-Шмідта побудувати ортонормований базис підпростору, що є лінійною оболонкою векторів
$\overrightarrow{a_1} = (2; -3; 1; 1)$, $\overrightarrow{a_2} = (-5; 2; 3; 1)$, $\overrightarrow{a_3} = (1; -1; 2; 5)$.

4) В деякому ортонормованому базисі задано L - лінійну оболонку векторів. Знайти базис ортогонального доповнення $L^{\perp}$ до лінійного підпростору L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (1; 1; 0; 2)$.

5) Знайти систему рівнянь, якою задається підпростір L, якщо його ортогональне доповнення $L^{\perp}$ підпростору $L^{\perp} \subset R^4$ задається наступною системою рівнянь:
$2x_1 - x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0,$
$4x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 0,$
$2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 = 0.$

6) Нехай координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та $\overrightarrow{x}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{x}$ на підпростір L, що є лінійною оболонкою векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та визначити кут і відстань між $\overrightarrow{x}$ та L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (2; 3; 0; 2)$, $\overrightarrow{a_2} = (2; 5; 1; 3)$, $\overrightarrow{a_3} = (3; 6; 1; -4)$, $\overrightarrow{x} = (6; -2; 0; 1)$.

7) У дійсному лінійному просторі задано стандартний скалярний добуток. Застосовуючи матрицю Грама знайти відстань між прямими
$l_1: \ \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z+2}{1}$ та $l_2: \ \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-3}{-1}.$

Білінійні та квадратичні форми

1) Методом Лагранжа звести квадратичну форму до канонічного та нормального виглядів. Записати невироджене лінійне перетворення, яке зводить форму до нормального вигляду:
$4x_1^2 + 5x_2^2 + 24x_3^2 + 20x_4^2 + 8x_1x_2 + 16x_1x_3 + 24x_1x_4 + 10x_2x_3 + 26x_2x_4 +$
$+ 44x_3x_4.$

2) Методом Якобі звести квадратичну форму до канонічного вигляду:
$4x_1^2 + 17x_2^2 + 43x_3^2 + 16x_1x_2 - 24x_1x_3 - 54x_2x_3.$

3) За допомогою критерію Сільвестра з'ясувати знакосталість квадратичної форми $-4x_1^2 - 20x_2^2 - 38x_3^2 + 16x_1x_2 + 24x_1x_3 - 52x_2x_3.$

Многочлени

1) За допомогою схеми Горнера визначити кратність кореня $c = -2$ для многочлена $f(x) = 3x^5 + 18x^4 + 34x^3 + 12x^2 - 24x - 16.$

2) Знайти всі раціональні корені многочлена
$f(x) = 6x^4 + 19x^3 + 37x^2 + 45x + 18.$

3) Розкласти многочлен у добуток незвідних множників над полем R та полем C: $f(x) = x^4 - 81.$

4) За допомогою схеми Горнера розкласти даний правильний дріб на найпростіші дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{2x^5 - x^4 - x^2 - 5x + 3}{(x-3)^6}.$

5) Методом невизначених коефіцієнтів розкласти даний правильний дріб на елементарні дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{4x^3 - 5x^2 + 23x - 6}{(x^2+2x+5)(x-2)(x-1)}.$

6) Використовуючи алгоритм Евклида, знайти найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ та $g(x)$:
$f(x) = x^4 - x^3 + 4x^2 - x + 3, \quad g(x) = 3x^5 + 4x^3 - x^2 + x - 1.$

2.13. **Варіант 13.**

Комплексні числа

1) Записати комплексне число z в алгебричній формі, знайти дійсну та уявну частину даного комплексного числа, модуль та аргумент цього комплексного числа $z = \frac{4-2i}{i+1} + 2 - i^3 + i^{19}$.

2) Подати число у тригонометричній формі, вказати модуль та аргумент комплексного числа. Використовуючи формулу Муавра (піднесення до степеня комплексного числа) знайдіть n-ий степінь числа $z = 3 + 3i$, $n = 38$.

3) Знайти всі значення $\sqrt[6]{-4i}$ та зобразити всі ці значення на комплексній площини.

4) На комплексной площині зобразити область, що задовольняє умовам $|z + 2 - i| \leq 4, \;\; 3 \leq |z - 3 + i|$.

5) Розв'язати рівняння $z^4 + 6z^2 + 25 = 0$.

Матриці, визначники, обернена матриця

1) Знайти значення вказаного матричного виразу $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$;

$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -4 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; $(A+B)(B-A) + (A^2 - B^2)$.

2) Розв'язати матричне рівняння $2 \cdot X + 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

3) Знайти значення многочлену $f(A)$ від матриці A, якщо $f(x) = x^4 + 3x^3 + 2x - 3, \;\; A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

4) Використовуючи елементарні властивості матриць, знайти всі матриці B, що комутують з матрицею $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, тобто $AB = BA$.

5) Обчисліть визначники четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

6) Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} 2x-3 & x+1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} < x^2 - 16$.

7) Обчислити обернену матрицю A^{-1} для наведеної матриці A: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}$.

   Результат перевірте $A \cdot A^{-1} = E$.

8) Розв'язати рівняння: $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

9) Використовуючи метод елементарних перетворень рядків, знайти для даної матриці обернену: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -2 \\ 5 & 0 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

10) Методом обрамляючих мінорів для даної матриці знайти який–небудь базисний мінор та визначите ранг матриці: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

11) Використовуючи елементарні перетворення рядків або стовпчиків знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 11 & 7 \end{pmatrix}$.

Системи лінійних рівнянь

1) Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера, методом Ґаусса та матричним методом $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 10, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_1 - 2x_2 + 9x_3 = -10. \end{cases}$

2) Розв'язати методом Ґаусса систему лінійних неоднорідних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = -3, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 8x_4 = 3. \end{cases}$$

3) Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 10x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$

Лінійні простори

1) З'ясувати, чи є лінійним простором множина неперервно диференційовних на R функцій, для яких $f'(0) = 0$. Операції додавання елементів та множення на скаляр визначаються звичайним чином.

2) Вказати який-небудь лінійний простір, що містить дані вектори, та встановіть лінійну залежність або незалежність даної системи векторів:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -0 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3) Знайти всі базисі системи векторів: $\overrightarrow{a_1} = (-7; 1; 3; 6)$, $\overrightarrow{a_2} = (-2; 13; 4; -5)$, $\overrightarrow{a_3} = (1; 4; -3; 8)$, $\overrightarrow{a_4} = (2; 2; -2; 1)$.
4) Знайти базис та розмірність лінійного простору многочленів степеня не вище другого, для яких $f'(1) = 0$.
5) Знайти координати останнього вектора в базисі, утвореному першими чотирма векторами: $\overrightarrow{a_1} = (0; 1; 1; 5)$, $\overrightarrow{a_2} = (2; 8; 3; 4)$, $\overrightarrow{a_3} = (7; -6; 5; 2)$, $\overrightarrow{a_4} = (1; 4; 3; 7)$, $\overrightarrow{a_5} = (-2; 28; 6; 23)$.
6) Відомі координати вектора $\overrightarrow{b}$ в деякому базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$. Знайти координати цього вектора $\overrightarrow{b}$ в базисі $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$, якщо відомий зв'язок між базисними векторами. Записати матрицю переходу від базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ до базису $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$.
   $\overrightarrow{b} = (1; 0; 0)$, $\overrightarrow{f_1} = 2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{f_2} = -\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$.
7) Знайти базис і розмірність суми та розмірність перетину підпросторів L_1 та L_2 простору R^4, якщо L_1 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$, а L_2 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$, якщо
   $\overrightarrow{a_1} = (1, 2, 3, 1), \overrightarrow{a_2} = (-1, 2, -1, -1), \overrightarrow{a_3} = (1, 6, 5, 1)$,
   $\overrightarrow{b_1} = (0, 8, 4, 0), \overrightarrow{b_2} = (-1, 2, 2, 1), \overrightarrow{b_3} = (-2, 8, 6, 2)$.

Унітарний та евклідів простори

1) Нехай L – лінійний простір над полем дійсних чисел. Перевірити можливість введення скалярного добутку у просторі L вказаним способом:
   L – простір матриць порядку 2. Для довільних $f = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & u_1 \end{pmatrix}$ та $g = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & u_2 \end{pmatrix}$ визначимо $(f, g) = \det(f \cdot g)$.
2) В евклідовому та унітарному просторах, елементами яких є набори $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n)$ відповідно дійсних та комплексних чисел, задано скалярні добутки. Побудувати матрицю Грама для векторів $\overrightarrow{f_i}$ та дослідити на лінійну залежність цю систему векторів:
   $\overrightarrow{f_1} = (2; 1 - i)$, $\overrightarrow{f_2} = (0; 5i)$,
   $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 2x_1\overline{y_1} + (1 + i)x_1\overline{y_2} + (1 - i)x_2\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2}$.
3) Координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Використовуючи процес ортогоналізації Грама-Шмідта побудувати ортонормований базис підпростору, що є лінійною оболонкою векторів
   $\overrightarrow{a_1} = (4; 0; 1; -3)$, $\overrightarrow{a_2} = (4; 3; 2; 1)$, $\overrightarrow{a_3} = (-2; 1; 5; 1)$.
4) В деякому ортонормованому базисі задано L - лінійну оболонку векторів. Знайти базис ортогонального доповнення $L^{\perp}$ до лінійного підпростору L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (1; 3; 2; 0)$, $\overrightarrow{a_2} = (4; 5; 1; 8)$, $\overrightarrow{a_3} = (6; 3; 0; -2)$.

5) Знайти систему рівнянь, якою задається підпростір L, якщо його ортогональне доповнення $L^\perp$ підпростору $L^\perp \subset R^4$ задається наступною системою рівнянь:
$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0,$
$x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0.$

6) Нехай координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та $\overrightarrow{x}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{x}$ на підпростір L, що є лінійною оболонкою векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та визначити кут і відстань між $\overrightarrow{x}$ та L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (3;-1;1;1)$, $\overrightarrow{a_2} = (2;1;4;5)$, $\overrightarrow{a_3} = (0;0;1;2)$, $\overrightarrow{x} = (5;3;5;-1)$.

7) У дійсному лінійному просторі задано стандартний скалярний добуток. Застосовуючи матрицю Грама знайти об'єм тетраедра, побудованого на векторах $\overrightarrow{e_1} = (2;1;0)$, $\overrightarrow{e_2} = (-2;3;4)$, $\overrightarrow{e_3} = (2;1;-3)$.

Білінійні та квадратичні форми

1) Методом Лагранжа звести квадратичну форму до канонічного та нормального виглядів. Записати невироджене лінійне перетворення, яке зводить форму до нормального вигляду:
$x_1^2 - 16x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_1x_4 + 12x_2x_3 - 20x_2x_4 + 24x_3x_4.$

2) Методом Якобі звести квадратичну форму до канонічного вигляду:
$4x_1^2 + 101x_2^2 + 8x_3^2 + 40x_1x_2 + 8x_1x_3 + 34x_2x_3.$

3) За допомогою критерію Сільвестра з'ясувати знакосталість квадратичної форми $x_1^2 - 3x_2^2 - 8x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 14x_2x_3$.

Многочлени

1) За допомогою схеми Горнера визначити кратність кореня $c = -2$ для многочлена $f(x) = 2x^5 + 12x^4 + 21x^3 - 2x^2 - 36x - 24$.

2) Знайти всі раціональні корені многочлена $f(x) = 8x^4 + 22x^3 + 25x^2 + 17x + 3$.

3) Розкласти многочлен у добуток незвідних множників над полем R та полем C: $f(x) = x^6 - 125$.

4) За допомогою схеми Горнера розкласти даний правильний дріб на найпростіші дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{2x^5 + 4x^3 + 6x^2 - 10}{(x+1)^6}$.

5) Методом невизначених коефіцієнтів розкласти даний правильний дріб на елементарні дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{2x^3 - 4x^2 - 17x - 52}{(x^2+2x+2)(x-3)(x+2)}$.

6) Використовуючи алгоритм Евкліда, знайти найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ та $g(x)$:
$f(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 6x - 3, \quad g(x) = x^5 + 4x^3 - x^2 + 3x - 3.$

2.14. **Варіант 14.**

Комплексні числа

1) Записати комплексне число z в алгебричній формі, знайти дійсну та уявну частину даного комплексного числа, модуль та аргумент цього комплексного числа $z = \frac{2-6i}{1+i} + (2+i)^4 - i^{23}$.
2) Подати число у тригонометричній формі, вказати модуль та аргумент комплексного числа. Використовуючи формулу Муавра (піднесення до степеня комплексного числа) знайдіть n-ий степінь числа $z = -4i$,
$n = 28$.
3) Знайти всі значення $\sqrt[5]{-3}$ та зобразити всі ці значення на комплексній площини.
4) На комплексной площині зобразити область, що задовольняє умовам
$|z+1-2i| \leq 6, \quad -4 \leq \mathrm{Re} z \leq 3, \quad -1 < \mathrm{Im} z$.
5) Розв'язати рівняння $z^4 + 2z^2 + 49 = 0$.

Матриці, визначники, обернена матриця

1) Знайти значення вказаного матричного виразу $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$;
$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 2 & 7 & 0 \\ 8 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $AB - BA$.
2) Розв'язати матричне рівняння $5 \cdot X - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$.
3) Знайти значення многочлену $f(A)$ від матриці A, якщо
$f(x) = 3x^4 + x^3 - x + 1, \;\; A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.
4) Використовуючи елементарні властивості матриць, навести приклад матриці порядку 2, яка відмінна від E і O і задовольняє умову $AA^T = E$.
5) Обчисліть визначники четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.
6) Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} x-1 & 2x \\ x+2 & x+3 \end{vmatrix} \leq -3$.
7) Обчислити обернену матрицю A^{-1} для наведеної матриці A: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 9 \\ -2 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

   Результат перевірте $A \cdot A^{-1} = E$.

8) Розв'язати рівняння: $\begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

9) Використовуючи метод елементарних перетворень рядків, знайти для даної матриці обернену: $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

10) Методом обрамляючих мінорів для даної матриці знайти який–небудь базисний мінор та визначите ранг матриці: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

11) Використовуючи елементарні перетворення рядків або стовпчиків знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \\ -6 & 2 & -6 & 1 \\ 0 & 8 & 4 & 10 \end{pmatrix}$.

Системи лінійних рівнянь

1) Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера, методом Ґаусса та матричним методом $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 13, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -4, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = -1. \end{cases}$

2) Розв'язати методом Ґаусса систему лінійних неоднорідних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 10, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 16, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 + x_5 = -4, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 6. \end{cases}$$

3) Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь $\begin{cases} x_2 + x_3 + 2x_5 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 0, \\ -2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

Лінійні простори

1) З'ясувати, чи є лінійним простором множина непарних функцій. Операції додавання елементів та множення на скаляр визначаються звичайним чином.

2) Вказати який-небудь лінійний простір, що містить дані вектори, та встановіть лінійну залежність або незалежність даної системи векторів:

$f_1(x) = 4x^2 - 2x + 8,\ f_2(x) = x^2 + 1,\ f_3(x) = x^2 - 2x + 5.$

3) Знайти всі базисі системи векторів: $\overrightarrow{a_1} = (-3; 1; 1; 1),\ \overrightarrow{a_2} = (6; -1; 0; 1),$ $\overrightarrow{a_3} = (3; 0; 1; 2).$

4) Знайти базис та розмірність лінійного простору многочленів степеня не вище другого, для яких $f(1) = 0$.

5) Знайти координати останнього вектора в базисі, утвореному першими чотирма векторами: $f_1(x) = x^3 + 4x^2 + 3x + 2,\ f_2(x) = 2x^3 - x^2 + 5x,$ $f_3(x) = 6x^3 + 4x^2 + 3x + 5,\ f_4(x) = -8x^3 + 2x^2 + x + 9,$ $f_5(x) = 25x^3 + 3x^2 + 9x - 11.$

6) Відомі координати вектора $\overrightarrow{b}$ в деякому базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$. Знайти координати цього вектора $\overrightarrow{b}$ в базисі $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$, якщо відомий зв'язок між базисними векторами. Записати матрицю переходу від базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ до базису $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$.
$\overrightarrow{b} = (0; 2; 0),\ \overrightarrow{f_1} = 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_3} = -\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}.$

7) Знайти базис і розмірність суми та розмірність перетину підпросторів L_1 та L_2 простору R^4, якщо L_1 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$, а L_2 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$, якщо
$\overrightarrow{a_1} = (0, 2, 1, -1), \overrightarrow{a_2} = (1, -1, 3, 1), \overrightarrow{a_3} = (2, 0, 7, 1),$
$\overrightarrow{b_1} = (-1, 3, -2, -2), \overrightarrow{b_2} = (1, 2, -1, -1), \overrightarrow{b_3} = (2, 5, 4, -2).$

Унітарний та евклідів простори

1) Нехай L – лінійний простір над полем дійсних чисел. Перевірити можливість введення скалярного добутку у просторі L вказаним способом:
$L = R^3$. Для довільних $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in L$ визначимо $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \frac{1}{2}|\overrightarrow{x}||\overrightarrow{y}|\cos 2\alpha$, де α – кут між векторами.

2) В евклідовому та унітарному просторах, елементами яких є набори $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n)$ відповідно дійсних та комплексних чисел, задано скалярні добутки. Побудувати матрицю Грама для векторів $\overrightarrow{f_i}$ та дослідити на лінійну залежність цю систему векторів:
$\overrightarrow{f_1} = (4; 0; 5),\ \overrightarrow{f_2} = (2; 2; i), \overrightarrow{f_3} = (1; 0; 2),$
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1\overline{y_1} - ix_1\overline{y_2} + ix_2\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2} + (2+i)x_2\overline{y_3} + (2-i)x_3\overline{y_2} + 6x_3\overline{y_3}.$

3) Координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Використовуючи процес ортогоналізації Грама-Шмідта побудувати ортонормований базис підпростору, що є лінійною оболонкою векторів
$\overrightarrow{a_1} = (7; -2; 1; 4),\ \overrightarrow{a_2} = (1; 1; -1; -1),\ \overrightarrow{a_3} = (3; -2; 3; 1).$

4) В деякому ортонормованому базисі задано L - лінійну оболонку векторів. Знайти базис ортогонального доповнення $L^\perp$ до лінійного підпростору L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (1; -5; 3; 7),\ \overrightarrow{a_2} = (2; 5; 2; 4).$

5) Знайти систему рівнянь, якою задається підпростір L, якщо його ортогональне доповнення $L^\perp$ підпростору $L^\perp \subset R^4$ задається рівнянням $3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0.$

6) Нехай координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та $\overrightarrow{x}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{x}$ на підпростір L, що є лінійною оболонкою векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та визначити кут і відстань між $\overrightarrow{x}$ та L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (5; 2; 2; 2)$, $\overrightarrow{a_2} = (3; 1; 2; 0)$, $\overrightarrow{a_3} = (1; 0; 1; 0)$, $\overrightarrow{x} = (6; 4; 1; 1)$.

7) У дійсному лінійному просторі задано стандартний скалярний добуток. Застосовуючи матрицю Грама знайти розклад вектора $\overrightarrow{a} = (10; -3; 1)$ за векторами $\overrightarrow{e_1} = (2; -3; 1)$, $\overrightarrow{e_2} = (2; 4; -2)$, $\overrightarrow{e_3} = (3; 5; -2)$.

Білінійні та квадратичні форми

1) Методом Лагранжа звести квадратичну форму до канонічного та нормального виглядів. Записати невироджене лінійне перетворення, яке зводить форму до нормального вигляду:
$9x_1^2 + 35x_2^2 + 9x_3^2 + 84x_4^2 + 36x_1x_2 + 18x_1x_3 + 54x_1x_4 + 38x_2x_3 + 104x_2x_4 + {}$
${}+54x_3x_4$.

2) Методом Якобі звести квадратичну форму до канонічного вигляду:
$-x_1^2 + 3x_2^2 + 25x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 28x_2x_3$.

3) За допомогою критерію Сільвестра з'ясувати знакосталість квадратичної форми $x_1^2 - 8x_2^2 - 9x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 20x_2x_3$.

Многочлени

1) За допомогою схеми Горнера визначити кратність кореня $c = 1$ для многочлена $f(x) = 5x^5 - 10x^4 + 7x^3 - x^2 - 4x + 3$.

2) Знайти всі раціональні корені многочлена $f(x) = 8x^4 + 18x^3 + 15x^2 + 7x - 3$.

3) Розкласти многочлен у добуток незвідних множників над полем R та полем C: $f(x) = x^4 - 6x^2 + 225$.

4) За допомогою схеми Горнера розкласти даний правильний дріб на найпростіші дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{x^5 - x^4 - x^3 + x + 1}{(x-2)^6}$.

5) Методом невизначених коефіцієнтів розкласти даний правильний дріб на елементарні дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{7x^3 + 2x^2 + 161x - 4}{(x^2+16)(x-4)(x+1)}$.

6) Використовуючи алгоритм Евклида, знайти найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ та $g(x)$:
$f(x) = 2x^5 + x^3 + 2x^2 + 1, \quad g(x) = x^5 - 4x^3 + x^2 - 4$.

2.15. Варіант 15.

Комплексні числа

1) Записати комплексне число z в алгебричній формі, знайти дійсну та уявну частину даного комплексного числа, модуль та аргумент цього комплексного числа $z = \frac{15-5i}{2i-1} - (3+i)^3 - 2i^7$.
2) Подати число у тригонометричній формі, вказати модуль та аргумент комплексного числа. Використовуючи формулу Муавра (піднесення до степеня комплексного числа) знайдіть n-ий степінь числа
$z = 2i\sqrt{3} - 2, \quad n = 32$.
3) Знайти всі значення $\sqrt[4]{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}$ та зобразити всі ці значення на комплексній площини.
4) На комплексной площині зобразити область, що задовольняє умовам
$|z - 3 - i| > 3, \quad \mathrm{Im} z \geq -1$.
5) Розв'язати рівняння $z^4 - 2z^2 + 81 = 0$.

Матриці, визначники, обернена матриця

1) Знайти значення вказаного матричного виразу $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$;
$B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; $(A^T \cdot B) - (B^T \cdot A)$.
2) Розв'язати матричне рівняння $3 \cdot X + 2 \cdot \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
3) Знайти значення многочлену $f(A)$ від матриці A, якщо
$f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 5, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.
4) Використовуючи елементарні властивості матриць, знайти усі матриці X, що задовольняють рівняння $X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 56 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$.
5) Обчисліть визначники четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -3 \end{vmatrix}$.
6) Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} 3x-2 & 4x \\ 2 & x+1 \end{vmatrix} > -6$.
7) Обчислити обернену матрицю A^{-1} для наведеної матриці A: $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$.

   Результат перевірте $A \cdot A^{-1} = E$.

8) Розв'язати рівняння: $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

9) Використовуючи метод елементарних перетворень рядків, знайти для даної матриці обернену: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

10) Методом обрамляючих мінорів для даної матриці знайти який–небудь базисний мінор та визначите ранг матриці: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 9 & 5 \\ -3 & 8 & -15 & -8 \end{pmatrix}$.

11) Використовуючи елементарні перетворення рядків або стовпчиків знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & -1 & 10 & -1 \\ -1 & -2 & -5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Системи лінійних рівнянь

1) Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера, методом Ґаусса та матричним методом $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -5, \\ -3x_1 - x_2 + 2x_3 = 13, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -6. \end{cases}$

2) Розв'язати методом Ґаусса систему лінійних неоднорідних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ 8x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 2. \end{cases}$$

3) Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_3 - 3x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

Лінійні простори

1) З'ясувати, чи є лінійним простором множина парних функцій. Операції додавання елементів та множення на скаляр визначаються звичайним чином.

2) Вказати який-небудь лінійний простір, що містить дані вектори, та встановіть лінійну залежність або незалежність даної системи векторів: $f_1(x) = \frac{e^{2x}}{x}$, $f_2(x) = (1+x)e^{2x}$, $f_3(x) = e^{2x}$, $x \in (0; +\infty)$.

3) Знайти всі базисі системи векторів: $\overrightarrow{a_1} = (9;6;0;-3;0)$, $\overrightarrow{a_2} = (2;-1;4;3;5)$, $\overrightarrow{a_3} = (0;1;1;1;1)$, $\overrightarrow{a_4} = (2;0;5;4;4)$.

4) Знайти базис та розмірність лінійного простору розв'язків рівняння $2x - 3y + z = 0$.

5) Знайти координати останнього вектора в базисі, утвореному першими чотирма векторами: $x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, $x_4 = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $x_5 = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 24 \end{pmatrix}$.

6) Відомі координати вектора $\overrightarrow{b}$ в деякому базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$. Знайти координати цього вектора $\overrightarrow{b}$ в базисі $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$, якщо відомий зв'язок між базисними векторами. Записати матрицю переходу від базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ до базису $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$.
   $\overrightarrow{b} = (1;-1;0)$, $\overrightarrow{f_1} = 2\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{f_2} = 3\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}$.

7) Знайти базис і розмірність суми та розмірність перетину підпросторів L_1 та L_2 простору R^4, якщо L_1 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$, а L_2 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$, якщо
   $\overrightarrow{a_1} = (1,-1,-3,1)$, $\overrightarrow{a_2} = (2,1,1,1)$, $\overrightarrow{a_3} = (4,-1,-5,3)$,
   $\overrightarrow{b_1} = (5,1,-1,3)$, $\overrightarrow{b_2} = (-2,0,2,1)$, $\overrightarrow{b_3} = (-2,-3,-5,2)$.

Унітарний та евклідів простори

1) Нехай L – лінійний простір над полем дійсних чисел. Перевірити можливість введення скалярного добутку у просторі L вказаним способом:
   L – простір дійсних многочленів, степінь яких не перевищує 2. Для довільних $f = a_1x^2 + b_1x + c_1$ та $g = a_2x^2 + b_2x + c_2$ визначимо $(f,g) = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$.

2) В евклідовому та унітарному просторах, елементами яких є набори $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n)$ відповідно дійсних та комплексних чисел, задано скалярні добутки. Побудувати матрицю Грама для векторів $\overrightarrow{f_i}$ та дослідити на лінійну залежність цю систему векторів:
   $\overrightarrow{f_1} = (4;-1;0)$, $\overrightarrow{f_2} = (1;5;1)$, $\overrightarrow{f_3} = (2;0;-1)$,
   $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3$.

3) Координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Використовуючи процес ортогоналізації Грама-Шмідта побудувати ортонормований базис підпростору, що є лінійною оболонкою векторів
   $\overrightarrow{a_1} = (6;1;1;-2)$, $\overrightarrow{a_2} = (-2;3;4;-1)$, $\overrightarrow{a_3} = (1;-4;2;1)$.

4) В деякому ортонормованому базисі задано L - лінійну оболонку векторів. Знайти базис ортогонального доповнення $L^{\perp}$ до лінійного підпростору L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (3;1;2;-1)$.

5) Знайти систему рівнянь, якою задається підпростір L, якщо його ортогональне доповнення $L^{\perp}$ підпростору $L^{\perp} \subset R^4$ задається наступною системою рівнянь:

$5x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0,$
$2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0,$
$3x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0.$

6) Нехай координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та $\overrightarrow{x}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{x}$ на підпростір L, що є лінійною оболонкою векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та визначити кут і відстань між $\overrightarrow{x}$ та L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (1;3;0;5)$, $\overrightarrow{a_2} = (1;-2;1;4)$, $\overrightarrow{a_3} = (2;1;2;1)$, $\overrightarrow{x} = (4;4;0;1)$.

7) У дійсному лінійному просторі задано стандартний скалярний добуток. Застосовуючи матрицю Грама знайти відстань між прямими

$$l_1 : \begin{cases} x = 3t, \\ y = 1 - 2t, \\ z = 3 + t \end{cases} \quad \text{та} \quad l_2 : \begin{cases} x = 2 - t, \\ y = 2 + 3t, \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad t \in R.$$

Білінійні та квадратичні форми

1) Методом Лагранжа звести квадратичну форму до канонічного та нормального виглядів. Записати невироджене лінійне перетворення, яке зводить форму до нормального вигляду:
$4x_1^2 + 8x_2^2 + 14x_3^2 + 27x_4^2 - 8x_1x_2 + 12x_1x_3 - 4x_1x_4 - 20x_2x_3 - 12x_2x_4 + $
$+12x_3x_4.$

2) Методом Якобі звести квадратичну форму до канонічного вигляду:
$4x_1^2 - 5x_2^2 - 78x_3^2 - 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 46x_2x_3.$

3) За допомогою критерію Сільвестра з'ясувати знакосталість квадратичної форми $-x_1^2 - 2x_2^2 - 9x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3$.

Многочлени

1) За допомогою схеми Горнера визначити кратність кореня $c = 1$ для многочлена $f(x) = -3x^5 + 9x^4 - 8x^3 + 3x - 1$.

2) Знайти всі раціональні корені многочлена $f(x) = 8x^4 + 6x^3 - 7x^2 - 26x - 6$.

3) Розкласти многочлен у добуток незвідних множників над полем R та полем C: $f(x) = x^4 - 3x^2 + 121$.

4) За допомогою схеми Горнера розкласти даний правильний дріб на найпростіші дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{x^5 + 2x^4 + x^3 - 2x + 1}{(x+3)^6}$.

5) Методом невизначених коефіцієнтів розкласти даний правильний дріб на елементарні дроби над полем дійсних чисел:
$\dfrac{5x^3 - 13x^2 + 19x - 10}{(x^2+4)(x-3)(x-2)}$.

6) Використовуючи алгоритм Евклида, знайти найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ та $g(x)$:
$f(x) = x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x + 2, \quad g(x) = 2x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 8x - 2.$

2.16. **Варіант 16.**

Комплексні числа

1) Записати комплексне число z в алгебричній формі, знайти дійсну та уявну частину даного комплексного числа, модуль та аргумент цього комплексного числа $z = \frac{5i-10}{1+2i} + (2i-3)^4 - 3i^{11}$.
2) Подати число у тригонометричній формі, вказати модуль та аргумент комплексного числа. Використовуючи формулу Муавра (піднесення до степеня комплексного числа) знайдіть n-ий степінь числа $z = 2 - 2i$, $n = 19$.
3) Знайти всі значення $\sqrt[6]{4-4i}$ та зобразити всі ці значення на комплексній площини.
4) На комплексной площині зобразити область, що задовольняє умовам $|z+2-i| \geq 3, \quad -4 \leq \mathrm{Re} z \leq -1$.
5) Розв'язати рівняння $z^4 + 6z^2 + 100 = 0$.

Матриці, визначники, обернена матриця

1) Знайти значення вказаного матричного виразу $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

   $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $(AB)^T - B^T A^T$.
2) Розв'язати матричне рівняння $5 \cdot X - 2 \cdot \begin{pmatrix} 11 & -2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$.
3) Знайти значення многочлену $f(A)$ від матриці A, якщо
   $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 2, \ \ A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
4) Використовуючи елементарні властивості матриць, знайти всі матриці B, що комутують з матрицею $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, тобто $AB = BA$.
5) Обчисліть визначники четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \\ 3 & -4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.
6) Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} x^2+1 & x+2 \\ 1-x & -2 \end{vmatrix} < -4$.
7) Обчислити обернену матрицю A^{-1} для наведеної матриці A: $\begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \\ -1 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

   Результат перевірте $A \cdot A^{-1} = E$.

8) Розв'язати рівняння: $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

9) Використовуючи метод елементарних перетворень рядків, знайти для даної матриці обернену: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

10) Методом обрамляючих мінорів для даної матриці знайти який–небудь базисний мінор та визначите ранг матриці: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

11) Використовуючи елементарні перетворення рядків або стовпчиків знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

Системи лінійних рівнянь

1) Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера, методом Ґаусса та матричним методом $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -3, \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -2, \\ -2x_2 + 2x_3 = -6. \end{cases}$

2) Розв'язати методом Ґаусса систему лінійних неоднорідних рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 3, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 2, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

3) Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь $\begin{cases} 2x_1 - x_3 + x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_3 - x_4 - 4x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

Лінійні простори

1) З'ясувати, чи є лінійним простором множина монотонно зростаючих на інтервалі $(a; b)$ функцій. Операції додавання елементів та множення на скаляр визначаються звичайним чином.

2) Вказати який-небудь лінійний простір, що містить дані вектори, та встановіть лінійну залежність або незалежність даної системи векторів: $\overrightarrow{a_1} = (3; -1; 0; 2)$, $\overrightarrow{a_2} = (1; 1; 1; -1)$, $\overrightarrow{a_3} = (1; 0; 0; -6)$.

3) Знайти всі базисі системи векторів: $\overrightarrow{a_1} = (1; 4; 3; 6)$, $\overrightarrow{a_2} = (-5; 2; -3; 0)$, $\overrightarrow{a_3} = (2; 1; 2; 7)$, $\overrightarrow{a_4} = (0; 2; 1; 5)$.

4) Знайти базис та розмірність лінійного простору матриць порядку 2, що комутують з матрицею $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$.

5) Знайти координати останнього вектора в базисі, утвореному першими чотирма векторами: $\overrightarrow{a_1} = (1; -5; 3; 7)$, $\overrightarrow{a_2} = (2; 5; 2; 4)$, $\overrightarrow{a_3} = (6; 5; 1; 8)$, $\overrightarrow{a_4} = (3; 9; 4; -6)$, $\overrightarrow{a_5} = (-11; 16; 6; -63)$.

6) Відомі координати вектора $\overrightarrow{b}$ в деякому базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$. Знайти координати цього вектора $\overrightarrow{b}$ в базисі $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$, якщо відомий зв'язок між базисними векторами. Записати матрицю переходу від базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ до базису $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$.
   $\overrightarrow{b} = (0; 0; 3)$, $\overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{f_2} = 2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}$.

7) Знайти базис і розмірність суми та розмірність перетину підпросторів L_1 та L_2 простору R^4, якщо L_1 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$, а L_2 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$, якщо
   $\overrightarrow{a_1} = (3, 1, -1, 2), \overrightarrow{a_2} = (2, -1, 2, 1), \overrightarrow{a_3} = (-1, 3, -5, 4)$,
   $\overrightarrow{b_1} = (3, -4, 7, 1), \overrightarrow{b_2} = (1, 2, 1, -1), \overrightarrow{b_3} = (2, -6, -2, 6)$.

Унітарний та евклідів простори

1) Нехай L – лінійний простір над полем дійсних чисел. Перевірити можливість введення скалярного добутку у просторі L вказаним способом:
   L – простір матриць порядку 2. Для довільних $f = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & u_1 \end{pmatrix}$ та $g = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & u_2 \end{pmatrix}$ визначимо $(f, g) = tr(f) \cdot tr(g)$, де $tr(f)$ – сума елементів головної діагоналі.

2) В евклідовому та унітарному просторах, елементами яких є набори $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n)$ відповідно дійсних та комплексних чисел, задано скалярні добутки. Побудувати матрицю Грама для векторів $\overrightarrow{f_i}$ та дослідити на лінійну залежність цю систему векторів:
   $\overrightarrow{f_1} = (0; 1 + i)$, $\overrightarrow{f_2} = (2 - i; 0)$,
   $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 2x_1\overline{y_1} + (1 + i)x_1\overline{y_2} + (1 - i)x_2\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2}$.

3) Координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Використовуючи процес ортогоналізації Грама-Шмідта побудувати ортонормований базис підпростору, що є лінійною оболонкою векторів
   $\overrightarrow{a_1} = (1; 1; 1; 1)$, $\overrightarrow{a_2} = (2; 0; 1; 1)$, $\overrightarrow{a_3} = (1; -1; 0; 0)$.

4) В деякому ортонормованому базисі задано L - лінійну оболонку векторів. Знайти базис ортогонального доповнення $L^{\perp}$ до лінійного підпростору L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (3; 5; 1; 4)$, $\overrightarrow{a_2} = (-2; 2; 5; 0)$, $\overrightarrow{a_3} = (1; 1; -1; 7)$.

5) Знайти систему рівнянь, якою задається підпростір L, якщо його ортогональне доповнення $L^{\perp}$ підпростору $L^{\perp} \subset R^4$ задається наступною системою рівнянь:
$$5x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 0,$$
$$2x_1 + 4x_2 + x_3 - 5x_4 = 0.$$

6) Нехай координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та $\overrightarrow{x}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{x}$ на підпростір L, що є лінійною оболонкою векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та визначити кут і відстань між $\overrightarrow{x}$ та L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (4; 0; 0; -3)$, $\overrightarrow{a_2} = (2; 1; 5; 2)$, $\overrightarrow{a_3} = (-1; 1; 3; 1)$, $\overrightarrow{x} = (5; 0; 5; 0)$.

7) У дійсному лінійному просторі задано стандартний скалярний добуток. Застосовуючи матрицю Грама знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{e_1} = (2; 3; -1)$, $\overrightarrow{e_2} = (1; 4; 2)$.

Білінійні та квадратичні форми

1) Методом Лагранжа звести квадратичну форму до канонічного та нормального виглядів. Записати невироджене лінійне перетворення, яке зводить форму до нормального вигляду:
$$4x_1^2+3x_2^2+12x_3^2+35x_4^2-8x_1x_2+8x_1x_3-8x_1x_4-6x_2x_3+6x_2x_4-42x_3x_4.$$

2) Методом Якобі звести квадратичну форму до канонічного вигляду:
$$-x_1^2 + 8x_2^2 + 29x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 38x_2x_3.$$

3) За допомогою критерію Сільвестра з'ясувати знакосталість квадратичної форми $4x_1^2 + 5x_2^2 + 33x_3^2 - 8x_1x_2 - 16x_1x_3 + 8x_2x_3$.

Многочлени

1) За допомогою схеми Горнера визначити кратність кореня $c = 1$ для многочлена $f(x) = -2x^5 + 6x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 9x - 3$.

2) Знайти всі раціональні корені многочлена $f(x) = 8x^4+2x^3+15x^2-64x+15$.

3) Розкласти многочлен у добуток незвідних множників над полем R та полем C: $f(x) = x^6 + 125$.

4) За допомогою схеми Горнера розкласти даний правильний дріб на найпростіші дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{3x^5 + 4x^2 - 3x - 2}{(x+2)^6}$.

5) Методом невизначених коефіцієнтів розкласти даний правильний дріб на елементарні дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{4x^3 - 9x^2 - 135}{(x^2+9)(x+3)(x-3)}$.

6) Використовуючи алгоритм Евклида, знайти найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ та $g(x)$:
$$f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 8x - 4, \qquad g(x) = x^5 + 4x^3 - 3x^2 - 12.$$

2.17. **Варіант 17.**

Комплексні числа

1) Записати комплексне число z в алгебричній формі, знайти дійсну та уявну частину даного комплексного числа, модуль та аргумент цього комплексного числа $z = \frac{5i+20}{1-2i} - (3+i)^5 + 4i^{19}$.
2) Подати число у тригонометричній формі, вказати модуль та аргумент комплексного числа. Використовуючи формулу Муавра (піднесення до степеня комплексного числа) знайдіть n-ий степінь числа $z = -1 - i$, $n = 34$.
3) Знайти всі значення $\sqrt[5]{\sqrt{3} - i}$ та зобразити всі ці значення на комплексній площини.
4) На комплексной площині зобразити область, що задовольняє умовам $|z - 3 - 2i| \geq 1, \quad \mathrm{Re}z \geq 2, \quad -1 \leq \mathrm{Im}z$.
5) Розв'язати рівняння $z^4 + 9z^2 + 64 = 0$.

Матриці, визначники, обернена матриця

1) Знайти значення вказаного матричного виразу $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 9 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; $(A+B)(B-A) + (A^2 - B^2)$.
2) Розв'язати матричне рівняння $3 \cdot X - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
3) Знайти значення многочлену $f(A)$ від матриці A, якщо $f(x) = 2x^4 + x^3 - 4x + 1, \;\; A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$.
4) Використовуючи елементарні властивості матриць, знайти відповідь на питання: За якої умови на матриці A та B має місце рівність $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$?
5) Обчисліть визначники четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 6 & -3 & 3 & 3 \\ 4 & -1 & 6 & 8 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.
6) Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} x - x^2 & 3x \\ -5 & 2 \end{vmatrix} \geq 13x$.
7) Обчислити обернену матрицю A^{-1} для наведеної матриці A: $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

   Результат перевірте $A \cdot A^{-1} = E$.

8) Розв'язати рівняння: $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}$.

9) Використовуючи метод елементарних перетворень рядків, знайти для даної матриці обернену: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

10) Методом обрамляючих мінорів для даної матриці знайти який–небудь базисний мінор та визначите ранг матриці: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

11) Використовуючи елементарні перетворення рядків або стовпчиків знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 8 & 11 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Системи лінійних рівнянь

1) Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера, методом Ґаусса та матричним методом $\begin{cases} -2x_1 - 5x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 6, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$

2) Розв'язати методом Ґаусса систему лінійних неоднорідних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 12, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 15. \end{cases}$$

3) Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0, \\ 6x_1 + 3x_2 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

Лінійні простори

1) З'ясувати, чи є лінійним простором множина симетричних матриць. Операції додавання елементів та множення на скаляр визначаються звичайним чином.

2) Вказати який-небудь лінійний простір, що містить дані вектори, та встановіть лінійну залежність або незалежність даної системи векторів:

$A = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -13 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 11 & -6 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

3) Знайти всі базисі системи векторів: $\overrightarrow{a_1} = (1; 12; 10; -1)$, $\overrightarrow{a_2} = (3; -2; -3; 2)$, $\overrightarrow{a_3} = (1; 1; -4; 1)$, $\overrightarrow{a_4} = (5; 11; 3; 2)$.

4) Знайти базис та розмірність лінійного простору многочленів степеня не вище другого, для яких $f'(0) = f(0)$.

5) Знайти координати останнього вектора в базисі, утвореному першими чотирма векторами: $f_1(x) = 3x^3 + x^2 + 5x + 8$, $f_2(x) = 2x^3 + 4x^2 + 2$, $f_3(x) = 7x^3 + -6x^2 + 4x + 4$, $f_4(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 1$, $f_5(x) = 16x^3 + 5x^2 + 17x + 21$.

6) Відомі координати вектора $\overrightarrow{b}$ в деякому базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$. Знайти координати цього вектора $\overrightarrow{b}$ в базисі $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$, якщо відомий зв'язок між базисними векторами. Записати матрицю переходу від базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ до базису $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$.
$\overrightarrow{b} = (0; 1; -1)$, $\overrightarrow{f_1} = 3\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{f_2} = 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{f_3} = -\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$.

7) Знайти базис і розмірність суми та розмірність перетину підпросторів L_1 та L_2 простору R^4, якщо L_1 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$, а L_2 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$, якщо
$\overrightarrow{a_1} = (1, -1, 2, -2), \overrightarrow{a_2} = (3, 1, -1, -1), \overrightarrow{a_3} = (1, 3, -5, 3)$,
$\overrightarrow{b_1} = (0, -4, 7, -5), \overrightarrow{b_2} = (1, 1, 2, 1), \overrightarrow{b_3} = (0, 0, 7, 1)$.

Унітарний та евклідів простори

1) Нехай L – лінійний простір над полем дійсних чисел. Перевірити можливість введення скалярного добутку у просторі L вказаним способом:
$L = R^3$. Для довільних $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in L$ визначимо $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \max\{|\overrightarrow{x}|; |\overrightarrow{y}|\}$.

2) В евклідовому та унітарному просторах, елементами яких є набори $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n)$ відповідно дійсних та комплексних чисел, задано скалярні добутки. Побудувати матрицю Грама для векторів $\overrightarrow{f_i}$ та дослідити на лінійну залежність цю систему векторів:
$\overrightarrow{f_1} = (-1; 1; 8)$, $\overrightarrow{f_2} = (4i; 0; 5)$, $\overrightarrow{f_3} = (0; 0; 3i)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1\overline{y_1} - ix_1\overline{y_2} + ix_2\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2} + (2+i)x_2\overline{y_3} + (2-i)x_3\overline{y_2} + 6x_3\overline{y_3}$.

3) Координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Використовуючи процес ортогоналізації Грама-Шмідта побудувати ортонормований базис підпростору, що є лінійною оболонкою векторів
$\overrightarrow{a_1} = (0; 0; 1; 1)$, $\overrightarrow{a_2} = (1; 0; 1; 0)$, $\overrightarrow{a_3} = (4; 1; 7; 0)$.

4) В деякому ортонормованому базисі задано L - лінійну оболонку векторів. Знайти базис ортогонального доповнення $L^{\perp}$ до лінійного підпростору L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (1; 2; 1; 3)$, $\overrightarrow{a_2} = (4; 5; 1; 7)$.

5) Знайти систему рівнянь, якою задається підпростір L, якщо його ортогональне доповнення $L^{\perp}$ підпростору $L^{\perp} \subset R^4$ задається рівнянням $4x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$.

6) Нехай координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та $\overrightarrow{x}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{x}$ на підпростір L, що є лінійною оболонкою векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та визначити кут і відстань між $\overrightarrow{x}$ та L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (1;2;1;2)$, $\overrightarrow{a_2} = (2;-3;4;0)$, $\overrightarrow{a_3} = (3;0;1;4)$, $\overrightarrow{x} = (1;0;0;1)$.

7) У дійсному лінійному просторі задано стандартний скалярний добуток. Застосовуючи матрицю Грама знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{e_1} = (4;-1;2)$, $\overrightarrow{e_2} = (2;1;-1)$, $\overrightarrow{e_3} = (3;1;4)$.

Білінійні та квадратичні форми

1) Методом Лагранжа звести квадратичну форму до канонічного та нормального виглядів. Записати невироджене лінійне перетворення, яке зводить форму до нормального вигляду:
$x_1^2+8x_2^2+4x_3^2+20x_4^2-4x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4-12x_2x_3+12x_2x_4-12x_3x_4$.

2) Методом Якобі звести квадратичну форму до канонічного вигляду:
$-9x_1^2-5x_2^2+17x_3^2+18x_1x_2-54x_1x_3+14x_2x_3$.

3) За допомогою критерію Сільвестра з'ясувати знакосталість квадратичної форми $4x_1^2+17x_2^2+54x_3^2-16x_1x_2-24x_1x_3+40x_2x_3$.

Многочлени

1) За допомогою схеми Горнера визначити кратність кореня $c = 1$ для многочлена $f(x) = 5x^5 - 15x^4 + 18x^3 - 14x^2 + 9x - 3$.

2) Знайти всі раціональні корені многочлена $f(x) = 6x^4 - x^3 + x^2 - 5x + 2$.

3) Розкласти многочлен у добуток незвідних множників над полем R та полем C: $f(x) = x^6 - 27$.

4) За допомогою схеми Горнера розкласти даний правильний дріб на найпростіші дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{-x^5+2x^4+3x+2}{(x-1)^6}$.

5) Методом невизначених коефіцієнтів розкласти даний правильний дріб на елементарні дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{7x^3+14x^2-20x-61}{(x^2+4x+5)(x+2)(x-1)}$.

6) Використовуючи алгоритм Евклида, знайти найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ та $g(x)$:
$f(x) = x^5 - 2x^3 + 2x^2 + x - 2, \quad g(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 1$.

2.18. Варіант 18.

Комплексні числа

1) Записати комплексне число z в алгебричній формі, знайти дійсну та уявну частину даного комплексного числа, модуль та аргумент цього комплексного числа $z = \frac{20-15i}{2-i} + (3i-2)^2 - 2i^{13}$.
2) Подати число у тригонометричній формі, вказати модуль та аргумент комплексного числа. Використовуючи формулу Муавра (піднесення до степеня комплексного числа) знайдіть n-ий степінь числа $z = -3 - i\sqrt{3}$, $n = 13$.
3) Знайти всі значення $\sqrt[6]{-\sqrt{3} - 3i}$ та зобразити всі ці значення на комплексній площини.
4) На комплексной площині зобразити область, що задовольняє умовам $2 \le \mathrm{Re}z, \quad -2 \le \mathrm{Im}z, \quad -\pi/6 \le \arg z < \pi/4$.
5) Розв'язати рівняння $z^4 + 20z^2 + 64 = 0$.

Матриці, визначники, обернена матриця

1) Знайти значення вказаного матричного виразу $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$;

   $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; $AB - BA$.
2) Розв'язати матричне рівняння $2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - 3 \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.
3) Знайти значення многочлену $f(A)$ від матриці A, якщо $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x - 1, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.
4) Відомо, що навіть для квадратних матриць AB не обов'язково дорівнює BA. Пояснити, чому квадратні матриці A та A^3 комутують.
5) Обчисліть визначники четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.
6) Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} x & 4 \\ x-2 & x+3 \end{vmatrix} \le 8 - 7x$.
7) Обчислити обернену матрицю A^{-1} для наведеної матриці A: $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

   Результат перевірте $A \cdot A^{-1} = E$.

8) Розв'язати рівняння: $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

9) Використовуючи метод елементарних перетворень рядків, знайти для даної матриці обернену: $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 3 & -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

10) Методом обрамляючих мінорів для даної матриці знайти який–небудь базисний мінор та визначите ранг матриці: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 5 & -2 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

11) Використовуючи елементарні перетворення рядків або стовпчиків знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 10 & 4 & 14 \\ -14 & 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$.

Системи лінійних рівнянь

1) Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера, методом Ґаусса та матричним методом $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$

2) Розв'язати методом Ґаусса систему лінійних неоднорідних рівнянь

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = -4, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

3) Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 1x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0, \\ 4x_1 - 7x_2 + 6x_3 + x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$

Лінійні простори

1) З'ясувати, чи є лінійним простором множина монотонно спадаючих на інтервалі $(a; b)$ функцій. Операції додавання елементів та множення на скаляр визначаються звичайним чином.

2) Вказати який-небудь лінійний простір, що містить дані вектори, та встановіть лінійну залежність або незалежність даної системи векторів:
$f_1(x) = -x^2 + 1,\ f_2(x) = x^2 + 7x - 1,\ f_3(x) = 2x^2 + 6x + 8.$

3) Знайти всі базисі системи векторів: $\overrightarrow{a_1} = (5; 2; 0; -4),\ \overrightarrow{a_2} = (3; 7; 0; 11),$
$\overrightarrow{a_3} = (2; 9; 6; -8),\quad \overrightarrow{a_4} = (8; 9; 0; -4).$

4) Знайти базис та розмірність лінійного простору матриць порядку 2, що комутують з матрицею $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$.

5) Знайти координати останнього вектора в базисі, утвореному першими чотирма векторами: $x_1 = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix},\ x_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},\ x_3 = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix},$
$x_4 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix},\quad x_5 = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 22 & 15 \end{pmatrix}.$

6) Відомі координати вектора $\overrightarrow{b}$ в деякому базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$. Знайти координати цього вектора $\overrightarrow{b}$ в базисі $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$, якщо відомий зв'язок між базисними векторами. Записати матрицю переходу від базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ до базису $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$.
$\overrightarrow{b} = (2; 0; -1),$
$\overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{e_2} - 2\overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_2} = 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}.$

7) Знайти базис і розмірність суми та розмірність перетину підпросторів L_1 та L_2 простору R^4, якщо L_1 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$, а L_2 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$, якщо
$\overrightarrow{a_1} = (1, 2, -1, -2), \overrightarrow{a_2} = (3, 1, 1, -1), \overrightarrow{a_3} = (2, -1, 2, 1),$
$\overrightarrow{b_1} = (1, -3, 3, 3), \overrightarrow{b_2} = (-1, 2, 1, 1), \overrightarrow{b_3} = (4, 7, 0, -4).$

Унітарний та евклідів простори

1) Нехай L – лінійний простір над полем дійсних чисел. Перевірити можливість введення скалярного добутку у просторі L вказаним способом:
L – простір дійсних многочленів, степінь яких не перевищує 2. Для довільних $f, g \in L$ визначимо $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)dx + f(0)g(0).$

2) В евклідовому та унітарному просторах, елементами яких є набори $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n)$ відповідно дійсних та комплексних чисел, задано скалярні добутки. Побудувати матрицю Грама для векторів $\overrightarrow{f_i}$ та дослідити на лінійну залежність цю систему векторів:
$\overrightarrow{f_1} = (1; -1; 1),\ \overrightarrow{f_2} = (2; 0; 1), \overrightarrow{f_3} = (-1; -1; 2),$
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3.$

3) Координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Використовуючи процес ортогоналізації Грама-Шмідта побудувати ортонормований базис підпростору, що є лінійною оболонкою векторів
$\overrightarrow{a_1} = (6; -1; 0; 1),\ \overrightarrow{a_2} = (2; 3; 4; 5),\ \overrightarrow{a_3} = (1; -5; 2; 1).$

4) В деякому ортонормованому базисі задано L - лінійну оболонку векторів. Знайти базис ортогонального доповнення $L^{\perp}$ до лінійного підпростору L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (4; 3; 1; -2)$.
5) Знайти систему рівнянь, якою задається підпростір L, якщо його ортогональне доповнення $L^{\perp}$ підпростору $L^{\perp} \subset R^4$ задається наступною системою рівнянь:
$4x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 0,$
$3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0,$
$8x_1 + x_2 - x_3 - 6x_4 = 0.$
6) Нехай координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та $\overrightarrow{x}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{x}$ на підпростір L, що є лінійною оболонкою векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та визначити кут і відстань між $\overrightarrow{x}$ та L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (2; 3; 4; -1)$, $\overrightarrow{a_2} = (1; 1; 0; 3)$, $\overrightarrow{a_3} = (2; 1; 2; 0)$, $\overrightarrow{x} = (1; 2; 2; 1)$.
7) У дійсному лінійному просторі задано стандартний скалярний добуток. Застосовуючи матрицю Грама знайти відстань між прямими
$l_1: \ \dfrac{x}{4} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+3}{1}$ та $l_2: \ \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-3}{0} = \dfrac{z-1}{2}$.

Білінійні та квадратичні форми

1) Методом Лагранжа звести квадратичну форму до канонічного та нормального виглядів. Записати невироджене лінійне перетворення, яке зводить форму до нормального вигляду:
$-x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 13x_4^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_1x_4 + 2x_2x_4 - 6x_3x_4.$
2) Методом Якобі звести квадратичну форму до канонічного вигляду:
$-4x_1^2 + 3x_2^2 + 38x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 22x_2x_3.$
3) За допомогою критерію Сільвестра з'ясувати знакосталість квадратичної форми $4x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 8x_1x_2 - 8x_1x_3 + 6x_2x_3$.

Многочлени

1) За допомогою схеми Горнера визначити кратність кореня $c = -1$ для многочлена $f(x) = 3x^5 + 9x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 15x - 5$.
2) Знайти всі раціональні корені многочлена $f(x) = 6x^4 + 5x^3 + 9x^2 - 4x - 4$.
3) Розкласти многочлен у добуток незвідних множників над полем R та полем C: $f(x) = x^4 - 25$.
4) За допомогою схеми Горнера розкласти даний правильний дріб на найпростіші дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{x^5 - x^4 + x^3 + x^2 + 3}{(x-3)^6}$.
5) Методом невизначених коефіцієнтів розкласти даний правильний дріб на елементарні дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{4x^3 + 11x^2 + 18x + 7}{(x^2 + 2x + 2)(x-1)(x+1)}$.
6) Використовуючи алгоритм Евклида, знайти найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ та $g(x)$:
$f(x) = x^5 - x^4 + x^3 + 2x^2 - 2x + 2, \quad g(x) = x^4 + 2x^3 + 2x + 4.$

2.19. **Варіант 19.**

Комплексні числа

1) Записати комплексне число z в алгебричній формі, знайти дійсну та уявну частину даного комплексного числа, модуль та аргумент цього комплексного числа $z = \frac{5-20i}{2+i} - (2+2i)^4 + i^{25}$.

2) Подати число у тригонометричній формі, вказати модуль та аргумент комплексного числа. Використовуючи формулу Муавра (піднесення до степеня комплексного числа) знайдіть n-ий степінь числа $z = -1 + i\sqrt{3}$, $n = 27$.

3) Знайти всі значення $\sqrt[5]{-3 - i\sqrt{3}}$ та зобразити всі ці значення на комплексній площини.

4) На комплексной площині зобразити область, що задовольняє умовам $-3 \leq \mathrm{Im}z \leq 2,\ -\pi/4 < \arg(z+1) \leq \pi/3$.

5) Розв'язати рівняння $z^4 - 7z^2 + 64 = 0$.

Матриці, визначники, обернена матриця

1) Знайти значення вказаного матричного виразу $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -7 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$;
$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; $(A^T \cdot B) - (B^T \cdot A)$.

2) Розв'язати матричне рівняння $5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot X = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$.

3) Знайти значення многочлену $f(A)$ від матриці A, якщо
$f(x) = x^4 + x^3 - x + 6,\ \ A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

4) Використовуючи елементарні властивості матриць, знайти всі матриці X, що задовольняють рівнянню $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 18 & 45 \end{pmatrix}$.

5) Обчисліть визначники четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

6) Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 2x-3 & x^2+3 \end{vmatrix} < 69$.

7) Обчислити обернену матрицю A^{-1} для наведеної матриці A: $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Результат перевірте $A \cdot A^{-1} = E$.

8) Розв'язати рівняння: $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

9) Використовуючи метод елементарних перетворень рядків, знайти для даної матриці обернену: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

10) Методом обрамляючих мінорів для даної матриці знайти який–небудь базисний мінор та визначите ранг матриці: $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

11) Використовуючи елементарні перетворення рядків або стовпчиків знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & -3 \\ 8 & 10 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Системи лінійних рівнянь

1) Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера, методом Ґаусса та матричним методом $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 4, \\ 7x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 10, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

2) Розв'язати методом Ґаусса систему лінійних неоднорідних рівнянь

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 12, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_5 = -2, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 = -3, \\ 3x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 2. \end{cases}$$

3) Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 6x_4 - x_5 = 0, \\ 5x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 10x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

Лінійні простори

1) З'ясувати, чи є лінійним простором множина розв'язків рівняння $x + y + z = 2$. Операції додавання елементів та множення на скаляр визначаються звичайним чином.

2) Вказати який-небудь лінійний простір, що містить дані вектори, та встановіть лінійну залежність або незалежність даної системи векторів:

$\overrightarrow{a_1} = (4; -2; 8; 3),\ \overrightarrow{a_2} = (1; 0; 1; -1),\ \overrightarrow{a_3} = (1; -2; 5; 6).$

3) Знайти всі базисі системи векторів: $\overrightarrow{a_1} = (3; -1; 6; 4),\ \overrightarrow{a_2} = (2; 1; 1; 2),$ $\overrightarrow{a_3} = (0; -1; 1; 0),\ \ \overrightarrow{a_4} = (6; -2; 12; 8).$
4) Знайти базис та розмірність лінійного простору розв'язків рівняння $x + y + z = 0.$
5) Знайти координати останнього вектора в базисі, утвореному першими чотирма векторами: $\overrightarrow{a_1} = (3; 7; 1; 4),\ \overrightarrow{a_2} = (-5; 2; 6; 8),\ \ \overrightarrow{a_3} = (0; 1; 5; 1),$ $\overrightarrow{a_4} = (3; 3; 6; 2),\ \overrightarrow{a_5} = (2; 17; 41; 35).$
6) Відомі координати вектора $\overrightarrow{b}$ в деякому базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$. Знайти координати цього вектора $\overrightarrow{b}$ в базисі $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$, якщо відомий зв'язок між базисними векторами. Записати матрицю переходу від базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ до базису $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$.
   $\overrightarrow{b} = (0; 2; -1),\ \overrightarrow{f_1} = 3\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{f_2} = -\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_3} = 2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3}.$
7) Знайти базис і розмірність суми та розмірність перетину підпросторів L_1 та L_2 простору R^4, якщо L_1 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$, а L_2 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$, якщо
   $\overrightarrow{a_1} = (1, -1, 1, 1), \overrightarrow{a_2} = (3, 2, 1, -1), \overrightarrow{a_3} = (1, 4, -1, -3),$
   $\overrightarrow{b_1} = (2, 3, 0, -2), \overrightarrow{b_2} = (1, 1, 2, 1), \overrightarrow{b_3} = (6, 1, 5, 2).$

Унітарний та евклідів простори

1) Нехай L – лінійний простір над полем дійсних чисел. Перевірити можливість введення скалярного добутку у просторі L вказаним способом:
   L – простір матриць порядку 2. Для довільних $f = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & u_1 \end{pmatrix}$ та $g = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & u_2 \end{pmatrix}$ визначимо $(f, g) = tr(f \cdot g).$
2) В евклідовому та унітарному просторах, елементами яких є набори $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n)$ відповідно дійсних та комплексних чисел, задано скалярні добутки. Побудувати матрицю Грама для векторів $\overrightarrow{f_i}$ та дослідити на лінійну залежність цю систему векторів:
   $\overrightarrow{f_1} = (8 - i; 0),\ \overrightarrow{f_2} = (2; -3i),$
   $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 2x_1\overline{y_1} + (1 + i)x_1\overline{y_2} + (1 - i)x_2\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2}.$
3) Координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Використовуючи процес ортогоналізації Грама-Шмідта побудувати ортонормований базис підпростору, що є лінійною оболонкою векторів
   $\overrightarrow{a_1} = (2; -2; 3; 6),\ \overrightarrow{a_2} = (1; 0; -2; 1),\ \overrightarrow{a_3} = (4; 2; 3; -3).$
4) В деякому ортонормованому базисі задано L - лінійну оболонку векторів. Знайти базис ортогонального доповнення $L^{\perp}$ до лінійного підпростору L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (5; 7; 6; -1),\ \overrightarrow{a_2} = (4; 2; 0; 3),\ \overrightarrow{a_3} = (6; 4; 2; 7).$

5) Знайти систему рівнянь, якою задається підпростір L, якщо його ортогональне доповнення $L^{\perp}$ підпростору $L^{\perp} \subset R^4$ задається наступною системою рівнянь:
$3x_1 - 4x_2 + 5x_3 - x_4 = 0,$
$4x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0.$

6) Нехай координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та $\overrightarrow{x}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{x}$ на підпростір L, що є лінійною оболонкою векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та визначити кут і відстань між $\overrightarrow{x}$ та L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (5; 1; 2; 1)$, $\overrightarrow{a_2} = (3; -1; 2; 5)$, $\overrightarrow{a_3} = (6; 0; 1; 5)$, $\overrightarrow{x} = (1; 2; 5; 1)$.

7) У дійсному лінійному просторі задано стандартний скалярний добуток. Застосовуючи матрицю Грама знайти об'єм тетраедра, побудованого на векторах $\overrightarrow{e_1} = (0; 3; -2)$, $\overrightarrow{e_2} = (-2; 1; 1)$, $\overrightarrow{e_3} = (1; 2; 2)$.

Білінійні та квадратичні форми

1) Методом Лагранжа звести квадратичну форму до канонічного та нормального виглядів. Записати невироджене лінійне перетворення, яке зводить форму до нормального вигляду:
$4x_1^2+5x_2^2+38x_3^2+6x_4^2+4x_1x_2+4x_1x_3-8x_1x_4 - 22x_2x_3 + 4x_2x_4 - 30x_3x_4.$

2) Методом Якобі звести квадратичну форму до канонічного вигляду:
$3x_1^2 + 28x_2^2 + 20x_3^2 - 18x_1x_2 + 12x_1x_3 - 42x_2x_3.$

3) За допомогою критерію Сільвестра з'ясувати знакосталість квадратичної форми $-x_1^2 - 5x_2^2 - 17x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$.

Многочлени

1) За допомогою схеми Горнера визначити кратність кореня $c = 4$ для многочлена $f(x) = -3x^5 + 22x^4 - 32x^3 - 31x^2 - 8x + 16$.

2) Знайти всі раціональні корені многочлена $f(x) = 6x^4+13x^3+12x^2-2x-4$.

3) Розкласти многочлен у добуток незвідних множників над полем R та полем C: $f(x) = x^6 + 1$.

4) За допомогою схеми Горнера розкласти даний правильний дріб на найпростіші дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{-3x^5 + 2x^4 + x^3 - x - 1}{(x + 1)^6}$.

5) Методом невизначених коефіцієнтів розкласти даний правильний дріб на елементарні дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{x^3 + 10x^2 - 10x + 63}{(x^2 + 2x + 10)(x - 3)(x + 3)}$.

6) Використовуючи алгоритм Евклида, знайти найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ та $g(x)$:
$f(x) = x^5 + x^4 + 2x^3 - x^2 - x - 2, \quad g(x) = x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 3.$

2.20. **Варіант 20.**

Комплексні числа

1) Записати комплексне число z в алгебричній формі, знайти дійсну та уявну частину даного п числа, модуль та аргумент цього комплексного числа $z = \frac{35i+5}{i-2} + (3-3i)^3 - i^{27}$.

2) Подати число у тригонометричній формі, вказати модуль та аргумент комплексного числа. Використовуючи формулу Муавра (піднесення до степеня комплексного числа) знайдіть n-ий степінь числа $z = -4 - 4i\sqrt{3}$, $n = 40$.

3) Знайти всі значення $\sqrt[5]{-3i}$ та зобразити всі ці значення на комплексній площини.

4) На комплексной площині зобразити область, що задовольняє умовам $|z - 4 + i| \leq 3, \quad -\pi/4 \leq \arg(z-3) \leq \pi/3$.

5) Розв'язати рівняння $z^4 - 12z^2 + 64 = 0$.

Матриці, визначники, обернена матриця

1) Знайти значення вказаного матричного виразу $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 5 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $(AB)^T - B^T A^T$.

2) Розв'язати матричне рівняння $2 \cdot \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

3) Знайти значення многочлену $f(A)$ від матриці A, якщо $f(x) = 3x^4 + 3x^3 - 3x - 4, \;\; A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

4) Використовуючи елементарні властивості матриць, навести приклад комутуючих матриць порядку 3, що не є нульовими або одиничними матрицями.

5) Обчисліть визначники четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \\ 3 & -4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

6) Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} 1-x & 3x \\ 2 & 2x-1 \end{vmatrix} < -6$.

7) Обчислити обернену матрицю A^{-1} для наведеної матриці A: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

   Результат перевірте $A \cdot A^{-1} = E$.

8) Розв'язати рівняння: $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

9) Використовуючи метод елементарних перетворень рядків, знайти для даної матриці обернену: $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

10) Методом обрамляючих мінорів для даної матриці знайти який–небудь базисний мінор та визначите ранг матриці: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

11) Використовуючи елементарні перетворення рядків або стовпчиків знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \\ -9 & 2 & -6 & 1 \\ 10 & 8 & 4 & 10 \end{pmatrix}$.

Системи лінійних рівнянь

1) Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера, методом Ґаусса та матричним методом $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 8x_3 = -20, \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = -4. \end{cases}$

2) Розв'язати методом Ґаусса систему лінійних неоднорідних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 + x_5 = 5, \\ -2x_1 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

3) Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

Лінійні простори

1) З'ясувати, чи є лінійним простором множина многочленів степеня, що не перевищує три. Операції додавання елементів та множення на скаляр визначаються звичайним чином.

2) Вказати який-небудь лінійний простір, що містить дані вектори, та встановіть лінійну залежність або незалежність даної системи векторів:

$f_1(x) = \sin^2 x,\ f_2(x) = \cos 2x,\ f_3(x) = -2.$

3) Знайти всі базисі системи векторів: $\overrightarrow{a_1} = (-4; 12; 7),\ \overrightarrow{a_2} = (2; 5; -7),$ $\overrightarrow{a_3} = (1; -1; 5),\ \overrightarrow{a_4} = (7; 6; 6).$

4) Знайти базис та розмірність лінійного простору непарних функцій, що є многочленами не вище третього порядку.

5) Знайти координати останнього вектора в базисі, утвореному першими чотирма векторами: $f_1(x) = x^3 + 6x + 1,\ f_2(x) = -4x^3 + 3x^2 + 2x + 5,$ $f_3(x) = x^3 + 7x^2 + 2x + 8,\ f_4(x) = 3x^3 + 3x^2 - x + 6,$ $f_5(x) = 6x^3 + 34x^2 + 27x + 46.$

6) Відомі координати вектора $\overrightarrow{b}$ в деякому базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$. Знайти координати цього вектора $\overrightarrow{b}$ в базисі $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$, якщо відомий зв'язок між базисними векторами. Записати матрицю переходу від базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ до базису $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$.
$\overrightarrow{b} = (1; -2; 1),$
$\overrightarrow{f_1} = 2\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_3} = 2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}.$

7) Знайти базис і розмірність суми та розмірність перетину підпросторів L_1 та L_2 простору R^4, якщо L_1 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$, а L_2 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$, якщо
$\overrightarrow{a_1} = (2, 2, 1, 2), \overrightarrow{a_2} = (-1, -1, 1, 3), \overrightarrow{a_3} = (5, 5, 4, 9),$
$\overrightarrow{b_1} = (3, 3, 0, -1), \overrightarrow{b_2} = (2, -1, -1, 1), \overrightarrow{b_3} = (2, -1, 2, 9).$

Унітарний та евклідів простори

1) Нехай L – лінійний простір над полем дійсних чисел. Перевірити можливість введення скалярного добутку у просторі L вказаним способом:
$L = R^3$. Для довільних $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in L$ визначимо $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \sqrt{|\overrightarrow{x}||\overrightarrow{y}|}$.

2) В евклідовому та унітарному просторах, елементами яких є набори $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n)$ відповідно дійсних та комплексних чисел, задано скалярні добутки. Побудувати матрицю Грама для векторів $\overrightarrow{f_i}$ та дослідити на лінійну залежність цю систему векторів:
$\overrightarrow{f_1} = (-1; 1 + i; -1),\ \overrightarrow{f_2} = (2; 0; i), \overrightarrow{f_3} = (0; i; 2),$
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1\overline{y_1} - ix_1\overline{y_2} + ix_2\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2} + (2 + i)x_2\overline{y_3} + (2 - i)x_3\overline{y_2} + 6x_3\overline{y_3}.$

3) Координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Використовуючи процес ортогоналізації Грама-Шмідта побудувати ортонормований базис підпростору, що є лінійною оболонкою векторів
$\overrightarrow{a_1} = (1; 1; 3; 1),\ \overrightarrow{a_2} = (2; 1; 1; 1),\ \overrightarrow{a_3} = (3; -1; 0; 2).$

4) В деякому ортонормованому базисі задано L - лінійну оболонку векторів. Знайти базис ортогонального доповнення $L^{\perp}$ до лінійного підпростору L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (1; 4; 3; 2),\ \overrightarrow{a_2} = (2; -1; 5; 0).$

5) Знайти систему рівнянь, якою задається підпростір L, якщо його ортогональне доповнення $L^{\perp}$ підпростору $L^{\perp} \subset R^4$ задається рівнянням $4x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0$.

6) Нехай координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та $\overrightarrow{x}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{x}$ на підпростір L, що є лінійною оболонкою векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та визначити кут і відстань між $\overrightarrow{x}$ та L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (3; 2; 0; 2)$, $\overrightarrow{a_2} = (4; 2; 5; 3)$, $\overrightarrow{a_3} = (3; 2; 3; 1)$, $\overrightarrow{x} = (4; 0; 1; -1)$.

7) У дійсному лінійному просторі задано стандартний скалярний добуток. Застосовуючи матрицю Грама знайти розклад вектора $\overrightarrow{a} = (8; 13; 8)$ за векторами $\overrightarrow{e_1} = (1; -2; 1)$, $\overrightarrow{e_2} = (2; 3; 4)$, $\overrightarrow{e_3} = (4; 0; -2)$.

Білінійні та квадратичні форми

1) Методом Лагранжа звести квадратичну форму до канонічного та нормального виглядів. Записати невироджене лінійне перетворення, яке зводить форму до нормального вигляду:
$x_1^2 + 6x_2^2 + 12x_3^2 + 8x_4^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_1x_4 - 16x_2x_3$.

2) Методом Якобі звести квадратичну форму до канонічного вигляду:
$2x_1^2 + 19x_2^2 + 12x_1x_2 - 8x_1x_3 - 22x_2x_3$.

3) За допомогою критерію Сільвестра з'ясувати знакосталість квадратичної форми $-x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 10x_2x_3$.

Многочлени

1) За допомогою схеми Горнера визначити кратність кореня $c = -1$ для многочлена $f(x) = 2x^5 + 6x^4 + 7x^3 + 5x^2 + 3x + 1$.

2) Знайти всі раціональні корені многочлена $f(x) = 6x^4 + 13x^3 + 27x^2 + 23x + 6$.

3) Розкласти многочлен у добуток незвідних множників над полем R та полем C: $f(x) = x^4 + 81$.

4) За допомогою схеми Горнера розкласти даний правильний дріб на найпростіші дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{2x^5 + 3x^4 - 4x^2 + x - 5}{(x-2)^6}$.

5) Методом невизначених коефіцієнтів розкласти даний правильний дріб на елементарні дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{8x^2 - 20x + 17}{(x^2 - x + 1)(x-2)(x-1)}$.

6) Використовуючи алгоритм Евклида, знайти найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ та $g(x)$:
$f(x) = x^4 + 3x^2 + 2x + 3, \quad g(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 - x + 2$.

2.21. **Варіант 21.**

Комплексні числа

1) Записати комплексне число z в алгебричній формі, знайти дійсну та уявну частину даного комплексного числа, модуль та аргумент цього комплексного числа $z = \frac{10-30i}{3i+1} + (1+i)^6 + i^{99}$.
2) Подати число у тригонометричній формі, вказати модуль та аргумент комплексного числа. Використовуючи формулу Муавра (піднесення до степеня комплексного числа) знайдіть n-ий степінь числа $z = 7 - 7i$, $n = 31$.
3) Знайти всі значення $\sqrt[5]{-4}$ та зобразити всі ці значення на комплексній площини.
4) На комплексной площині зобразити область, що задовольняє умовам $|z - 2 - 2i| \geq 3, \quad 1 \leq |z + 3 + 2i|$.
5) Розв'язати рівняння $z^4 + 19z^2 + 9 = 0$.

Матриці, визначники, обернена матриця

1) Знайти значення вказаного матричного виразу $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 1 & 9 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;
$B = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$; $(A+B)(B-A) + (A^2 - B^2)$.
2) Розв'язати матричне рівняння $4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} - 3 \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$.
3) Знайти значення многочлену $f(A)$ від матриці A, якщо
$f(x) = 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 1, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.
4) Використовуючи елементарні властивості матриць, знайти всі матриці B, що комутують з матрицею $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$, тобто $AB = BA$.
5) Обчисліть визначники четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 3 & -4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.
6) Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} x-2 & x+1 \\ 3 & x \end{vmatrix} < 3$.
7) Обчислити обернену матрицю A^{-1} для наведеної матриці A: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & -7 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

   Результат перевірте $A \cdot A^{-1} = E$.

8) Розв'язати рівняння: $\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

9) Використовуючи метод елементарних перетворень рядків, знайти для даної матриці обернену: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

10) Методом обрамляючих мінорів для даної матриці знайти який–небудь базисний мінор та визначите ранг матриці: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

11) Використовуючи елементарні перетворення рядків або стовпчиків знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -4 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Системи лінійних рівнянь

1) Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера, методом Ґаусса та матричним методом $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 8, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = -8, \\ x_1 + x_2 + 6x_3 = -19. \end{cases}$

2) Розв'язати методом Ґаусса систему лінійних неоднорідних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 = -4, \\ 2x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 = -14. \end{cases}$$

3) Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_5 = 0, \\ x_2 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 0. \end{cases}$

Лінійні простори

1) З'ясувати, чи є лінійним простором множина неперервно диференційовних на інтервалі $(a; b)$ функцій. Операції додавання елементів та множення на скаляр визначаються звичайним чином.

2) Вказати який-небудь лінійний простір, що містить дані вектори, та встановіть лінійну залежність або незалежність даної системи векторів:

$A=\begin{pmatrix}6 & -4\\ 1 & -5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & 7\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 4 & 13\end{pmatrix}$.

3) Знайти всі базисі системи векторів: $\overrightarrow{a_1}=(10;-3;6;-8)$, $\overrightarrow{a_2}=(2;8;1;-7)$, $\overrightarrow{a_3}=(4;-4;3;3)$, $\overrightarrow{a_4}=(-1;6;-1;-5)$.

4) Знайти базис та розмірність лінійного простору векторів з R^3, що ортогональні до вектора $\overrightarrow{a}=(3;-2;5)$.

5) Знайти координати останнього вектора в базисі, утвореному першими чотирма векторами: $x_1=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 4\end{pmatrix}$, $x_2=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 5 & 0\end{pmatrix}$, $x_3=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 7\end{pmatrix}$, $x_4=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $x_5=\begin{pmatrix}3 & -6\\ -8 & 14\end{pmatrix}$.

6) Відомі координати вектора $\overrightarrow{b}$ в деякому базисі $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$. Знайти координати цього вектора $\overrightarrow{b}$ в базисі $\overrightarrow{f_1},\overrightarrow{f_2},\overrightarrow{f_3}$, якщо відомий зв'язок між базисними векторами. Записати матрицю переходу від базису $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$ до базису $\overrightarrow{f_1},\overrightarrow{f_2},\overrightarrow{f_3}$.
$\overrightarrow{b}=(2;0;2)$, $\overrightarrow{f_1}=\overrightarrow{e_2}+2\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{f_2}=\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{f_3}=\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_3}$.

7) Знайти базис і розмірність суми та розмірність перетину підпросторів L_1 та L_2 простору R^4, якщо L_1 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3}$, а L_2 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{b_1},\overrightarrow{b_2},\overrightarrow{b_3}$, якщо
$\overrightarrow{a_1}=(1,1,-1,1),\overrightarrow{a_2}=(2,-1,3,1),\overrightarrow{a_3}=(1,-2,4,0)$,
$\overrightarrow{b_1}=(4,1,1,3),\overrightarrow{b_2}=(1,1,-2,1),\overrightarrow{b_3}=(5,2,-1,4)$.

Унітарний та евклідів простори

1) Нехай L – лінійний простір над полем дійсних чисел. Перевірити можливість введення скалярного добутку у просторі L вказаним способом:
L – простір дійсних многочленів, степінь яких не перевищує 4 та $f(-1)=f(1)=0$. Для довільних $f,g\in L$ визначимо $(f,g)=\int\limits_0^1 f'(x)g'(x)dx$.

2) В евклідовому та унітарному просторах, елементами яких є набори $\overrightarrow{x}=(x_1,...,x_n)$ відповідно дійсних та комплексних чисел, задано скалярні добутки. Побудувати матрицю Грама для векторів $\overrightarrow{f_i}$ та дослідити на лінійну залежність цю систему векторів:
$\overrightarrow{f_1}=(0;-2;1)$, $\overrightarrow{f_2}=(1;0;-1)$, $\overrightarrow{f_3}=(2;3;0)$,
$(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})=4x_1y_1+2x_1y_2+2x_2y_1+2x_2y_2-x_2y_3-x_3y_2+3x_3y_3$.

3) Координати векторів $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Використовуючи процес ортогоналізації Грама-Шмідта побудувати ортонормований базис підпростору, що є лінійною оболонкою векторів
$\overrightarrow{a_1}=(-3;2;1;0)$, $\overrightarrow{a_2}=(-1;1;1;1)$, $\overrightarrow{a_3}=(2;-4;3;5)$.

4) В деякому ортонормованому базисі задано L - лінійну оболонку векторів. Знайти базис ортогонального доповнення $L^{\perp}$ до лінійного підпростору L, якщо $\overrightarrow{a_1}=(3;2;-1;-1)$.

5) Знайти систему рівнянь, якою задається підпростір L, якщо його ортогональне доповнення $L^{\perp}$ підпростору $L^{\perp} \subset R^4$ задається наступною системою рівнянь:
$2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0,$
$x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0,$
$3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0.$

6) Нехай координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та $\overrightarrow{x}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{x}$ на підпростір L, що є лінійною оболонкою векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та визначити кут і відстань між $\overrightarrow{x}$ та L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (1; 2; 3; 1)$, $\overrightarrow{a_2} = (2; 0; 1; 2)$, $\overrightarrow{a_3} = (-2; 0; 1; 4)$, $\overrightarrow{x} = (7; 1; 3; 1)$.

7) У дійсному лінійному просторі задано стандартний скалярний добуток. Застосовуючи матрицю Грама знайти відстань між прямими
$$l_1 : \begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = 2 + t, \\ z = 3 - t \end{cases} \text{ та } l_2 : \begin{cases} x = 2t, \\ y = 3 + t, \\ z = 2 - 3t \end{cases} t \in R.$$

Білінійні та квадратичні форми

1) Методом Лагранжа звести квадратичну форму до канонічного та нормального виглядів. Записати невироджене лінійне перетворення, яке зводить форму до нормального вигляду:
$3x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + 3x_4^2 + 6x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_1x_4 + 2x_2x_3 + 10x_2x_4 + 4x_3x_4.$

2) Методом Якобі звести квадратичну форму до канонічного вигляду:
$4x_1^2 + 91x_2^2 - 62x_3^2 + 40x_1x_2 + 16x_1x_3 + 134x_2x_3.$

3) За допомогою критерію Сільвестра з'ясувати знакосталість квадратичної форми $9x_1^2 + 13x_2^2 + 11x_3^2 - 12x_1x_2 + 6x_1x_3 - 22x_2x_3$.

Многочлени

1) За допомогою схеми Горнера визначити кратність кореня $c = -1$ для многочлена $f(x) = 2x^5 + 6x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 9x - 3$.

2) Знайти всі раціональні корені многочлена
$f(x) = 6x^4 - 11x^3 + 22x^2 - 33x + 12$.

3) Розкласти многочлен у добуток незвідних множників над полем R та полем C: $f(x) = x^6 + 4x^2$.

4) За допомогою схеми Горнера розкласти даний правильний дріб на найпростіші дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{x^5 + 3x^3 - x^2 - x + 5}{(x+3)^6}$.

5) Методом невизначених коефіцієнтів розкласти даний правильний дріб на елементарні дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{3x^3 + x^2 + 20x + 6}{(x^2 + x + 1)(x + 3)(x - 3)}$.

6) Використовуючи алгоритм Евклида, знайти найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ та $g(x)$:
$f(x) = x^5 + x^4 - x^2 - 3x + 2, \quad g(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 2.$

2.22. Варіант 22.

Комплексні числа

1) Записати комплексне число $z = \frac{70-20i}{1-3i} - (3-2i)^3 + i^{101}$ в алгебричній формі, знайти дійсну та уявну частину даного комплексного числа, модуль та аргумент цього комплексного числа.
2) Подати число у тригонометричній формі, вказати модуль та аргумент комплексного числа. Використовуючи формулу Муавра (піднесення до степеня комплексного числа) знайдіть n-ий степінь числа $z = -2i$, $n = 26$.
3) Знайти всі значення $\sqrt[6]{4+4i}$ та зобразити всі ці значення на комплексній площини.
4) На комплексной площині зобразити область, що задовольняє умовам $|z - 3 - i| \le 6, \quad 2 \le |z - 5|, \quad |z| \ge 1.$
5) Розв'язати рівняння $z^4 - 2z^2 + 9 = 0$.

Матриці, визначники, обернена матриця

1) Знайти значення вказаного матричного виразу $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 9 \\ 2 & 5 & -3 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$; $AB - BA$.
2) Розв'язати матричне рівняння $3 \cdot X + 5 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.
3) Знайти значення многочлену $f(A)$ від матриці A, якщо $f(x) = x^4 - x^2 + 5x + 2, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
4) Використовуючи елементарні властивості матриць, знайти всі матриці порядку 2, для яких $A^2 = E$.
5) Обчисліть визначники четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 5 \\ 3 & -4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.
6) Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} 2x & x+3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} < x^2 - 9$.
7) Обчислити обернену матрицю A^{-1} для наведеної матриці A: $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$.

   Результат перевірте $A \cdot A^{-1} = E$.

8) Розв'язати рівняння: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

9) Використовуючи метод елементарних перетворень рядків, знайти для даної матриці обернену: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 9 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

10) Методом обрамляючих мінорів для даної матриці знайти який–небудь базисний мінор та визначите ранг матриці: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

11) Використовуючи елементарні перетворення рядків або стовпчиків знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 6 & -2 \\ 2 & -4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

Системи лінійних рівнянь

1) Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера, методом Ґаусса та матричним методом $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 = 5, \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = -2. \end{cases}$

2) Розв'язати методом Ґаусса систему лінійних неоднорідних рівнянь
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 4, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 + x_5 = 20, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 6, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 4x_4 + 5x_5 = -3. \end{cases}$$

3) Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь $\begin{cases} x_1 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$

Лінійні простори

1) З'ясувати, чи є лінійним простором множина натуральних чисел, кратних 5. Операції додавання елементів та множення на скаляр визначаються звичайним чином.

2) Вказати який-небудь лінійний простір, що містить дані вектори, та встановіть лінійну залежність або незалежність даної системи векторів: $f_1(x) = 5x^2 + 4x - 1,\ f_2(x) = 3x^2 + 2x + 7,\ f_3(x) = 7x^2 + 6x - 9.$

3) Знайти всі базисі системи векторів: $\overrightarrow{a_1} = (-11; -3; 2; 0; 1)$, $\overrightarrow{a_2} = (12; 0; 4; 7; 6)$, $\overrightarrow{a_3} = (1; -1; 3; 4; -7)$.

4) Знайти базис та розмірність лінійного простору многочленів степеня не вище другого, для яких $f'(0) = 0$.

5) Знайти координати останнього вектора в базисі, утвореному першими чотирма векторами: $\overrightarrow{a_1} = (-4; 1; 2; 6)$, $\overrightarrow{a_2} = (-5; -1; 2; 3)$, $\overrightarrow{a_3} = (0; 1; 7; 4)$, $\overrightarrow{a_4} = (2; 8; -5; 0)$, $\overrightarrow{a_5} = (-16; 12; 31; 34)$.

6) Відомі координати вектора $\overrightarrow{b}$ в деякому базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$. Знайти координати цього вектора $\overrightarrow{b}$ в базисі $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$, якщо відомий зв'язок між базисними векторами. Записати матрицю переходу від базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ до базису $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$.
   $\overrightarrow{b} = (1; 1; 0)$, $\overrightarrow{f_1} = 3\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{f_2} = 2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}$.

7) Знайти базис і розмірність суми та розмірність перетину підпросторів L_1 та L_2 простору R^4, якщо L_1 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$, а L_2 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$, якщо
   $\overrightarrow{a_1} = (1, 1, -1, 2), \overrightarrow{a_2} = (2, 1, -1, 1), \overrightarrow{a_3} = (1, 0, 0, -1)$,
   $\overrightarrow{b_1} = (4, 3, -3, 5), \overrightarrow{b_2} = (1, 2, -1, -1), \overrightarrow{b_3} = (5, 5, -4, 4)$.

Унітарний та евклідів простори

1) Нехай L – лінійний простір над полем дійсних чисел. Перевірити можливість введення скалярного добутку у просторі L вказаним способом:
   L – простір матриць порядку 2. Для довільних $f = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & u_1 \end{pmatrix}$ та $g = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & u_2 \end{pmatrix}$ визначимо $(f, g) = x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + y_1y_2 + z_1z_2 + {}$ $+ z_1u_2 + z_2u_1 + u_1u_2$.

2) В евклідовому та унітарному просторах, елементами яких є набори $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n)$ відповідно дійсних та комплексних чисел, задано скалярні добутки. Побудувати матрицю Грама для векторів $\overrightarrow{f_i}$ та дослідити на лінійну залежність цю систему векторів:
   $\overrightarrow{f_1} = (2; -3)$, $\overrightarrow{f_2} = (-2i; 1 - 2i)$,
   $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 2x_1\overline{y_1} + (1 + i)x_1\overline{y_2} + (1 - i)x_2\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2}$.

3) Координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Використовуючи процес ортогоналізації Грама-Шмідта побудувати ортонормований базис підпростору, що є лінійною оболонкою векторів
   $\overrightarrow{a_1} = (0; 2; 1; 4)$, $\overrightarrow{a_2} = (3; 0; -5; 6)$, $\overrightarrow{a_3} = (3; 2; -4; 10)$.

4) В деякому ортонормованому базисі задано L - лінійну оболонку векторів. Знайти базис ортогонального доповнення $L^{\perp}$ до лінійного підпростору L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (7; 1; 3; 4)$, $\overrightarrow{a_2} = (2; -1; 5; 0)$, $\overrightarrow{a_3} = (4; 6; -1; 3)$.

5) Знайти систему рівнянь, якою задається підпростір L, якщо його ортогональне доповнення $L^{\perp}$ підпростору $L^{\perp} \subset R^4$ задається наступною системою рівнянь:

$4x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0,$
$3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0.$

6) Нехай координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та $\overrightarrow{x}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{x}$ на підпростір L, що є лінійною оболонкою векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та визначити кут і відстань між $\overrightarrow{x}$ та L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (6; 2; -1; 3)$, $\overrightarrow{a_2} = (1; -1; 1; 3)$, $\overrightarrow{a_3} = (0; 0; 2; 4)$, $\overrightarrow{x} = (1; 0; 0; 1)$.

7) У дійсному лінійному просторі задано стандартний скалярний добуток. Застосовуючи матрицю Грама знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{e_1} = (-1; 3; 4)$, $\overrightarrow{e_2} = (0; 2; -1)$.

Білінійні та квадратичні форми

1) Методом Лагранжа звести квадратичну форму до канонічного та нормального виглядів. Записати невироджене лінійне перетворення, яке зводить форму до нормального вигляду:
$x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 8x_2x_3 - 4x_2x_4 + 10x_3x_4.$

2) Методом Якобі звести квадратичну форму до канонічного вигляду:
$4x_1^2 + 27x_2^2 - x_3^2 + 24x_1x_2 + 24x_1x_3 + 108x_2x_3.$

3) За допомогою критерію Сільвестра з'ясувати знакосталість квадратичної форми $-x_1^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$.

Многочлени

1) За допомогою схеми Горнера визначити кратність кореня $c = -1$ для многочлена $f(x) = 3x^5 + 9x^4 + 7x^3 - 3x^2 - 6x - 2$.

2) Знайти всі раціональні корені многочлена $f(x) = 6x^4 - 5x^3 + 20x^2 - 20x - 16$.

3) Розкласти многочлен у добуток незвідних множників над полем R та полем C: $f(x) = x^6 + 64$.

4) За допомогою схеми Горнера розкласти даний правильний дріб на найпростіші дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{2x^5 + x^4 - x^2 + 3x - 2}{(x+2)^6}$.

5) Методом невизначених коефіцієнтів розкласти даний правильний дріб на елементарні дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{4x^3 + 12x^2 + 25x + 62}{(x^2 + x + 5)(x+4)(x+1)}$.

6) Використовуючи алгоритм Евклида, знайти найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ та $g(x)$:
$f(x) = x^5 - x^3 - 2x^2 - 2x + 4, \quad g(x) = x^6 - 2x^4 - x^3 + x^2 + 2x - 2.$

2.23. Варіант 23.

Комплексні числа

1) Записати комплексне число z в алгебричній формі, знайти дійсну та уявну частину даного комплексного числа, модуль та аргумент цього комплексного числа $z = \frac{30+10i}{3i+1} - 2(3-i)^3 - i^{103}$.
2) Подати число у тригонометричній формі, вказати модуль та аргумент комплексного числа. Використовуючи формулу Муавра (піднесення до степеня комплексного числа) знайдіть n-ий степінь числа $z = 10 + 10i\sqrt{3}$, $n = 29$.
3) Знайти всі значення $\sqrt[6]{-2-2i}$ та зобразити всі ці значення на комплексній площини.
4) На комплексной площині зобразити область, що задовольняє умовам $-1 \le \mathrm{Re}z \le 3, \quad 2 \le \mathrm{Im}z$.
5) Розв'язати рівняння $z^4 - 4z^2 + 16 = 0$.

Матриці, визначники, обернена матриця

1) Знайти значення вказаного матричного виразу $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$; $(A^T \cdot B) - (B^T \cdot A)$.
2) Розв'язати матричне рівняння $3 \cdot X - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & -12 \end{pmatrix}$.
3) Знайти значення многочлену $f(A)$ від матриці A, якщо $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x - 4, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.
4) Використовуючи елементарні властивості матриць, знайти всі матриці B, що комутують з матрицею $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, тобто $AB = BA$.
5) Обчисліть визначники четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 3 & -4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.
6) Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 4x^2 & 2x-1 \end{vmatrix} < 11x^2 - 40$.
7) Обчислити обернену матрицю A^{-1} для наведеної матриці A: $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

   Результат перевірте $A \cdot A^{-1} = E$.

8) Розв'язати рівняння: $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

9) Використовуючи метод елементарних перетворень рядків, знайти для даної матриці обернену: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

10) Методом обрамляючих мінорів для даної матриці знайти який–небудь базисний мінор та визначите ранг матриці: $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

11) Використовуючи елементарні перетворення рядків або стовпчиків знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & -5 \\ 3 & -4 & 1 & -3 \\ 5 & -4 & 7 & -13 \end{pmatrix}$.

Системи лінійних рівнянь

1) Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера, методом Ґаусса та матричним методом $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -3, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = -8. \end{cases}$

2) Розв'язати методом Ґаусса систему лінійних неоднорідних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 10, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 + x_5 = -5, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 4, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

3) Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ -2x_1 + 5x_2 - 6x_3 + 12x_4 + 8x_5 = 0. \end{cases}$

Лінійні простори

1) З'ясувати, чи є лінійним простором множина нескоротних дробів доповнена нульовим елементом. Операції додавання елементів та множення на скаляр визначаються звичайним чином.

2) Вказати який-небудь лінійний простір, що містить дані вектори, та встановіть лінійну залежність або незалежність даної системи векторів: $\overrightarrow{a_1} = (5; -1; 4; 6)$, $\overrightarrow{a_2} = (3; 2; -1; -8)$, $\overrightarrow{a_3} = (9; 0; 3; 6)$.

3) Знайти всі базисі системи векторів: $\overrightarrow{a_1} = (4; 5; -7; 8)$, $\overrightarrow{a_2} = (1; 2; 1; 2)$, $\overrightarrow{a_3} = (3; 3; -8; 6)$, $\overrightarrow{a_4} = (2; 1; -9; 4)$.

4) Знайти базис та розмірність лінійного простору многочленів степеня не вище другого, для яких $f(-1) = 0$.

5) Знайти координати останнього вектора в базисі, утвореному першими чотирма векторами: $f_1(x) = 2x^3 + 6x^2 + 3x + 3$, $f_2(x) = 4x^2 + x - 1$, $f_3(x) = 2x^3 + 5x^2 + 3x + 7$, $f_4(x) = 6x^3 - 4x^2 - x + 2$, $f_5(x) = -8x^3 + 24x^2 + 9x + 1$.

6) Відомі координати вектора $\overrightarrow{b}$ в деякому базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$. Знайти координати цього вектора $\overrightarrow{b}$ в базисі $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$, якщо відомий зв'язок між базисними векторами. Записати матрицю переходу від базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ до базису $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$.
   $\overrightarrow{b} = (4; 1; 1)$, $\overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$.

7) Знайти базис і розмірність суми та розмірність перетину підпросторів L_1 та L_2 простору R^4, якщо L_1 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$, а L_2 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$, якщо
   $\overrightarrow{a_1} = (1, -1, 2, 3)$, $\overrightarrow{a_2} = (-1, 2, 3, 1)$, $\overrightarrow{a_3} = (1, 0, 7, 7)$,
   $\overrightarrow{b_1} = (2, -3, -1, 2)$, $\overrightarrow{b_2} = (2, 1, 1, 1)$, $\overrightarrow{b_3} = (5, -3, 2, 6)$.

Унітарний та евклідів простори

1) Нехай L – лінійний простір над полем дійсних чисел. Перевірити можливість введення скалярного добутку у просторі L вказаним способом:
   $L = R^3$. Для довільних $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in L$ визначимо $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = |\overrightarrow{x}| + |\overrightarrow{y}|$.

2) В евклідовому та унітарному просторах, елементами яких є набори $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n)$ відповідно дійсних та комплексних чисел, задано скалярні добутки. Побудувати матрицю Грама для векторів $\overrightarrow{f_i}$ та дослідити на лінійну залежність цю систему векторів:
   $\overrightarrow{f_1} = (1 + i; 0; 1)$, $\overrightarrow{f_2} = (2; 0; 1)$, $\overrightarrow{f_3} = (i; -i; 0)$,
   $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1\overline{y_1} - ix_1\overline{y_2} + ix_2\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2} + (2 + i)x_2\overline{y_3} + (2 - i)x_3\overline{y_2} + 6x_3\overline{y_3}$.

3) Координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Використовуючи процес ортогоналізації Грама-Шмідта побудувати ортонормований базис підпростору, що є лінійною оболонкою векторів
   $\overrightarrow{a_1} = (5; -4; 1; 1)$, $\overrightarrow{a_2} = (1; 0; 5; 1)$, $\overrightarrow{a_3} = (-1; -1; 2; 3)$.

4) В деякому ортонормованому базисі задано L - лінійну оболонку векторів. Знайти базис ортогонального доповнення $L^\perp$ до лінійного підпростору L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (0; 1; 1; 5)$, $\overrightarrow{a_2} = (2; 8; 3; 4)$.

5) Знайти систему рівнянь, якою задається підпростір L, якщо його ортогональне доповнення $L^\perp$ підпростору $L^\perp \subset R^4$ задається рівнянням $x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0$.

6) Нехай координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та $\overrightarrow{x}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{x}$ на підпростір L, що є лінійною оболонкою векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та визначити кут і відстань між $\overrightarrow{x}$ та L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (2;1;0;1)$, $\overrightarrow{a_2} = (0;2;2;1)$, $\overrightarrow{a_3} = (-3;1;5;2)$, $\overrightarrow{x} = (0;1;1;1)$.

7) У дійсному лінійному просторі задано стандартний скалярний добуток. Застосовуючи матрицю Грама знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{e_1} = (4;0;2)$, $\overrightarrow{e_2} = (-1;2;5)$, $\overrightarrow{e_3} = (2;1;0)$.

Білінійні та квадратичні форми

1) Методом Лагранжа звести квадратичну форму до канонічного та нормального виглядів. Записати невироджене лінійне перетворення, яке зводить форму до нормального вигляду:
$3x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 + 9x_4^2 + 6x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_1x_4 + 2x_2x_3 + 10x_2x_4.$

2) Методом Якобі звести квадратичну форму до канонічного вигляду:
$-4x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 - 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 26x_2x_3.$

3) За допомогою критерію Сільвестра з'ясувати знакосталість квадратичної форми $-x_1^2 - 8x_2^2 - 14x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 20x_2x_3$.

Многочлени

1) За допомогою схеми Горнера визначити кратність кореня $c = 3$ для многочлена $f(x) = -3x^5 + 18x^4 - 26x^3 - 5x^2 + 3x + 9$.

2) Знайти всі раціональні корені многочлена $f(x) = 6x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 10x - 8$.

3) Розкласти многочлен у добуток незвідних множників над полем R та полем C: $f(x) = x^4 + 625$.

4) За допомогою схеми Горнера розкласти даний правильний дріб на найпростіші дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{-3x^5 + x^4 + 3x^2 - 2x + 1}{(x-1)^6}$.

5) Методом невизначених коефіцієнтів розкласти даний правильний дріб на елементарні дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{x^3 + 10x^2 + 3x - 22}{(x^2+4x+5)(x-3)(x+1)}$.

6) Використовуючи алгоритм Евклида, знайти найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ та $g(x)$:
$f(x) = 2x^5 + 5x^3 + x^2 + 2x + 2, \quad g(x) = 2x^6 + 4x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 6.$

2.24. **Варіант 24.**

Комплексні числа

1) Записати комплексне число z в алгебричній формі, знайти дійсну та уявну частину даного комплексного числа, модуль та аргумент цього комплексного числа $z = \frac{16i+24}{2i-2} + (2i+4)^3 - i^{107}$.
2) Подати число у тригонометричній формі, вказати модуль та аргумент комплексного числа. Використовуючи формулу Муавра (піднесення до степеня комплексного числа) знайдіть n-ий степінь числа $z = -3+3i$, $n = 22$.
3) Знайти всі значення $\sqrt[6]{-6+2i\sqrt{3}}$ та зобразити всі ці значення на комплексній площини.
4) На комплексной площині зобразити область, що задовольняє умовам $-2 \le \mathrm{Re}z,\quad -2\pi/3 \le \arg z \le 5\pi/6$.
5) Розв'язати рівняння $z^4 - z^2 + 25 = 0$.

Матриці, визначники, обернена матриця

1) Знайти значення вказаного матричного виразу $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $(AB)^T - B^T A^T$.
2) Розв'язати матричне рівняння $5 \cdot X - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$.
3) Знайти значення многочлену $f(A)$ від матриці A, якщо $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 3,\ \ A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.
4) Використовуючи елементарні властивості матриць, знайти всі матриці X, що задовольняють рівняння $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -7 & 14 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -10 & -12 \\ 35 & 42 \end{pmatrix}$.
5) Обчисліть визначники четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.
6) Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} 5x+1 & 3x \\ 2-x & x \end{vmatrix} > 9x^2$.
7) Обчислити обернену матрицю A^{-1} для наведеної матриці A: $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

   Результат перевірте $A \cdot A^{-1} = E$.

8) Розв'язати рівняння: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

9) Використовуючи метод елементарних перетворень рядків, знайти для даної матриці обернену: $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

10) Методом обрамляючих мінорів для даної матриці знайти який–небудь базисний мінор та визначите ранг матриці: $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

11) Використовуючи елементарні перетворення рядків або стовпчиків знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Системи лінійних рівнянь

1) Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера, методом Ґаусса та матричним методом $\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 = -7, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 2, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -4. \end{cases}$

2) Розв'язати методом Ґаусса систему лінійних неоднорідних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 1, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 5, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 - 2x_5 = -6. \end{cases}$$

3) Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_5 = 0. \end{cases}$

Лінійні простори

1) З'ясувати, чи є лінійним простором множина таких функцій, що $f(0) = 0$. Операції додавання елементів та множення на скаляр визначаються звичайним чином.

2) Вказати який-небудь лінійний простір, що містить дані вектори, та встановіть лінійну залежність або незалежність даної системи векторів:

$f_1(x) = \frac{1}{x^2},\ f_2(x) = \frac{1}{x},\ f_3(x) = 1,\ x \in (0;1).$

3) Знайти всі базисі системи векторів: $\overrightarrow{a_1} = (2;-1;3;4),\ \overrightarrow{a_2} = (4;5;0;9),$ $\overrightarrow{a_3} = (6;-7;1;0).$

4) Знайти базис та розмірність лінійного простору матриць порядку 2 з нульовим слідом.

5) Знайти координати останнього вектора в базисі, утвореному першими чотирма векторами: $x_1 = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ x_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix},\ x_3 = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$ $x_4 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ \ x_5 = \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 13 & -1 \end{pmatrix}.$

6) Відомі координати вектора $\overrightarrow{b}$ в деякому базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$. Знайти координати цього вектора $\overrightarrow{b}$ в базисі $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$, якщо відомий зв'язок між базисними векторами. Записати матрицю переходу від базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ до базису $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$.
$\overrightarrow{b} = (0;1;2),$
$\overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_2} = 3\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_3} = -\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}.$

7) Знайти базис і розмірність суми та розмірність перетину підпросторів L_1 та L_2 простору R^4, якщо L_1 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$, а L_2 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$, якщо
$\overrightarrow{a_1} = (-1,-1,-1,1), \overrightarrow{a_2} = (1,-1,0,2), \overrightarrow{a_3} = (2,0,1,1),$
$\overrightarrow{b_1} = (3,1,2,0), \overrightarrow{b_2} = (1,-1,3,1), \overrightarrow{b_3} = (0,-4,1,5).$

Унітарний та евклідів простори

1) Нехай L – лінійний простір над полем дійсних чисел. Перевірити можливість введення скалярного добутку у просторі L вказаним способом:
L – простір дійсних многочленів, степінь яких не перевищує 2 .
Для довільних $f, g \in L$ визначимо $(f,g) = \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)g(x)|.$

2) В евклідовому та унітарному просторах, елементами яких є набори $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n)$ відповідно дійсних та комплексних чисел, задано скалярні добутки. Побудувати матрицю Грама для векторів $\overrightarrow{f_i}$ та дослідити на лінійну залежність цю систему векторів:
$\overrightarrow{f_1} = (3;1;2),\ \overrightarrow{f_2} = (-2;1;3), \overrightarrow{f_3} = (2;-1;1),$
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3.$

3) Координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Використовуючи процес ортогоналізації Грама-Шмідта побудувати ортонормований базис підпростору, що є лінійною оболонкою векторів
$\overrightarrow{a_1} = (-1;-3;5;3),\ \overrightarrow{a_2} = (-2;2;1;3),\ \overrightarrow{a_3} = (2;-1;2;7).$

4) В деякому ортонормованому базисі задано L - лінійну оболонку векторів. Знайти базис ортогонального доповнення $L^{\perp}$ до лінійного підпростору L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (7;-2;0;1).$

5) Знайти систему рівнянь, якою задається підпростір L, якщо його ортогональне доповнення $L^{\perp}$ підпростору $L^{\perp} \subset R^4$ задається наступною системою рівнянь:
$x_1 + x_2 - x_3 = 0,$
$5x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0,$
$4x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0.$

6) Нехай координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та $\overrightarrow{x}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{x}$ на підпростір L, що є лінійною оболонкою векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та визначити кут і відстань між $\overrightarrow{x}$ та L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (0;1;0;2)$, $\overrightarrow{a_2} = (2;1;0;1)$, $\overrightarrow{a_3} = (1;1;0;1)$, $\overrightarrow{x} = (1;2;1;1)$.

7) У дійсному лінійному просторі задано стандартний скалярний добуток. Застосовуючи матрицю Грама знайти відстань між прямими
$l_1: \ \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z+3}{3}$ та $l_2: \ \dfrac{x+4}{-2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-1}{0}$.

Білінійні та квадратичні форми

1) Методом Лагранжа звести квадратичну форму до канонічного та нормального виглядів. Записати невироджене лінійне перетворення, яке зводить форму до нормального вигляду:
$x_1^2+8x_2^2+14x_3^2+24x_4^2-4x_1x_2+6x_1x_3+2x_1x_4-20x_2x_3+12x_2x_4-12x_3x_4.$

2) Методом Якобі звести квадратичну форму до канонічного вигляду:
$x_1^2 + 5x_2^2 + 42x_3^2 + 2x_1x_2 + 10x_1x_3 + 26x_2x_3.$

3) За допомогою критерію Сільвестра з'ясувати знакосталість квадратичної форми $x_1^2 + 10x_2^2 + 9x_3^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 10x_2x_3$.

Многочлени

1) За допомогою схеми Горнера визначити кратність кореня $c = 3$ для многочлена $f(x) = 3x^5 - 18x^4 + 27x^3 + x^2 - 6x + 9$.

2) Знайти всі раціональні корені многочлена $f(x) = 6x^4+17x^3+21x^2+15x+4$.

3) Розкласти многочлен у добуток незвідних множників над полем R та полем C: $f(x) = x^6 + 1331$.

4) За допомогою схеми Горнера розкласти даний правильний дріб на найпростіші дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{x^5 + x^4 + 2x^3 - x + 1}{(x-3)^6}$.

5) Методом невизначених коефіцієнтів розкласти даний правильний дріб на елементарні дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{3x^3 + 10x^2 + 9x + 8}{(x^2+2x+2)(x-2)(x+1)}$.

6) Використовуючи алгоритм Евклида, знайти найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ та $g(x)$:
$f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3, \quad g(x) = x^5 - 5x^3 + 3x^2 + 6x - 9.$

2.25. **Варіант 25.**

Комплексні числа

1) Записати комплексне число z в алгебричній формі, знайти дійсну та уявну частину даного комплексного числа, модуль та аргумент цього комплексного числа $z = \frac{26}{5i-1} + (1-i)^6 + i^{17}$.
2) Подати число у тригонометричній формі, вказати модуль та аргумент комплексного числа. Використовуючи формулу Муавра (піднесення до степеня комплексного числа) знайдіть n-ий степінь числа $z = -2 + 2i$, $n = 23$.
3) Знайти всі значення $\sqrt[4]{-4\sqrt{3} + 4i}$ та зобразити всі ці значення на комплексній площини.
4) На комплексной площині зобразити область, що задовольняє умовам $|z-1| \leq 3, \quad \mathrm{Re} z \leq 2, \quad \mathrm{Im} z \leq 1$.
5) Розв'язати рівняння $z^4 - 5z^2 + 49 = 0$.

Матриці, визначники, обернена матриця

1) Знайти значення вказаного матричного виразу $A = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; $(A+B)(B-A) + (A^2 - B^2)$.
2) Розв'язати матричне рівняння $\begin{pmatrix} 11 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} + 4 \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -12 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$.
3) Знайти значення многочлену $f(A)$ від матриці A, якщо $f(x) = -2x^3 + 3x^2 - 3x + 7, \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.
4) Використовуючи елементарні властивості матриць, навести приклад матриці порядку 2, що не є одиничною або нульовою для якої $A^3 = A$.
5) Обчисліть визначники четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.
6) Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} 2x+1 & 4 \\ 2+x & 1-3x \end{vmatrix} > -16 - 6x^2$.
7) Обчислити обернену матрицю A^{-1} для наведеної матриці A: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   Результат перевірте $A \cdot A^{-1} = E$.

8) Розв'язати рівняння: $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

9) Використовуючи метод елементарних перетворень рядків, знайти для даної матриці обернену: $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

10) Методом обрамляючих мінорів для даної матриці знайти який–небудь базисний мінор та визначите ранг матриці: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

11) Використовуючи елементарні перетворення рядків або стовпчиків знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Системи лінійних рівнянь

1) Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера, методом Ґаусса та матричним методом $\begin{cases} -x_1 - x_2 + 5x_3 = -14, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2_3 = 10, \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$

2) Розв'язати методом Ґаусса систему лінійних неоднорідних рівнянь

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 3, \\ 4x_1 + 2x_3 + 6x_4 + 3x_5 = 1, \\ x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 - 2x_5 = -2. \end{cases}$$

3) Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь $\begin{cases} x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

Лінійні простори

1) З'ясувати, чи є лінійним простором множина нижніх трикутних матриць. Операції додавання елементів та множення на скаляр визначаються звичайним чином.

2) Вказати який-небудь лінійний простір, що містить дані вектори, та встановіть лінійну залежність або незалежність даної системи векторів:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & -1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3) Знайти всі базисі системи векторів: $\overrightarrow{a_1} = (0; 1; 3; 2)$, $\overrightarrow{a_2} = (1; -1; 8; 4)$, $\overrightarrow{a_3} = (2; -2; 9; 4)$.

4) Знайти базис та розмірність лінійного простору матриць порядку 2, що комутують з матрицею $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

5) Знайти координати останнього вектора в базисі, утвореному першими чотирма векторами: $\overrightarrow{a_1} = (5; 7; 6; -1)$, $\overrightarrow{a_2} = (4; 2; 0; 3)$, $\overrightarrow{a_3} = (2; 2; 1; -5)$, $\overrightarrow{a_4} = (6; 4; 2; 7)$, $\overrightarrow{a_5} = (15; 13; 6; -9)$.

6) Відомі координати вектора $\overrightarrow{b}$ в деякому базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$. Знайти координати цього вектора $\overrightarrow{b}$ в базисі $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$, якщо відомий зв'язок між базисними векторами. Записати матрицю переходу від базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ до базису $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$.
$\overrightarrow{b} = (3; 1; 0)$, $\overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{f_2} = 2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$.

7) Знайти базис і розмірність суми та розмірність перетину підпросторів L_1 та L_2 простору R^4, якщо L_1 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$, а L_2 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$, якщо
$\overrightarrow{a_1} = (2, 2, -2, 1), \overrightarrow{a_2} = (1, 3, -1, -3), \overrightarrow{a_3} = (1, -1, -1, 2)$,
$\overrightarrow{b_1} = (4, 8, -4, -5), \overrightarrow{b_2} = (1, 1, 1, 2), \overrightarrow{b_3} = (5, 9, -3, -3)$.

Унітарний та евклідів простори

1) Нехай L – лінійний простір над полем дійсних чисел. Перевірити можливість введення скалярного добутку у просторі L вказаним способом:
L – простір матриць порядку 2. Для довільних $f = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & u_1 \end{pmatrix}$ та $g = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & u_2 \end{pmatrix}$ визначимо $(f, g) = max\{x_1x_2;\ y_1y_2;\ z_1z_2;\ u_1u_2\}$.

2) В евклідовому та унітарному просторах, елементами яких є набори $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n)$ відповідно дійсних та комплексних чисел, задано скалярні добутки. Побудувати матрицю Грама для векторів $\overrightarrow{f_i}$ та дослідити на лінійну залежність цю систему векторів:
$\overrightarrow{f_1} = (2; i - 3)$, $\overrightarrow{f_2} = (2i; 0)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 2x_1\overline{y_1} + (1 + i)x_1$.

3) Координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Використовуючи процес ортогоналізації Грама-Шмідта побудувати ортонормований базис підпростору, що є лінійною оболонкою векторів
$\overrightarrow{a_1} = (4; 0; 1; -2)$, $\overrightarrow{a_2} = (3; 1; -5; 4)$, $\overrightarrow{a_3} = (1; -1; 6; -3)$.

4) В деякому ортонормованому базисі задано L - лінійну оболонку векторів. Знайти базис ортогонального доповнення $L^{\perp}$ до лінійного підпростору L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (2; 6; 3; 3)$, $\overrightarrow{a_2} = (4; 0; 1; -1)$, $\overrightarrow{a_3} = (2; 5; 3; 7)$.

5) Знайти систему рівнянь, якою задається підпростір L, якщо його ортогональне доповнення $L^{\perp}$ підпростору $L^{\perp} \subset R^4$ задається наступною системою рівнянь:
$2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0,$
$3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0.$

6) Нехай координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та $\overrightarrow{x}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{x}$ на підпростір L, що є лінійною оболонкою векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та визначити кут і відстань між $\overrightarrow{x}$ та L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (-1; 1; 1; 1)$, $\overrightarrow{a_2} = (1; -1; 0; 3)$, $\overrightarrow{a_3} = (0; 0; 1; 0)$, $\overrightarrow{x} = (1; 0; 2; 1)$.

7) У дійсному лінійному просторі задано стандартний скалярний добуток. Застосовуючи матрицю Грама знайти об'єм тетраедра, побудованого на векторах $\overrightarrow{e_1} = (-1; 0; 2)$, $\overrightarrow{e_2} = (2; 1; 3)$, $\overrightarrow{e_3} = (4; -1; 2)$.

Білінійні та квадратичні форми

1) Методом Лагранжа звести квадратичну форму до канонічного та нормального виглядів. Записати невироджене лінійне перетворення, яке зводить форму до нормального вигляду:
$2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_1x_4 + 6x_2x_3 + 2x_2x_4.$

2) Методом Якобі звести квадратичну форму до канонічного вигляду:
$x_1^2 + 2x_2^2 + 25x_3^2 + 2x_1x_2 + 10x_1x_3 + 8x_2x_3.$

3) За допомогою критерію Сільвестра з'ясувати знакосталість квадратичної форми $x_1^2 + 10x_2^2 + 12x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3$.

Многочлени

1) За допомогою схеми Горнера визначити кратність кореня $c = 3$ для многочлена $f(x) = -2x^5 + 17x^4 - 41x^3 - 9x^2 + 135x - 108$.

2) Знайти всі раціональні корені многочлена
$f(x) = 12x^4 - 13x^3 + 27x^2 - 26x + 6$.

3) Розкласти многочлен у добуток незвідних множників над полем R та полем C: $f(x) = x^4 + 4$.

4) За допомогою схеми Горнера розкласти даний правильний дріб на найпростіші дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{-3x^5 + x^4 + x^2 - x + 1}{(x+1)^6}$.

5) Методом невизначених коефіцієнтів розкласти даний правильний дріб на елементарні дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{5x^3 - 3x^2 - 3x - 9}{(x^2 + x + 3)(x-3)(x-1)}$.

6) Використовуючи алгоритм Евклида, знайти найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ та $g(x)$:
$f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2, \quad g(x) = x^5 + x^4 + x^3 + 3x^2 + 2.$

2.26. **Варіант 26.**

Комплексні числа

1) Записати комплексне число z в алгебричній формі, знайти дійсну та уявну частину даного комплексного числа, модуль та аргумент цього комплексного числа $z = \frac{13+26i}{3i-2} + (1-i)^4 - i^{14}$.
2) Подати число у тригонометричній формі, вказати модуль та аргумент комплексного числа. Використовуючи формулу Муавра (піднесення до степеня комплексного числа) знайдіть n-ий степінь числа $z = 3i, \quad n = 17$.
3) Знайти всі значення $\sqrt[4]{i}$ та зобразити всі ці значення на комплексній площини.
4) На комплексной площині зобразити область, що задовольняє умовам $|z + 2 - 2i| \geq 3, \quad \mathrm{Re}z \leq 2, \quad 1 \leq \mathrm{Im}z$.
5) Розв'язати рівняння $z^4 + 7z^2 + 81 = 0$.

Матриці, визначники, обернена матриця

1) Знайти значення вказаного матричного виразу $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;
$B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -5 \\ 0 & 3 & -7 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; $BA - AB$.
2) Розв'язати матричне рівняння $2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} + 3 \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$.
3) Знайти значення многочлену $f(A)$ від матриці A, якщо
$f(x) = 2x^4 - x^2 + x + 5, \ \ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.
4) Використовуючи елементарні властивості матриць, знайти відповідь на питання: За якої умови на елементи матриці A має місце рівність $A^T = A$?
5) Обчисліть визначники четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.
6) Розв'язати рівняння: $\begin{vmatrix} 3x & 2+x \\ x-4 & -x \end{vmatrix} = -2x$.
7) Обчислити обернену матрицю A^{-1} для наведеної матриці A: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   Результат перевірте $A \cdot A^{-1} = E$.
8) Розв'язати рівняння: $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

9) Використовуючи метод елементарних перетворень рядків, знайти для даної матриці обернену: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

10) Методом обрамляючих мінорів для даної матриці знайти який–небудь базисний мінор та визначите ранг матриці: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

11) Використовуючи елементарні перетворення рядків або стовпчиків знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 6 & 7 & 1 & 9 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 4 & -2 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Системи лінійних рівнянь

1) Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера, методом Ґаусса та матричним методом $\begin{cases} -2x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 5, \\ 2x_1 + 5x_3 = -4, \\ -x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 7. \end{cases}$

2) Розв'язати методом Ґаусса систему лінійних неоднорідних рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 8, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 5x_5 = 10, \\ -x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 11. \end{cases}$$

3) Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 0. \end{cases}$

Лінійні простори

1) З'ясувати, чи є лінійним простором множина неперервних функцій, що не мають екстремумів при $x \in (0; +\infty)$. Операції додавання елементів та множення на скаляр визначаються звичайним чином.

2) Вказати який-небудь лінійний простір, що містить дані вектори, та встановіть лінійну залежність або незалежність даної системи векторів: $f_1(x) = x^2 - x + 6,\ f_2(x) = -6x^2 + 3x - 1,\ f_3(x) = 7x^2 + 2x - 4.$

3) Знайти всі базисі системи векторів: $\overrightarrow{a_1} = (6; 4; 3; 10; 7),\ \overrightarrow{a_2} = (1; 2; -3; 3; -1),$ $\overrightarrow{a_3} = (5; 1; -6; 6; -5), \overrightarrow{a_4} = (2; 2; 3; 4; 5).$

4) Знайти базис та розмірність лінійного простору матриць порядку 2 з нульовим першим рядком.

5) Знайти координати останнього вектора в базисі, утвореному першими чотирма векторами: $f_1(x) = x^3 + 3x^2 + 2x,\ f_2(x) = 4x^3 + 5x^2 + x + 8,$ $f_3(x) = 6x^3 + 3x^2 - 2,\ f_4(x) = 2x^3 + 5x^2 + x + 4,\ f_5(x) = x^3 - 4x^2 - 14.$

6) Відомі координати вектора $\overrightarrow{b}$ в деякому базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$. Знайти координати цього вектора $\overrightarrow{b}$ в базисі $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$, якщо відомий зв'язок між базисними векторами. Записати матрицю переходу від базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ до базису $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$.
$\overrightarrow{b} = (0;1;3),$
$\overrightarrow{f_1} = -\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_2} = -\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}.$

7) Знайти базис і розмірність суми та розмірність перетину підпросторів L_1 та L_2 простору R^4, якщо L_1 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$, а L_2 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$, якщо
$\overrightarrow{a_1} = (2,-1,2,-1), \overrightarrow{a_2} = (3,0,3,1), \overrightarrow{a_3} = (7,-2,7,-1),$
$\overrightarrow{b_1} = (4,1,4,3), \overrightarrow{b_2} = (1,1,2,-1), \overrightarrow{b_3} = (7,1,9,-2).$

Унітарний та евклідів простори

1) Нехай L – лінійний простір над полем дійсних чисел. Перевірити можливість введення скалярного добутку у просторі L вказаним способом:
$L = R^3$. Для довільних $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in L$ визначимо $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \sqrt{|\overrightarrow{x}|^2 + |\overrightarrow{y}|^2}$.

2) В евклідовому та унітарному просторах, елементами яких є набори $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n)$ відповідно дійсних та комплексних чисел, задано скалярні добутки. Побудувати матрицю Грама для векторів $\overrightarrow{f_i}$ та дослідити на лінійну залежність цю систему векторів:
$\overrightarrow{f_1} = (1;0;-1),\ \overrightarrow{f_2} = (2i;0;1), \overrightarrow{f_3} = (-1;1+i;0),$
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1\overline{y_1} - ix_1\overline{y_2} + ix_2\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2} + (2+i)x_2\overline{y_3} + (2-i)x_3\overline{y_2} + 6x_3\overline{y_3}.$

3) Координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Використовуючи процес ортогоналізації Грама-Шмідта побудувати ортонормований базис підпростору, що є лінійною оболонкою векторів
$\overrightarrow{a_1} = (3;-2;1;2),\ \overrightarrow{a_2} = (2;0;4;-1),\ \overrightarrow{a_3} = (-4;1;1;6).$

4) В деякому ортонормованому базисі задано L - лінійну оболонку векторів. Знайти базис ортогонального доповнення $L^{\perp}$ до лінійного підпростору L, якщо
$\overrightarrow{a_1} = (7;3;2;-1),\ \overrightarrow{a_2} = (4;0;5;8).$

5) Знайти систему рівнянь, якою задається підпростір L, якщо його ортогональне доповнення $L^{\perp}$ підпростору $L^{\perp} \subset R^4$ задається рівнянням $3x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 0.$

6) Нехай координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та $\overrightarrow{x}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{x}$ на підпростір L, що є лінійною оболонкою векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та визначити кут і відстань між $\overrightarrow{x}$ та L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (1;1;1;-1),\ \overrightarrow{a_2} = (0;-1;1;0),\ \overrightarrow{a_3} = (2;1;2;0),\ \overrightarrow{x} = (1;2;3;1).$

7) У дійсному лінійному просторі задано стандартний скалярний добуток. Застосовуючи матрицю Грама знайти розклад вектора $\overrightarrow{a} = (3;1;3)$ за векторами $\overrightarrow{e_1} = (1;2;-3)$, $\overrightarrow{e_2} = (2;-1;1)$, $\overrightarrow{e_3} = (0;1;2)$.

Білінійні та квадратичні форми

1) Методом Лагранжа звести квадратичну форму до канонічного та нормального виглядів. Записати невироджене лінійне перетворення, яке зводить форму до нормального вигляду:
$4x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_3^2 + 7x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_1x_4 - 4x_2x_3 + 8x_2x_4 - 8x_3x_4$.
2) Методом Якобі звести квадратичну форму до канонічного вигляду:
$4x_1^2 + 5x_2^2 + 79x_3^2 + 8x_1x_2 + 40x_1x_3 + 36x_2x_3$.
3) За допомогою критерію Сільвестра з'ясувати знакосталість квадратичної форми $-x_1^2 - 2x_2^2 - 6x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$.

Многочлени

1) За допомогою схеми Горнера визначити кратність кореня $c = 3$ для многочлена $f(x) = 2x^5 - 18x^4 + 53x^3 - 45x^2 - 27x + 27$.
2) Знайти всі раціональні корені многочлена $f(x) = 12x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 5x - 3$.
3) Розкласти многочлен у добуток незвідних множників над полем R та полем C: $f(x) = x^4 - 2x^2 + 49$.
4) За допомогою схеми Горнера розкласти даний правильний дріб на найпростіші дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{2x^5 + x^2 + 3x + 2}{(x-2)^6}$.
5) Методом невизначених коефіцієнтів розкласти даний правильний дріб на елементарні дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{5x^3 - 7x^2 + x + 7}{(x^2 + x + 1)(x-2)(x-1)}$.
6) Використовуючи алгоритм Евклида, знайти найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ та $g(x)$:
$f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4, \quad g(x) = x^5 - x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4$.

2.27. **Варіант 27.**

Комплексні числа

1) Записати комплексне число z в алгебричній формі, знайти дійсну та уявну частину даного комплексного числа, модуль та аргумент цього комплексного числа $z = \frac{8+16i}{i-1} - (i-3)^4 + i^{18}$.
2) Подати число у тригонометричній формі, вказати модуль та аргумент комплексного числа. Використовуючи формулу Муавра (піднесення до степеня комплексного числа) знайдіть n-ий степінь числа $z = \sqrt{3} + 3i$, $n = 20$.
3) Знайти всі значення $\sqrt[5]{-2}$ та зобразити всі ці значення на комплексній площини.
4) На комплексной площині зобразити область, що задовольняє умовам $|z - 2 + 2i| \geq 1, \quad 0 \leq \mathrm{Re}z, \quad -2 \leq \mathrm{Im}z$.
5) Розв'язати рівняння $z^4 + 18z^2 + 81 = 0$.

Матриці, визначники, обернена матриця

1) Знайти значення вказаного матричного виразу $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; $(A^T \cdot B) - (B^T \cdot A)$.
2) Розв'язати матричне рівняння $4 \cdot X - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.
3) Знайти значення многочлену $f(A)$ від матриці A, якщо $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 9, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.
4) Використовуючи елементарні властивості матриць, знайти всі матриці B, що комутують з матрицею $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, тобто $AB = BA$.
5) Обчисліть визначники четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.
6) Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} 3x+1 & x-2 \\ 5-x & 2 \end{vmatrix} > 24$.
7) Обчислити обернену матрицю A^{-1} для наведеної матриці A: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   Результат перевірте $A \cdot A^{-1} = E$.

8) Розв'язати рівняння: $\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

9) Використовуючи метод елементарних перетворень рядків, знайти для даної матриці обернену: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

10) Методом обрамляючих мінорів для даної матриці знайти який–небудь базисний мінор та визначите ранг матриці: $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

11) Використовуючи елементарні перетворення рядків або стовпчиків знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -5 & 3 \\ 2 & -1 & -3 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ -8 & 0 & 6 & 13 \end{pmatrix}$.

Системи лінійних рівнянь

1) Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера, методом Ґаусса та матричним методом $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 6, \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$

2) Розв'язати методом Ґаусса систему лінійних неоднорідних рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 7x_4 - 3x_5 = -1, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 5, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 + x_5 = 1. \end{cases}$$

3) Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 0, \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

Лінійні простори

1) З'ясувати, чи є лінійним простором множина квадратних тричленів, що мають нульовий дискримінант. Операції додавання елементів та множення на скаляр визначаються звичайним чином.

2) Вказати який-небудь лінійний простір, що містить дані вектори, та встановіть лінійну залежність або незалежність даної системи векторів:

$\overrightarrow{a_1} = (1; -2; 3; 7)$, $\overrightarrow{a_2} = (4; 5; 1; -2)$, $\overrightarrow{a_3} = (5; 3; 4; 6)$.

3) Знайти всі базисі системи векторів: $\overrightarrow{a_1} = (1; 1; 1; 1)$, $\overrightarrow{a_2} = (-1; 0; -3; 1)$, $\overrightarrow{a_3} = (1; 1; -1; -1)$, $;\overrightarrow{a_4} = (3; 4; 1; 5)$.

4) Знайти базис та розмірність лінійного простору парних функцій, що є многочленами не вище другого порядку.

5) Знайти координати останнього вектора в базисі, утвореному першими чотирма векторами: $x_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$,
$x_4 = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $x_5 = \begin{pmatrix} -4 & 15 \\ 13 & 17 \end{pmatrix}$.

6) Відомі координати вектора $\overrightarrow{b}$ в деякому базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$. Знайти координати цього вектора $\overrightarrow{b}$ в базисі $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$, якщо відомий зв'язок між базисними векторами. Записати матрицю переходу від базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ до базису $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$.
$\overrightarrow{b} = (3; 0; 1)$, $\overrightarrow{f_1} = 2\overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$.

7) Знайти базис і розмірність суми та розмірність перетину підпросторів L_1 та L_2 простору R^4, якщо L_1 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$, а L_2 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$, якщо
$\overrightarrow{a_1} = (1, -2, 1, 1), \overrightarrow{a_2} = (2, 3, 1, 2), \overrightarrow{a_3} = (4, -1, 3, 4)$,
$\overrightarrow{b_1} = (5, 4, 3, 5), \overrightarrow{b_2} = (-1, -1, 2, 0), \overrightarrow{b_3} = (3, -2, 5, 4)$.

Унітарний та евклідів простори

1) Нехай L – лінійний простір над полем дійсних чисел. Перевірити можливість введення скалярного добутку у просторі L вказаним способом:
L – простір дійсних многочленів, степінь яких не перевищує 2. Для довільних $f, g \in L$ визначимо $(f, g) = \int\limits_0^1 x^2 f(x) g(x) dx$.

2) В евклідовому та унітарному просторах, елементами яких є набори $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n)$ відповідно дійсних та комплексних чисел, задано скалярні добутки. Побудувати матрицю Грама для векторів $\overrightarrow{f_i}$ та дослідити на лінійну залежність цю систему векторів:
$\overrightarrow{f_1} = (1; 0; 2)$, $\overrightarrow{f_2} = (-1; 2; 1), \overrightarrow{f_3} = (0; 3; 0)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3$.

3) Координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Використовуючи процес ортогоналізації Грама-Шмідта побудувати ортонормований базис підпростору, що є лінійною оболонкою векторів
$\overrightarrow{a_1} = (1; -1; 0; 4)$, $\overrightarrow{a_2} = (2; 1; 2; 1)$, $\overrightarrow{a_3} = (3; 0; 2; 5)$.

4) В деякому ортонормованому базисі задано L - лінійну оболонку векторів. Знайти базис ортогонального доповнення $L^{\perp}$ до лінійного підпростору L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (0; 1; 0; 2)$.

5) Знайти систему рівнянь, якою задається підпростір L, якщо його ортогональне доповнення $L^{\perp}$ підпростору $L^{\perp} \subset R^4$ задається наступною системою рівнянь:
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 &= 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 &= 0. \end{aligned}$$

6) Нехай координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та $\overrightarrow{x}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{x}$ на підпростір L, що є лінійною оболонкою векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та визначити кут і відстань між $\overrightarrow{x}$ та L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (0; 3; 0; 1)$, $\overrightarrow{a_2} = (2; 1; 0; 0)$, $\overrightarrow{a_3} = (-1; 1; 1; 1)$, $\overrightarrow{x} = (2; 1; 2; -1)$.

7) У дійсному лінійному просторі задано стандартний скалярний добуток. Застосовуючи матрицю Грама знайти відстань між прямими
$$l_1 : \begin{cases} x = 2 + t, \\ y = 3 - t, \\ z = 2t \end{cases} \text{ та } \; l_2 : \begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 3, \\ z = 2 + 3t \end{cases} \; t \in R.$$

Білінійні та квадратичні форми

1) Методом Лагранжа звести квадратичну форму до канонічного та нормального виглядів. Записати невироджене лінійне перетворення, яке зводить форму до нормального вигляду:
$$4x_1^2 + 6x_2^2 + 2x_3^2 + 3x_4^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 8x_2x_4.$$

2) Методом Якобі звести квадратичну форму до канонічного вигляду:
$$4x_1^2 + 35x_2^2 - 13x_3^2 + 24x_1x_2 + 16x_1x_3 + 54x_2x_3.$$

3) За допомогою критерію Сільвестра з'ясувати знакосталість квадратичної форми $-x_1^2 - 10x_2^2 - 11x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 16x_2x_3$.

Многочлени

1) За допомогою схеми Горнера визначити кратність кореня $c = -3$ для многочлена $f(x) = 3x^5 + 28x^4 + 88x^3 + 90x^2 - 27x - 54$.

2) Знайти всі раціональні корені многочлена $f(x) = 12x^4 + 17x^3 + 14x^2 + 2x - 3$.

3) Розкласти многочлен у добуток незвідних множників над полем R та полем C: $f(x) = x^4 - x^2 + 16$.

4) За допомогою схеми Горнера розкласти даний правильний дріб на найпростіші дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{x^5 - 3x^3 + 2x^2 - x + 4}{(x+3)^6}$;

5) Методом невизначених коефіцієнтів розкласти даний правильний дріб на елементарні дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{x^3 + 2x^2 + 6x - 25}{(x^2+4)(x+3)(x+1)}$.

6) Використовуючи алгоритм Евклида, знайти найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ та $g(x)$:
$$f(x) = x^4 - x^3 + 4x^2 - 3x + 3, \qquad g(x) = 2x^5 + 6x^3 + 3x^2 + 9.$$

2.28. **Варіант 28.**

Комплексні числа

1) Записати комплексне число z в алгебричній формі, знайти дійсну та уявну частину даного комплексного числа, модуль та аргумент цього комплексного числа $z = \frac{3i-1}{1+i} + (1+3i)^4 - i^{21}$.
2) Подати число у тригонометричній формі, вказати модуль та аргумент комплексного числа. Використовуючи формулу Муавра (піднесення до степеня комплексного числа) знайдіть n-ий степінь числа $z = i - \sqrt{3}$, $n = 14$.
3) Знайти всі значення $\sqrt[6]{2i-2}$ та зобразити всі ці значення на комплексній площини.
4) На комплексной площині зобразити область, що задовольняє умовам $|z - 2 + 2i| \le 4, \quad 0 \le \text{Re}z, \quad \text{Im}z \le -2$.
5) Розв'язати рівняння $z^4 - 2z^2 + 100 = 0$.

Матриці, визначники, обернена матриця

1) Знайти значення вказаного матричного виразу $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 8 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 1 & 7 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; $(AB)^T - B^T A^T$.
2) Розв'язати матричне рівняння $3 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} + 2 \cdot X = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$.
3) Знайти значення многочлену $f(A)$ від матриці A, якщо $f(x) = 5x^4 - x^3 + 3x - 4, \;\; A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
4) Використовуючи елементарні властивості матриць, знайти всі матриці X, що задовольняють рівнянню $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 12 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$.
5) Обчисліть визначники четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.
6) Розв'язати рівняння: $\begin{vmatrix} 4x-1 & x+1 \\ 3 & x \end{vmatrix} = 5$.
7) Обчислити обернену матрицю A^{-1} для наведеної матриці A: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   Результат перевірте $A \cdot A^{-1} = E$.

8) Розв'язати рівняння: $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

9) Використовуючи метод елементарних перетворень рядків, знайти для даної матриці обернену: $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

10) Методом обрамляючих мінорів для даної матриці знайти який–небудь базисний мінор та визначите ранг матриці: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

11) Використовуючи елементарні перетворення рядків або стовпчиків знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Системи лінійних рівнянь

1) Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера, методом Ґаусса та матричним методом $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 10, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = -6, \\ 3x_1 + 8x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

2) Розв'язати методом Ґаусса систему лінійних неоднорідних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 = -4. \end{cases}$$

3) Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь $\begin{cases} x_1 - 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + x_5 = 0, \\ 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

Лінійні простори

1) З'ясувати, чи є лінійним простором множина функцій, що неперервні скрізь на R, окрім точки $x = 0$, в якій функція має розрив стрибком. Операції додавання елементів та множення на скаляр визначаються звичайним чином.

2) Вказати який-небудь лінійний простір, що містить дані вектори, та встановіть лінійну залежність або незалежність даної системи векторів:

$f_1(x) = \frac{5}{\cos^2 x},\ f_2(x) = \operatorname{tg}^2 x,\ f_3(x) = 4,\ x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

3) Знайти всі базисі системи векторів: $\overrightarrow{a_1} = (4; -5; 6; 1)$, $\overrightarrow{a_2} = (3; 2; -1; 8)$, $\overrightarrow{a_3} = (9; 1; -3; 7)$, $\overrightarrow{a_4} = (1; 4; -5; 9)$.

4) Знайти базис та розмірність лінійного простору кососиметричних матриць порядку 2.

5) Знайти координати останнього вектора в базисі, утвореному першими чотирма векторами: $\overrightarrow{a_1} = (1; 3; 2; 8)$, $\overrightarrow{a_2} = (4; -1; 5; 6)$, $\overrightarrow{a_3} = (6; 2; 5; 1)$, $\overrightarrow{a_4} = (4; 0; -1; 3)$, $\overrightarrow{a_5} = (9; 0; 14; -3)$.

6) Відомі координати вектора $\overrightarrow{b}$ в деякому базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$. Знайти координати цього вектора $\overrightarrow{b}$ в базисі $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$, якщо відомий зв'язок між базисними векторами. Записати матрицю переходу від базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ до базису $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$.
$\overrightarrow{b} = (3; -1; 0)$, $\overrightarrow{f_1} = -\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{f_2} = 2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$.

7) Знайти базис і розмірність суми та розмірність перетину підпросторів L_1 та L_2 простору R^4, якщо L_1 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$, а L_2 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$, якщо
$\overrightarrow{a_1} = (4, 1, -1, 1), \overrightarrow{a_2} = (1, 3, -1, -2), \overrightarrow{a_3} = (6, 7, -3, -5)$,
$\overrightarrow{b_1} = (-1, 8, -2, -7), \overrightarrow{b_2} = (2, -1, -1, 1), \overrightarrow{b_3} = (8, 6, -4, -2)$.

Унітарний та евклідів простори

1) Нехай L – лінійний простір над полем дійсних чисел. Перевірити можливість введення скалярного добутку у просторі L вказаним способом:
L – простір матриць порядку 2. Для довільних $f = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & u_1 \end{pmatrix}$ та $g = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & u_2 \end{pmatrix}$ визначимо $(f, g) = \sqrt{x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 + z_1^2 z_2^2 + u_1^2 u_2^2}$.

2) В евклідовому та унітарному просторах, елементами яких є набори $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n)$ відповідно дійсних та комплексних чисел, задано скалярні добутки. Побудувати матрицю Грама для векторів $\overrightarrow{f_i}$ та дослідити на лінійну залежність цю систему векторів:
$\overrightarrow{f_1} = (1; 2; 3)$, $\overrightarrow{f_2} = (1; 0; 1), \overrightarrow{f_3} = (-1; 1; 0)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2 + 7x_3y_3$.

3) Координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Використовуючи процес ортогоналізації Грама-Шмідта побудувати ортонормований базис підпростору, що є лінійною оболонкою векторів
$\overrightarrow{a_1} = (2; -2; 1; 1)$, $\overrightarrow{a_2} = (1; -3; 5; 0)$, $\overrightarrow{a_3} = (3; -2; 1; 1)$.

4) В деякому ортонормованому базисі задано L - лінійну оболонку векторів. Знайти базис ортогонального доповнення $L^{\perp}$ до лінійного підпростору L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (-4; 1; 2; 6)$, $\overrightarrow{a_2} = (-5; -1; 2; 3)$, $\overrightarrow{a_3} = (0; 1; 7; 4)$.

5) Знайти систему рівнянь, якою задається підпростір L, якщо його ортогональне доповнення $L^{\perp}$ підпростору $L^{\perp} \subset R^4$ задається наступною системою рівнянь:
$$x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0,$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0.$$

6) Нехай координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та $\overrightarrow{x}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{x}$ на підпростір L, що є лінійною оболонкою векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та визначити кут і відстань між $\overrightarrow{x}$ та L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (2; 1; 0; -1)$, $\overrightarrow{a_2} = (0; -1; 0; 3)$, $\overrightarrow{a_3} = (1; 0; 3; 4)$, $\overrightarrow{x} = (1; 1; 3; 1)$.

7) У дійсному лінійному просторі задано стандартний скалярний добуток. Застосовуючи матрицю Грама знайти Площу паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{e_1} = (0; 2; 3)$, $\overrightarrow{e_2} = (1; 3; -1)$.

Білінійні та квадратичні форми

1) Методом Лагранжа звести квадратичну форму до канонічного та нормального виглядів. Записати невироджене лінійне перетворення, яке зводить форму до нормального вигляду:
$$x_1^2 + 2x_2^2 + 9x_3^2 + 7x_4^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 4x_2x_4 - 6x_3x_4.$$

2) Методом Якобі звести квадратичну форму до канонічного вигляду:
$$x_1^2 + 26x_2^2 + 4x_3^2 + 10x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

3) За допомогою критерію Сільвестра з'ясувати знакосталість квадратичної форми $x_1^2 + 5x_2^2 + 26x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 20x_2x_3$.

Многочлени

1) За допомогою схеми Горнера визначити кратність кореня $c = -3$ для многочлена $f(x) = 2x^5 + 19x^4 + 64x^3 + 90x^2 + 54x + 27$.

2) Знайти всі раціональні корені многочлена
$f(x) = 12x^4 + 37x^3 + 53x^2 + 32x + 6$.

3) Розкласти многочлен у добуток незвідних множників над полем R та полем C: $f(x) = x^4 + 6x^2 + 25$.

4) За допомогою схеми Горнера розкласти даний правильний дріб на найпростіші дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{x^5 + 2x^4 + 3x^2 - x + 2}{(x+2)^6}$.

5) Методом невизначених коефіцієнтів розкласти даний правильний дріб на елементарні дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{6x^3 + 15x^2 + 2x + 1}{(x^2+1)(x+3)(x+1)}$.

6) Використовуючи алгоритм Евклида, знайти найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ та $g(x)$:
$$f(x) = x^5 + 3x^3 + 7x^2 + 21, \qquad g(x) = x^5 - x^3 + x^2 - 12x + 3.$$

2.29. Варіант 29.

Комплексні числа

1) Записати комплексне число z в алгебричній формі, знайти дійсну та уявну частину даного комплексного числа, модуль та аргумент цього комплексного числа $z = \frac{7i-1}{i-1} - (2+2i)^4 + i^{27}$.
2) Подати число у тригонометричній формі, вказати модуль та аргумент комплексного числа. Використовуючи формулу Муавра (піднесення до степеня комплексного числа) знайдіть n-ий степінь числа $z = 5i, \;\; n = 21$.
3) Знайти всі значення $\sqrt[6]{-i-1}$ та зобразити всі ці значення на комплексній площини.
4) На комплексной площині зобразити область, що задовольняє умовам $\mathrm{Im} z \leq 3, \;\pi/6 \leq \arg z \leq 2\pi/3$.
5) Розв'язати рівняння $z^4 + 16z^2 + 100 = 0$.

Матриці, визначники, обернена матриця

1) Знайти значення вказаного матричного виразу $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

   $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; $(A+B)(B-A) + (A^2 - B^2)$.
2) Розв'язати матричне рівняння $7 \cdot X - 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$.
3) Знайти значення многочлену $f(A)$ від матриці A, якщо $f(x) = -x^4 - x^3 + 3x + 4, \;\; A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
4) Використовуючи елементарні властивості матриць, навести приклад матриць порядку 2×3, що не є нульовими, але для яких $AB = 0$.
5) Обчисліть визначники четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.
6) Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} 2x+5 & 3x \\ -2 & x-1 \end{vmatrix} < x - 5$.
7) Обчислити обернену матрицю A^{-1} для наведеної матриці A: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 5 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   Результат перевірте $A \cdot A^{-1} = E$.

8) Розв'язати рівняння: $\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

9) Використовуючи метод елементарних перетворень рядків, знайти для даної матриці обернену: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

10) Методом обрамляючих мінорів для даної матриці знайти який–небудь базисний мінор та визначите ранг матриці: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$.

11) Використовуючи елементарні перетворення рядків або стовпчиків знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 9 \\ 1 & -1 & 7 & 10 \\ -1 & 3 & -1 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Системи лінійних рівнянь

1) Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера, методом Ґаусса та матричним методом $\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 2x_3 = -13, \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 5, \\ 4x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 1. \end{cases}$

2) Розв'язати методом Ґаусса систему лінійних неоднорідних рівнянь

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 = -1, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 1. \end{cases}$$

3) Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь $\begin{cases} 2x_1 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 6x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

Лінійні простори

1) З'ясувати, чи є лінійним простором множина таких функцій, що $f(1) = 1$. Операції додавання елементів та множення на скаляр визначаються звичайним чином.

2) Вказати який-небудь лінійний простір, що містить дані вектори, та встановіть лінійну залежність або незалежність даної системи векторів:
$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}$.

3) Знайти всі базисі системи векторів: $\overrightarrow{a_1} = (1; 3; 2; -1)$, $\overrightarrow{a_2} = (3; 2; 0; 2)$, $\overrightarrow{a_3} = (7; -9; 1; 4)$, $\overrightarrow{a_4} = (11; -4; 3; 5)$.

4) Знайти базис та розмірність лінійного простору матриць порядку 2, що комутують з матрицею $A = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

5) Знайти координати останнього вектора в базисі, утвореному першими чотирма векторами: $f_1(x) = -4x^3 + 5x^2 + 2x + 6$, $f_2(x) = 7x^3 + 3x^2 + x + 2$, $f_3(x) = 4x^3 + 3x^2 + 5$, $f_4(x) = 2x^3 - 2x^2 + 4x + 6$,
$f_5(x) = 28x^3 - 3x^2 + 2x + 3$.

6) Відомі координати вектора $\overrightarrow{b}$ в деякому базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$. Знайти координати цього вектора $\overrightarrow{b}$ в базисі $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$, якщо відомий зв'язок між базисними векторами. Записати матрицю переходу від базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ до базису $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$.
$\overrightarrow{b} = (2; 2; 0)$, $\overrightarrow{f_1} = 3\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{f_3} = -\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$.

7) Знайти базис і розмірність суми та розмірність перетину підпросторів L_1 та L_2 простору R^4, якщо L_1 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$, а L_2 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$, якщо
$\overrightarrow{a_1} = (1, -1, 4, 1), \overrightarrow{a_2} = (2, 3, 1, -1), \overrightarrow{a_3} = (4, 1, 9, 1)$,
$\overrightarrow{b_1} = (1, 4, -3, -2), \overrightarrow{b_2} = (1, 0, 1, 1), \overrightarrow{b_3} = (5, 2, 7, 2)$.

Унітарний та евклідів простори

1) Нехай L – лінійний простір над полем дійсних чисел. Перевірити можливість введення скалярного добутку у просторі L вказаним способом:
$L = R^2$. Для довільних $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in L$ визначимо
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = |\overrightarrow{x}||\overrightarrow{y}|\cos(\frac{\pi}{3} + \alpha)$, де α – кут між векторами.

2) В евклідовому та унітарному просторах, елементами яких є набори $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n)$ відповідно дійсних та комплексних чисел, задано скалярні добутки. Побудувати матрицю Грама для векторів $\overrightarrow{f_i}$ та дослідити на лінійну залежність цю систему векторів:
$\overrightarrow{f_1} = (-i; 1; 0)$, $\overrightarrow{f_2} = (1; 0; 0)$, $\overrightarrow{f_3} = (1 + 2i; -2 + i; 1)$,
$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1\overline{y_1} - ix_1\overline{y_2} + ix_2\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2} + (2 + i)x_2\overline{y_3} + (2 - i)x_3\overline{y_2} + 6x_3\overline{y_3}$.

3) Координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Використовуючи процес ортогоналізації Грама-Шмідта побудувати ортонормований базис підпростору, що є лінійною оболонкою векторів
$\overrightarrow{a_1} = (1; 1; -1; 2)$, $\overrightarrow{a_2} = (4; -1; 2; 4)$, $\overrightarrow{a_3} = (0; 1; 3; 0)$.

4) В деякому ортонормованому базисі задано L - лінійну оболонку векторів. Знайти базис ортогонального доповнення $L^{\perp}$ до лінійного підпростору L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (5; 5; 1; 3)$, $\overrightarrow{a_2} = (4; 2; 1; 0)$.

5) Знайти систему рівнянь, якою задається підпростір L, якщо його ортогональне доповнення $L^{\perp}$ підпростору $L^{\perp} \subset R^4$ задається рівнянням $2x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 0$.

6) Нехай координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та $\overrightarrow{x}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{x}$ на підпростір L, що є лінійною оболонкою векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та визначити кут і відстань між $\overrightarrow{x}$ та L, якщо $\overrightarrow{a_1} = (4; -1; 1; 1)$, $\overrightarrow{a_2} = (3; 0; 2; 1)$, $\overrightarrow{a_3} = (-3; 2; 1; 5)$, $\overrightarrow{x} = (0; 0; 0; 1)$.

7) У дійсному лінійному просторі задано стандартний скалярний добуток. Застосовуючи матрицю Грама знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{e_1} = (1; 2; 3)$, $\overrightarrow{e_2} = (1; 0; 1)$, $\overrightarrow{e_3} = (1; -1; 1)$.

Білінійні та квадратичні форми

1) Методом Лагранжа звести квадратичну форму до канонічного та нормального виглядів. Записати невироджене лінійне перетворення, яке зводить форму до нормального вигляду:
$x_1^2+5x_2^2+6x_3^2+10x_4^2+2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_1x_4 - 6x_2x_3 + 4x_2x_4 - 14x_3x_4.$

2) Методом Якобі звести квадратичну форму до канонічного вигляду:
$x_1^2 + 29x_2^2 + 4x_3^2 + 10x_1x_2 - 2x_1x_3 - 18x_2x_3.$

3) За допомогою критерію Сільвестра з'ясувати знакосталість квадратичної форми $-x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

Многочлени

1) За допомогою схеми Горнера визначити кратність кореня $c = -3$ для многочлена $f(x) = 3x^5 + 27x^4 + 79x^3 + 63x^2 - 54x - 54$.

2) Знайти всі раціональні корені многочлена $f(x) = 12x^4 + x^3 + 3x^2 - 9x + 2$.

3) Розкласти многочлен у добуток незвідних множників над полем R та полем C: $f(x) = x^4 + 2x^2 + 9$.

4) За допомогою схеми Горнера розкласти даний правильний дріб на найпростіші дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{3x^5 - 2x^2 + x - 12}{(x-1)^6}$.

5) Методом невизначених коефіцієнтів розкласти даний правильний дріб на елементарні дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{3x^3 + 9x^2 + 16x + 6}{(x^2+x+1)(x+3)(x+1)}$.

6) Використовуючи алгоритм Евклида, знайти найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ та $g(x)$:
$f(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 2, \quad g(x) = x^5 + x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2.$

2.30. **Варіант 30.**

Комплексні числа

1) Записати комплексне число z в алгебричній формі, знайти дійсну та уявну частину даного комплексного числа, модуль та аргумент цього комплексного числа $z = \frac{5i+1}{1+i} + (3+3i)^4 - i^{97}$.
2) Подати число у тригонометричній формі, вказати модуль та аргумент комплексного числа. Використовуючи формулу Муавра (піднесення до степеня комплексного числа) знайдіть n-ий степінь числа $z = -3,\ \ n = 37$.
3) Знайти всі значення $\sqrt[5]{1-i}$ та зобразити всі ці значення на комплексній площини.
4) На комплексной площині зобразити область, що задовольняє умовам $\mathrm{Re}z \le 4, \quad -\pi/4 \le \arg z \le \pi/6$.
5) Розв'язати рівняння $z^4 + 31z^2 + 81 = 0$.

Матриці, визначники, обернена матриця

1) Знайти значення вказаного матричного виразу $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;
$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 7 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; $AB - BA$.
2) Розв'язати матричне рівняння $3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + 5 \cdot X = \begin{pmatrix} 12 & -5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.
3) Знайти значення многочлену $f(A)$ від матриці A, якщо
$f(x) = x^3 + 3x^2 - 3x + 1, \ \ A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
4) Використовуючи елементарні властивості матриць, знайти всі матриці B, що комутують з матрицею $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
5) Обчисліть визначники четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.
6) Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} x+3 & 3 \\ 1-x & 2x-1 \end{vmatrix} > 4$.
7) Обчислити обернену матрицю A^{-1} для наведеної матриці A: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 6 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   Результат перевірте $A \cdot A^{-1} = E$.

8) Розв'язати рівняння: $\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

9) Використовуючи метод елементарних перетворень рядків, знайти для даної матриці обернену: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

10) Методом обрамляючих мінорів для даної матриці знайти який–небудь базисний мінор та визначите ранг матриці: $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ -2 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ -3 & -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

11) Використовуючи елементарні перетворення рядків або стовпчиків знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Системи лінійних рівнянь

1) Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера, методом Ґаусса та матричним методом $\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -3, \\ -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4. \end{cases}$

2) Розв'язати методом Ґаусса систему лінійних неоднорідних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 7, \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_4 + x_5 = 10, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = -2, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 1. \end{cases}$$

3) Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь $\begin{cases} x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 1x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - x_3 + x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$

Лінійні простори

1) З'ясувати, чи є лінійним простором множина вироджених матриць, тобто таких, що $detA = 0$. Операції додавання елементів та множення на скаляр визначаються звичайним чином.

2) Вказати який-небудь лінійний простір, що містить дані вектори, та встановіть лінійну залежність або незалежність даної системи векторів: $f_1(x) = 3x^2 - 2x + 1,\ f_2(x) = 5x - 4,\ f_3(x) = -39x^2 + x + 7$.

3) Знайти всі базисі системи векторів: $\overrightarrow{a_1}=(6;5;4;3)$, $\overrightarrow{a_2}=(2;6;-7;8)$, $\overrightarrow{a_3}=(4;-1;11;-5)$, $\overrightarrow{a_4}=(-4;1;-11;5)$.

4) Знайти базис та розмірність лінійного простору векторів з R^3, що ортогональні до векторів $\overrightarrow{a}=(3;-6;1)$ та $\overrightarrow{b}=(1;4;5)$.

5) Знайти координати останнього вектора в базисі, утвореному першими чотирма векторами: $x_1=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $x_2=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 5 & 1\end{pmatrix}$, $x_3=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 5\end{pmatrix}$, $x_4=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}$, $x_5=\begin{pmatrix}19 & -1\\ 20 & -2\end{pmatrix}$.

6) Відомі координати вектора $\overrightarrow{b}$ в деякому базисі $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$. Знайти координати цього вектора $\overrightarrow{b}$ в базисі $\overrightarrow{f_1},\overrightarrow{f_2},\overrightarrow{f_3}$, якщо відомий зв'язок між базисними векторами. Записати матрицю переходу від базису $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$ до базису $\overrightarrow{f_1},\overrightarrow{f_2},\overrightarrow{f_3}$.
   $\overrightarrow{b}=(0;-2;2)$, $\overrightarrow{f_1}=\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{f_2}=3\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{f_3}=-\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}+2\overrightarrow{e_3}$.

7) Знайти базис і розмірність суми та розмірність перетину підпросторів L_1 та L_2 простору R^4, якщо L_1 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3}$, а L_2 - лінійна оболонка системи векторів $\overrightarrow{b_1},\overrightarrow{b_2},\overrightarrow{b_3}$, якщо
   $\overrightarrow{a_1}=(1,-1,1,-1)$, $\overrightarrow{a_2}=(2,2,3,-1)$, $\overrightarrow{a_3}=(4,0,5,-3)$,
   $\overrightarrow{b_1}=(3,1,4,-2)$, $\overrightarrow{b_2}=(1,1,2,-1)$, $\overrightarrow{b_3}=(5,3,8,-4)$.

Унітарний та евклідів простори

1) Нехай L – лінійний простір над полем дійсних чисел. Перевірити можливість введення скалярного добутку у просторі L вказаним способом:
   L – простір дійсних многочленів, степінь яких не перевищує 2.
   Для довільних $f,g\in L$ визначимо $(f,g)=\int\limits_0^1 f(x)g(x)dx$.

2) В евклідовому та унітарному просторах, елементами яких є набори $\overrightarrow{x}=(x_1,...,x_n)$ відповідно дійсних та комплексних чисел, задано скалярні добутки. Побудувати матрицю Грама для векторів $\overrightarrow{f_i}$ та дослідити на лінійну залежність цю систему векторів:
   $\overrightarrow{f_1}=(1;2;-3)$, $\overrightarrow{f_2}=(2;-1;1)$, $\overrightarrow{f_3}=(0;1;2)$,
   $(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})=4x_1y_1+2x_1y_2+2x_2y_1+2x_2y_2-x_2y_3-x_3y_2+3x_3y_3$.

3) Координати векторів $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Використовуючи процес ортогоналізації Грама-Шмідта побудувати ортонормований базис підпростору, що є лінійною оболонкою векторів
   $\overrightarrow{a_1}=(0;2;-3;1)$, $\overrightarrow{a_2}=(1;3;4;-1)$, $\overrightarrow{a_3}=(1;5;1;0)$.

4) В деякому ортонормованому базисі задано L - лінійну оболонку векторів. Знайти базис ортогонального доповнення $L^{\perp}$ до лінійного підпростору L, якщо $\overrightarrow{a_1}=(2;1;5;7)$.

5) Знайти систему рівнянь, якою задається підпростір L, якщо його ортогональне доповнення $L^{\perp}$ підпростору $L^{\perp}\subset R^4$ задається наступною системою рівнянь:

$2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0,$
$3x_1 + 2x_2 - x_4 = 0,$
$3x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 = 0.$

6) Нехай координати векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та $\overrightarrow{x}$ задано в деякому ортонормованому базисі. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{x}$ на підпростір L, що є лінійною оболонкою векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ та визначити кут і відстань між $\overrightarrow{x}$ та L, якщо
$\overrightarrow{a_1} = (4; 1; 1; -1)$, $\overrightarrow{a_2} = (1; 0; 2; 1)$, $\overrightarrow{a_3} = (-1; 2; 1; 2)$, $\overrightarrow{x} = (0; 1; 0; 1)$.

7) У дійсному лінійному просторі задано стандартний скалярний добуток. Застосовуючи матрицю Грама знайти відстань між прямими
$l_1: \ \dfrac{x+3}{-1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-1}{1}$ та $l_2: \ \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z+3}{2}$.

Білінійні та квадратичні форми

1) Методом Лагранжа звести квадратичну форму до канонічного та нормального виглядів. Записати невироджене лінійне перетворення, яке зводить форму до нормального вигляду:
$x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 4x_2x_4 - 2x_3x_4.$

2) Методом Якобі звести квадратичну форму до канонічного вигляду:
$x_1^2 + 20x_2^2 + 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3.$

3) За допомогою критерію Сільвестра з'ясувати знакосталість квадратичної форми $x_1^2 + 5x_2^2 + 42x_3^2 + 2x_1x_2 + 10x_1x_3 + 26x_2x_3$.

Многочлени

1) За допомогою схеми Горнера визначити кратність кореня $c = -3$ для многочлена $f(x) = 2x^5 + 18x^4 + 51x^3 + 27x^2 - 81x - 81$.

2) Знайти всі раціональні корені многочлена $f(x) = 12x^4 + 17x^3 + 15x^2 + 3x - 2$.

3) Розкласти многочлен у добуток незвідних множників над полем R та полем C: $f(x) = x^4 - 6x^2 + 25$.

4) За допомогою схеми Горнера розкласти даний правильний дріб на найпростіші дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{x^5 + x^4 - x^3 - 2x + 3}{(x-3)^6}$.

5) Методом невизначених коефіцієнтів розкласти даний правильний дріб на елементарні дроби над полем дійсних чисел: $\dfrac{7x^3 + 20x^2 + 23x + 18}{(x^2+1)(x+3)(x+1)}$.

6) Використовуючи алгоритм Евклида, знайти найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ та $g(x)$:
$f(x) = 3x^5 + 3x^4 + x^3 + 4x^2 + 1, \quad g(x) = 3x^5 + 4x^3 - 6x^2 + x - 2.$

Основна література

[1] Навчальний посібник з лінійної алгебри для студентів механіко-математичного факультету / О. О. Безущак, О. Г. Ганюшкін, Є. А. Кочубінська. – К. : ВПЦ "Київський університет 2019. – 224 с.

[2] Калужнін Л., Вишенський В., Шуб Ц., Лінійні простори.—Київ: Вища школа, 1971.—344с.

[3] Безущак О.О. Завдання до практичних занять з лінійної алгебри / О. О. Безущак, О. Г. Ганюшкін, Кочубінська Є. А. – К. : ВПЦ «Київський університет», 2015.

[4] Боднарчук Ю.В., Олійник Б.В. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. – К. : ВПЦ «Київський університет», 2009.

[5] Завало С.Т., Костарчук В.М., Хацет Б.І. Алгебра і теорія чисел. Ч.1,2. К., 1976.

[6] Чарін В.С. Лінійна алгебра.–2-ге вид., стер. – К.: Техніка, 2004. – 416 с.

[7] Романів О.М. Лінійна алгебра. Частина 2. Підручник // - Львів: Видавець Чижиков І.Е., - 2014. – 279с.

[8] Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник / ред. В.В. Булдигін. – К. : ТВіМС, 2011. – 224 с.

Додаткова література

[1] Лінійна алгебра в задачах та прикладах. Збірник задач для студентів 1 курсу ФМФ НТУУ "Київського політехнічного інституту"/ Т.В. Авдєєва, В.М. Шраменко.– Київ, НТУУ "КПІ 2016. -206 с.

[2] Лінійна алгебра. Збірка завдань та методика розв'язання: навчально-методичний посібник / Л. П.Дзюбак, С. П.Іглін, Г. Б.Лінник, І. О. Морачковська. – Х.: НТУ "ХПІ 2013. – 240 с.

[3] Андрійчук В.І., Забавський Б.В. Лінійна алгебра / -Львів. -2008.– 226 с.

[4] Lay D. C. Linear Algebra and its Applications, 3rd updated edition. Addison Wesley, 2005. — 576 p.

[5] Nicholson W. K. Linear Algebra With Applications, 3rd Edition, 1995. — 540 p.

[6] Poole D. Linear Algebra: A Modern Introduction, 2nd edition. Brooks/Cole, 2006. — 712 p.

[7] Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Частина 2 : навч. посіб. Для студ. спеціальності 113 «Прикладна математика», спеціалізації «Data Science та математичне моделювання» /В.В. Третиник, В.О. Ліскін, В.В. Мальчиков, КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 125 с.

Посібник

Лінійна алгебра: збірник завдань для індивідуальної роботи

Автори:
Авдєєва Тетяна Василівна,
Горбачук Володимир Мирославович