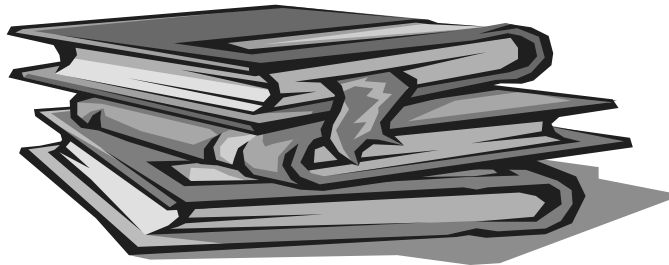


МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ



**Авдєєва Т. В., Качаєнко О. Б., Іллічева Л.М.**

# **ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ**

## **Практикум**

**“Рекомендовано”**

**Методичною радою НТУУ “КПІ ім. Ігоря Сікорського”**

для студентів інженерних спеціальностей  
денної форми навчання всіх напрямів підготовки

Київ  
НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського»  
2024

УДК 514.912

ББК 22.16

**Звичайні диференціальні рівняння першого порядку: Практикум**

/ Т.В. Авдєєва, О.Б. Качасенко, Л.М. Іллічева -- К.: НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2024. – 210 с. – Бібліогр.: с. 208.

*Гриф надано методичною радою НТУУ «КПІ ім. І  
(протокол № 8 від 20 червня 2024 р.)*

Навчальне видання

## **Звичайні диференціальні рівняння першого порядку Практикум**

Відповідальний  
редактор:

**Дудкін Микола Євгенович**  
доктор фіз.-мат. наук, професор,  
математичної фізики та диференціальних  
рівнянь фізико-математичного факультету,  
Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Рецензенти:

**Дюженкова Ольга Юрївна,**  
канд. фіз.-мат. наук, доцент  
доцент кафедри математичної фізики та диференціальних  
рівнянь фізико-математичного факультету,  
Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

**Томащук Олексій Петрович,**  
канд. педагогічних наук,  
доцент кафедри прикладної математики факультету  
комп'ютерних наук та технологій (ФКНТ),  
Національний авіаційний університет

Автори: Авдєєва Т. В., Качасенко О. Б., Іллічева Л.М.

В навчальному посібнику викладено короткі теоретичні відомості з звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, даються приклади розв'язування задач з відповідних розділів. Наводяться варіанти індивідуальних завдань для студентів.

Призначений для студентів інженерних спеціальностей денної та заочної форми навчання всіх напрямів підготовки, може бути використаний також в інших університетах при вивченні курсу “Звичайні диференціальні рівняння першого порядку”.

© Т.В. Авдєєва,  
О.Б. Качасенко,  
Л.М.Іллічева 2024

За редакцією укладачів  
Надруковано з оригінал-макета замовника

## Зміст

	<b>Передмова</b>	<b>4</b>
	Звичайні диференціальні рівняння першого порядку	<b>6</b>
<b>§ 1.</b>	Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними	<b>8</b>
	Приклади розв'язування	<b>11</b>
<b>§ 2.</b>	Однорідні диференціальні рівняння першого порядку	<b>32</b>
	Приклади розв'язування	<b>35</b>
	Розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку, що зводяться до однорідних	<b>54</b>
	Приклади розв'язування	<b>55</b>
<b>§ 3</b>	Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння Бернуллі	<b>75</b>
	Приклади розв'язування	<b>89</b>
<b>§ 4.</b>	Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник	<b>104</b>
	Приклади розв'язування	<b>105</b>
<b>§ 5.</b>	Диференціальні рівняння та математичне моделювання процесів	<b>142</b>
	Варіанти індивідуальних завдань	<b>172</b>
<b>Додатки</b>	Деякі види диференціальних рівнянь першого порядку	<b>187</b>
	Таблиця похідних та правила диференціювання	<b>190</b>
	Таблиця інтегралів. Основні властивості невизначеного інтегралу	<b>192</b>
	Питання для самоперевірки:	<b>196</b>
	Тести	<b>198</b>
	Рекомендована література	<b>208</b>

## Передмова

Студенти першого курсу стикаються із певними труднощами при засвоєнні великої кількості нових понять вищої математики, які широко використовуються в інших розділах математики, а також на старших курсах в спеціальних дисциплінах. Дуже важливою формою навчання студентів є самостійна робота над навчальним матеріалом, яка складається з вивчення теоретичних положень за лекціями або підручником, розгляду прикладів та самостійного розв'язання задач, причому опанування теоретичного матеріалу є необхідною передумовою формування практичних навичок, але не завжди є достатнім для цього. Вміння розв'язувати задачі формується виключно шляхом цілеспрямованої та кропіткої самостійної роботи, в тому числі і над аналізом прикладів розв'язання задач, які наведені у підручниках та навчальних посібниках.

При самостійному розв'язанні задач часто виникають певні труднощі, які пов'язані або з вибором методу розв'язування задачі, або з суто технічними особливостями обраного методу. Побороти утруднення другого роду порівняно нескладно – треба лише систематично працювати, виконуючи всі завдання викладача, в тому числі й ті, які здаються дуже простими. Вибір методу розв'язування вимагає більш глибокого аналізу прикладів з метою встановлення закономірностей, яким підкоряється цей вибір.

Головна мета цієї роботи – допомогти студентам засвоїти основні поняття диференціальних рівнянь першого порядку, необхідних їм при подальшому вивченні курсу математики та свідомого застосування набутих знань в прикладних задачах фізики, механіки та задачах фахових спеціальностей.

Диференціальні рівняння широко використовуються в різноманітних галузях сучасної науки, техніки, ігрової індустрії. Тому теорія диференціальних рівнянь, як окрема тема в курсі вищої математики, посідає важливе місце в системі сучасної підготовки фахівців з машинобудування, механіки, електротехніки, хімії та тощо. Практикум з вищої математики «Диференціальні рівняння першого порядку» має за мету організувати індивідуальну (самостійну) роботу студентів при вивченні розділу «Диференціальні рівняння першого порядку». Метою індивідуальних завдань є перевірка результативності самостійної роботи по даному модулю. Студент повинен самостійно розв'язати індивідуальні завдання свого варіанта, який відповідає номеру студента у списку навчальної групи. Розв'язання завдань із поясненнями подати на аркушах

формату А4 (або у шкільному зошиті), на обкладинці необхідно написати назву дисципліни та модуля; прізвище студента, його ім'я та по батькові; номер та назву спеціальності, курс, номер групи; номер варіанта. Кожне завдання необхідно позначати його номером, позначеним у завданні. Умову завдання треба повністю переписати. Результативність самостійної роботи студентів забезпечується системою контролю, яка включає захист індивідуального домашнього завдання та виконання письмової та тестової модульних контрольних робіт.

Запропонований практикум з вищої математики «Диференціальні рівняння першого порядку» призначено для студентів інженерних спеціальностей. Він містить короткі теоретичні відомості, а саме означення, формулювання теорем та тверджень (без доведень), формули необхідні для свідомого та успішного розв'язування індивідуальних завдань. В даному посібнику приділено достатню увагу детальному роз'ясненню методів розв'язання типових рівнянь теорії звичайних диференціальних рівнянь, його зміст повністю відповідає програмі з курсу диференціальних рівнянь для студентів інженерних спеціальностей.

Практикум містить 86 розв'язаних прикладів, які супроводжуються коментарями. В практикумі використані в основному авторські задачі. Для індивідуальної роботи запропоновано 30 варіантів завдань, схожих за структурою та одного рівня складності. Метою індивідуальних завдань є перевірка результативності самостійної роботи студентів по даному модулю. Студент повинен самостійно розв'язати індивідуальні завдання свого варіанта, якій відповідає номеру студента у списку навчальної групи. Автори сподіваються, що така побудова практикуму надає студентові широкі можливості для активної самостійної роботи, яка, безумовно, сприятиме засвоєнню матеріалу при вивченні математики. Основне завдання розділу «Диференціальні рівняння першого порядку» – виробити у студентів уміння та навички знаходження загальних або частинних розв'язків диференціальних рівнянь першого порядку, розпізнавання найбільш поширених типів таких диференціальних рівнянь та застосування правильного алгоритму знаходження відповідного розв'язку та вміння застосовувати теорію диференціальних рівнянь в прикладних задачах фізики, механіки та задачах фахових спеціальностей.

У додатках наведені питання для самоконтролю та тестові питання для самоконтролю. Наприкінці практикуму наводиться перелік рекомендованої літератури. Посібник може бути використаний студентами технічних спеціальностей, для яких не передбачено вивчення теми «Диференціальні рівняння першого порядку» у повному обсязі.

### ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Звичайним диференціальним рівнянням називають рівняння, що зв'язує незалежну змінну  $x$ , шукану функцію однієї змінної  $y = f(x)$  і її похідні (або диференціали) різних порядків:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (*)$$

Наприклад, диференціальними будуть наступні рівняння:

$$x + y + y' = 0, \quad x^2 + y^2 = 2xyy'', \quad xy' + y''' = \cos xy + y''.$$

Порядком диференціального рівняння називається найвищий порядок похідної -  $n$ , що містить рівняння (\*). У цьому рівнянні  $x$  – незалежна змінна,  $y$  - шукана функція,  $y', y'', \dots, y^{(n)}$  - похідні функції  $y$ . Приклади:  
 $y''' + y'' - y = 3 - 2x$  – рівняння третього порядку;

$x + y + y' = 0$  – рівняння першого порядку;

$x^2 + y^2 = 2xyy''$  – рівняння другого порядку;

$xy' + y''' = \cos xy + y''$  – рівняння третього порядку.

Диференціальним рівнянням 1-го порядку називається рівняння, що має лише похідну першого порядку або диференціали першого порядку, тобто рівняння виду  $F(x, y, y') = 0$ . Рівняння, в якому можна явно виділити похідну, тобто диференціальне рівняння розв'язне відносно похідної,  $y' = f(x, y)$ , називають явним або рівнянням типу Коші. Рівняння, нерозв'язне відносно похідної, називають неявним. Диференціальне рівняння першого порядку може бути записане через диференціали першого порядку:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Таку форму запису ще називають **диференціальною формою** рівняння. Така форма запису корисна тим, що тут змінні  $x$  і  $y$  рівноправні, тобто кожному з них можна розглядати як функцію іншої, а тому в деяких випадках корисно за шукану функцію вважати змінну  $x$  і записувати рівняння у вигляді  $x' = g(x, y)$ .

**§ 1. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними**  
**Розв'язком (або інтегралом) диференціального рівняння** першого порядку на інтервалі  $(a, b)$  називають таку неперервно-диференційовану функцію  $y = y(x)$ , яка у разі підставлення її в рівняння дає тотожність, тобто перетворює рівняння на тотожність на цьому інтервалі. Графік функції  $y = y(x)$  в такому випадку називається інтегральною кривою. Процес знаходження розв'язку диференціального рівняння часто називають інтегруванням диференціального рівняння.

**Загальним розв'язком диференціального рівняння** першого порядку в деякій області  $D$  називають функцію  $y = y(x, C)$ , яка містить сталу величину  $C$  та задовольняє умовам:

- 1) Функція  $y(x, C)$  є розв'язком рівняння для довільного значення сталої  $C$  із певної множини  $(C, \text{що дозволяються})$ .
- 2) Для довільної точки  $(x_0, y_0) \in D$  можна знайти таке значення  $C = C_0$ , за якого функція  $y = y(x, C_0)$  задовольняє початкову умову

$$y(x_0) = y_0.$$

Геометрично, загальний розв'язок  $y = y(x, C)$  являє собою сім'ю інтегральних кривих, тобто сукупність ліній, що відповідають різним значенням сталої  $C$ .

Наприклад, розв'язком диференціального рівняння  $x dx + y dy = 0$  буде  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$ . Це - сімейство кіл  $x^2 + y^2 = C$  із центром у початку координат та радіусом  $R = \sqrt{C}$ . Через кожну точку  $(x; y)$  площини  $Oxy$  проходить єдине коло.

Розв'язок  $y = y(x, C_0)$ , добутий із загального розв'язку  $y = y(x, C)$  при певному значенні сталої  $C = C_0$ , називають **частинним (частковим) розв'язком** диференціального рівняння.

Якщо загальний розв'язок диференціального рівняння НЕ можна виразити в явному вигляді, тобто можна записати лише  $F(x, y, C) = 0$ , то такий розв'язок називають **загальним інтегралом диференціального рівняння**.

### § 1. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними

У випадку наявності додаткової умови, розв'язок  $F(x, y, C_0) = 0$  називають **частинним інтегралом диференціального рівняння**.

Задачу знаходження розв'язку диференціального рівняння, що задовольняє певній умові, називають задачею Коші. Геометрично, це рівносильно тому, що треба знайти таку інтегральну криву  $y = y(x)$  рівняння  $y' = f(x, y)$ , що проходить через точку  $M_0(x_0; y_0)$ .

**Теорема Коші (про існування та єдиність розв'язку задачі Коші)**. Нехай задано диференціальне рівняння  $y' = f(x, y)$  та умова  $y(x_0) = y_0$ . Якщо функція  $f(x, y)$  та її частинна похідна  $f'_x(x, y)$  визначені та неперервні в області  $D$  і точка  $(x_0, y_0) \in D$ , то існує єдиний розв'язок диференціального рівня, що задовольняє додаткову умову  $y(x_0) = y_0$ .

**Особливим розв'язком** диференціального рівняння називають такий розв'язок, що порушує умови теореми Коші, тобто умови існування та єдиність розв'язку. Особливі розв'язки не можна отримати із загального розв'язку при жодному значенні сталої  $C$ . Вони, як правило, виникають при множенні на нуль, потребують додаткових досліджень, профіль розв'язку не входить до сімейства інтегральних кривих.

### § 1. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними (змінні яких можна відокремити)

Серед диференціальних рівнянь 1-го порядку  $F(x, y, y') = 0$  або  $M(x, y)dx = N(x, y)dy$  можна виділити **рівняння, змінні яких можна відокремити**. Таки диференціальні рівняння **розділенням змінних** приводяться до вигляду

$$P(x)dx = Q(y)dy. \quad (1)$$

Основна ознака диференціальних рівнянь такого типу – коефіцієнти при диференціалах  $dx$  та  $dy$  є функціями (чи константами), які залежать лише від відповідних змінних  $x$  при множнику  $dx$  та  $y$  при  $dy$ .

§ 1. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними

Щоб знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) рівняння з відокремленими змінними необхідно проінтегрувати рівняння (1):

$$\int P(x)dx + C = \int Q(y)dy.$$

Для кращого розуміння можна диференціальне рівняння (1) переписати у вигляді  $P(x)dx + Q(y)dy = 0$  та сприймати його, як умову рівності нулю повного диференціалу деякої функції двох змінних  $U(x, y)$ :  $\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = 0$ . Тоді інтегрування приведе нас до відновлення функції

$$U(x, y) = C, \quad C = \text{const.}$$

Диференціальне рівняння вигляду

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0 \quad (2)$$

також відносяться до диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними (в симетричній формі).

В рівнянні (2) коефіцієнти при диференціалах  $dx$  та  $dy$  є добутками двох функцій: одна залежить тільки від  $x$ , а друга - від  $y$ . В області, де  $g_1(y)$ ,  $f_2(x)$  приймають відмінні від нуля значення **рівняння з відокремлюваними змінними (2) зводиться до рівняння з відокремленими змінними (1)**.

Диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними може бути записано у вигляді:

$$y' = P(x) \cdot Q(y) \quad (3)$$

$$\frac{dy}{dx} = P(x) \cdot Q(y) \quad \Rightarrow \quad dy = P(x) \cdot Q(y)dx.$$

**§ 1. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними**

В області, де  $Q(y)$  приймає відмінне від нуля значення **рівняння з відокремлюваними змінними (3) зводиться до рівняння з відокремленими змінними (1):**

$$\frac{dy}{Q(y)} = P(x) \cdot dx \quad \Rightarrow \quad M(y)dy = P(x)dx,$$

$$\text{де } M(y) = \frac{1}{Q(y)}, \quad Q(y) \neq 0.$$

При розв'язування диференціальних рівнянь типу  $y' = P(x) \cdot Q(y)$  слід притримуватися наступного алгоритму дій (певні кроки алгоритму можуть бути пропущені):

1. Переписати похідну через диференціали:  $\frac{dy}{dx} = P(x) \cdot Q(y)$

2. «Підняти» нижній диференціал, помножуючи на нього:

$$dy = P(x) \cdot Q(y)dx.$$

3. Визначити область де  $Q(y) \neq 0$ , поділити на  $Q(y) \neq 0$ :

$$\frac{dy}{Q(y)} = P(x) \cdot dx.$$

4. Інтегрувати обидві частини рівняння за відповідною змінною:

$$\int \frac{dy}{Q(y)} = C + \int P(x)dx.$$

Зауважимо, що для диференціального рівняння типу (1) робота алгоритму починається з останнього пункту; для ДР типу (2) – починаючи з пункту 3 (визначення області, де функції-дільники відмінні від нуля).

§ 1. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними

**Приклад 1.1.** Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$\operatorname{tg} x \cdot y' = 9 - y^2.$$

*Розв'язування.* Оскільки рівняння можна представити у вигляді  $P(x)y' = Q(y)$ , то це рівняння з відокремлюваними змінними. Представимо похідну у вигляді відношення диференціалів:

$$\operatorname{tg} x \cdot \frac{dy}{dx} = (9 - y^2).$$

«Підніmemo» диференціал  $dx$  (помножимо обидві частини рівняння на нього):

$$\operatorname{tg} x \cdot dy = (9 - y^2)dx.$$

Вважатимемо, що  $\operatorname{tg} x \neq 0$ ,  $9 - y^2 \neq 0$ . Тепер розділимо змінні ( $y$  до  $dy$ ,  $x$  до  $dx$ ):

$$\frac{dy}{(9 - y^2)} = \frac{dx}{\operatorname{tg} x}.$$

Тепер можна інтегрувати кожену частину рівняння за відповідною змінною:

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{(9 - y^2)} &= \int \frac{dx}{\operatorname{tg} x} \\ - \int \frac{dy}{y^2 - 9} &= \int \operatorname{ctg} x \cdot dx \\ - \frac{1}{2 \cdot 3} \ln \left| \frac{y - 3}{y + 3} \right| + C &= \ln |\sin x| \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{6} \ln \left| \frac{y - 3}{y + 3} \right| + \ln |\sin x| = C. \end{aligned}$$

Ми отримали загальний інтеграл розв'язку, оскільки змінна  $y$  не виражається явно.

*Відповідь.*  $\frac{1}{6} \ln \left| \frac{y-3}{y+3} \right| + \ln |\sin x| = C.$

§ 1. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними

**Приклад 1.2.** Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$\sqrt{1+y^2} + 2yy'\sqrt{9-x^2} = 0.$$

*Розв'язування.* Оскільки рівняння можна представити у вигляді  $P(x)Q(y)y' = R(x)$ , то це рівняння з відокремлюваними змінними. Представимо похідну у вигляді відношення диференціалів:

$$\sqrt{1+y^2} = -2y \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \sqrt{9-x^2}.$$

«Підніmemo» диференціал  $dx$  (помножимо обидві частини рівняння на нього):

$$\sqrt{1+y^2}dx = -2ydy\sqrt{9-x^2}$$

Тепер розділимо змінні ( $y$  до  $dy$ ,  $x$  до  $dx$ ):

$$\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{-2ydy}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Тепер можна інтегрувати кожену частину рівняння за відповідною змінною:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{-2ydy}{\sqrt{1+y^2}} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{-d(1+y^2)}{\sqrt{1+y^2}}.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad \int \frac{d(U)}{\sqrt{U}} = 2\sqrt{U} + C.$$

$$\arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + C = -2\sqrt{1+y^2} \quad \Rightarrow \quad \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + 2\sqrt{1+y^2} = C.$$

Ми отримали загальний інтеграл розв'язку, оскільки змінна  $y$  не виражається явно.

*Відповідь.*  $\arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + 2\sqrt{1+y^2} = C.$

§ 1. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними

**Приклад 1.3.** Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y \ln y dx + \sqrt{1-x} \cdot dy = 0.$$

*Розв'язування.* ОДЗ:  $y > 0, 1 - x \geq 0$ . Оскільки рівняння можна представити у вигляді  $P(y)dx = Q(x)dy$ , то змінні можна відокремити.

$$y \ln y \cdot dx = -\sqrt{1-x} \cdot dy.$$

Якщо  $x = 1$ , то  $y = 1$  є розв'язком. Покладемо  $x \neq 1, y \neq 1$ . Тепер розділимо змінні ( $y$  до  $dy$ ,  $x$  до  $dx$ ):

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \frac{-dy}{y \ln y}.$$

Тепер можна інтегрувати кожен частину рівняння за відповідною змінною:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \int \frac{-dy}{y \ln y}.$$

Оскільки, за властивостями диференціалів, маємо:

$$(1-x)' = -1, \quad d(1-x) = -dx; \quad (\ln y)' = \frac{1}{y}, \quad d(\ln y) = \frac{dy}{y}.$$

Тому

$$\int \frac{-d(1-x)}{\sqrt{1-x}} = \int \frac{-d(\ln y)}{\ln y}.$$

$$\int \frac{dU}{U} = \ln|U| + C, \quad \int \frac{d(U)}{\sqrt{U}} = 2\sqrt{U} + C.$$

$$-2\sqrt{1-x} = -\ln|\ln y| - C \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{1-x} - \ln|\ln y| = C.$$

Ми отримали загальний інтеграл розв'язку, оскільки змінна  $y$  не виражається явно.

*Відповідь.*  $2\sqrt{1-x} - \ln|\ln y| = C.$

§ 1. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними

**Приклад 1.4.** Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y(5\ln y + 3)dx - e^{-x}\sqrt{1 + e^{2x}}dy = 0.$$

*Розв'язування.* ОДЗ:  $y > 0$ . Оскільки рівняння можна представити у вигляді  $P(y)dx = Q(x)dy$ , то змінні можна відокремити.

$$y(5\ln y + 3)dx = e^{-x}\sqrt{1 + e^{2x}}dy.$$

Якщо  $5\ln y + 3 = 0$ , то рівняння не має розв'язком. Покладемо  $5\ln y + 3 \neq 0$ . Тепер розділимо змінні ( $y$  до  $dy$ ,  $x$  до  $dx$ ):

$$\frac{dx}{e^{-x}\sqrt{1 + e^{2x}}} = \frac{dy}{y(5\ln y + 3)}.$$

Тепер можна інтегрувати кожен частину рівняння за відповідною змінною:

$$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1 + e^{2x}}} = \int \frac{dy}{y(5\ln y + 3)}.$$

Оскільки, за властивостями диференціалів, маємо:

$$(e^x)' = e^x, \quad d(e^x) = e^x \cdot dx; \quad (5\ln y + 3)' = \frac{5}{y}, \quad d(5\ln y + 3) = \frac{5dy}{y}.$$

Тому

$$\int \frac{d(e^x)}{\sqrt{1 + (e^x)^2}} = \int \frac{\frac{1}{5}d(5\ln y + 3)}{5\ln y + 3}.$$
$$\int \frac{d(u)}{\sqrt{1 + u^2}} = \ln|u + \sqrt{1 + u^2}| + C, \quad \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C.$$

$$\ln|e^x + \sqrt{1 + e^{2x}}| + C = \frac{1}{5}\ln|5\ln y + 3|.$$

*Відповідь.* Загальний інтеграл розв'язку

$$\ln|e^x + \sqrt{1 + e^{2x}}| + C = \frac{1}{5}\ln|5\ln y + 3|.$$

§ 1. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними

**Приклад 1.5.** Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння

$$x \cdot y y' = \sqrt{8 + y^2}, \quad \text{при умові } y(1) = -1.$$

*Розв'язування.* Спочатку знайдемо загальний розв'язок даного диференціального рівняння. Оскільки рівняння можна представити у вигляді  $P(x)Q(y)y' = R(y)$ , то це рівняння з відокремлюваними змінними. Представимо похідну у вигляді відношення диференціалів:

$$x y \cdot \frac{dy}{dx} = \sqrt{8 + y^2}.$$

«Підніmemo» диференціал  $dx$  (домножимо обидві частини рівняння на нього):

$$x y \cdot dy = \sqrt{8 + y^2} dx.$$

Тепер розділимо змінні ( $y$  до  $dy$ ,  $x$  до  $dx$ ):

$$\frac{y dy}{\sqrt{8 + y^2}} = \frac{dx}{x}.$$

Тепер можна інтегрувати кожен частину рівняння за відповідною змінною:

$$\int \frac{y dy}{\sqrt{8 + y^2}} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\frac{1}{2} \cdot d(8 + y^2)}{\sqrt{8 + y^2}} = \int \frac{dx}{x}.$$

$$\int \frac{d(U)}{\sqrt{U}} = 2\sqrt{U} + C.$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{8 + y^2} = \ln|x| + C \quad \Rightarrow \quad \sqrt{8 + y^2} = \ln|x| + C.$$

Ми отримали загальний інтеграл розв'язку. Для знаходження змінної  $C$  використаємо додаткову умову  $y(1) = -1$ :

$$\sqrt{8 + (-1)^2} = \ln|1| + C \quad \Rightarrow \quad 3 = C \quad \Rightarrow \quad \sqrt{8 + y^2} = \ln|x| + 3.$$

*Відповідь.*  $\sqrt{8 + y^2} = \ln|x| + 3.$

§ 1. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними

**Приклад 1.6.** Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння

$$x y' = y - 2xy, \quad \text{при умові} \quad y(1) = 1.$$

*Розв'язування.* Спочатку знайдемо загальний розв'язок даного диференціального рівняння. Перепишемо рівняння у вигляді:

$$x y' = y(1 - 2x).$$

Оскільки рівняння можна представити у вигляді  $P(x)y' = Q(y) \cdot R(x)$ , то це рівняння з відокремлюваними змінними. Представимо похідну у вигляді відношення диференціалів:

$$x \cdot \frac{dy}{dx} = y(1 - 2x).$$

«Підніmemo» диференціал  $dx$  (домножимо обидві частини рівняння на нього):

$$x \cdot dy = y(1 - 2x)dx.$$

Тепер розділимо змінні ( $y$  до  $dy$ ,  $x$  до  $dx$ ):  $\frac{dy}{y} = \frac{(1-2x)dx}{x}$ .

Тепер можна інтегрувати кожену частину рівняння за відповідною змінною:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{(1-2x)dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int \left( \frac{1}{x} - \frac{2x}{x} \right) dx.$$

$$\ln|y| = \ln|x| - 2x + C.$$

Ми отримали загальний інтеграл розв'язку. Для знаходження змінної  $C$  використаємо додаткову умову  $y(1) = 1$ :

$$\ln|1| = \ln|1| - 2 \cdot 1 + C \quad \Rightarrow \quad 0 = 0 - 2 + C \quad \Rightarrow \quad C = 2$$

$$\ln|y| = \ln|x| - 2x + 2.$$

*Відповідь.*  $\ln|y| = \ln|x| - 2x + 2$ .

§ 1. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними

**Приклад 1.7.** Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння

$$x(1 + 2y)dy = (9 + y^2)dx, \quad \text{при умові } y(1) = 0.$$

*Розв'язування.* Спочатку знайдемо загальний розв'язок даного диференціального рівняння. Оскільки рівняння можна представити у вигляді  $P(x)Q(y)dy = R(x)dx$ , то це рівняння з відокремлюваними змінними. Розділимо змінні ( $y$  до  $dy$ ,  $x$  до  $dx$ ):

$$\frac{(1 + 2y)dy}{(9 + y^2)} = \frac{dx}{x}.$$

Тепер можна інтегрувати кожен частину рівняння за відповідною змінною:

$$\int \frac{(1 + 2y)dy}{(9 + y^2)} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{9 + y^2} + \int \frac{d(9 + y^2)}{9 + y^2} = \int \frac{dx}{x}.$$

Враховуючи, що

$$\int \frac{dy}{a^2 + y^2} = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{a} \right) + C, \quad \int \frac{d(U)}{U} = \ln |U| + C,$$
$$\frac{1}{3} \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{3} \right) + \ln |9 + y^2| = \ln |x| + C.$$

Ми отримали загальний інтеграл розв'язку. Для знаходження змінної  $C$  використаємо додаткову умову  $y(1) = 0$ :

$$\frac{1}{3} \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{0}{3} \right) + \ln |9 + 0| = \ln |1| + C$$

$$\frac{1}{3} \cdot \operatorname{arctg}(0) + \ln 9 = 0 + C \quad \Rightarrow \quad 0 + \ln 9 = C \quad \Rightarrow \quad C = \ln 9.$$

$$\text{Підставляючи значення } C: \quad \frac{1}{3} \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{3} \right) + \ln |9 + y^2| = \ln x + \ln 9.$$

$$\text{Відповідь.} \quad \frac{1}{3} \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{3} \right) + \ln |9 + y^2| = \ln x + \ln 9.$$

§ 1. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними

**Приклад 1.8.** Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння

$$\operatorname{ctgx} \cdot dy = (2y + 1) \cdot dx, \quad \text{при умові } y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2.$$

*Розв'язування.* Нас цікавить розв'язок в околі точки  $\left(\frac{\pi}{3}; 2\right)$ . Спочатку знайдемо загальний розв'язок даного диференціального рівняння. Оскільки рівняння можна представити у вигляді

$P(x)dy = Q(y)dx$ , то це рівняння з відокремлюваними змінними.

Розділимо змінні ( $y$  до  $dy$ ,  $x$  до  $dx$ ):  $\frac{dy}{2y+1} = \frac{dx}{\operatorname{ctgx}}$ .

Тепер можна інтегрувати кожен частину рівняння за відповідною змінною:

$$\int \frac{dy}{2y+1} = \int \frac{dx}{\operatorname{ctgx}} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\frac{1}{2} \cdot d(2y+1)}{2y+1} = \int \operatorname{tg} x \cdot dx.$$

$$\int \frac{d(U)}{U} = \ln|U| + C.$$

$$\frac{1}{2} \cdot \ln|2y+1| = -\ln|\cos x| + C.$$

Ми отримали загальний інтеграл розв'язку. Розв'яжемо задачу Коші, тобто підставимо початкову умову  $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$  в загальний розв'язок:

$$\frac{1}{2} \cdot \ln|2 \cdot 2 + 1| = -\ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right| + C \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot \ln|5| = -\ln\left|\frac{1}{2}\right| + C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \ln|5| = -\ln|2^{-1}| + C \Rightarrow \ln|\sqrt{5}| - \ln|2| = C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{\sqrt{5}}{2}\right| = C \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot \ln|2y+1| = -\ln|\cos x| + \ln\left|\frac{\sqrt{5}}{2}\right|.$$

*Відповідь.*  $\frac{1}{2} \cdot \ln|2y+1| = -\ln|\cos x| + \ln\left|\frac{\sqrt{5}}{2}\right|.$

§ 1. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними

**Приклад 1.9.** Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$6x dx - 3y dy + 2xy^2 dx = 3x^2 y dy, \quad \text{при умові } y(0) = 1.$$

*Розв'язування.* Спочатку знайдемо загальний розв'язок диференціального рівняння. Перш за все, згрупуємо блоки за відповідними диференціалами:

$$6x dx + 2xy^2 dx = 3x^2 y dy + 3y dy$$

$$2x(3 + y^2) dx = 3y(x^2 + 1) dy.$$

Тепер змінні можна відокремити. Розділимо змінні ( $y$  до  $dy$ ,  $x$  до  $dx$ ):

$$\frac{2x dx}{x^2 + 1} = \frac{3y dy}{3 + y^2}.$$

Тепер можна інтегрувати кожен частину рівняння за відповідною змінною:

$$\int \frac{2x dx}{x^2 + 1} = \int \frac{3y dy}{3 + y^2}.$$

Оскільки, за властивостями диференціалів, маємо:

$$(x^2 + 1)' = 2x, \quad d(x^2 + 1) = 2x \cdot dx$$

$$(3 + y^2)' = 2y, \quad d(3 + y^2) = 2y dy, \quad \frac{1}{2} \cdot d(3 + y^2) = y dy.$$

Тому

$$\int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \int \frac{3 \cdot \frac{1}{2} \cdot d(3 + y^2)}{3 + y^2}.$$

$$\int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{3}{2} \cdot \int \frac{d(3 + y^2)}{3 + y^2}.$$

§ 1. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними

Враховуючи значення невизначеного інтегралу:

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C,$$

маємо:

$$\ln|x^2 + 1| + C = \frac{3}{2} \ln|3 + y^2|.$$

Ми отримали загальний інтеграл розв'язку. Розв'яжемо задачу Коші, тобто підставимо початкову умову  $y(0) = 1$  в загальний розв'язок:

$$\ln|0^2 + 1| + C = \frac{3}{2} \ln|3 + 1^2|$$

$$\ln|1| + C = \frac{3}{2} \ln|4|$$

$$0 + C = 3 \ln 2$$

Підставляючи отримане значення  $C$  в загальний розв'язок диференціального рівняння, ми отримаємо частинний розв'язок, що задовольняє додатковим умовам:

$$\ln|x^2 + 1| + 3 \ln 2 = \frac{3}{2} \ln|3 + y^2|.$$

*Відповідь.*  $\ln|x^2 + 1| + 3 \ln 2 = \frac{3}{2} \ln|3 + y^2|.$

*Зауважимо,* що отриманий розв'язок можна було переписати в іншому (тотожному) вигляді, виконавши такі перетворення:

$$\ln|x^2 + 1| + \ln 2^3 = \frac{3}{2} \ln|3 + y^2|,$$

$$\ln|8(x^2 + 1)| = \ln \left| \sqrt{(3 + y^2)^3} \right| \Rightarrow 8(x^2 + 1) = \sqrt{(3 + y^2)^3}.$$

§ 1. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними

**Приклад 1.10.** Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$x^2 y dy = \sqrt{9 + y^2} dx - 6y dy, \quad \text{при умові } y(0) = 4.$$

*Розв'язування.* Спочатку знайдемо загальний розв'язок диференціального рівняння. Перш за все, згрупуємо блоки за відповідними диференціалами:

$$x^2 y dy + 6y dy = \sqrt{9 + y^2} dx$$

$$(x^2 + 6)y dy = \sqrt{9 + y^2} dx.$$

Тепер змінні можна відокремити. Розділимо змінні (у до  $dy$ ,  $x$  до  $dx$ ):

$$\frac{dx}{x^2 + 6} = \frac{y dy}{\sqrt{9 + y^2}}$$

Тоді можна інтегрувати кожну частину рівняння за відповідною змінною:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 6} = \int \frac{y dy}{\sqrt{9 + y^2}}$$

Оскільки, за властивостями диференціалів, маємо:

$$(9 + y^2)' = 2y, \quad d(9 + y^2) = 2y \cdot dy, \quad \frac{1}{2} \cdot d(9 + y^2) = y dy.$$

Тому

$$\int \frac{dx}{x^2 + 6} = \int \frac{\frac{1}{2} \cdot d(9 + y^2)}{\sqrt{9 + y^2}}.$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 6} = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{d(9 + y^2)}{\sqrt{9 + y^2}}.$$

Враховуючи значення невизначеного інтегралу:

§ 1. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремленими змінними

$$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C,$$

маємо:

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \left( \frac{x}{\sqrt{6}} \right) + C = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{9 + y^2}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \left( \frac{x}{\sqrt{6}} \right) + C = \sqrt{9 + y^2}$$

Ми отримали загальний інтеграл розв'язку. Розв'яжемо задачу Коші, тобто підставимо початкову умову  $y(0) = 4$  в загальний інтеграл:

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \left( \frac{0}{\sqrt{6}} \right) + C = \sqrt{9 + 4^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg}(0) + C = \sqrt{25}$$

$$0 + C = 5.$$

Підставляючи отримане значення  $C$  в загальний інтеграл розв'язку диференціального рівняння, ми отримаємо частинний інтеграл, що задовольняє початковим умовам (розв'язок задачі Коші):

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \left( \frac{x}{\sqrt{6}} \right) + 5 = \sqrt{9 + y^2}.$$

*Відповідь.*  $\frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \left( \frac{x}{\sqrt{6}} \right) + 5 = \sqrt{9 + y^2}.$

§ 1. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними

**Приклад 1.11.** Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння

$$y \cdot y' \cdot \sqrt{1-x^2} - \sqrt{1+y^2} = 0, \quad \text{при умові} \quad y(1) = 0.$$

*Розв'язування.* ОДЗ:  $1-x^2 \geq 0$ . Спочатку знайдемо загальний розв'язок даного диференціального рівняння. Перепишемо рівняння у вигляді:

$$y \cdot y' \cdot \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1+y^2}.$$

Оскільки рівняння можна представити у вигляді  $Q(y) \cdot P(x)y' = R(y)$ , то це рівняння з відокремлюваними змінними. Представимо похідну у вигляді відношення диференціалів:

$$y \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1+y^2}.$$

Підніmemo диференціал  $dx$  (домножимо обидві частини рівняння на нього):

$$y \cdot dy \cdot \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1+y^2} \cdot dx.$$

Тепер розділимо змінні (удо  $dy$ ,  $x$  до  $dx$ ):

$$\frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Тепер можна інтегрувати кожену частину рівняння за відповідною змінною:

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \int \frac{d(1+y^2)}{\sqrt{1+y^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\sqrt{1+y^2} = \arcsin x + C.$$

Ми отримали загальний інтеграл розв'язку. Для знаходження змінної  $C$  використаємо додаткову умову  $y(1) = 0$ :

$$\sqrt{1+0^2} = \arcsin 1 + C \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{\pi}{2} + C \quad \Rightarrow \quad C = 1 - \frac{\pi}{2}.$$

Отримаємо розв'язок задачі Коші у вигляді частинного інтегралу:

$$\sqrt{1+y^2} = \arcsin x + 1 - \frac{\pi}{2}.$$

*Відповідь.*  $\sqrt{1+y^2} = \arcsin x + 1 - \frac{\pi}{2}$ .

§ 1. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними

**Приклад 1.12.** Знайти розв'язок диференціального рівняння  $y' = 100y^3$ , при умові  $y(0) = -1$ .

*Розв'язування.* Значення  $y = 0$  є розв'язком диференціального рівняння, але нам потрібен розв'язок, що буде задовольняти умові  $y(0) = -1$ . Дане диференціальне рівняння відноситься до рівнянь, змінні яких можна відокремити. Представимо похідну у вигляді відношення диференціалів:

$$\frac{dy}{dx} = 100y^3.$$

«Підніmemo» диференціал  $dx$  (домножимо обидві частини рівняння на нього):

$$dy = 100y^3 dx.$$

Тепер розділимо змінні ( $y$  до  $dy$ ,  $x$  до  $dx$ ):  $\frac{dy}{y^3} = 100dx$ .

Тепер можна інтегрувати кожену частину рівняння за відповідною змінною:

$$\int \frac{dy}{y^3} = \int 100dx \quad \Rightarrow \quad \int y^{-3} dy = 100 \int dx.$$
$$\frac{y^{-2}}{-2} = 100x + C \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{2y^2} = 100x + C.$$

Ми отримали загальний інтеграл розв'язку. Для знаходження змінної  $C$  використаємо додаткову умову  $y(0) = -1$ :

$$\frac{-1}{2(-1)^2} = 100 \cdot 0 + C \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{2} = C.$$

Отримаємо розв'язок задачі Коші у вигляді частинного інтегралу:

$$\frac{-1}{2y^2} = 100x - \frac{1}{2}.$$

*Відповідь.*  $\frac{-1}{2y^2} = 100x - \frac{1}{2}$ .

*Зауважимо,* що отриманий розв'язок можна було переписати в іншому (тотожному) вигляді, виконавши такі перетворення:

§ 1. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремленими змінними

$$\frac{-1}{2y^2} = 100x - \frac{1}{2} \quad \text{домножимо все на число 2:}$$

$$\frac{-1}{y^2} = 200x - 1 \quad \text{скористаємося властивостями дробів:}$$

$$\frac{-1}{200x - 1} = y^2 \quad \text{добудемо з обох частин корень квадратний:}$$

$$\sqrt{\frac{-1}{200x - 1}} = \pm y. \quad \text{Виходячи з початкової умови } y(0) = -1, \quad \text{маємо:}$$

$$y = -\sqrt{\frac{-1}{200x - 1}} \quad \text{або} \quad y = -\sqrt{\frac{1}{1 - 200x}}.$$

Тобто розв'язок задачі Коші отримали у вигляді частинного розв'язку.

$$\text{Відповідь. } y = -\sqrt{\frac{1}{1 - 200x}}.$$

**Приклад 1.13.** Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$ye^x dx = (1 + e^x) \cdot dy.$$

*Розв'язування.* Розв'язок  $y = 0$  є тривіальним. Знайдемо тепер нетривіальний розв'язок. Оскільки рівняння можна представити у вигляді  $P(y)Q(x)dx = R(x)dy$ , то змінні можна відокремити. Розділимо змінні ( $y$  до  $dy$ ,  $x$  до  $dx$ ):

$$ye^x dx = (1 + e^x) \cdot dy \quad \text{або} \quad \frac{e^x dx}{1 + e^x} = \frac{dy}{y}.$$

Тепер можна інтегрувати кожен частину рівняння за відповідною змінною:

§ 1. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремленими змінними

$$\int \frac{e^x dx}{1 + e^x} = \int \frac{dy}{y}.$$

Оскільки, за властивостями диференціалів, маємо:

$$(1 + e^x)' = e^x, \quad d(1 + e^x) = e^x dx.$$

Тому

$$\int \frac{d(1 + e^x)}{1 + e^x} = \int \frac{dy}{y}.$$

Враховуючи, що

$$\int \frac{dU}{U} = \ln|U| + C,$$

отримаємо

$$\ln|1 + e^x| = \ln|y| + \ln|C|.$$

Сума логарифмів за однаковою основою дорівнює логарифму від добутку:

$$\ln|1 + e^x| = \ln|Cy|.$$

Від рівностей логарифмів можна перейти до рівностей функцій, які знаходяться під логарифмами:

$$1 + e^x = Cy, \quad C > 0.$$

Виразимо  $y$ :

$$y = \frac{1 + e^x}{C}.$$

Ми отримали загальний розв'язок диференціального рівняння, оскільки змінна  $y$  виражається явно.

*Відповідь.*  $y = \frac{1+e^x}{C}.$

§ 1. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними

**Приклад 1.14.** Розв'язати задачу Коші:  $y' = 2y^2$ ,  $y(0) = 4$ .

*Розв'язування.* Розв'язок  $y = 0$  нас не цікавить, оскільки  $y(0) = 4$ . Знайдемо спочатку загальний розв'язок диференціального рівняння. Оскільки рівняння можна представити у вигляді  $y' = P(y)$ , то змінні можна відокремити. Представимо похідну у вигляді відношення диференціалів:

$$\frac{dy}{dx} = 2y^2.$$

«Підніmemo» диференціал  $dx$  (домножимо обидві частини рівняння на нього):  $dy = 2y^2 dx$

Відокремлюючи змінні, отримаємо  $\frac{dy}{y^2} = 2dx$ . Тепер можна інтегрувати кожену частину рівняння за відповідною змінною:

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int 2dx.$$

$$\frac{-1}{y} = 2x + C \quad \text{або} \quad y = \frac{-1}{2x + C}.$$

Нам залишилося знайти значення параметра  $C$ .

Згідно умові  $y(0) = 4$ , маємо  $4 = \frac{-1}{2 \cdot 0 + C}$ , тобто  $C = \frac{-1}{4} = -0,25$ .

Тоді розв'язок задачі Коші:  $y = \frac{-1}{2x - 0,25}$ .

*Відповідь.*  $y = \frac{-1}{2x - 0,25}$ .

**Приклад 1.15.** Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння

$$y' \cdot \ln y \cdot \cos x = y, \quad \text{при умові } y(0) = 1.$$

*Розв'язування.* ОДЗ:  $y > 0$ . Спочатку знайдемо загальний розв'язок даного диференціального рівняння. Оскільки рівняння можна представити у

§ 1. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними  
 вигляді  $P(x)Q(y)y' = R(y)$ , то це рівняння з відокремлюваними змінними.  
 Представимо похідну у вигляді відношення диференціалів:

$$\frac{dy}{dx} \cdot \ln y \cdot \cos x = y.$$

«Підніmemo» диференціал  $dx$  (домножимо обидві частини рівняння на нього):

$$dy \cdot \ln y \cdot \cos x = y dx.$$

Тепер розділимо змінні ( $y$  до  $dy$ ,  $x$  до  $dx$ ):

$$\frac{\ln y dy}{y} = \frac{dx}{\cos x}.$$

Тепер можна інтегрувати кожену частину рівняння за відповідною змінною:

$$\int \frac{\ln y dy}{y} = \int \frac{dx}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad \int \ln y d(\ln y) = \int \frac{\cos x dx}{1 - \sin^2 x}.$$

$$\int \frac{d(u)}{1 - u^2} = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{u - 1}{u + 1} \right| + C, \quad u = \sin x.$$

$$\frac{\ln^2 y}{2} = -\frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| + C \quad \Rightarrow \quad \ln^2 y = \ln \left| \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} \right| + 2C.$$

Ми отримали загальний інтеграл розв'язку. Для знаходження змінної  $C$  використаємо додаткову умову  $y(0) = 1$ :

$$\ln^2 1 = \ln \left| \frac{\sin 0 + 1}{\sin 0 - 1} \right| + 2C \Rightarrow 0 = \ln 1 + 2C \Rightarrow C = 0.$$

Остаточно отримуємо розв'язок задачі Коші у вигляді частинного інтегралу:

$$\ln^2 y = \ln \left| \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} \right| + 0.$$

Відповідь.  $\ln^2 y = \ln \left| \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} \right|.$

§ 1. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними

**Приклад 1.16.** Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y' = (1 + 4x + y)^2.$$

*Розв'язування.* Задане рівняння **можна** привести до диференціального рівняння з відокремленими змінними, якщо виконати заміну:

$$z(x) = 1 + 4x + y.$$

Оскільки  $y = z - 1 - 4x$ ,  $y' = z' - 4$ , то рівняння можна переписати так:

$$z' - 4 = z^2, \quad z' = z^2 + 4$$

$$\frac{dz}{dx} = z^2 + 4, \quad \frac{dz}{z^2 + 4} = dx, \quad \int \frac{dz}{z^2 + 4} = \int dx.$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{z}{2} \right) = x + C, \quad \operatorname{arctg} \left( \frac{z}{2} \right) = 2x + C_1.$$

$$\frac{z}{2} = \operatorname{tg} (2x + C_1), \quad z = 2 \operatorname{tg} (2x + C_1).$$

$$1 + 4x + y = 2 \operatorname{tg} (2x + C_1).$$

Ми отримали загальний інтеграл диференціального рівняння, оскільки змінна  $y$  виражається явно. Загальний розв'язок диференціального рівняння:  $y = 2 \operatorname{tg} (2x + C_1) - 1 - 4x$ .

*Відповідь.*  $y = 2 \operatorname{tg} (2x + C_1) - 1 - 4x$ .

**Приклад 1.17.** Нехай в реторті у сприятливих для розмноження умовах знаходиться деяка кількість бактерій  $N_0$ . Експериментально встановлено, що швидкість розмноження цих бактерій пропорційна їх кількості. Знайти залежність приросту числа бактерій від часу.

*Розв'язування.* Позначимо чисельність бактерій в момент часу  $t$  через  $N = N(t)$ , тоді диференціальне рівняння шуканого процесу – швидкість

**§ 1. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремленими змінними**

приросту чисельності бактерій, буде мати вигляд:  $\frac{dN}{dt} = kN$ , де  $k > 0$  – коефіцієнт пропорційності (знак плюс береться тому, що з часом кількість бактерій збільшується). З диференціального рівняння знаходимо, що  $\frac{dN}{N} = kdt$ ,

$$\int \frac{dN}{N} = \int kdt \Rightarrow \ln|N| = kt + C \Rightarrow N = e^{kt+C} \Rightarrow N = C_1 e^{kt}.$$

Отже, отримали вираз для шуканої функції. Згідно умови задачі  $N(0) = N_0$  при  $t = 0$ , тоді  $N_0 = C_1 e^0$ , тобто  $N_0 = C_1$  і матимемо наступну функціональну залежність:  $N = N_0 e^{kt}$ . Таким чином, чисельність бактерій через час  $t$  становить  $N = N_0 e^{kt}$ .

*Відповідь.*  $N = N_0 e^{kt}$ .

**Приклад 1.18.** (Про радіоактивний розпад.) Експериментально встановлено, що швидкість радіоактивного розпаду речовини пропорційна її кількості в даний момент часу. Вказати закон зміни маси речовини від часу, якщо при  $t = 0$  маса речовини дорівнювала  $m_0$ .

*Розв'язування.* Нехай  $m = m(t)$  – маса речовини в момент часу  $t$ . За умовою  $\frac{dm}{dt} = -km$ , де  $k$  – коефіцієнт пропорційності. Знак мінус береться тому, що з часом кількість речовини зменшується:

$$\frac{dm}{m} = -kdt$$
$$\int \frac{dm}{m} = \int -kdt \Rightarrow \ln|m| = -kt + C \Rightarrow m = e^{-kt+C} \Rightarrow m = C_1 e^{-kt}.$$

Отже, отримали вираз для шуканої функції. Згідно умови задачі  $m(0) = m_0$  при  $t = 0$ , тоді  $m_0 = C_1 e^0$ , тобто  $m_0 = C_1$  і матимемо наступну функціональну залежність:  $m = m_0 e^{-kt}$ . Таким чином, зміна маси речовини при радіоактивному розпаді відбувається знову за експоненціальним законом.

*Відповідь.*  $m = m_0 e^{-kt}$ .

§ 1. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремленими змінними

**Приклад 1.19.** (Про охолодження тіла.) Відомо, що швидкість охолодження тіла пропорційна різниці між температурою тіла і температурою навколишнього середовища (закон Ньютона). Нагріте до температури  $T_0$  тіло помістили в середовище, температура якого стала і дорівнює  $T_1$  ( $T_0 > T_1$ ). Знайти залежність температури тіла від часу  $t$ .

*Розв'язування.* Нехай в момент часу  $t$  температура  $T$  тіла дорівнює  $T(t)$ . За умовою

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_1), \quad k > 0, \quad T(0) = T_0.$$

Зауважимо, що знак мінус вказує на зменшення температури із часом  $t$ . Відокремлюючи змінні та інтегруючи, отримаємо:

$$\frac{dT}{(T - T_1)} = -k dt$$

$$\int \frac{dT}{(T - T_1)} = \int -k dt$$

$$\ln|T - T_1| = -kt + C$$

$$T - T_1 = e^{-kt+C}$$

$$T = T_1 + C e^{-kt}$$

$$T(0) = T_0: \quad T_0 = T_1 + C e^0 \quad C = T_0 - T_1$$

$$T = T_1 + (T_0 - T_1)e^{-kt}.$$

Ми отримали залежність температури тіла, що було нагріте до температури  $T_0$  та поміщене у середовище зі сталою температурою  $T_1$ , від часу  $t$ .

*Відповідь.*  $T = T_1 + (T_0 - T_1)e^{-kt}$ .

## § 2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

### § 2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

Поняття однорідного диференціального рівняння першого порядку природно пов'язане із однорідними функціями. Тому, перш ніж розглядати однорідні диференціальні рівняння, ми згадаємо поняття однорідної функції:

Функція  $f(x, y)$  двох змінних називається однорідною функцією  $n$  – порядку відносно змінних  $x$  та  $y$ , якщо для довільних  $k, x, y$  виконується рівність:

$$f(kx, ky) = k^n \cdot f(x, y).$$

Многочлен

$$P(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j$$

називається однорідним степеня  $n$ , якщо всі члени його мають один порядок  $n$ , тобто для кожного  $a_{ij} x^i y^j$  маємо, що  $i + j = n$ . Наприклад,  $P(x, y) = x^2 - 3xy - 2y^2$  є однорідний многочлен другого степеню. Дійсно,

$$P(kx, ky) = (kx)^2 - 3(kx)(ky) - 2(ky)^2 = k^2(x^2 - 3xy - 2y^2) = k^2 \cdot P(x, y).$$

Прикладами однорідних функціїє можуть бути функції:

$$f(x, y) = x + 3y, \quad \text{порядок однорідності } 1;$$

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - y^3, \quad \text{порядок однорідності } 3;$$

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + 3xy}, \quad \text{порядок однорідності } 1;$$

$$f(x, y) = \sqrt{x^4 + 3xy^3 - y^4}, \quad \text{порядок однорідності } 2;$$

$$f(x, y) = \frac{x^3 + 3xy^2}{y^3}, \quad \text{порядок однорідності } 0.$$

## § 2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

### Однорідні функції володіють рядом цікавих властивостей:

1. Якщо  $f(x, y)$ ,  $g(x, y)$  однорідні функції одного порядку, то їх сума (різниця)  $f(x, y) + g(x, y)$ , також є однорідною функцією.

2. Якщо  $f(x, y)$  однорідна функція порядку  $n$ ,  $g(x, y)$  однорідна функція порядку  $k$ , то їхній добуток  $f(x, y) \cdot g(x, y)$  є однорідною функцією порядку  $n + k$ .

3. Якщо  $f(x, y)$  однорідна функція порядку  $n$ ,  $g(x, y)$  однорідна функція порядку  $k$ , то їхня частка  $\frac{f(x, y)}{g(x, y)}$  є однорідною функцією порядку  $n - k$ .

4. Якщо  $f(x, y)$  однорідна функція порядку  $n$ , то функція  $\sqrt[k]{f(x, y)}$  є однорідною функцією порядку  $\frac{n}{k}$ .

Диференціальне рівняння 1-го порядку  $y' = f(x, y)$  називається **однорідним**, якщо функція  $f(x, y)$  – однорідна функція нульового порядку.

Якщо в однорідному диференціальному рівнянні  $y' = f(x, y)$  прийняти  $t = \frac{1}{x}$  то його можна звести до вигляду  $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$ . Останнє рівняння підстановкою  $\frac{y}{x} = t$ ,  $y = tx$ ,  $y' = t'x + t$  зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

Рівняння виду  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  називається **однорідним відносно змінних  $x$  і  $y$** , якщо функції  $M(x, y)$  і  $N(x, y)$  є однорідними з однаковим степенем однорідності. Наприклад, диференціальне рівняння  $\sqrt{x^2 + 4y^2}dx + (x + 3y)dy = 0$  – є однорідним, бо функції

$$M(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^2}, \quad N(x, y) = (x + 3y)$$

є однорідними першого порядку однорідності. Зауважимо, що диференціальне однорідне рівняння виду

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

## § 2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

завжди зводиться до однорідного рівняння  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ , де  $f(x, y)$  – функція нульового порядку однорідності, бо рівняння

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

легко зводиться до  $\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = f(x, y)$ . Покажемо, що інтегрування однорідного рівняння  $y' = f(x, y)$  за допомогою спеціальної підстановки зводиться до інтегрування рівняння з відокремлюваними змінними. Дійсно, оскільки  $f(x, y)$  – однорідна функція нульового степеню однорідності, то для будь-якого  $k$  маємо  $f(kx, ky) = f(x, y)$ , зокрема при  $k = \frac{1}{x}$  отримаємо  $f(x, y) = f(kx, ky) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$ . Це означає, що права частина рівняння  $y' = f(x, y)$  фактично залежить від одного аргумента – відношення  $\frac{y}{x}$ , тобто  $f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$ . Але, тоді рівняння  $y' = f(x, y)$  можна переписати так:  $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$ . Далі, ввівши нову невідому функцію  $t = \frac{y}{x}$  отримаємо  $y = tx$ , диференціюючи, отримаємо

$$y' = t'x + tx' \Rightarrow y' = t'x + t$$

замість рівняння  $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$  отримаємо  $t'x + t = g(t)$ . Таке рівняння

$$t'x = g(t) - t$$

вже допускає відокремлення змінних.

**Алгоритм знаходження загального розв'язку однорідного рівняння:**

- 1) Переконатися, що рівняння  $y' = f(x, y)$  є однорідним.
- 2) Виконати заміну  $\frac{y}{x} = t$ .
- 3) Знайти зміну  $y = tx$  та її похідну  $y' = t'x + t$ .
- 4) Підставити все в рівняння:  $y = tx$ ,  $t'x + t = g(t)$ .

## § 2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

- 5) Зінтегрувати рівняння:  $t'x = g(t) - t$  (визначити загальний інтеграл розв'язку).
- 6) У загальному інтегралі розв'язку зробити заміну  $t = \frac{y}{x}$ .

**Приклад 2.1.** Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y' = \frac{y}{x} \left( 3 \ln \left( \frac{y}{x} \right) + 1 \right).$$

*Розв'язування.* ОДЗ:  $x \neq 0$ ,  $\frac{y}{x} > 0$ . Дане рівняння є однорідним, із явною заміною  $\frac{y}{x} = t > 0$ . Тоді, із заміни маємо:  $y = tx$  та похідну

$$y' = t'x + t.$$

Підставити все в рівняння, отримаємо:

$$t'x + t = t(3 \ln t + 1).$$

Або, після спрощення:

$$t'x = t \cdot 3 \ln t.$$

Це вже диференціальне рівняння з відокремленими змінними. При  $t = 1$  ми маємо тривіальний розв'язок  $y = x$ . Знайдемо нетривіальні розв'язки. Представимо похідну у вигляді відношення диференціалів:

$$\frac{dt}{dx} \cdot x = 3t \cdot \ln t.$$

«Підніmemo» диференціал  $dx$  (домножимо обидві частини рівняння на нього):

$$x \cdot dt = 3t \cdot \ln t \cdot dx.$$

Покладемо, що  $t \cdot \ln t \neq 0$ . Тепер розділимо змінні ( $t$  до  $dt$ ,  $x$  до  $dx$ ):

$$\frac{dt}{t \cdot \ln t} = 3 \cdot \frac{dx}{x}.$$

## § 2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

Тепер можна інтегрувати кожен частину рівняння за відповідною змінною:

$$\int \frac{dt}{t \cdot \ln t} = \int 3 \cdot \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{d(\ln t)}{\ln t} = 3 \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|\ln t| + \ln C = 3 \ln|x|, \quad \ln t > 0$$

$$\ln|C \cdot \ln t| = \ln|x^3|$$

$$C \cdot \ln t = x^3$$

$$C \cdot \ln\left(\frac{y}{x}\right) = x^3.$$

Ми отримали загальний інтеграл розв'язку, оскільки змінна  $y$  не виражається явно.

*Відповідь.*  $C \cdot \ln\left(\frac{y}{x}\right) = x^3, \quad y = x.$

**Приклад 2.2.** Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y' = \frac{y}{x} + \sin^2\left(2\frac{y}{x} - 1\right).$$

*Розв'язування.* ОДЗ:  $x \neq 0$ . Дане рівняння є однорідним, виконаємо заміну  $\frac{y}{x} = u$ . Тоді, із заміни маємо:  $y = ux$  та похідну  $y' = u'x + u$ .

Підставити все в рівняння, отримаємо:

$$u'x + u = u + \sin^2(2u - 1).$$

Або, після спрощення:

$$u'x = \sin^2(2u - 1).$$

## § 2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

Це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Представимо похідну у вигляді відношення диференціалів:

$$\frac{du}{dx} \cdot x = \sin^2(2u - 1).$$

«Підніmemo» диференціал  $dx$  (домножимо обидві частини рівняння на нього):

$$x \cdot du = \sin^2(2u - 1) \cdot dx.$$

Тепер розділимо змінні ( $u$  до  $du$ ,  $x$  до  $dx$ ),  $x \neq 0$ ,  $\sin^2(2u - 1) \neq 0$ :

$$\frac{du}{\sin^2(2u - 1)} = \frac{dx}{x}.$$

Тепер можна інтегрувати кожену частину рівняння за відповідною змінною:

$$\int \frac{du}{\sin^2(2u - 1)} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{-\operatorname{ctg}(2u - 1)}{2} = \ln|x| + C$$

$$-\operatorname{ctg}(2u - 1) = 2C + 2 \ln|x|$$

$$\operatorname{ctg}\left(2\left(\frac{y}{x}\right) - 1\right) + 2C + 2 \ln|x| = 0.$$

Ми отримали загальний інтеграл розв'язку, оскільки змінна  $u$  не виражається явно.

*Відповідь.*  $\operatorname{ctg}\left(2\left(\frac{y}{x}\right) - 1\right) + 2C + 2 \ln|x| = 0.$

## § 2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

**Приклад 2.3.** Знайти розв'язок диференціального рівняння  $y' = \frac{y}{x} + 5 \cdot e^{\frac{2y}{x}}$ .

*Розв'язування.* ОДЗ:  $x \neq 0$ . Дане рівняння є однорідним, із заміною  $\frac{y}{x} = t$ .

Тоді, із заміни маємо  $y = tx$  та похідну  $y' = t'x + t$ .

Підставити все в рівняння, отримаємо:

$$t'x + t = t + 5e^{2t}.$$

Або, після скорочення:

$$t'x = 5e^{2t}.$$

Це вже диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Представимо похідну у вигляді відношення диференціалів:

$$\frac{dt}{dx} \cdot x = 5e^{2t}.$$

Підніmemo диференціал  $dx$  (домножимо обидві частини рівняння на нього):

$$x \cdot dt = 5e^{2t} \cdot dx.$$

Тепер розділимо змінні ( $t$  до  $dt$ ,  $x$  до  $dx$ ):

$$\frac{dt}{e^{2t}} = 5 \cdot \frac{dx}{x}.$$

Тепер можна інтегрувати кожену частину рівняння за відповідною змінною:

$$\int e^{-2t} \cdot dt = \int 5 \cdot \frac{dx}{x},$$

$$\int e^{-2t} \cdot dt = 5 \int \frac{dx}{x}$$

## § 2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

$$\frac{e^{-2t}}{-2} + C = 5 \ln|x|$$

$$C = 5 \ln|x| + \frac{1}{2} e^{-2t}.$$

Підставляємо заміну  $t = \frac{y}{x}$ :

$$C = 5 \ln|x| + \frac{1}{2} e^{-2\frac{y}{x}}.$$

Ми отримали загальний інтеграл розв'язку, оскільки змінна  $y$  не виражається явно.

*Відповідь.*  $C = 5 \ln|x| + \frac{1}{2} e^{-2\frac{y}{x}}$ .

*Зауважимо, що цей самий приклад можна було розв'язати за допомогою різних онлайн калькуляторів, типу MatCabi. Без реєстрації ви отримаєте лише відповідь, але, після реєстрації, вам буде доступне покрокове розв'язування приклада. Відповідь, що була отримана за допомогою комп'ютерних програм, може мати інший зовнішній вигляд, ніж відповідь, що була отримана вручну, оскільки може використовувати функції, записані у вигляді  $\tan f$ ,  $\exp(h)$  або  $\log(p)$ .*

**Приклад 2.4.** Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y' = \frac{y + 2x}{x - 3y}.$$

*Розв'язування.* ОДЗ:  $x - 3y \neq 0$ . Дане рівняння є однорідним, оскільки права частина даного рівняння є функцією нульового степеня однорідності (чисельник – першого степеня однорідності та знаменник – теж першого степеня однорідності):

$$f(tx, ty) = \frac{ty + 2tx}{tx - 3ty} = \frac{t(y + 2x)}{t(x - 3y)} = t^0 \cdot \frac{y + 2x}{x - 3y} = t^0 \cdot f(x, y).$$

## § 2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

Спочатку поділимо чисельник та знаменник правої частини на змінну  $x \neq 0$ :

$$y' = \frac{\frac{y}{x} + \frac{2x}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{3y}{x}} \quad \text{або} \quad y' = \frac{\frac{y}{x} + 2}{1 - 3 \cdot \frac{y}{x}}.$$

Тепер виконаємо заміну  $\frac{y}{x} = t$ . Тоді, маємо  $y = tx$ ,  $y' = t'x + t$ .

Підставити все в рівняння, отримаємо:

$$t'x + t = \frac{t + 2}{1 - 3t}$$

Або, після скорочення:

$$t'x = \frac{t + 2}{1 - 3t} - t \quad \Rightarrow \quad t'x = \frac{t + 2 - t + 3t^2}{1 - 3t}.$$

Це вже диференціальне рівняння з відокремленими змінними. Представимо похідну у вигляді відношення диференціалів:

$$\frac{dt}{dx} \cdot x = \frac{2 + 3t^2}{1 - 3t}.$$

«Підніmemo» диференціал  $dx$  (домножимо обидві частини рівняння на нього):

$$x \cdot dt = \frac{2 + 3t^2}{1 - 3t} \cdot dx.$$

Тепер розділимо змінні ( $t$  до  $dt$ ,  $x$  до  $dx$ ):

$$\frac{dt}{\frac{2 + 3t^2}{1 - 3t}} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{1 - 3t}{2 + 3t^2} \cdot dt = \frac{dx}{x}.$$

Тепер можна інтегрувати кожну частину рівняння за відповідною змінною:

## § 2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

$$\int \frac{1-3t}{2+3t^2} \cdot dt = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \int \frac{1}{\frac{2}{3}+t^2} \cdot dt - 3 \int \frac{t}{2+3t^2} \cdot dt = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \int \frac{1}{\frac{2}{3}+t^2} \cdot dt - \frac{3}{6} \int \frac{d(2+3t^2)}{2+3t^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}} \operatorname{arctg} \left( \frac{t}{\sqrt{\frac{2}{3}}} \right) - \frac{1}{2} \ln|2+3t^2| + C = \ln|x|$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \left( \frac{t\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{2} \ln|2+3t^2| + C = \ln|x|$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \left( \frac{y\sqrt{3}}{x\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{2} \ln \left| 2 + 3 \left( \frac{y}{x} \right)^2 \right| + C = \ln|x|.$$

Ми отримали загальний інтеграл розв'язку, оскільки змінна  $y$  не виражається явно.

*Відповідь.*  $\frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \left( \frac{y\sqrt{3}}{x\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{2} \ln \left| 2 + 3 \left( \frac{y}{x} \right)^2 \right| + C = \ln|x|.$

**Приклад 2.5.** Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y' = \frac{y^2 + 2xy}{-x^2 + y^2 - xy}.$$

*Розв'язування.* ОДЗ:  $-x^2 + y^2 - xy \neq 0$ . Дане рівняння є однорідним, оскільки права частина даного рівняння є функцією нульового степеня однорідності (чисельник – другого степеня однорідності та знаменник – теж другого степеня однорідності):

$$f(tx, ty) = \frac{t^2 y^2 + 2 \cdot tx \cdot ty}{-t^2 x^2 + t^2 y^2 - tx \cdot ty} = \frac{t^2 (y^2 + 2xy)}{t^2 (-x^2 + y^2 - xy)} = t^0 \cdot \frac{y^2 + 2xy}{-x^2 + y^2 - xy}$$

## § 2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

$$f(tx, ty) = t^0 \cdot f(x, y) = f(x, y).$$

Спочатку поділимо чисельник та знаменник правої частини на змінну  $x^2 \neq 0$ :

$$y' = \frac{\frac{y^2}{x^2} + \frac{2xy}{x^2}}{-\frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2} - \frac{xy}{x^2}} \quad \text{або} \quad y' = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x}}{-1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x}}.$$

Тепер виконаємо заміну  $\frac{y}{x} = t$ . Тоді, маємо  $y = tx$ ,  $y' = t'x + t$ .

Якщо підставити все у рівняння, отримаємо:

$$t'x + t = \frac{t^2 + 2t}{-1 + t^2 - t}.$$

Або, після скорочення:

$$\begin{aligned} t'x &= \frac{t^2 + 2t}{t^2 - t - 1} - t & \Rightarrow & \quad t'x = \frac{t^2 + 2t - t^3 + t^2 + t}{t^2 - t - 1} & \Rightarrow \\ & & \Rightarrow & \quad t'x = \frac{-t^3 + 2t^2 + 3t}{t^2 - t - 1}. \end{aligned}$$

Це – диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Представимо похідну у вигляді відношення диференціалів:

$$\frac{dt}{dx} \cdot x = \frac{-t^3 + 2t^2 + 3t}{t^2 - t - 1}.$$

«Підніmemo» диференціал  $dx$  (домножимо обидві частини рівняння на нього):

$$x \cdot dt = \frac{-t^3 + 2t^2 + 3t}{t^2 - t - 1} \cdot dx.$$

Тепер розділимо змінні ( $t$  до  $dt$ ,  $x$  до  $dx$ ), вважаючи, що

$$-t^3 + 2t^2 + 3t \neq 0:$$

## § 2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

$$\frac{dt}{\frac{-t^3 + 2t^2 + 3t}{t^2 - t - 1}} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{t^2 - t - 1}{-t^3 + 2t^2 + 3t} \cdot dt = \frac{dx}{x}.$$

Тепер можна інтегрувати кожну частину рівняння за відповідною змінною:

$$\int \frac{t^2 - t - 1}{-t^3 + 2t^2 + 3t} \cdot dt = \int \frac{dx}{x}.$$

Зліва треба інтегрувати правильний дріб. Ми знаємо, що кожний правильний дріб розкладається на суму елементарних дробів. Проведемо розкладення методом невизначених коефіцієнтів. Маємо:

$$\begin{aligned} \frac{t^2 - t - 1}{-t^3 + 2t^2 + 3t} &= -\left(\frac{t^2 - t - 1}{t^3 - 2t^2 - 3t}\right) = -\left(\frac{t^2 - t - 1}{t(t^2 - 2t - 3)}\right) = \\ &= -\left(\frac{t^2 - t - 1}{t(t-3)(t+1)}\right) = \\ &= -\left(\frac{A}{t} + \frac{B}{t-3} + \frac{C}{t+1}\right) = -\left(\frac{A(t-3)(t+1) + Bt(t+1) + Ct(t-3)}{t(t-3)(t+1)}\right). \end{aligned}$$

Знаменники дробів є однаковими, тому чисельники повинні бути рівними:

$$t^2 - t - 1 = -(A(t-3)(t+1) + Bt(t+1) + Ct(t-3)).$$

Для знаходження коефіцієнтів, будемо надавати змінній різні значення:

$$t = 0: \quad -1 = -(-3A + 0B + 0C) \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{3}$$

$$t = 3: \quad 9 - 3 - 1 = -(-0A + 12B + 0C) \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{5}{12}$$

$$t = -1: \quad 1 + 1 - 1 = -(-0A + 0B + 4C) \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{1}{4}$$

Підставимо отримані значення:

$$\frac{t^2 - t - 1}{-t^3 + 2t^2 + 3t} = -\left(\frac{A}{t} + \frac{B}{t-3} + \frac{C}{t+1}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{t} + \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{t-3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{t+1}.$$

## § 2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

Підставимо ці дробі та проведемо інтегрування:

$$\frac{1}{3} \cdot \int \frac{1}{t} \cdot dt + \frac{5}{12} \cdot \int \frac{1}{t-3} \cdot dt + \frac{1}{4} \cdot \int \frac{1}{t+1} \cdot dt = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \ln|t| + \frac{5}{12} \cdot \ln|t-3| + \frac{1}{4} \cdot \ln|t+1| = \ln|x| + \ln|C|.$$

Проводимо заміну змінної  $t = \frac{y}{x}$ :

$$\frac{1}{3} \cdot \ln\left|\frac{y}{x}\right| + \frac{5}{12} \cdot \ln\left|\frac{y}{x} - 3\right| + \frac{1}{4} \cdot \ln\left|\frac{y}{x} + 1\right| = \ln|x| + \ln|C|$$

Ми отримали загальний інтеграл розв'язку, оскільки змінна  $y$  не виражається явно.

*Відповідь.*  $\frac{1}{3} \cdot \ln\left|\frac{y}{x}\right| + \frac{5}{12} \cdot \ln\left|\frac{y}{x} - 3\right| + \frac{1}{4} \cdot \ln\left|\frac{y}{x} + 1\right| = \ln|x| + \ln|C|.$

**Приклад 2.6.** Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння

$$(xy' - y) \operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right) = x, \quad \text{при умові } y(1) = 0.$$

*Розв'язування.* ОДЗ:  $x \neq 0$ . Спочатку знайдемо загальний розв'язок даного диференціального рівняння. Поділимо дане рівняння на  $x$ :

$$\left(y' - \frac{y}{x}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right) = 1.$$

Дане рівняння є однорідним. Виконаємо заміну  $\frac{y}{x} = t$ . Тоді, отримаємо  $y = tx$ ,  $y' = t'x + t$ .

Підставимо все в рівняння, отримаємо:

$$(t'x + t - t) \operatorname{tg} t = 1.$$

Або, після скорочення:

$$t'x \cdot \operatorname{tg} t = 1.$$

## § 2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

Це вже диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Представимо похідну у вигляді відношення диференціалів:

$$\frac{dt}{dx} \cdot x \cdot \operatorname{tg} t = 1.$$

«Підніmemo» диференціал  $dx$  (домножимо обидві частини рівняння на нього):

$$x \cdot dt \cdot \operatorname{tg} t = 1 \cdot dx.$$

Тепер розділимо змінні ( $t$  до  $dt$ ,  $x$  до  $dx$ ):

$$\frac{dt \cdot \sin t}{\cos t} = \frac{dx}{x}.$$

Тепер можна інтегрувати кожну частину рівняння за відповідною змінною:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin t}{\cos t} \cdot dt &= \int \frac{dx}{x} \\ - \int \frac{d(\cos t)}{\cos t} &= \int \frac{dx}{x} \\ - \ln |\cos t| &= \ln |x| + C \\ - \ln \left| \cos \left( \frac{y}{x} \right) \right| &= \ln |x| + C. \end{aligned}$$

Ми отримали загальний інтеграл розв'язку. Для знаходження змінної  $C$  використаємо додаткову умову  $y(1) = 0$ :

$$\begin{aligned} - \ln |\cos 0| &= \ln 1 + C \\ - \ln 1 = \ln 1 + C &\Rightarrow C = 0 \Rightarrow - \ln \left| \cos \left( \frac{y}{x} \right) \right| = \ln |x|. \end{aligned}$$

Ми отримали частинний розв'язок диференціального рівняння при умові  $y(1) = 0$ , тобто розв'язали задачу Коші.

*Відповідь.*  $- \ln \left| \cos \left( \frac{y}{x} \right) \right| = \ln |x|.$

## § 2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

**Приклад 2.7.** Зінтегрувати диференціальне рівняння

$$(x - y)dx = (x + y)dy.$$

*Розв'язування.* Дане рівняння є однорідним, оскільки права та ліва частина даного рівняння є функціями першого степеня однорідності. Зауважимо, що при  $x + y \neq 0$  це диференціальне рівняння можна переписати, як  $y' = \frac{x-y}{x+y}$ .

Спочатку поділимо чисельник та знаменник правої частини на змінну  $x \neq 0$ :

$$y' = \frac{\frac{x}{x} - \frac{y}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{y}{x}} \quad \text{або} \quad y' = \frac{1 - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x}}.$$

Тепер виконаємо заміну  $\frac{y}{x} = t$ . Тоді, маємо  $y = tx$ ,  $y' = t'x + t$ .

Підставити все в рівняння, отримаємо:

$$t'x + t = \frac{1 - t}{1 + t}$$

Або, після скорочення:

$$t'x = \frac{1 - t}{1 + t} - t \Rightarrow t'x = \frac{1 - t - t - t^2}{1 + t} \Rightarrow t'x = \frac{1 - 2t - t^2}{1 + t}.$$

Це – диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Представимо похідну у вигляді відношення диференціалів:

$$\frac{dt}{dx} \cdot x = \frac{1 - 2t - t^2}{1 + t}.$$

«Підніmemo» диференціал  $dx$  (домножимо обидві частини рівняння на нього):

$$x \cdot dt = \frac{1 - 2t - t^2}{1 + t} \cdot dx.$$

## § 2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

Тепер розділимо змінні ( $t$  до  $dt$ ,  $x$  до  $dx$ ):

$$\frac{dt}{\frac{1-2t-t^2}{1+t}} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{1+t}{t^2+2t-1} \cdot dt = -\frac{dx}{x}.$$

Тепер можна інтегрувати кожен частину рівняння за відповідною змінною:

$$\int \frac{1+t}{t^2+2t-1} \cdot dt = -\int \frac{dx}{x}, \quad (t^2+2t-1)' = 2t+2$$

$$\frac{1}{2} \cdot \int \frac{d(t^2+2t-1)}{t^2+2t-1} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \ln|t^2+2t-1| = \ln|C| - \ln|x|$$

$$\ln|t^2+2t-1| = 2(\ln|C| - \ln|x|)$$

$$\ln|t^2+2t-1| = \ln\left|\frac{C^2}{x^2}\right|$$

$$t^2+2t-1 = \frac{C^2}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{x}\right) - 1 = \frac{C^2}{x^2}.$$

Ми отримали загальний інтеграл розв'язку, оскільки змінна  $y$  не виражається явно.

*Відповідь.*  $\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{x}\right) - 1 = \frac{C^2}{x^2}.$

**Приклад 2.8.** Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння

$$x dy - x dx = y dy, \quad \text{при умові } y(1) = 1.$$

*Розв'язування.* Спочатку знайдемо загальний розв'язок даного диференціального рівняння:

## § 2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

$$x dy - y dy = x dx \quad \Rightarrow \quad (x - y) dy = x dx, \quad (x - y) \neq 0.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x - y}.$$

Поділимо дане рівняння на  $x \neq 0$ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x}{x} - \frac{y}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{y}{x}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - \frac{y}{x}}.$$

Дане рівняння є однорідним. Виконаємо заміну  $\frac{y}{x} = t$ ,  $y = tx$ ,  $y' = t'x + t$ .

Підставимо все у рівняння, отримаємо:

$$t'x + t = \frac{1}{1 - t} \quad \Rightarrow \quad t'x = \frac{1}{1 - t} - t \quad \Rightarrow \quad t'x = \frac{1 - t + t^2}{1 - t}.$$

Це – диференціальне рівняння з відокремленими змінними. Представимо похідну у вигляді відношення диференціалів:

$$\frac{dt}{dx} \cdot x = \frac{t^2 - t + 1}{1 - t}.$$

Підніmemo диференціал  $dx$  (домножимо обидві частини рівняння на нього):

$$x \cdot dt = \frac{t^2 - t + 1}{1 - t} \cdot dx.$$

Тепер розділимо змінні ( $t$  до  $dt$ ,  $x$  до  $dx$ ):

$$\frac{(1 - t) \cdot dt}{t^2 - t + 1} = \frac{dx}{x}.$$

Тепер можна інтегрувати кожену частину рівняння за відповідною змінною:

§ 2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

$$\int \frac{1-t}{t^2-t+1} \cdot dt = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{2} \int \frac{2t-1-1}{t^2-t+1} dt = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{2} \int \frac{d(t^2-t+1)}{t^2-t+1} + \frac{1}{2} \int \frac{1dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \ln|t^2-t+1| + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{t-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \right) = \ln|x| + C$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \ln|t^2-t+1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right) = \ln|x| + C$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \ln \left| \left( \frac{y}{x} \right)^2 - \frac{y}{x} + 1 \right| + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{2\frac{y}{x}-1}{\sqrt{3}} \right) = \ln|x| + C.$$

Ми отримали загальний інтеграл розв'язку. Для знаходження змінної  $C$  використаємо додаткову умову  $y(1) = 1$ :

$$-\frac{1}{2} \cdot \ln|(1)^2 - 1 + 1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{2 \cdot 1 - 1}{\sqrt{3}} \right) = \ln|1| + C$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \ln 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6} = 0 + C \Rightarrow C = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \ln \left| \left( \frac{y}{x} \right)^2 - \frac{y}{x} + 1 \right| + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{2\frac{y}{x}-1}{\sqrt{3}} \right) = \ln|x| + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

*Відповідь.*  $\frac{1}{2} \cdot \ln \left| \left( \frac{y}{x} \right)^2 - \frac{y}{x} + 1 \right| + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{2\frac{y}{x}-1}{\sqrt{3}} \right) = \ln|x| + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$

## § 2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

**Приклад 2.9.** Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{3y}{x} - 3, \quad \text{при умові } y(1) = 2.$$

*Розв'язування.* ОДЗ:  $x \neq 0$ . Спочатку знайдемо загальний розв'язок даного диференціального рівняння. Дане рівняння є однорідним. Виконаємо заміну  $\frac{y}{x} = t$ . Тепер маємо  $y = tx$ ,  $y' = t'x + t$ .

Підставимо все у рівняння, отримаємо:

$$t'x + t = t^2 + 3t - 3$$

Або, після скорочення:

$$t'x = t^2 + 2t - 3.$$

Це вже диференціальне рівняння з відокремленими змінними. Представимо похідну у вигляді відношення диференціалів:

$$\frac{dt}{dx} \cdot x = t^2 + 2t - 3.$$

«Підніmemo» диференціал  $dx$  (домножимо обидві частини рівняння на нього):

$$x \cdot dt = (t^2 + 2t - 3) \cdot dx.$$

Тепер розділимо змінні ( $t$  до  $dt$ ,  $x$  до  $dx$ ) при умові  $t^2 + 2t - 3 \neq 0$ :

$$\frac{dt}{t^2 + 2t - 3} = \frac{dx}{x}.$$

Тепер можна інтегрувати кожну частину рівняння за відповідною змінною:

$$\int \frac{1}{t^2 + 2t - 3} \cdot dt = \int \frac{dx}{x},$$

## § 2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

$$\int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2 - 4} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2 \cdot 2} \ln \left| \frac{t+1-2}{t+1+2} \right| = \ln |x| + \ln |C|$$

$$\ln \left| \frac{t-1}{t+3} \right| = 4 \ln \left| \frac{x}{C} \right|$$

$$\ln \left| \frac{\frac{y}{x} - 1}{\frac{y}{x} + 3} \right| = \ln \left| \frac{x^4}{C^4} \right|$$

$$\frac{y-x}{y+3x} = \frac{x^4}{C^4}$$

Ми отримали загальний інтеграл розв'язку. Для знаходження змінної  $C$  використаємо додаткову умову  $y(1) = 2$ :

$$\frac{2-1}{2+3} = \frac{1^4}{C^4}$$

$$C^4 = 5$$

$$\frac{y-x}{y+3x} = \frac{x^4}{5}$$

$$\frac{y-x}{y+3x} = \frac{x^4}{5}$$

*Відповідь.*  $\frac{y-x}{y+3x} = \frac{x^4}{5}$ .

## § 2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

**Приклад 2.10.** Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{4x^2}.$$

*Розв'язування.* ОДЗ:  $x \neq 0$ . Дане рівняння є однорідним, оскільки права частина даного рівняння є функцією нульового степеня однорідності (чисельник – другого степеня однорідності та знаменник – теж другого степеня однорідності):

$$f(tx, ty) = \frac{t^2x^2 + t^2y^2}{4t^2x^2} = \frac{t^2(x^2 + y^2)}{4t^2x^2} = t^0 \cdot \frac{x^2 + y^2}{4x^2} = f(x, y).$$

Спочатку поділимо чисельник та знаменник правої частини на змінну  $x^2 \neq 0$ :

$$y' = \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2}}{4 \frac{x^2}{x^2}} \quad \text{або} \quad y' = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{4}.$$

Тепер виконаємо заміну  $\frac{y}{x} = t$ . Тоді, маємо  $y = tx$ ,  $y' = t'x + t$ .

Підставимо все у рівняння, отримаємо:

$$t'x + t = \frac{1 + t^2}{4}$$

Або, після скорочення:

$$t'x = \frac{1 + t^2}{4} - t \quad \Rightarrow \quad t'x = \frac{1 + t^2 - 4t}{4}.$$

Це – диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Представимо похідну у вигляді відношення диференціалів:

$$\frac{dt}{dx} \cdot x = \frac{t^2 - 4t + 1}{4}.$$

«Підніmemo» диференціал  $dx$  (домножимо обидві частини рівняння на нього):

## § 2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

$$x \cdot dt = \frac{t^2 - 4t + 1}{4} \cdot dx.$$

Тепер розділимо змінні ( $t$  до  $dt$ ,  $x$  до  $dx$ ),  $t^2 - 4t + 1 \neq 0$ :

$$\frac{dt}{\frac{t^2 - 4t + 1}{4}} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{t^2 - 4t + 1} \cdot dt = \frac{dx}{x}.$$

Тепер можна інтегрувати кожен частину рівняння за відповідною змінною:

$$\int \frac{4}{t^2 - 4t + 1} \cdot dt = \int \frac{dx}{x}.$$

Зліва у знаменнику знаходиться квадратичний тричлен. Ми будемо виділяти повний квадрат.

$$4 \cdot \int \frac{dt}{(t-2)^2 - 4 + 1} = \int \frac{dx}{x}$$

$$4 \cdot \int \frac{d(t-2)}{(t-2)^2 - 3} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{4}{2\sqrt{3}} \cdot \ln \left| \frac{t-2-\sqrt{3}}{t-2+\sqrt{3}} \right| = \ln|x| + \ln|C|.$$

Проводимо заміну змінної:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \ln \left| \frac{\frac{y}{x} - 2 - \sqrt{3}}{\frac{y}{x} - 2 + \sqrt{3}} \right| = \ln|Cx| \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \ln \left| \frac{y - 2x - x\sqrt{3}}{y - 2x + x\sqrt{3}} \right| = \ln|Cx|.$$

Ми отримали загальний інтеграл розв'язку, оскільки змінна  $y$  не виражається явно.

*Відповідь.*  $\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \ln \left| \frac{y-2x-x\sqrt{3}}{y-2x+x\sqrt{3}} \right| = \ln|Cx|.$

## § 2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

### Рівняння, що зводяться до однорідних

#### Розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку, що зводяться до однорідних

Розглянемо диференціальне рівняння  $y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$ . Якщо одночасно  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 0$ , то рівняння є однорідним. Якщо хоча б один з коефіцієнтів  $c_1$  або  $c_2$  відмінний від нуля, то рівняння можна звести до однорідного заміною  $x = X + m$ ,  $y = Y + n$ , де  $m, n$  – стали числа. Знаходимо диференціали:  $\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$ . В результаті підстановки ми отримаємо:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \Rightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{a_1(X + m) + b_1(Y + n) + c_1}{a_2(X + m) + b_2(Y + n) + c_2}$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{a_1X + b_1Y + (a_1m + b_1n + c_1)}{a_2X + b_2Y + (a_2m + b_2n + c_2)}$$

Підбираємо значення  $m, n$  так, щоб рівняння було лінійним, тобто

$$\begin{cases} a_1m + b_1n + c_1 = 0, \\ a_2m + b_2n + c_2 = 0. \end{cases}$$

1) Система має єдиний розв'язок, при умові  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ .

Тоді ми отримаємо однорідне диференціальне рівняння:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}$$

2) Система має безліч розв'язків, при умові  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ .

Тоді  $a_2 = ka_1$ ,  $b_2 = kb_1$ . Якщо при цьому виконується пропорційність  $c_2 = kc_1$ , то рівняння буде тривіальним  $y' = \frac{1}{k}$ . Воно має розв'язок

$$y = \frac{1}{k} \cdot x + C.$$

## § 2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

3) Якщо при  $a_2 = ka_1$ ,  $b_2 = kb_1$  маємо  $c_2 \neq kc_1$ , то система не має розв'язків. При цьому рівняння  $\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$  набуває вигляду:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{k(a_1x + b_1y) + c_2}.$$

При  $b_1 = 0$  отримаємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними.

При  $b_1 \neq 0$  після введення заміни  $u = a_1x + b_1y$  отримаємо  $u' = a_1 + b_1y'$ , тоді  $y' = \frac{u' - a_1}{b_1}$ . Диференціальне рівняння набуває вигляду:

$$\frac{u' - a_1}{b_1} = \frac{u + c_1}{k \cdot u + c_2},$$

тобто диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними.

**Приклад 2.11.** Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y' = \frac{y + 2x + 3}{x - 2y - 1}.$$

*Розв'язування.* Дане рівняння зводиться до однорідного, якщо виконаємо

заміни:  $\begin{cases} x = X + m, \\ y = Y + n. \end{cases}$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{(Y + n) + 2(X + m) + 3}{(X + m) - 2(Y + n) - 1} \Rightarrow Y' = \frac{Y + 2X + (n + 2m + 3)}{X - 2Y + (m - 2n - 1)}$$

$$\begin{cases} n + 2m + 3 = 0 \\ m - 2n - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -1, \\ n = -1 \end{cases}$$

$$Y' = \frac{Y + 2X}{X - 2Y}.$$

оскільки права частина даного рівняння є функцією нульового степеня однорідності (чисельник – першого степеня однорідності та знаменник – теж першого степеня однорідності):

## § 2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

$$f(tX, tY) = \frac{tY + 2tX}{tX - 2tY} = \frac{t(Y + 2X)}{t(X - 2Y)} = t^0 \cdot \frac{Y + 2X}{X - 2Y} = t^0 \cdot f(x, y).$$

Спочатку поділимо чисельник та знаменник правої частини на змінну  $X$ :

$$Y' = \frac{\frac{Y}{X} + \frac{2X}{X}}{\frac{X}{X} - \frac{2Y}{X}} \quad \text{або} \quad Y' = \frac{\frac{Y}{X} + 2}{1 - 2 \cdot \frac{Y}{X}}.$$

Тепер виконаємо заміну  $\frac{Y}{X} = t$ . Тоді, маємо  $Y = tX$ ,  $Y' = t'X + t$ .

Підставити все в рівняння, отримаємо:

$$t'X + t = \frac{t + 2}{1 - 2t}.$$

Або, після скорочення:

$$t'X = \frac{t + 2}{1 - 2t} - t \Rightarrow t'X = \frac{t + 2 - t + 2t^2}{1 - 2t} \Rightarrow t'X = \frac{2 + 2t^2}{1 - 2t}.$$

Це вже диференціальне рівняння з відокремленими змінними. Представимо похідну у вигляді відношення диференціалів:

$$\frac{dt}{dX} \cdot X = \frac{2 + 2t^2}{1 - 2t}.$$

«Підніmemo» диференціал  $dX$  (домножимо обидві частини рівняння на нього):

$$X \cdot dt = \frac{2 + 2t^2}{1 - 2t} \cdot dX.$$

Тепер розділимо змінні ( $t$  до  $dt$ ,  $X$  до  $dX$ ):

$$\frac{dt}{\frac{2 + 2t^2}{1 - 2t}} = \frac{dX}{X} \Rightarrow \frac{1 - 2t}{2 + 2t^2} \cdot dt = \frac{dX}{X}.$$

## § 2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

Тепер можна інтегрувати кожен частину рівняння за відповідною змінною:

$$\int \frac{1-2t}{2+2t^2} \cdot dt = \int \frac{dX}{X}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{1+t^2} \cdot dt - \frac{1}{2} \int \frac{2t}{1+t^2} \cdot dt = \int \frac{dX}{X}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \int \frac{dt}{1+t^2} - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+t^2)}{1+t^2} = \int \frac{dX}{X}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg}(t) - \frac{1}{2} \ln|1+t^2| + C = \ln|X|$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{Y}{X}\right) - \frac{1}{2} \ln \left| 1 + \left(\frac{Y}{X}\right)^2 \right| + C = \ln|X|.$$

Ми отримали загальний інтеграл розв'язку, оскільки змінна  $Y$  не виражається явно.  $\begin{cases} x = X + m, \\ y = Y + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = X - 1, \\ y = Y - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = x + 1, \\ Y = y + 1 \end{cases}$

$$\frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{y+1}{x+1}\right) - \frac{1}{2} \ln \left| 1 + \left(\frac{y+1}{x+1}\right)^2 \right| + C = \ln|x+1|.$$

*Відповідь.*  $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{y+1}{x+1}\right) - \frac{1}{2} \ln \left| 1 + \left(\frac{y+1}{x+1}\right)^2 \right| + C = \ln|x+1|.$

**Приклад 2.12.** Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y' = \frac{2x + y + 5}{x + y + 1}.$$

*Розв'язування.* Дане рівняння зводиться до однорідного. Виконаємо заміну:

$$\begin{cases} x = X + m, \\ y = Y + n. \end{cases}$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{2(X+m) + (Y+n) + 5}{(X+m) + (Y+n) + 1} \Rightarrow Y' = \frac{2X + Y + (2m+n+5)}{X + Y + (m+n+1)}$$

$$Y' = \frac{2X + Y}{X + Y}, \quad \begin{cases} 2m + n + 5 = 0, \\ m + n + 1 = 0. \end{cases}$$

## § 2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

Права частина даного рівняння є функцією нульового степеня однорідності (чисельник – першого степеня однорідності та знаменник – теж першого степеня однорідності):

$$f(tX, tY) = \frac{2xt + tX}{tX + tY} = \frac{t(2X + Y)}{t(X + Y)} = t^0 \cdot \frac{2X + Y}{X + Y} = t^0 \cdot f(x, y).$$

Спочатку поділимо чисельник та знаменник правої частини на змінну  $X$ :

$$Y' = \frac{\frac{2X}{X} + \frac{Y}{X}}{\frac{X}{X} + \frac{Y}{X}} \quad \text{або} \quad Y' = \frac{2 + \frac{Y}{X}}{1 + \frac{Y}{X}}.$$

Тепер виконаємо заміну  $\frac{Y}{X} = t$ . Тоді, маємо  $Y = tX$ ,  $Y' = t'X + t$ .

Підставити все в рівняння, отримаємо:

$$t'X + t = \frac{2 + t}{1 + t}.$$

Або, після спрощення:

$$t'X = \frac{2 + t}{1 + t} - t \Rightarrow t'X = \frac{2 + t - t - t^2}{1 + t} \Rightarrow t'X = \frac{2 - t^2}{1 + t}.$$

Це – диференціальне рівняння з відокремленими змінними. Представимо похідну у вигляді відношення диференціалів:

$$\frac{dt}{dX} \cdot X = \frac{2 - t^2}{1 + t}.$$

«Підніmemo» диференціал  $dX$  (домножимо обидві частини рівняння на нього):

$$X \cdot dt = \frac{2 - t^2}{1 + t} \cdot dX.$$

Тепер розділимо змінні ( $t$  до  $dt$ ,  $X$  до  $dX$ ) при умові  $2 - t^2 \neq 0$ :

## § 2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

$$\frac{dt}{\frac{2-t^2}{1+t}} = \frac{dX}{X} \quad \Rightarrow \quad \frac{1+t}{2-t^2} \cdot dt = \frac{dX}{X}.$$

Тепер можна інтегрувати кожен частину рівняння за відповідною змінною:

$$\begin{aligned} \int \frac{1+t}{2-t^2} \cdot dt &= \int \frac{dX}{X} \\ - \int \frac{1}{t^2-2} \cdot dt - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2t}{t^2-2} \cdot dt &= \int \frac{dX}{X} \\ - \int \frac{dt}{t^2-2} - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{d(t^2-2)}{t^2-2} &= \int \frac{dX}{X} \\ - \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \ln \left| \frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}} \right| - \frac{1}{2} \cdot \ln |t^2-2| &= \ln |X| + \ln |C| \\ - \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \ln \left| \frac{\frac{Y}{X}-\sqrt{2}}{\frac{Y}{X}+\sqrt{2}} \right| - \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \left( \frac{Y}{X} \right)^2 - 2 \right| &= \ln |X| + \ln |C| \\ - \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \ln \left| \frac{Y-X\sqrt{2}}{Y+X\sqrt{2}} \right| - \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \left( \frac{Y}{X} \right)^2 - 2 \right| &= \ln |X| + \ln |C|. \end{aligned}$$

Ми отримали загальний інтеграл розв'язку, оскільки змінна  $Y$  не виражається явно.

$$\begin{cases} 2m+n+5=0, \\ m+n+1=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m=-4 \\ n=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=X+m, \\ y=Y+n \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=X-4, \\ y=Y+3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X=x+4, \\ Y=y-3 \end{cases}$$

$$- \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \ln \left| \frac{(y-3)-(x+4)\sqrt{2}}{(y-3)+(x+4)\sqrt{2}} \right| - \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \left( \frac{y-3}{x+4} \right)^2 - 2 \right| = \ln |x+4| + \ln |C|.$$

*Відповідь.* 
$$- \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \ln \left| \frac{(y-3)-(x+4)\sqrt{2}}{(y-3)+(x+4)\sqrt{2}} \right| - \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \left( \frac{y-3}{x+4} \right)^2 - 2 \right| = \ln |x+4| + \ln |C|.$$

## § 2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

**Приклад 2.13.** Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y' = \frac{x + 2y + 1}{2x + y - 1}.$$

*Розв'язування.* Оскільки  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ , то дане рівняння зводиться до

однорідного, якщо виконаємо заміну:  $\begin{cases} x = X + m, \\ y = Y + n. \end{cases}$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{(X + m) + 2(Y + n) + 1}{2(X + m) + (Y + n) - 1} \Rightarrow Y' = \frac{X + 2Y + (m + 2n + 1)}{2X + Y + (2m + n - 1)}$$

$$\begin{cases} m + 2n + 1 = 0 \\ 2m + n - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1, \\ n = -1 \end{cases}$$

$$Y' = \frac{X + 2Y}{2X + Y}.$$

Спочатку поділимо чисельник та знаменник правої частини на змінну  $X$ :

$$Y' = \frac{\frac{X}{X} + \frac{2Y}{X}}{2 \cdot \frac{X}{X} + \frac{Y}{X}} \quad \text{або} \quad Y' = \frac{1 + 2\frac{Y}{X}}{2 + \frac{Y}{X}}.$$

Тепер виконаємо заміну  $\frac{Y}{X} = t$ . Тоді, маємо  $Y = tX$ ,  $Y' = t'X + t$ .

Підставимо все в рівняння, отримаємо:

$$t'X + t = \frac{1 + 2t}{2 + t}.$$

Або, після скорочення:

$$t'X = \frac{1 + 2t}{2 + t} - t \Rightarrow t'X = \frac{1 + 2t - 2t - t^2}{2 + t} \Rightarrow t'X = \frac{1 - t^2}{2 + t}.$$

Це – диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Представимо похідну у вигляді відношення диференціалів:

## § 2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

$$\frac{dt}{dX} \cdot X = \frac{1 - t^2}{2 + t}.$$

Підніmemo диференціал  $dX$  (домножимо обидві частини рівняння на нього):

$$X \cdot dt = \frac{1 - t^2}{2 + t} \cdot dX.$$

При  $t^2 = 1$ , тобто при  $t = \pm 1$  маємо особливі розв'язки  $Y = \pm X$ . Тепер знайдемо загальні розв'язки ДР при  $t \neq \pm 1$ , тому розділимо змінні ( $t$  до  $dt$ ,  $X$  до  $dX$ ):

$$\frac{dt}{\frac{1 - t^2}{2 + t}} = \frac{dX}{X} \quad \Rightarrow \quad \frac{2 + t}{1 - t^2} \cdot dt = \frac{dX}{X}.$$

Тепер можна інтегрувати кожну частину рівняння за відповідною змінною:

$$\int \frac{2 + t}{1 - t^2} \cdot dt = \int \frac{dX}{X} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{2}{1 - t^2} + \int \frac{t}{1 - t^2} \cdot dt = \int \frac{dX}{X}$$

$$2 \cdot \int \frac{1}{1 - t^2} \cdot dt - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2t}{t^2 - 1} \cdot dt = \int \frac{dX}{X}$$

$$-2 \cdot \int \frac{dt}{t^2 - 1} - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{d(t^2 - 1)}{t^2 - 1} = \int \frac{dX}{X}$$

$$-2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{t - 1}{t + 1} \right| - \frac{1}{2} \cdot \ln |t^2 - 1| = \ln |X| + \ln |C|$$

$$\ln \left| \frac{t + 1}{t - 1} \right| - \ln \left| \sqrt{t^2 - 1} \right| = \ln |X| + \ln |C|$$

$$\ln \left| \frac{t + 1}{(t - 1)\sqrt{t^2 - 1}} \right| = \ln |XC|$$

$$\frac{t + 1}{(t - 1)\sqrt{t^2 - 1}} = CX \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{Y}{X} + 1}{\left(\frac{Y}{X} - 1\right)\sqrt{\left(\frac{Y}{X}\right)^2 - 1}} = CX$$

## § 2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

$$\frac{(Y + X)X}{(Y - X)\sqrt{Y^2 - X^2}} = CX \quad \Rightarrow \quad \frac{(Y + X)}{(Y - X)\sqrt{Y^2 - X^2}} = C.$$

Ми отримали загальний інтеграл розв'язку, оскільки змінна  $Y$  не виражається явно.  $\begin{cases} x = X + m, \\ y = Y + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = X + 1, \\ y = Y - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = x - 1, \\ Y = y + 1. \end{cases}$

$$\frac{(y + 1 + x - 1)}{(y + 1 - x + 1)\sqrt{(y + 1)^2 - (x - 1)^2}} = C$$

$$\frac{(y + x)}{(y - x + 2)\sqrt{(y + 1)^2 - (x - 1)^2}} = C.$$

Особливий розв'язок  $Y = X$  приводить до  $y + 1 = x - 1 \Rightarrow y = x - 2$ .

З  $Y = -X$  ми отримаємо  $y + 1 = -(x - 1) \Rightarrow y = -x$ .

*Відповідь.*  $\frac{(y+x)}{(y-x+2)\sqrt{(y+1)^2-(x-1)^2}} = C, \quad y = x - 2, \quad y = -x.$

**Приклад 2.14.** Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y' = \frac{x + y + 1}{2x + 2y - 1}.$$

*Розв'язування.* ОДЗ:  $2x + 2y - 1 \neq 0$ . Оскільки  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$ , тому зробимо заміну:

$$u = x + y + 1 \Rightarrow u' = 1 + y' \Rightarrow y' = u' - 1 \Rightarrow u' - 1 = \frac{u}{2u - 3}$$

$$u' = \frac{u}{2u - 3} + 1 \Rightarrow u' = \frac{u + 2u - 3}{2u - 3} \Rightarrow u' = \frac{3u - 3}{2u - 3}.$$

Це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Представимо похідну у вигляді відношення диференціалів:

$$\frac{du}{dx} = \frac{3u - 3}{2u - 3}.$$

Підніmemo диференціал  $dx$  (домножимо обидві частини рівняння на нього):

## § 2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

$$du = \frac{3u - 3}{2u - 3} dx.$$

При  $3u - 3 = 0$  маємо особливий розв'язок:

$$u = 1, u = x + y + 1 = 1 \Rightarrow x + y = 0.$$

Будемо шукати загальні розв'язки. Для цього розділимо змінні ( $u$  до  $du$ ):

$$\frac{dt}{\frac{3u - 3}{2u - 3}} = dx \Rightarrow \frac{2u - 3}{3u - 3} \cdot du = dx.$$

Тепер можна інтегрувати кожену частину рівняння за відповідною змінною:

$$\int \frac{2u - 3}{3u - 3} \cdot du = \int dx \Rightarrow \int \frac{2u - 2 - 1}{3(u - 1)} \cdot du = \int dx$$

$$\frac{1}{3} \cdot \int \left( \frac{2u - 2}{u - 1} - \frac{1}{u - 1} \right) \cdot du = \int dx$$

$$\frac{1}{3} \cdot \int 2du - \frac{1}{3} \cdot \int \frac{du}{u - 1} = \int dx$$

$$\frac{1}{3} \cdot 2u - \frac{1}{3} \ln|u - 1| = x + C$$

$$\frac{2u}{3} - \frac{1}{3} \ln|u - 1| = x + C.$$

Ми отримали загальний інтеграл розв'язку, оскільки змінна  $u$  не виражається явно.

$$\frac{2(x + y + 1)}{3} - \frac{1}{3} \ln|x + y + 1 - 1| = x + C.$$

*Відповідь.*  $\frac{2(x+y+1)}{3} - \frac{1}{3} \ln|x + y| = x + C, \quad x + y = 0.$

**Приклад 2.15.** Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y' = \frac{1 - 3x - 3y}{x + y - 1}.$$

*Розв'язування.* Оскільки  $\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 3 = 0$ , тому зробимо заміну:

$$u = x + y - 1 \Rightarrow u' = 1 + y' \Rightarrow y' = u' - 1 \Rightarrow u' - 1 = \frac{1 - 3(u + 1)}{u}$$

## § 2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

$$u' = \frac{-3u - 2}{u} + 1 \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{-3u - 2 + u}{u} \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{-2u - 2}{u}.$$

Це - диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Представимо похідну у вигляді відношення диференціалів:

$$\frac{du}{dx} = \frac{-2u - 2}{u}.$$

При  $-2u - 2 = 0$  маємо особливий розв'язок:

$$u = -1, \quad u = x + y - 1 = -1 \quad \Rightarrow \quad x + y = 0.$$

Тепер будемо шукати загальний розв'язок ДР.

Підніmemo диференціал  $dx$  (домножимо обидві частини рівняння на нього):

$$du = \frac{-2u - 2}{u} dx.$$

Тепер розділимо змінні ( $u$  до  $du$ ):

$$\frac{du}{\frac{-2u - 2}{u}} = dx \quad \Rightarrow \quad \frac{u}{-2(u + 1)} \cdot du = dx.$$

Тепер можна інтегрувати кожену частину рівняння за відповідною змінною:

$$\begin{aligned} \frac{-1}{2} \int \frac{u}{u + 1} \cdot du = \int dx & \Rightarrow \frac{-1}{2} \int \frac{u + 1 - 1}{u + 1} \cdot du = \int dx \\ \frac{-1}{2} \cdot \int \left( \frac{u + 1}{u + 1} - \frac{1}{u + 1} \right) \cdot du = \int dx & \\ -\frac{1}{2} \cdot \int du + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{du}{u + 1} = \int dx & \Rightarrow \frac{-u}{2} + \frac{1}{2} \ln|u + 1| = x + C. \end{aligned}$$

Ми отримали загальний інтеграл розв'язку, оскільки змінна  $u$  не виражається явно. Підставляємо  $u = x + y - 1$ :

$$\frac{-(x + y - 1)}{2} + \frac{1}{2} \ln|x + y - 1 + 1| = x + C.$$

*Відповідь.*  $\frac{-(x+y-1)}{2} + \frac{1}{2} \ln|x + y| = x + C, \quad x + y = 0.$

## § 2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

**Приклад 2.16.** Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y' = \frac{2(y+2)^2}{(x+y+3)^2}.$$

*Розв'язування.* ОДЗ:  $x + y + 3 \neq 0$ . Маємо особливий розв'язок:  $y + 2 = 0$ .

Тепер будемо шукати загальний розв'язок ДР. Спочатку зробимо заміну:

$$\begin{cases} y + 2 = Y, \\ x + 1 = X. \end{cases} \quad \text{Після цієї заміни ми отримаємо } Y' = \frac{2Y^2}{(X+Y)^2}. \quad \text{Дане рівняння є}$$

однорідним, оскільки права частина даного рівняння є функцією нульового степеня однорідності (чисельник та знаменник – другого степеня однорідності).

$$\text{При } X = 0 \text{ отримаємо: } Y' = \frac{2Y^2}{Y^2} = 2 \quad \Rightarrow \quad Y = 2 \cdot X + C$$

$$Y = 2 \cdot 0 + C \quad \Rightarrow \quad Y = C \quad \Rightarrow \quad 0 \neq \frac{2C^2}{(0+C)^2} = 2,$$

розв'язків немає.

Спочатку поділимо чисельник та знаменник правої частини на змінну  $X^2 \neq 0$ :

$$Y' = \frac{2 \frac{Y^2}{X^2}}{\left(\frac{X}{X} + \frac{Y}{X}\right)^2} \quad \text{або} \quad Y' = \frac{2 \left(\frac{Y}{X}\right)^2}{\left(1 + \frac{Y}{X}\right)^2}.$$

Тепер виконаємо заміну  $\frac{Y}{X} = t$ . Тоді, маємо  $Y = tX$ ,  $Y' = t'X + t$ .

Підставити все в рівняння, отримаємо:

$$t'X + t = \frac{2t^2}{(1+t)^2}.$$

Або, після спрощення:

$$t'X = \frac{2t^2}{(1+t)^2} - t \quad \Rightarrow \quad t'X = \frac{2t^2 - t - 2t^2 - t^3}{(1+t)^2} \quad \Rightarrow \quad t'X = \frac{-t - t^3}{(1+t)^2}.$$

Це – диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Представимо похідну у вигляді відношення диференціалів:

$$\frac{dt}{dX} \cdot X = \frac{-t - t^3}{(1+t)^2}.$$

## § 2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

Підніmemo диференціал  $dx$  (домножимо обидві частини рівняння на нього):

$$X \cdot dt = \frac{-t(1+t^2)}{(1+t)^2} \cdot dX.$$

При  $t = 0$  маємо особливий розв'язок:

$$Y = 0 \Rightarrow y + 2 = 0 \Rightarrow y = -2.$$

При  $t \neq 0$  розділимо змінні ( $t$  до  $dt$ ,  $X$  до  $dX$ ):

$$\frac{dt}{\frac{-t-t^3}{(1+t)^2}} = \frac{dX}{X} \Rightarrow -\frac{(1+t)^2}{t^3+t} \cdot dt = \frac{dX}{X}.$$

Тепер можна інтегрувати кожену частину рівняння за відповідною змінною:

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2+2t+1}{t(t^2+1)} \cdot dt &= -\int \frac{dX}{X} \\ \int \left( \frac{t^2+1}{t(t^2+1)} + \frac{2t}{t(t^2+1)} \right) \cdot dt &= -\int \frac{dX}{X} \\ \int \left( \frac{1}{t} + \frac{2}{t^2+1} \right) \cdot dt &= -\int \frac{dX}{X} \end{aligned}$$

$$\ln|t| + 2 \cdot \operatorname{arctg} t = -\ln|X| - \ln|C|$$

$$\ln|t| + \ln|X| + \ln|C| + 2 \cdot \operatorname{arctg} t = 0$$

$$\ln|CXt| + 2 \cdot \operatorname{arctg} t = 0.$$

Проводимо заміну змінної  $t = \frac{Y}{X}$ :

$$\ln \left| CX \cdot \frac{Y}{X} \right| + 2 \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{Y}{X} \right) = 0, \quad \text{де} \quad \begin{aligned} y + 2 &= Y \\ x + 1 &= X \end{aligned}$$

$$\ln|C(y+2)| + 2 \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{y+2}{x+1} \right) = 0.$$

Ми отримали загальний інтеграл розв'язку, оскільки змінна  $y$  не виражається явно.

*Відповідь.*  $\ln|C(y+2)| + 2 \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{y+2}{x+1} \right) = 0, \quad y = -2.$

## § 2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

**Приклад 2.17.** Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$2y' = \frac{x + 2y + 1}{6x + 12y + 5}.$$

*Розв'язування.* Оскільки  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$ , тому зробимо заміну

$$u = x + 2y + 1 \Rightarrow u' = 1 + 2y' \Rightarrow 2y' = u' - 1 \Rightarrow u' - 1 = \frac{u}{6u - 1}$$

$$u' = \frac{u}{6u - 1} + 1 \Rightarrow u' = \frac{u + 6u - 1}{6u - 1} \Rightarrow u' = \frac{7u - 1}{6u - 1}.$$

Це – диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Представимо похідну у вигляді відношення диференціалів:

$$\frac{du}{dx} = \frac{7u - 1}{6u - 1}.$$

Особливий розв'язок рівняння:  $7u - 1 = 0 \Rightarrow u = \frac{1}{7} \Rightarrow x + 2y + 1 = \frac{1}{7}$ .

При  $7u \neq 1$  «підніmemo» диференціал  $dx$  (домножимо обидві частини рівняння на нього):

$$du = \frac{7u - 1}{6u - 1} dx$$

Тепер розділимо змінні ( $u$  до  $du$ ):

$$\frac{du}{\frac{7u - 1}{6u - 1}} = dx \Rightarrow \frac{6u - 1}{7u - 1} \cdot du = dx.$$

Тепер можна інтегрувати кожену частину рівняння за відповідною змінною:

$$\int \frac{6u - 1}{7u - 1} \cdot du = \int dx$$

## § 2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

$$\frac{1}{7} \cdot \int \left( \frac{6u - 1}{u - \frac{1}{7}} \right) \cdot du = \int dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{7} \cdot \int \left( \frac{6 \left( u - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} \right) - 1}{u - \frac{1}{7}} \right) du = \int dx$$

$$\frac{1}{7} \cdot \int \left( \frac{6 \left( u - \frac{1}{7} \right) - \frac{1}{7}}{u - \frac{1}{7}} \right) du = \int dx$$

$$\frac{1}{7} \cdot \int \left( \frac{6 \left( u - \frac{1}{7} \right)}{u - \frac{1}{7}} \right) du - \frac{1}{49} \int \frac{du}{u - \frac{1}{7}} = \int dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{7} \cdot 6u - \frac{1}{49} \ln \left| u - \frac{1}{7} \right| = x + C.$$

Ми отримали загальний інтеграл розв'язку, оскільки змінна  $u$  не виражається явно.

$$\frac{6(x + 2y + 1)}{7} - \frac{1}{49} \ln \left| x + 2y + 1 - \frac{1}{7} \right| = x + C.$$

Відповідь.  $\frac{6(x+2y+1)}{7} - \frac{1}{49} \ln \left| x + 2y + \frac{6}{7} \right| = x + C, \quad x + 2y + 1 = \frac{1}{7}.$

**Приклад 2.18.** Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y' = \frac{1 - 2x - y}{6x + 3y - 3}.$$

Розв'язування. Оскільки  $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0$ , то зробимо заміну

$$u = 1 - 2x - y \quad \Rightarrow \quad u' = -2 - y' \quad \Rightarrow \quad y' = -2 - u'.$$

$$-u' - 2 = \frac{u}{-3u} \quad \Rightarrow \quad -u' = 2 - \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{-5}{3}.$$

Це – диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Інтегруємо останнє рівняння:  $u = \frac{-5}{3}x + C$ . Підставляємо замість заміни підстановку:

$$1 - 2x - y = \frac{-5}{3}x + C \quad \Rightarrow \quad 1 - 2x + \frac{5}{3}x - C = y \quad \Rightarrow \quad y = 1 - C - \frac{1}{3}x.$$

Отримали загальний розв'язок диференціального рівняння.

Відповідь.  $y = 1 - C - \frac{1}{3}x.$

## § 2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

**Приклад 2.19.** Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y' = \frac{x + y - 1}{x - y - 1}.$$

*Розв'язування.* Оскільки  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ , то дане рівняння зводиться до

однорідного, якщо виконаємо заміну:  $\begin{cases} x = X + m, \\ y = Y + n \end{cases}$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{(X + m) + (Y + n) - 1}{(X + m) - (Y + n) - 1} \Rightarrow Y' = \frac{X + Y + (m + n - 1)}{X - Y + (m - n - 1)}$$

$$\begin{cases} m + n - 1 = 0 \\ m - n - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1, \\ n = 0 \end{cases} \Rightarrow : \begin{cases} x = X + 1, \\ y = Y \end{cases}$$

$$Y' = \frac{X + Y}{X - Y}.$$

Спочатку поділимо чисельник та знаменник правої частини на змінну  $X \neq 0$ :

$$Y' = \frac{\frac{X}{X} + \frac{Y}{X}}{\frac{X}{X} - \frac{Y}{X}} \quad \text{або} \quad Y' = \frac{1 + \frac{Y}{X}}{1 - \frac{Y}{X}}.$$

Тепер виконаємо заміну  $\frac{Y}{X} = t$ . Тоді, маємо  $Y = tX$ ,  $Y' = t'X + t$ .

Підставити все в рівняння, отримаємо:

$$t'X + t = \frac{1 + t}{1 - t}.$$

Або, після спрощення:

$$t'X = \frac{1 + t}{1 - t} - t \Rightarrow t'X = \frac{1 + t - t + t^2}{1 - t} \Rightarrow t'X = \frac{1 + t^2}{1 - t}.$$

Це вже диференціальне рівняння з відокремленими змінними. Представимо похідну у вигляді відношення диференціалів:

$$\frac{dt}{dX} \cdot X = \frac{1 + t^2}{1 - t}.$$

## § 2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

Підніmemo диференціал  $dX$  (домножимо обидві частини рівняння на нього):

$$X \cdot dt = \frac{1+t^2}{1-t} \cdot dX.$$

Тепер розділимо змінні ( $t$  до  $dt$ ,  $X$  до  $dX$ ):

$$\frac{dt}{\frac{1+t^2}{1-t}} = \frac{dX}{X} \quad \Rightarrow \quad \frac{1-t}{1+t^2} \cdot dt = \frac{dX}{X}.$$

Тепер можна інтегрувати кожену частину рівняння за відповідною змінною:

$$\begin{aligned} \int \frac{1-t}{1+t^2} \cdot dt &= \int \frac{dX}{X} \\ \int \frac{1}{1+t^2} \cdot dt - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2t}{t^2+1} \cdot dt &= \int \frac{dX}{X} \\ \int \frac{dt}{t^2+1} - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} &= \int \frac{dX}{X} \\ \operatorname{arctg}(t) - \frac{1}{2} \cdot \ln|t^2+1| &= \ln|X| + \ln|C| \\ \operatorname{arctg} t - \ln|\sqrt{t^2+1}| &= \ln|X| + \ln|C| \\ \operatorname{arctg} t &= \ln|XC\sqrt{t^2+1}| \\ \operatorname{arctg} \left(\frac{Y}{X}\right) &= \ln \left| XC \sqrt{\left(\frac{Y}{X}\right)^2 + 1} \right| \\ \operatorname{arctg} \left(\frac{Y}{X}\right) &= \ln |C\sqrt{Y^2 + X^2}|. \end{aligned}$$

Ми отримали загальний інтеграл розв'язку, оскільки змінна  $Y$  не виражається явно.  $\begin{cases} x = X + m, \\ y = Y + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = X + 1, \\ y = Y + 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = x - 1, \\ Y = y. \end{cases}$

$$\operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x-1}\right) = \ln |C\sqrt{y^2 + (x-1)^2}|.$$

*Відповідь.*  $\operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x-1}\right) = \ln |C\sqrt{y^2 + (x-1)^2}|.$

## § 2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

**Приклад 2.20.** Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y' = \frac{x + y + 5}{2x - 2y + 2}.$$

*Розв'язування.* Оскільки  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$ , то це рівняння зводиться до

однорідного, якщо виконаємо заміни:  $\begin{cases} x = X + m, \\ y = Y + n. \end{cases}$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{(X + m) + (Y + n) + 5}{2(X + m) - 2(Y + n) + 2} \Rightarrow Y' = \frac{X + Y + (m + n + 5)}{2X - 2Y + (2m - 2n + 2)}.$$

$$\begin{cases} m + n + 5 = 0 \\ 2m - 2n + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -3, \\ n = -2. \end{cases}$$

$$Y' = \frac{X + Y}{2X - 2Y}.$$

Спочатку поділимо чисельник та знаменник правої частини на змінну  $X$ :

$$Y' = \frac{\frac{X}{X} + \frac{Y}{X}}{2 \cdot \frac{X}{X} - \frac{2Y}{X}} \quad \text{або} \quad Y' = \frac{1 + \frac{Y}{X}}{2 - 2\frac{Y}{X}}.$$

Тепер виконаємо заміну  $\frac{Y}{X} = t$ . Тоді, маємо  $Y = tX$ ,  $Y' = t'X + t$ .

Підставити все в рівняння, отримаємо:

$$t'X + t = \frac{1 + t}{2 - 2t}$$

Або, після скорочення:

$$t'X = \frac{1 + t}{2 - 2t} - t \Rightarrow t'X = \frac{1 + t - 2t + 2t^2}{2 - 2t} \Rightarrow t'X = \frac{2t^2 - t + 1}{2 - 2t}.$$

Маємо  $2t^2 - t + 1 \neq 0$ . Це вже диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Представимо похідну у вигляді відношення диференціалів:

## § 2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

$$\frac{dt}{dX} \cdot X = \frac{2t^2 - t + 1}{2 - 2t}.$$

«Підніmemo» диференціал  $dX$  (домножимо обидві частини рівняння на нього):

$$X \cdot dt = \frac{2t^2 - t + 1}{2 - 2t} \cdot dX.$$

Тепер розділимо змінні ( $t$  до  $dt$ ,  $X$  до  $dX$ ):

$$\frac{dt}{\frac{2t^2 - t + 1}{2 - 2t}} = \frac{dX}{X} \quad \Rightarrow \quad \frac{2 - 2t}{2t^2 - t + 1} \cdot dt = \frac{dX}{X}.$$

Тепер можна інтегрувати кожену частину рівняння за відповідною змінною:

$$\begin{aligned} \int \frac{2 - 2t}{2t^2 - t + 1} \cdot dt &= \int \frac{dX}{X} \\ -2 \cdot \int \frac{t - 1}{2t^2 - t + 1} \cdot dt &= \int \frac{dX}{X}, \quad (2t^2 - t + 1)' = 4t - 1 \\ -\frac{2}{4} \cdot \int \frac{4t - 1 - 3}{2t^2 - t + 1} dt &= -\frac{1}{2} \cdot \int \frac{d(2t^2 - t + 1)}{2t^2 - t + 1} - \frac{2}{4} \cdot \int \frac{-3}{2t^2 - t + 1} dt \\ -\frac{1}{2} \cdot \int \frac{d(2t^2 - t + 1)}{2t^2 - t + 1} + \frac{3}{2} \cdot \int \frac{dt}{2\left(t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\right)} &= \int \frac{dX}{X} \\ -\frac{1}{2} \cdot \int \frac{d(2t^2 - t + 1)}{2t^2 - t + 1} + \frac{3}{4} \cdot \int \frac{dt}{\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} + \frac{1}{2}} &= \int \frac{dX}{X} \\ -\frac{1}{2} \cdot \int \frac{d(2t^2 - t + 1)}{2t^2 - t + 1} + \frac{3}{4} \cdot \int \frac{dt}{\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}} &= \int \frac{dX}{X} \\ -\frac{1}{2} \cdot \ln|2t^2 - t + 1| + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{7}{16}}} \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{t - \frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{7}{16}}} \right) &= \ln|X| + C \end{aligned}$$

§ 2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

$$-\frac{1}{2} \cdot \ln|2t^2 - t + 1| + \frac{3}{\sqrt{7}} \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{4t - 1}{\sqrt{7}} \right) = \ln|X| + C, \quad t = \frac{Y}{X}$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \ln \left| 2 \left( \frac{Y}{X} \right)^2 - \left( \frac{Y}{X} \right) + 1 \right| + \frac{3}{\sqrt{7}} \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{4 \left( \frac{Y}{X} \right) - 1}{\sqrt{7}} \right) = \ln|X| + C.$$

Ми отримали загальний інтеграл розв'язку, оскільки змінна  $Y$  не виражається явно.

$$\begin{cases} x = X + m, \\ y = Y + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = X - 3, \\ y = Y - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = x + 3, \\ Y = y + 2. \end{cases}$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{2Y^2 - YX + X^2}{X^2} \right| + \frac{3}{\sqrt{7}} \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{4Y - X}{X\sqrt{7}} \right) = \ln|X| + C$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{2(y+2)^2 - (y+2)(x+3) + (x+3)^2}{(x+3)^2} \right| +$$

$$+ \frac{3}{\sqrt{7}} \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{4(y+2) - (x+3)}{(x+3)\sqrt{7}} \right) = \ln|x+3| + C.$$

*Відповідь.*

$$-\frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{2(y+2)^2 - (y+2)(x+3) + (x+3)^2}{(x+3)^2} \right| + \frac{3}{\sqrt{7}} \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{4(y+2) - (x+3)}{(x+3)\sqrt{7}} \right) = \ln|x+3| + C.$$

**Приклад 2.21.** Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$3y' = \frac{2x + 3y + 1}{6x + 9y - 3}.$$

*Розв'язування.* Оскільки  $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 18 = 0$ , то зробимо заміну

$$u = 2x + 3y + 1 \quad \Rightarrow \quad u' = 2 + 3y' \quad \Rightarrow \quad 3y' = u' - 2.$$

Підставляємо все в початкове диференціальне рівняння:

$$u' - 2 = \frac{u}{3(u-1) - 3} \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{u}{3u-6} + 2 \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{u+6u-12}{3u-6}.$$

Це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними.

## § 2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

$$u' = \frac{7u - 12}{3u - 6}$$

При  $7u - 12 = 0 \Rightarrow 7(2x + 3y + 1) - 12 = 0 \Rightarrow 14x + 21y - 5 = 0$ , маємо особливий розв'язок диференціального рівняння. Знайдемо неособливі розв'язки. Перепишемо похідну через відношення диференціалів:

$$\frac{du}{dx} = \frac{7u - 12}{3u - 6} \Rightarrow \frac{3u - 6}{7u - 12} du = dx.$$

Проінтегруємо останнє рівняння:

$$\int \frac{3u - 6}{7u - 12} du = \int dx$$

$$\frac{1}{7} \int \frac{3 \cdot (7u - 12 + 12) - 7 \cdot 6}{7u - 12} du = \int dx$$

$$\frac{1}{7} \int \frac{3 \cdot (7u - 12)}{7u - 12} du + \frac{1}{7} \int \frac{3 \cdot 12 - 7 \cdot 6}{7u - 12} du = \int dx$$

$$\frac{1}{7} \int 3 du + \frac{1}{7} \int \frac{-6}{7u - 12} du = \int dx$$

$$\frac{3}{7} \cdot u + \frac{-6}{49} \cdot \ln|7u - 12| = x + C$$

$$3 \cdot u - \frac{6}{7} \cdot \ln|7u - 12| = 7x + 7C$$

$$3 \cdot (2x + 3y + 1) - \frac{6}{7} \cdot \ln|7(2x + 3y + 1) - 12| = 7x + 7C$$

$$21 \cdot (2x + 3y + 1) - 6 \cdot \ln|14x + 21y - 5| = 49x + 49C.$$

Отримали загальний інтеграл розв'язку.

*Відповідь.*  $21 \cdot (2x + 3y + 1) - 6 \cdot \ln|14x + 21y - 5| = 49x + 49C,$   
 $14x + 21y - 5 = 0.$

### § 3. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку.

#### Рівняння Бернуллі

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння, що є лінійним відносно шуканої функції та її похідної.

Диференціальне рівняння вигляду:

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad (3.1)$$

де  $P(x)$  і  $Q(x)$  – задані неперервні функції від змінної  $x$ , називається **лінійним диференціальним рівнянням першого порядку**.

- Якщо  $Q(x) \equiv 0$ , то таке диференціальне рівняння називається **лінійним однорідним**;
- якщо  $Q(x) \neq 0$ , то диференціальне рівняння називається **лінійним неоднорідним**.

Розрізняють два основних способи розв'язання лінійних диференціальних рівнянь першого порядку:

– метод Ейлера-Бернуллі;

– метод Лагранжа (метод варіації довільної сталої).

**Метод Лагранжа.** Загальний розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння можна знайти методом варіації довільної сталої (у 18 столітті цей метод запропонував Лагранж). Ідея методу Лагранжа у наступному:

- 1) Спочатку розв'яжемо лінійне однорідне диференціальне рівняння  $y' + P(x)y = 0$ , що відповідає даному неоднорідному. Це рівняння з відокремлюваними змінними, тому розділивши їх та проінтегрувавши обидві частини рівняння за відповідною змінною, знаходимо:

$$y' = -P(x)y$$

$$\frac{dy}{dx} = -P(x)y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -P(x)dx$$

$$\ln|y| = \ln C - \int P(x)dx$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\ln C - \int P(x)dx}$$

$$y = C \cdot e^{-\int P(x)dx}, \quad (3.2)$$

де  $C = const$  ( $C \neq 0$ ). Ми отримали загальний розв'язок однорідного рівняння.

Зауважимо, що при  $C = 0$  ми отримаємо розв'язок  $y = 0$ .

2) Розв'язок неоднорідного диференціального рівняння

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

будемо шукати у тому ж вигляді (3.2), припустивши, що  $C = C(x)$  – деяка невідома функція від  $x$ , тобто у вигляді:

$$y(x) = C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx}. \quad (3.3)$$

Для заходження функції  $C(x)$  підставляємо функцію  $y(x)$  з (3.3) у неоднорідне диференціальне рівняння (3.1):

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

$$(C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx})' + P(x) \cdot C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$C'(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} - C(x) \cdot P(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} + \\ + P(x) \cdot C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} = Q(x).$$

Після скорочення, отримаємо:

$$C'(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$C'(x) = Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}.$$

Інтегруючи його, знаходимо функцію  $C(x)$  :

$$C(x) = \int (Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}) \cdot dx + C_1,$$

де  $C_1$  – довільна стала.

Таким чином, для будь-якого значення  $C_1$  функція

$$y = C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx}$$

$$y = \left( \int (Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}) \cdot dx + C_1 \right) \cdot e^{-\int P(x)dx}$$

$$y = C_1 \cdot e^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \cdot \int (Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}) \cdot dx \quad (3.4)$$

– є розв'язком рівняння  $y' + P(x)y = Q(x)$ .

**Метод Ейлера-Бернуллі** (метод підстановки) полягає у представленні шуканої функції  $y = y(x)$  у вигляді добутку двох невідомих функцій

$$y(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \text{або} \quad y = u \cdot v.$$

Тоді  $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$ . Підставимо все в неоднорідне лінійне рівняння

$$y' + P(x)y = Q(x):$$

$$(u' \cdot v + u \cdot v') + P(x) \cdot u \cdot v = Q(x)$$

$$u' \cdot v + (u \cdot v' + P(x) \cdot u \cdot v) = Q(x).$$

Згрупуємо члени рівняння так, щоб можна було винести за дужки одну з функцій, наприклад так:

$$u' \cdot v + u \cdot (v' + P(x) \cdot v) = Q(x).$$

Невідомі функції будемо шукати із умови, що одна з них занулює суму у дужках:

$$v' + P(x) \cdot v = 0 \quad \text{тоді} \quad u' \cdot v = Q(x)$$

$$v' = -P(x) \cdot v$$

$$\frac{dv}{dx} = -P(x) \cdot v$$

$$\frac{dv}{v} = -P(x) \cdot dx$$

$$\ln|v| = -\int P(x) \cdot dx$$

$$v = e^{-\int P(x)dx}$$

Підставляємо знайдену функцію  $v(x)$  в другу гілку розв'язку

$$u' \cdot v = Q(x),$$

знаходимо:

$$u' \cdot e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$u' = Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}$$

Проінтегрувавши це рівняння, знаходимо функцію  $u(x, C)$ .

Підставляємо знайдені функції  $v(x)$  та  $u(x, C)$  в функцію

$$y(x) = u(x) \cdot v(x).$$

Рівняння Бернуллі є узагальненням лінійного рівняння.

Диференціальне рівняння виду

$$y' + P(x)y = Q(x) \cdot y^n, \quad n \neq 1, \quad n \neq 0$$

називається **рівнянням Бернуллі**.

При  $n = 1$  ми отримаємо диференціальне рівняння з відокремленими змінними.

При  $n = 0$  ми маємо лінійне диференціальне рівняння.

При розв'язуванні потрібно, в першу чергу, поділити обидві частини рівняння

$$y' + P(x)y = Q(x) \cdot y^n \quad \text{на} \quad y^n \neq 0:$$

$$\frac{y'}{y^n} + P(x) \cdot \frac{y}{y^n} = Q(x).$$

$$y^{1-n} = u(x) \cdot v(x)$$

$$y^{1-n} = u \cdot v \quad \Rightarrow \quad (y^{1-n})' = (u \cdot v)'$$

$$(1-n) \cdot y^{-n} \cdot y' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\frac{y'}{y^n} = \frac{u' \cdot v + u \cdot v'}{(1-n)}$$

$$\frac{u' \cdot v + u \cdot v'}{(1-n)} + P(x) \cdot u \cdot v = Q(x)$$

$$u' \cdot v + u \cdot v' + (1-n) \cdot P(x) \cdot u \cdot v = (1-n) \cdot Q(x)$$

$$u' \cdot v + (u \cdot v' + (1-n) \cdot P(x) \cdot u \cdot v) = (1-n) \cdot Q(x)$$

$$u' \cdot v + u \cdot (v' + (1-n) \cdot P(x) \cdot v) = (1-n) \cdot Q(x)$$

$$v' + (1-n) \cdot P(x) \cdot v = 0 \quad \text{та} \quad u' \cdot v = (1-n) \cdot Q(x)$$

Після знаходження підставляємо функцію  $v(x)$  в другу гілку розв'язку  $u' \cdot v = (1-n) \cdot Q(x)$ , знаходимо функцію  $u(x, C)$ . Підставляємо знайдені функції  $v(x)$  та  $u(x, C)$  в функцію  $y^{1-n}(x) = u(x) \cdot v(x)$ .

Рівняння Бернуллі можна також розв'язувати за підстановкою  $y = u \cdot v$ .

**Приклад 3.1.** Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y' - 3x^2 \cdot y = (2x + 1)e^{x^3}.$$

*Розв'язування.* Оскільки рівняння можна представити у вигляді

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x),$$

то це лінійне диференціальне рівняння. Розв'яжемо це рівняння **Методом Ейлера-Бернуллі**. Представимо функцію  $y = y(x)$  у вигляді добутку двох невідомих функцій  $y(x) = u(x) \cdot v(x)$  або  $y = u \cdot v$ . Тоді  $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$ . Підставимо все в неоднорідне лінійне рівняння:

$$y' - 3x^2 \cdot y = (2x + 1)e^{x^3}.$$

$$(u' \cdot v + u \cdot v') - 3x^2 \cdot u \cdot v = (2x + 1)e^{x^3}$$

$$u' \cdot v + (u \cdot v' - 3x^2 \cdot u \cdot v) = (2x + 1)e^{x^3}.$$

Згрупуємо члени рівняння так, щоб можна було винести за дужки одну з функцій:

$$u' \cdot v + u \cdot (v' - 3x^2 \cdot v) = (2x + 1)e^{x^3}.$$

Невідомі функції будемо шукати із умови, що одна з них занулює суму у дужках:

$$v' - 3x^2 \cdot v = 0 \quad \text{тоді} \quad u' \cdot v = (2x + 1)e^{x^3}.$$

$$v' = 3x^2 \cdot v$$

$$\frac{dv}{dx} = 3x^2 \cdot v$$

$$\frac{dv}{v} = 3x^2 \cdot dx$$

$$\ln|v| = \int 3x^2 \cdot dx = x^3 \Rightarrow \ln|v| = x^3 \Rightarrow v = e^{x^3}.$$

Підставляємо знайдену функцію  $v(x)$  в другу гілку розв'язку

$$u' \cdot v = (2x + 1)e^{x^3},$$

знаходимо:

$$u' \cdot e^{x^3} = (2x + 1)e^{x^3}, \quad : e^{x^3} \neq 0$$

$$u' = (2x + 1).$$

Проінтегрувавши це рівняння, знаходимо функцію  $u(x, C)$ :

$$u = \int (2x + 1)dx = x^2 + x + C$$

Підставляємо знайдені функції  $v(x)$  та  $u(x, C)$  в функцію

$$y(x) = u(x) \cdot v(x):$$

$$y(x) = (x^2 + x + C) \cdot e^{x^3}.$$

Ми отримали загальний розв'язок рівняння.

*Відповідь.*  $y(x) = (x^2 + x + C) \cdot e^{x^3}$ .

**Приклад 3.2.** Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\cos 5x}{x}.$$

*Розв'язування.* ОДЗ:  $x \neq 0$ . Оскільки рівняння можна представити у вигляді

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x),$$

то це лінійне диференціальне рівняння. Розв'яжемо це рівняння **Методом Ейлера-Бернуллі**. Представимо функцію  $y = y(x)$  у вигляді добутку двох невідомих функцій  $y(x) = u(x) \cdot v(x)$  або  $y = u \cdot v$ . Тоді

$$y' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

Підставимо все в неоднорідне лінійне рівняння:

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\cos 5x}{x}.$$

$$(u' \cdot v + u \cdot v') + \frac{u \cdot v}{x} = \frac{\cos 5x}{x}$$

$$u' \cdot v + \left(u \cdot v' + \frac{u \cdot v}{x}\right) = \frac{\cos 5x}{x}$$

Згрупуємо члени рівняння так, щоб можна було винести за дужки одну з функцій:

$$u' \cdot v + u \cdot \left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{\cos 5x}{x}.$$

Невідомі функції будемо шукати із умови, що одна з них занулює суму у дужках:

$$v' + \frac{v}{x} = 0 \quad \text{тоді} \quad u' \cdot v = \frac{\cos 5x}{x}$$

$$v' = -\frac{v}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$$

$$\ln|v| = -\int \frac{dx}{x} = -\ln|x| \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = \ln\left|\frac{1}{x}\right| \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{x}.$$

Підставляємо знайдену функцію  $v(x)$  в другу гілку розв'язку

$$u' \cdot v = \frac{\cos 5x}{x}, \text{ знаходимо:}$$

$$u' \cdot \frac{1}{x} = \frac{\cos 5x}{x}, \quad \cdot x \neq 0$$

$$u' = \cos 5x.$$

Проінтегрувавши це рівняння, знаходимо функцію  $u(x, C)$ :

$$u = \int \cos 5x \cdot dx = \frac{\sin 5x}{5} + C$$

Підставляємо знайдені функції  $v(x)$  та  $u(x, C)$  в функцію

$$y(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad y(x) = \left( \frac{\sin 5x}{5} + C \right) \cdot \frac{1}{x}.$$

Ми отримали загальний розв'язок диференціального рівняння.

*Відповідь.*  $y(x) = \left( \frac{\sin 5x}{5} + C \right) \cdot \frac{1}{x}.$

**Приклад 3.3.** Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння

$$y' + 2xy = 2x, \quad y(1) = 2.$$

*Розв'язування.* Це рівняння можна класифікувати як лінійне неоднорідне першого порядку так й диференціальне рівняння з відокремлювальними змінними. Будемо розв'язувати його за схемою лінійного ДР. Спочатку знайдемо загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння. Представимо функцію  $y = y(x)$  у вигляді добутку двох невідомих функцій  $y(x) = u(x) \cdot v(x)$  або  $y = u \cdot v$ . Тоді  $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$ . Підставимо все в неоднорідне лінійне рівняння:

$$y' + 2xy = 2x.$$

$$(u' \cdot v + u \cdot v') + 2x \cdot u \cdot v = 2x$$

$$u' \cdot v + (u \cdot v' + 2x \cdot u \cdot v) = 2x.$$

Згрупуємо члени рівняння так, щоб можна було винести за дужки одну з функцій:

$$u' \cdot v + u \cdot (v' + 2x \cdot v) = 2x.$$

Невідомі функції будемо шукати із умови, що одна з них занулює суму у дужках:

$$\begin{aligned} v' + 2x \cdot v = 0 & \quad \text{тоді} \quad u' \cdot v = 2x \\ v' = -2xv & \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -2xv \Rightarrow \frac{dv}{v} = -2x dx \\ \ln|v| = -\int 2x dx = -x^2 & \Rightarrow \ln|v| = -x^2 \Rightarrow v = e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Підставляємо знайдену функцію  $v(x)$  в другу гілку розв'язку  $u' \cdot v = 2x$ , знаходимо:

$$u' \cdot e^{-x^2} = 2x, \quad (\cdot e^{x^2} \neq 0)$$

$$u' = 2x \cdot e^{x^2}$$

Проінтегрувавши це рівняння, знаходимо функцію  $u(x, C)$ :

$$u = \int 2x \cdot e^{x^2} \cdot dx = \int e^{x^2} \cdot d(x^2) = e^{x^2} + C.$$

Підставляємо знайдені функції  $v(x)$  та  $u(x, C)$  в функцію

$$y(x) = u(x) \cdot v(x): \quad y(x) = (e^{x^2} + C) \cdot e^{-x^2}$$

$$y(x) = 1 + C \cdot e^{-x^2}.$$

Ми отримали загальний розв'язок рівняння. Тепер знаходимо константу  $C$ . Для цього використаємо умову  $y(1) = 2$ :

$$2 = 1 + C \cdot e^{-1} \Rightarrow C = \frac{1}{e^{-1}} = e^1 \Rightarrow y(x) = 1 + e \cdot e^{-x^2}.$$

*Відповідь.*  $y(x) = 1 + e^{1-x^2}$ .

**Приклад 3.4.** Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} + \frac{4}{x+2} \cdot y = \frac{\cos 3x}{(x+2)^4}, \quad x \neq -2.$$

*Розв'язування.* Оскільки  $\frac{dy}{dx} = y'$ , то рівняння можна представити у вигляді  $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$ , тобто це лінійне диференціальне рівняння. Розв'яжемо це рівняння **Методом Ейлера-Бернуллі**. Представимо функцію  $y = y(x)$  у вигляді добутку двох невідомих функцій

$$y(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \text{або} \quad y = u \cdot v.$$

Тоді  $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$ . Підставимо все в неоднорідне лінійне рівняння:

$$\begin{aligned} y' + \frac{4}{x+2} \cdot y &= \frac{\cos 3x}{(x+2)^4} \\ (u' \cdot v + u \cdot v') + \frac{4}{x+2} \cdot u \cdot v &= \frac{\cos 3x}{(x+2)^4} \\ u' \cdot v + \left( u \cdot v' + \frac{4}{x+2} \cdot u \cdot v \right) &= \frac{\cos 3x}{(x+2)^4}. \end{aligned}$$

Згрупуємо члени рівняння так, щоб можна було винести за дужки одну з функцій:

$$u' \cdot v + u \cdot \left( v' + \frac{4}{x+2} \cdot v \right) = \frac{\cos 3x}{(x+2)^4}.$$

Невідомі функції будемо шукати із умови, що одна з них занулює суму у дужках:

$$v' + \frac{4}{x+2} \cdot v = 0 \quad \text{тоді} \quad u' \cdot v = \frac{\cos 3x}{(x+2)^4}$$

$$v' = -\frac{4}{x+2} \cdot v$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{4}{x+2} \cdot v$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{4}{x+2} \cdot dx$$

$$\ln|v| = -\int \frac{4}{x+2} \cdot dx = -4 \ln|x+2|$$

$$\ln|v| = \ln \frac{1}{|x+2|^4}$$

$$v = \frac{1}{(x+2)^4}$$

Підставляємо знайдену функцію  $v(x)$  в другу гілку розв'язку

$$u' \cdot v = \frac{\cos 3x}{(x+2)^4},$$

знаходимо:

$$u' \cdot \frac{1}{(x+2)^4} = \frac{\cos 3x}{(x+2)^4}, \quad \cdot (x+2)^4 \neq 0$$

$$u' = \cos 3x.$$

Проінтегрувавши це рівняння, знаходимо функцію  $u(x, C)$ :

$$u = \int \cos 3x \cdot dx = \frac{\sin 3x}{3} + C.$$

Підставляємо знайдені функції  $v(x)$  та  $u(x, C)$  в функцію

$$y(x) = u(x) \cdot v(x):$$

$$y(x) = \left( \frac{\sin 3x}{3} + C \right) \cdot \frac{1}{(x+2)^4}.$$

Ми отримали загальний розв'язок рівняння.

*Відповідь.*  $y(x) = \left( \frac{\sin 3x}{3} + C \right) \cdot \frac{1}{(x+2)^4}.$

**Приклад 3.5.** Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y' - \frac{y}{x} = 5 + 2x - x^2.$$

*Розв'язування.* Оскільки це рівняння можна представити у вигляді

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x),$$

то маємо лінійне диференціальне рівняння. Розв'яжемо це рівняння **Методом варіації довільної сталої (методом Лагранжа)**. Рівняння

$$y' - \frac{y}{x} = 0$$

є однорідним, що відповідає заданому неоднорідному рівнянню. Це рівняння зі змінними, що можна відокремити:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + \ln|C| \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \ln|Cx| \quad \Rightarrow \quad y = C \cdot x.$$

Ми отримали загальний розв'язок однорідного рівняння. Проваріюємо довільну сталу, тобто покладемо, що  $C = C(x)$ , тоді  $y = C(x) \cdot x$ .

Підставимо отриману функцію в неоднорідне рівняння:

$$y' - \frac{y}{x} = 5 + 2x - x^2.$$

$$(C(x) \cdot x)' - C(x) \cdot x \cdot \frac{1}{x} = 5 + 2x - x^2$$

$$(C'(x) \cdot x + C(x) \cdot 1) - C(x) = 5 + 2x - x^2$$

$$C'(x) \cdot x = 5 + 2x - x^2 \quad \Rightarrow \quad C'(x) = \frac{5}{x} + 2 - x$$

$$C(x) = \int \left( \frac{5}{x} + 2 - x \right) dx + C_1 \quad \Rightarrow \quad C(x) = 5 \ln|x| + 2x - \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$y(x) = C(x) \cdot x \quad \Rightarrow \quad y(x) = \left( 5 \ln|x| + 2x - \frac{x^2}{2} + C_1 \right) x.$$

Ми отримали загальний розв'язок рівняння.

*Відповідь.*  $y(x) = \left( 5 \ln|x| + 2x - \frac{x^2}{2} + C_1 \right) x.$

**Приклад 3.6.** Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y' + \frac{y}{x} = x^3.$$

*Розв'язування.* ОДЗ  $x \neq 0$ . Оскільки це рівняння можна представити у вигляді

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x),$$

то маємо лінійне диференціальне рівняння. Розв'яжемо це рівняння **Методом варіації довільної сталої (методом Лагранжа)**. Рівняння

$$y' + \frac{y}{x} = 0$$

є однорідним, що відповідає заданому неоднорідному рівнянню. Це рівняння зі змінними, що можна відокремити:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y| = -\ln|x| + \ln|C| \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \ln\left|\frac{C}{x}\right| \quad \Rightarrow \quad y = \frac{C}{x}.$$

Ми отримали загальний розв'язок однорідного рівняння. Проваріюємо довільну сталу, тобто покладемо, що  $C = C(x)$ , тоді  $y = \frac{C(x)}{x}$ .

Підставимо отриману функцію в неоднорідне рівняння:

$$y' + \frac{y}{x} = x^3.$$

$$\left(\frac{C(x)}{x}\right)' + \frac{C(x)}{x} \cdot \frac{1}{x} = x^3$$

$$\left(\frac{C'(x)}{x} + C(x) \cdot \frac{-1}{x^2}\right) + \frac{C(x)}{x^2} = x^3$$

$$\frac{C'(x)}{x} = x^3 \quad \Rightarrow \quad C'(x) = x^4 \quad \Rightarrow \quad C(x) = \frac{x^5}{5} + C_1$$

$$y(x) = \frac{C(x)}{x} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{\frac{x^5}{5} + C_1}{x} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{x^5 + 5C_1}{5x}.$$

Ми отримали загальний розв'язок рівняння.

*Відповідь.*  $y(x) = \frac{x^5 + 5C_1}{5x}.$

**Приклад 3.7.** Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y' + \frac{y}{x+5} = \frac{\sin x}{x+5}, \quad x \neq -5.$$

*Розв'язування.* Оскільки це рівняння можна представити у вигляді

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x),$$

то маємо лінійне диференціальне рівняння. Розв'яжемо це рівняння

**Методом варіації довільної сталої (методом Лагранжа).** Рівняння

$$y' + \frac{y}{x+5} = 0$$

є однорідним, що відповідає заданому неоднорідному рівнянню. Це рівняння зі змінними, що можна відокремити:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x+5} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x+5}.$$

Проінтегруємо обидві частини рівняння за відповідною змінною:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x+5} \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = -\ln|x+5| + \ln|C|.$$

Використовуючи властивості логарифмів, запишемо:

$$\ln|y| = \ln \left| \frac{C}{x+5} \right| \quad \Rightarrow \quad y = \frac{C}{x+5}.$$

Ми отримали загальний розв'язок однорідного рівняння. Проваріюємо довільну сталу, тобто покладемо, що  $C = C(x)$ , тоді  $y = \frac{C(x)}{x+5}$ .

Підставимо отриману функцію в неоднорідне рівняння:

$$y' + \frac{y}{x+5} = \frac{\sin x}{x+5}$$

$$\left(\frac{C(x)}{x+5}\right)' + \frac{C(x)}{x+5} \cdot \frac{1}{x+5} = \frac{\sin x}{x+5}$$

Знаходимо похідну:

$$\left(\frac{C'(x)}{x+5} + \frac{-C(x)}{(x+5)^2}\right) + \frac{C(x)}{x+5} \cdot \frac{1}{x+5} = \frac{\sin x}{x+5}$$

Після скорочення:

$$\frac{C'(x)}{x+5} = \frac{\sin x}{x+5}$$

Оскільки  $x \neq -5$ , то можемо відкинути знаменники дробів:

$$C'(x) = \sin x$$

$$C(x) = -\cos x + C_1$$

Підставляємо отриману функцію в загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y(x) = \frac{C(x)}{x+5} \Rightarrow y(x) = \frac{-\cos x + C_1}{x+5}$$

Ми отримали загальний розв'язок рівняння.

*Відповідь.*  $y(x) = \frac{-\cos x + C_1}{x+5}$ .

**Приклад 3.8.** Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$x \cdot y' - 4y = 2x^2 \cdot \sqrt{y}.$$

*Розв'язування.* ОДЗ:  $y \geq 0$ . Нескладно переконатися, що  $y = 0$  є розв'язком даного диференціального рівняння. Тепер будемо шукати нетривіальні розв'язки. Оскільки рівняння можна представити у вигляді

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^n,$$

то це диференціальне рівняння Бернуллі. Перш за все, поділимо обидві частини на  $\sqrt{y} \neq 0$ :

$$\frac{x \cdot y'}{\sqrt{y}} - \frac{4y}{\sqrt{y}} = \frac{2x^2 \cdot \sqrt{y}}{\sqrt{y}}$$

$$\frac{x \cdot y'}{\sqrt{y}} - 4\sqrt{y} = 2x^2.$$

Розв'яжемо це рівняння **Методом Ейлера-Бернуллі**. Представимо функцію  $2\sqrt{y}$  у вигляді добутку двох невідомих функцій

$$2\sqrt{y} = u(x) \cdot v(x) \quad \text{або} \quad 2\sqrt{y} = u \cdot v.$$

Тоді  $\frac{y'}{\sqrt{y}} = u' \cdot v + u \cdot v'$ . Підставимо все в неоднорідне лінійне рівняння:

$$\frac{x \cdot y'}{\sqrt{y}} - 2 \cdot 2\sqrt{y} = 2x^2$$

$$x(u' \cdot v + u \cdot v') - 2 \cdot u \cdot v = 2x^2$$

$$x \cdot u' \cdot v + (x \cdot u \cdot v' - 2 \cdot u \cdot v) = 2x^2.$$

Згрупуємо члени рівняння так, щоб можна було винести за дужки одну з функцій:

$$x \cdot u' \cdot v + u \cdot (x \cdot v' - 2 \cdot v) = 2x^2.$$

Невідомі функції будемо шукати із умови, що одна з них занулює суму у дужках:

$$xv' - 2v = 0 \quad \text{тоді} \quad x \cdot u' \cdot v = 2x^2$$

$$x \cdot v' = 2v$$

$$x \cdot \frac{dv}{dx} = 2v$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{2}{x} \cdot dx$$

$$\ln|v| = \int \frac{2}{x} \cdot dx = 2 \ln|x| \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = \ln|x^2|$$

$$v = x^2.$$

Підставляємо знайдену функцію  $v(x)$  в другу гілку розв'язку

$$x \cdot u' \cdot v = 2x^2,$$

знаходимо:

$$x \cdot u' \cdot x^2 = 2x^2, \quad : x^2 \neq 0$$

$$x \cdot u' = 2.$$

Проінтегрувавши це рівняння, знаходимо функцію  $u(x, C)$ :

$$u = \int \frac{2}{x} dx = 2 \ln|x| + C.$$

Підставляємо знайдені функції  $v(x)$  та  $u(x, C)$  в функцію

$$2\sqrt{y} = u(x) \cdot v(x):$$

$$2\sqrt{y} = (2 \ln x + C) \cdot x^2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{4} (2 \ln x + C)^2 \cdot x^4.$$

Ми отримали загальний розв'язок.

*Відповідь.*  $y(x) = \frac{1}{4} (2 \ln x + C)^2 \cdot x^4, \quad y = 0.$

**Приклад 3.9.** Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y' + \frac{y}{x} = y^2 \cdot x \cdot \ln x.$$

*Розв'язування.* ОДЗ:  $x > 0$ . При  $y = 0$  ми маємо тривіальний розв'язок ДР. Будемо шукати нетривіальний розв'язок. Оскільки рівняння можна представити у вигляді

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^n,$$

то це диференціальне рівняння Бернуллі. Перш за все, поділимо обидві частини на  $y^2 \neq 0$ :

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{y}{xy^2} = \frac{y^2 \cdot x \cdot \ln x}{y^2}$$

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = x \cdot \ln x.$$

Розв'яжемо це рівняння **Методом Ейлера-Бернуллі**. Представимо функцію  $\frac{1}{y} = y^{-1}$  у вигляді добутку двох невідомих функцій

$$y^{-1} = u(x) \cdot v(x).$$

Тоді  $\frac{-y'}{y^2} = u' \cdot v + u \cdot v'$ . Підставимо все в неоднорідне лінійне рівняння:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = x \cdot \ln x$$

$$-(u' \cdot v + u \cdot v') + \frac{u \cdot v}{x} = x \cdot \ln x$$

$$-u' \cdot v + \left(-u \cdot v' + \frac{u \cdot v}{x}\right) = x \cdot \ln x.$$

Згрупуємо члени рівняння так, щоб можна було винести за дужки одну з функцій:

$$-u' \cdot v - u \left( v' - \frac{v}{x} \right) = x \cdot \ln x.$$

Невідомі функції будемо шукати із умови, що одна з них занулює суму у дужках:

$$v' - \frac{v}{x} = 0 \quad \text{тоді} \quad -u' \cdot v = x \cdot \ln x$$

$$v' = \frac{v}{x}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}$$

$$\ln|v| = \ln|x| \quad \Rightarrow \quad v = x.$$

Підставляємо знайдену функцію  $v(x)$  в другу гілку розв'язку:

$$-u' \cdot v = x \cdot \ln x,$$

знаходимо:

$$-u' \cdot x = x \cdot \ln x, \quad : x > 0$$

$$-u' = \ln x.$$

Проінтегрувавши це рівняння, знаходимо функцію  $u(x, C)$ :

$$-u = \int \ln x \, dx = \left| \begin{array}{l} a = \ln x \\ db = dx \\ da = (\ln x)' dx = \frac{dx}{x} \\ b = \int dx = x \\ \int a \cdot db = a \cdot b - \int b \cdot da \end{array} \right| = x \ln|x| - \int x \cdot \frac{dx}{x} + C.$$

$$u = -x \ln|x| + x + C.$$

Підставляємо знайдені функції  $v(x)$  та  $u(x, C)$  в функцію

$$y^{-1} = u(x) \cdot v(x)$$

$$y = \frac{1}{uv} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{x(-x \ln|x| + x + C)}.$$

Ми отримали загальний розв'язок.

*Відповідь.*  $y = \frac{1}{x(-x \ln|x| + x + C)}, \quad y = 0.$

**Приклад 3.10.** Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y' - \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{4\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \sqrt{y}.$$

*Розв'язування.* ОДЗ:  $y \geq 0$ . При  $y = 0$  ми маємо тривіальний розв'язок ДР. Тепер знайдемо нетривіальний розв'язок. Оскільки рівняння можна представити у вигляді

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^n,$$

то це диференціальне рівняння Бернуллі. Перш за все, поділимо обидві частини на  $\sqrt{y}$ :

$$y' - \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{4\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \sqrt{y} \quad : \sqrt{y}$$

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{2xy}{(1+x^2)\sqrt{y}} = \frac{4\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{2x\sqrt{y}}{(1+x^2)} = \frac{4\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Розв'яжемо це рівняння **Методом Ейлера-Бернуллі**. Представимо функцію  $2\sqrt{y}$  у вигляді добутку двох невідомих функцій

$$2\sqrt{y} = u(x) \cdot v(x) \quad \text{або} \quad 2\sqrt{y} = u \cdot v.$$

Тоді  $\frac{y'}{\sqrt{y}} = u' \cdot v + u \cdot v'$ . Підставимо все в неоднорідне лінійне рівняння:

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{2x\sqrt{y}}{(1+x^2)} = \frac{4\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(u' \cdot v + u \cdot v') - \frac{x \cdot u \cdot v}{1+x^2} = \frac{4\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$u' \cdot v + \left( u \cdot v' - \frac{x \cdot u \cdot v}{1+x^2} \right) = \frac{4\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Згрупуємо члени рівняння так, щоб можна було винести за дужки одну з функцій:

$$u' \cdot v + u \left( v' - \frac{x \cdot v}{1 + x^2} \right) = \frac{4 \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Невідомі функції будемо шукати із умови, що одна з них занулює суму у дужках:

$$v' - \frac{x \cdot v}{1 + x^2} = 0 \quad \text{тоді} \quad u' \cdot v = \frac{4 \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$v' = \frac{x \cdot v}{1 + x^2}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{x \cdot v}{1 + x^2}$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{x \cdot dx}{1 + x^2}$$

$$\ln|v| = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{d(1 + x^2)}{x^2 + 1} \Rightarrow \ln|v| = \frac{1}{2} \ln|1 + x^2| = \ln \sqrt{1 + x^2}$$

$$v = \sqrt{1 + x^2}.$$

Підставляємо знайдену функцію  $v(x)$  в другу гілку розв'язку

$$u' \cdot v = \frac{4 \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1 + x^2}},$$

знаходимо:

$$u' \cdot \sqrt{1 + x^2} = \frac{4 \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad : \sqrt{1 + x^2} \neq 0$$

$$u' = \frac{4 \operatorname{arctg} x}{1 + x^2}.$$

Проінтегрувавши це рівняння, знаходимо функцію  $u(x, C)$ :

$$u = 4 \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} \cdot dx = 4 \int \operatorname{arctg} x \cdot d(\operatorname{arctg} x) = 4 \cdot \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} + C$$

$$u = 2 \cdot \operatorname{arctg}^2 x + C.$$

Підставляємо знайдені функції  $v(x)$  та  $u(x, C)$  в функцію

$$2\sqrt{y} = u(x) \cdot v(x):$$

$$2\sqrt{y} = (2 \cdot \operatorname{arctg}^2 x + C) \cdot \sqrt{1+x^2} \Rightarrow y = \frac{1}{4} (2 \cdot \operatorname{arctg}^2 x + C)^2 \cdot (1+x^2).$$

Ми отримали загальний розв'язок.

*Відповідь.*  $y(x) = \frac{1}{4} (2 \cdot \operatorname{arctg}^2 x + C)^2 \cdot (1+x^2), \quad y = 0.$

**Приклад 3.11.** Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$x \cdot y' - 2y = x^3 \cdot \sin y \cdot y'.$$

*Розв'язування.* Нескладно переконатися, що  $y = 0$  є тривіальним розв'язком даного диференціального рівняння. Тепер будемо шукати нетривіальні розв'язки ( $y \neq 0$ ). Перепишемо дане рівняння:

$$x \cdot y' - x^3 \cdot \sin y \cdot y' = 2y \Rightarrow y' \cdot (x - x^3 \cdot \sin y) = 2y.$$

Враховуючи, що  $y' = \frac{dy}{dx}$ , тоді  $x' = \frac{dx}{dy}$ .

$$x - x^3 \cdot \sin y = 2y \cdot x' \Rightarrow 2y \cdot x' - x = -x^3 \cdot \sin y.$$

Оскільки рівняння можна представити у вигляді

$$x' + P(y) \cdot x = Q(y) \cdot x^n,$$

то це диференціальне рівняння Бернуллі відносно змінної  $x$ . Перш за все, поділимо обидві частини на  $x^3 \neq 0$ :

$$\frac{2y \cdot x'}{x^3} - \frac{x}{x^3} = -\sin y$$

$$\frac{2y \cdot x'}{x^3} - \frac{1}{x^2} = -\sin y.$$

Розв'яжемо це рівняння **Методом Ейлера-Бернуллі**. Представимо функцію  $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$  у вигляді добутку двох невідомих функцій

$$x^{-2} = u(y) \cdot v(y).$$

Тоді  $\frac{-2x'}{x^3} = u' \cdot v + u \cdot v'$ .

Підставимо все в неоднорідне лінійне рівняння:

$$\frac{2y \cdot x'}{x^3} - \frac{1}{x^2} = -\sin y$$

$$-\frac{1}{2} \cdot 2y \cdot (u' \cdot v + u \cdot v') - u \cdot v = -\sin y$$

$$-y \cdot u' \cdot v + (-y \cdot u \cdot v' - u \cdot v) = -\sin y.$$

Згрупуємо члени рівняння так, щоб можна було винести за дужки одну з функцій:

$$-y \cdot u' \cdot v - u(y \cdot v' + v) = -\sin y \quad \Rightarrow \quad y \cdot u' \cdot v + u(y \cdot v' + v) = \sin y.$$

Невідомі функції будемо шукати із умови, що одна з них занулює суму у дужках:

$$y \cdot v' + v = 0 \quad \text{тоді} \quad y \cdot u' \cdot v = \sin y.$$

$$v' = \frac{-v}{y}$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{-v}{y}$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{-dy}{y}$$

$$\ln|v| = -\ln|y| \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{y}.$$

Підставляємо знайдену функцію  $v(y)$  в другу гілку розв'язку

$$y \cdot u' \cdot v = \sin y,$$

знаходимо:

$$y \cdot u' \cdot \frac{1}{y} = \sin y$$

$$u' = \sin y.$$

Проінтегрувавши це рівняння, знаходимо функцію  $u(y, C)$ :

$$u = \int \sin y \, dy = -\cos y + C.$$

Підставляємо знайдені функції  $v(y)$  та  $u(y, C)$  в функцію

$$x^{-2} = u(y) \cdot v(y)$$

$$x^{-2} = \frac{1}{y} \cdot (-\cos y + C) \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{y}{-\cos y + C}.$$

Ми отримали загальний інтеграл розв'язку.

*Відповідь.*  $x^2 = \frac{y}{C - \cos y}, \quad y = 0.$

**Приклад 3.12.** Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y \cdot x' + x = x^2 \cdot y \ln y, \quad x(1) = 1.$$

*Розв'язування.* ОДЗ:  $y > 0$ . Нескладно переконатися, що  $x = 0$  є тривіальним розв'язком даного диференціального рівняння, але нас цікавить розв'язок в околі точки  $x = 1$ . Будемо шукати нетривіальні розв'язки ( $x \neq 0$ ). Оскільки рівняння можна представити у вигляді

$$x' + P(y) \cdot x = Q(y) \cdot x^n,$$

то це диференціальне рівняння Бернуллі відносно змінної  $x$ . Перш за все, поділимо обидві частини на  $x^2$ :

$$\frac{y \cdot x'}{x^2} + \frac{x}{x^2} = y \ln y$$

$$y \cdot \frac{x'}{x^2} + \frac{1}{x} = \ln y.$$

Розв'яжемо це рівняння **Методом Ейлера-Бернуллі**. Представимо функцію  $\frac{1}{x} = x^{-1}$  у вигляді добутку двох невідомих функцій

$$x^{-1} = u(y) \cdot v(y).$$

Знаходимо похідну від обох частин рівняння. Тоді  $\frac{-x'}{x^2} = u' \cdot v + u \cdot v'$ .

Підставимо все в неоднорідне лінійне рівняння:

$$\begin{aligned} y \cdot \frac{x'}{x^2} + \frac{1}{x} &= y \ln y \\ -y \cdot (u' \cdot v + u \cdot v') + u \cdot v &= y \ln y \end{aligned}$$

Згрупуємо члени рівняння так, щоб можна було винести за дужки одну з функцій:

$$\begin{aligned} -y \cdot u' \cdot v + (-y \cdot u \cdot v' + u \cdot v) &= y \ln y \\ -y \cdot u' \cdot v - u(y \cdot v' - v) &= y \ln y. \end{aligned}$$

Невідомі функції будемо шукати із умови, що одна з них занулює різницю у дужках:

$$y \cdot v' - v = 0 \quad \text{тоді} \quad -y \cdot u' \cdot v = y \ln y.$$

$$v' = \frac{v}{y}$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{v}{y}$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{dy}{y}$$

$$\ln|v| = \ln|y| \quad \Rightarrow \quad v = y.$$

Підставляємо знайдену функцію  $v(y)$  в другу гілку розв'язку

$$-y \cdot u' \cdot v = y \ln y,$$

знаходимо:

$$-y \cdot u' \cdot y = y \ln y \quad (: y \neq 0)$$

$$u' = -\frac{\ln y}{y}.$$

Проінтегрувавши це рівняння, знаходимо функцію  $u(y, C)$ :

$$u = - \int \frac{\ln y}{y} dy = - \int \ln y \cdot d(\ln y) = - \frac{\ln^2 y}{2} + C.$$

Підставляємо знайдені функції  $v(y)$  та  $u(y, C)$  в функцію

$$x^{-1} = u(y) \cdot v(y)$$

$$x^{-1} = y \cdot \left( C - \frac{\ln^2 y}{2} \right) \Rightarrow \frac{1}{x} = y \cdot \left( C - \frac{\ln^2 y}{2} \right).$$

Ми отримали загальний інтеграл розв'язку. Для знаходження константи  $C$  використаємо додаткову умову:

$$x = 1, \quad y = 1: \quad 1 = 1 \cdot \left( C - \frac{\ln^2 1}{2} \right) \Rightarrow 1 = 1 \cdot (C - 0) \Rightarrow C = 1.$$

Підставляючи значення  $C$  в загальний інтеграл розв'язку, отримаємо розв'язок задачі Коші.

*Відповідь.*  $\frac{1}{x} = y \cdot \left( 1 - \frac{\ln^2 y}{2} \right).$

**Приклад 3.13.** Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y' + \frac{2y}{x} = \frac{3y^5}{x^5}.$$

*Розв'язування.* ОДЗ:  $x \neq 0$ . Нескладно переконатися, що  $y = 0$  є тривіальним розв'язком даного диференціального рівняння. Будемо шукати нетривіальні розв'язки. Оскільки рівняння можна представити у вигляді

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^n,$$

то це диференціальне рівняння Бернуллі відносно змінної  $y$ . Перш за все, поділимо обидві частини на  $y^5 \neq 0$ :

$$\frac{y'}{y^5} + \frac{2y}{x \cdot y^5} = \frac{3}{x^5}$$

$$\frac{y'}{y^5} + \frac{2}{xy^4} = \frac{3}{x^5}.$$

Розв'яжемо це рівняння **Методом Ейлера-Бернуллі**. Представимо функцію  $\frac{1}{y^4} = y^{-4}$  у вигляді добутку двох невідомих функцій

$$y^{-4} = u(x) \cdot v(x).$$

Тоді  $\frac{-4y'}{y^5} = u' \cdot v + u \cdot v'$ .

Підставимо все в неоднорідне лінійне рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y^5} + \frac{2}{xy^4} = \frac{3}{x^5} & \quad (\cdot (-4)) & \quad \frac{-4y'}{y^5} + \frac{-8}{xy^4} = \frac{-12}{x^5} \\ (u' \cdot v + u \cdot v') - \frac{8 \cdot u \cdot v}{x} & = \frac{-12}{x^5} \end{aligned}$$

Згрупуємо члени рівняння так, щоб можна було винести за дужки одну з функцій:

$$\begin{aligned} u' \cdot v + \left( u \cdot v' - \frac{8 \cdot u \cdot v}{x} \right) & = \frac{-12}{x^5}. \\ u' \cdot v + u \left( v' - \frac{8 \cdot v}{x} \right) & = \frac{-12}{x^5}. \end{aligned}$$

Невідомі функції будемо шукати із умови, що одна з них занулює суму у дужках:

$$v' - \frac{8 \cdot v}{x} = 0 \quad \text{тоді} \quad u' \cdot v = \frac{-12}{x^5}.$$

$$v' = \frac{8v}{x}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{8v}{x}$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{8dx}{x}$$

$$\ln|v| = 8 \ln|x| \quad \Rightarrow \quad v = x^8.$$

Підставляємо знайдену функцію  $v(x)$  в другу гілку розв'язку

$$u' \cdot v = \frac{-12}{x^5},$$

знаходимо:

$$u' \cdot x^8 = \frac{-12}{x^5} \quad (\because x^8 \neq 0)$$

$$u' = \frac{-12}{x^{13}}.$$

Проінтегрувавши це рівняння, знаходимо функцію  $u(x, C)$ :

$$u = -12 \int \frac{dx}{x^{13}} = -\frac{12x^{-12}}{-12} + C = \frac{1}{x^{12}} + C.$$

Підставляємо знайдені функції  $v(x)$  та  $u(x, C)$  в функцію

$$y^{-4} = u(x) \cdot v(x)$$

$$y^{-4} = x^8 \cdot \left(\frac{1}{x^{12}} + C\right) \Rightarrow \frac{1}{y^4} = x^8 \cdot \left(\frac{1}{x^{12}} + C\right) \Rightarrow \frac{1}{y^4} = \frac{1}{x^4} + Cx^8.$$

Ми отримали загальний інтеграл розв'язку.

*Відповідь.*  $\frac{1}{y^4} = \frac{1}{x^4} + Cx^8, \quad y = 0.$

**Приклад 3.14.** Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y' - \frac{4y}{x} = 4x^5 \cdot \sqrt{y}, \quad y(-1) = 1.$$

*Розв'язування.* ОДЗ:  $x \neq 0, \quad y \geq 0$ . Нескладно переконатися, що  $y = 0$  є тривіальним розв'язком даного диференціального рівняння, але нас цікавить розв'язок в околі точки  $x = -1$  (це впливає з  $y(-1) = 1$ ). Будемо шукати нетривіальні розв'язки ( $x \neq 0$ ). Оскільки рівняння можна представити у вигляді

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^n,$$

то це диференціальне рівняння Бернуллі. Перш за все, поділимо обидві частини на  $\sqrt{y}$ :

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{4y}{x\sqrt{y}} = 4x^5 \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{4\sqrt{y}}{x} = 4x^5.$$

Розв'яжемо це рівняння **Методом Ейлера-Бернуллі**. Представимо функцію  $\sqrt{y}$  у вигляді добутку двох невідомих функцій

$$\sqrt{y} = u(x) \cdot v(x).$$

Тоді  $\frac{y'}{2\sqrt{y}} = u' \cdot v + u \cdot v'$   $\Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{y}} = 2(u' \cdot v + u \cdot v')$ . Підставимо все в неоднорідне лінійне рівняння:

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{4\sqrt{y}}{x} = 4x^5.$$

$$2(u' \cdot v + u \cdot v') - 4 \cdot \frac{u \cdot v}{x} = 4x^5 \quad : 2$$

$$u' \cdot v + \left( u \cdot v' - \frac{2u \cdot v}{x} \right) = 2x^5$$

Згрупуємо члени рівняння так, щоб можна було винести за дужки одну з функцій:

$$u' \cdot v + u \left( v' - \frac{2v}{x} \right) = 2x^5.$$

Невідомі функції будемо шукати із умови, що одна з них занулює суму в дужках:

$$v' - \frac{2v}{x} = 0 \quad \text{тоді} \quad u' \cdot v = 2x^5$$

$$v' = \frac{2v}{x}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2v}{x}$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x}$$

$$\ln|v| = 2 \ln|x| \Rightarrow \ln v = \ln x^2 \Rightarrow v = x^2.$$

Підставляємо знайдену функцію  $v(x)$  в другу гілку розв'язку

$$u' \cdot v = 2x^5,$$

знаходимо:

$$u' \cdot x^2 = 2x^5, \quad : x \neq 0$$

$$u' = 2x^3.$$

Проінтегрувавши це рівняння, знаходимо функцію  $u(x, C)$ :

$$u = 2 \int x^3 dx = \frac{2x^4}{4} + C.$$

Підставляємо знайдені функції  $v(x)$  та  $u(x, C)$  в функцію

$$\sqrt{y} = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow \sqrt{y} = x^2 \left( \frac{x^4}{2} + C \right) \Rightarrow y = x^4 \left( \frac{x^4}{2} + C \right)^2.$$

Ми отримали загальний розв'язок. Для знаходження константи,

$$\text{використаємо умову } y(-1) = 1: \quad 1 = (-1)^4 \left( \frac{(-1)^4}{2} + C \right)^2 \Rightarrow C = \frac{1}{2}.$$

Підставляючи отримане значення константи в загальний розв'язок,

$$\text{отримаємо розв'язок задачі Коші (частинний): } y = x^4 \left( \frac{x^4}{2} + \frac{1}{2} \right)^2.$$

$$\text{Відповідь. } y = x^4 \left( \frac{x^4}{2} + \frac{1}{2} \right)^2.$$

#### § 4. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник

#### § 4. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник.

Для функції двох змінних  $u(x, y)$  було введено повний диференціал

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy,$$

причому похідні є функціями двох змінних

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y),$$

тобто

$$du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Рівняння виду

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (4.1)$$

називається **рівнянням в повних диференціалах**, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції  $u(x, y)$ , тобто

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy.$$

Рівняння (4.1) можна переписати  $du(x, y) = 0$ . Тоді загальний інтеграл розв'язку знайдемо у вигляді  $u(x, y) = C$ , де  $C$  – довільна константа. Для того щоб рівняння (4.1) було рівнянням в повних диференціалах, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність (умова Ейлера)

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \quad (4.2)$$

Розв'язувати рівняння у повних диференціалах можна кількома різними способами. Знаходження загального інтегралу розв'язку рівняння (4.1) базується на ідеї знаходження повного диференціала:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y).$$

Для знаходження функції  $u(x, y)$  достатньо проінтегрувати обидві частини рівняння  $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$  за змінною  $x$ . При цьому ми визначимо функцію  $u(x, y)$  з точністю до довільної диференційовної функції  $C(y)$ :

$$u = C(y) + \int P(x, y) dx.$$

#### § 4. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник

Для знаходження функції  $C(y)$  використаємо рівність  $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$ , тобто продиференціюємо отриману функцію за змінною  $y$ .

В принципі, для знаходження функції  $u(x, y)$  достатньо проінтегрувати обидві частини рівняння  $\frac{\partial u}{\partial y} = P(x, y)$  за змінною  $y$ ,

$$u = C(x) + \int Q(x, y) dy.$$

Для знаходження функції  $C(x)$  використаємо рівність  $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$ , тобто продиференціюємо отриману функцію за змінною  $x$ .

При правильному виконанні ми отримаємо одну й ту саму функцію з точністю до постійного числа.

**Приклад 4.1.** Знайти загальний інтеграл рівняння:

$$(e^x + 2y + \sin y)dx + (e^y + 2x + x \cos y)dy = 0.$$

*Розв'язування.* Оскільки рівняння можна представити у вигляді  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ , та рівняння не є однорідним, лінійним або з відокремлюваними змінними, то будемо перевіряти умови рівняння в повних диференціалах. Тут

$$P(x, y) = e^x + 2y + \sin y, \quad Q(x, y) = e^y + 2x + x \cos y.$$

Перевіримо виконання умови  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ :

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = (e^x + 2y + \sin y)'_y = 2 + \cos y$$

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = (e^y + 2x + x \cos y)'_x = 2 + \cos y.$$

Отже, дане диференціальне рівняння є рівнянням у повних диференціалах.

Знайдемо функцію  $u(x, y)$ , використовуючи рівності

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x + 2y + \sin y \quad \text{або} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = e^y + 2x + x \cos y.$$

Інтегруючи першу рівність за змінною  $x$  (вважатимемо змінну  $y$  сталою), знаходимо:

#### § 4. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник

$$u(x, y) = \int (e^x + 2y + \sin y) dx + C(y) = e^x + 2xy + x \sin y + C(y).$$

де  $C(y)$  – довільна диференційована за змінною  $y$  функція. Знайдемо  $C(y)$ , продиференціювавши отриману рівність по  $y$  та врахувавши другу рівність:

$$u(x, y) = e^x + 2xy + x \sin y + C(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (e^x + 2xy + x \sin y + C(y))'_y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x + x \cos y + C'(y) = e^y + 2x + x \cos y$$

$$C'(y) = e^y \Rightarrow C(y) = \int e^y dy \Rightarrow C(y) = e^y + C_1.$$

Отже,

$$u(x, y) = e^x + 2xy + x \sin y + C(y) = e^x + 2xy + x \sin y + (e^y + C_1).$$

Загальним інтегралом є співвідношення

$$u(x, y) = e^x + e^y + 2xy + x \sin y + C_1 = C.$$

*Відповідь.* Загальний інтеграл розв'язку  $e^x + e^y + 2xy + x \sin y = C$ .

**Приклад 4.2.** Знайти загальний інтеграл рівняння:

$$(2x + 4y^2 + 6xy)dx + (3x^2 + 8xy + 6y)dy = 0.$$

*Розв'язування.* Оскільки рівняння можна представити у вигляді  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ , та рівняння не є однорідним, лінійним або з відокремлюваними змінними, то будемо перевіряти умови рівняння в повних диференціалах. Тут

$$P(x, y) = 2x + 4y^2 + 6xy, \quad Q(x, y) = 3x^2 + 8xy + 6y.$$

Перевіримо виконання умови  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ :

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = (2x + 4y^2 + 6xy)'_y = 8y + 6x$$

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = (3x^2 + 8xy + 6y)'_x = 6x + 8y.$$

#### § 4. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник

Отже, дане диференціальне рівняння є рівнянням у повних диференціалах.

Знайдемо функцію  $u(x, y)$ , використовуючи рівності

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 4y^2 + 6xy \quad \text{або} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2 + 8xy + 6y.$$

Інтегруючи другу рівність за змінною  $y$  (вважатимемо змінну  $x$  сталою), знаходимо:

$$u(x, y) = \int (3x^2 + 8xy + 6y) dy + C(x) = 3x^2y + 4xy^2 + 3y^2 + C(x).$$

де  $C(x)$  – довільна диференційована за змінною  $x$  функція. Знайдемо  $C(x)$ , продиференціювавши отриману рівність по  $x$  та врахувавши першу рівність:

$$u(x, y) = 3x^2y + 4xy^2 + 3y^2 + C(x)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= (3x^2y + 4xy^2 + 3y^2 + C(x))'_x = 6xy + 4y^2 + C'(x) \\ &= 2x + 4y^2 + 6xy \end{aligned}$$

$$C'(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad C(x) = \int 2x dx = x^2 + C_1 \quad \Rightarrow \quad C(x) = x^2 + C_1.$$

Отже,

$$u(x, y) = 3x^2y + 4xy^2 + 3y^2 + C(x) = 3x^2y + 4xy^2 + 3y^2 + (x^2 + C_1).$$

Загальним інтегралом є співвідношення

$$u(x, y) = 3x^2y + 4xy^2 + 3y^2 + x^2 + C_1 = C.$$

*Відповідь.* Загальний інтеграл розв'язку  $3x^2y + 4xy^2 + 3y^2 + x^2 = C$ .

**Приклад 4.3.** Знайти загальний інтеграл рівняння:

$$(x^2 - y^2 + y)dx - (2xy - x)dy = 0.$$

*Розв'язування.* Оскільки рівняння можна представити у вигляді  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ , та рівняння не є однорідним, лінійним або з відокремлюваними змінними, то будемо перевіряти умови рівняння в повних диференціалах. Тут  $P(x, y) = x^2 - y^2 + y$ ,  $Q(x, y) = -2xy + x$ .

Перевіримо виконання умови  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ :

#### § 4. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = (x^2 - y^2 + y)'_y = -2y + 1$$

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = (-2xy + x)'_x = -2y + 1.$$

Отже, дане диференціальне рівняння є рівнянням у повних диференціалах.

Знайдемо функцію  $u(x, y)$ , використовуючи рівності

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x^2 - y^2 + y \quad \text{або} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2xy + x.$$

Інтегруючи першу рівність за змінною  $x$  (вважатимемо змінну  $y$  сталою), знаходимо:

$$u(x, y) = \int (x^2 - y^2 + y) dx + C(y) = \frac{x^3}{3} - y^2x + yx + C(y).$$

де  $C(y)$  – довільна диференційована за змінною  $y$  функція. Знайдемо  $C(y)$ , продиференціювавши отриману рівність по  $y$  та врахувавши другу рівність:

$$u(x, y) = \frac{x^3}{3} - y^2x + yx + C(y).$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left( \frac{x^3}{3} - y^2x + yx + C(y) \right)'_y = -2yx + x + C'(y) = -2xy + x$$

$$C'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad C(y) = \int 0 dy \quad \Rightarrow \quad C(y) = C_1.$$

Отже,

$$u(x, y) = \frac{x^3}{3} - y^2x + yx + C(y) = \frac{x^3}{3} - y^2x + yx + C_1.$$

Загальним інтегралом є співвідношення

$$u(x, y) = \frac{x^3}{3} - y^2x + yx + C_1 = C.$$

*Відповідь.* Загальний інтеграл розв'язку  $\frac{x^3}{3} - y^2x + yx = C_2$ .

#### § 4. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник

**Приклад 4.4.** Знайти загальний інтеграл рівняння:

$$(2x \cos^2 y)dx + (2y - x^2 \sin 2y)dy = 0.$$

*Розв'язування.* Оскільки рівняння можна представити у вигляді  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ , та рівняння не є однорідним, лінійним або з відокремлюваними змінними, то будемо перевіряти умови рівняння в повних диференціалах. Тут  $P(x, y) = 2x \cos^2 y$ ,  $Q(x, y) = 2y - x^2 \sin 2y$ .

Перевіримо виконання умови  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ :

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = (2x \cos^2 y)'_y = 2x \cdot 2 \cos y \cdot (-\sin y) = -2x \cdot \sin 2y,$$

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = (2y - x^2 \sin 2y)'_x = -2x \cdot \sin 2y.$$

Отже, дане диференціальне рівняння є рівнянням у повних диференціалах. Знайдемо функцію  $u(x, y)$ , використовуючи рівності

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \cos^2 y \quad \text{або} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y - x^2 \sin 2y.$$

Інтегруючи першу рівність за змінною  $x$  (вважатимемо змінну  $y$  сталою), знаходимо:

$$u(x, y) = \int (2x \cos^2 y)dx + C(y) = x^2 \cos^2 y + C(y),$$

де  $C(y)$  – довільна диференційована за змінною  $y$  функція. Знайдемо  $C(y)$ , продиференціювавши отриману рівність по  $y$  та врахувавши другу рівність:

$$u(x, y) = x^2 \cos^2 y + C(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (x^2 \cos^2 y + C(y))'_y = x^2 \cdot 2 \cos y \cdot (-\sin y) + C'(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x^2 \cdot \sin 2y + C'(y) = 2y - x^2 \sin 2y$$

$$C'(y) = 2y \quad \Rightarrow \quad C(y) = \int 2y dy \quad \Rightarrow \quad C(y) = y^2 + C_1.$$

Отже,  $u(x, y) = x^2 \cos^2 y + C(y) = x^2 \cos^2 y + (y^2 + C_1)$ .

Загальним інтегралом є співвідношення

$$u(x, y) = x^2 \cos^2 y + y^2 + C_1 = C.$$

*Відповідь.* Загальний інтеграл розв'язку  $x^2 \cos^2 y + y^2 = C$ .

#### § 4. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник

**Приклад 4.5.** Знайти загальний інтеграл рівняння:

$$(2x + 3x^2y)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0.$$

*Розв'язування.* Оскільки рівняння можна представити у вигляді  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ , та рівняння не є однорідним, лінійним або з відокремлюваними змінними, то будемо перевіряти умови рівняння в повних диференціалах. Тут

$$P(x, y) = 2x + 3x^2y, \quad Q(x, y) = x^3 - 3y^2.$$

Перевіримо виконання умови  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ :

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = (2x + 3x^2y)'_y = 3x^2$$

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = (x^3 - 3y^2)'_x = 3x^2.$$

Отже, виконується умова  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , тому дане диференціальне рівняння є рівнянням у повних диференціалах.

Знайдемо функцію  $u(x, y)$ , використовуючи рівності

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 3x^2y \quad \text{або} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^3 - 3y^2.$$

Інтегруючи другу рівність за змінною  $y$  (вважатимемо змінну  $x$  сталою), знаходимо:

$$u(x, y) = \int (x^3 - 3y^2)dy + C(x) = x^3y - y^3 + C(x),$$

де  $C(x)$  – довільна диференційована за змінною  $x$  функція. Знайдемо  $C(x)$ , продиференціювавши отриману рівність по  $x$  та врахувавши першу рівність:

$$u(x, y) = x^3y - y^3 + C(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (x^3y - y^3 + C(x))'_x = 3x^2y - 0 + C'(x) = 2x + 3x^2y$$

$$C'(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad C(x) = \int 2x \, dx = x^2 + C_1 \quad \Rightarrow \quad C(x) = x^2 + C_1.$$

Отже,

$$u(x, y) = x^3y - y^3 + C(x) = x^3y - y^3 + (x^2 + C_1).$$

#### § 4. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник

Загальним інтегралом є співвідношення

$$u(x, y) = x^3y - y^3 + x^2 + C_1 = C.$$

*Відповідь.* Загальний інтеграл розв'язку  $x^3y - y^3 + x^2 = C$ .

**Приклад 4.6.** Розв'язати задачу Коші:

$$(3x^2 + 3y)dx + (3y^2 + 3x - 4)dy = 0, \quad y(1) = 1.$$

*Розв'язування.* Спочатку знайдемо загальний інтеграл розв'язку. Оскільки рівняння можна представити у вигляді  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ , та рівняння не є однорідним, лінійним або з відокремлюваними змінними, то будемо перевіряти умови рівняння в повних диференціалах. Тут

$$P(x, y) = 3x^2 + 3y, \quad Q(x, y) = 3y^2 + 3x - 4.$$

Перевіримо виконання умови  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ :

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = (3x^2 + 3y)'_y = 3$$

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = (3y^2 + 3x - 4)'_x = 3.$$

Отже, дане диференціальне рівняння є рівнянням у повних диференціалах.

Знайдемо функцію  $u(x, y)$ , використовуючи рівності

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 3y \quad \text{або} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 + 3x - 4.$$

Інтегруючи першу рівність за змінною  $x$  (вважатимемо змінну  $y$  сталою), знаходимо:

$$u(x, y) = \int (3x^2 + 3y)dx + C(y) = x^3 + 3xy + C(y),$$

де  $C(y)$  – довільна диференційована за змінною  $y$  функція. Знайдемо  $C(y)$ , продиференціювавши отриману рівність по  $y$  та врахувавши другу рівність:

$$u(x, y) = x^3 + 3xy + C(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (x^3 + 3xy + C(y))'_y = 3x + C'(y) = 3y^2 + 3x - 4$$

#### § 4. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник

$$C'(y) = 3y^2 - 4 \Rightarrow C(y) = \int (3y^2 - 4) dy \Rightarrow C(y) = y^3 - 4y + C_1.$$

Отже,

$$u(x, y) = x^3 + 3xy + C(y) = x^3 + 3xy + (y^3 - 4y + C_1).$$

Загальним інтегралом є співвідношення:

$$u(x, y) = x^3 + 3xy + y^3 - 4y + C_1 = C.$$

Загальний інтеграл розв'язку  $x^3 + 3xy + y^3 - 4y = C$ . Для знаходження  $C$  використаємо умову  $y(1) = 1$ :

$$1^3 + 3 + 1^3 - 4 = C \Rightarrow C = 1.$$

Розв'язок задачі Коші:  $x^3 + 3xy + y^3 - 4y = 1$ .

*Відповідь.*  $x^3 + 3xy + y^3 - 4y = 1$ .

**Приклад 4.7.** Розв'язати задачу Коші:

$$(4x + 5y + 4)dx + (6y + 5x - 2)dy = 0, \quad y(1) = -1.$$

*Розв'язування.* Спочатку треба знайти загальний інтеграл розв'язку рівняння. Оскільки рівняння можна представити у вигляді

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

та рівняння не є однорідним, лінійним або з відокремлюваними змінними, то будемо перевіряти умови рівняння в повних диференціалах. Тут

$$P(x, y) = 4x + 5y + 4, \quad Q(x, y) = 6y + 5x - 2.$$

Перевіримо виконання умови  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ :

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = (4x + 5y + 4)'_y = 5$$

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = (6y + 5x - 2)'_x = 5.$$

Отже, умова  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  виконується, тому дане диференціальне рівняння є рівнянням у повних диференціалах.

Знайдемо функцію  $u(x, y)$ , використовуючи рівності

#### § 4. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x + 5y + 4 \quad \text{або} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 6y + 5x - 2.$$

Інтегруючи другу рівність за змінною  $y$  (вважатимемо змінну  $x$  сталою), знаходимо:

$$u(x, y) = \int (6y + 5x - 2) dy + C(x) = 3y^2 + 5xy - 2y + C(x),$$

де  $C(x)$  – довільна диференційована за змінною  $x$  функція. Знайдемо  $C(x)$ , продиференціювавши отриману рівність по  $x$  та врахувавши першу рівність:

$$u(x, y) = 3y^2 + 5xy - 2y + C(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (3y^2 + 5xy - 2y + C(x))'_x = 5y + C'(x) = 4x + 5y + 4$$

$$C'(x) = 4x + 4 \quad \Rightarrow \quad C(x) = \int (4x + 4) dx = 2x^2 + 4x + C_1.$$

$$C(x) = 2x^2 + 4x + C_1.$$

Отже,

$$u(x, y) = 3y^2 + 5xy - 2y + C(x) = 3y^2 + 5xy - 2y + (2x^2 + 4x + C_1).$$

Загальним інтегралом є співвідношення

$$u(x, y) = 3y^2 + 5xy - 2y + 2x^2 + 4x + C_1 = C.$$

Загальний інтеграл розв'язку  $3y^2 + 5xy - 2y + 2x^2 + 4x = C$ . Для знаходження  $C$  використаємо умову  $y(1) = -1$ :

$$3 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot 1 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 = C$$

$$3 - 5 + 2 + 2 + 4 = C \Rightarrow C = 6.$$

Розв'язок задачі Коші:  $3y^2 + 5xy - 2y + 2x^2 + 4x = 6$ .

*Відповідь.*  $3y^2 + 5xy - 2y + 2x^2 + 4x = 6$ .

#### § 4. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник

**Приклад 4.8.** Знайти загальний інтеграл рівняння:

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0.$$

*Розв'язування.* Тут  $P(x, y) = 3x^2 + 6xy^2$ ,  $Q(x, y) = 6x^2y + 4y^3$ .

Перевіримо виконання умови  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ :

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = (3x^2 + 6xy^2)'_y = 12xy$$

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = (6x^2y + 4y^3)'_x = 12xy.$$

Отже, дане диференціальне рівняння є рівнянням у повних диференціалах.

Знайдемо функцію  $u(x, y)$ , використовуючи рівності

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2 \quad \text{або} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 6x^2y + 4y^3.$$

Інтегруючи першу рівність за змінною  $x$  (вважатимемо змінну  $y$  сталою), знаходимо:

$$u(x, y) = \int (3x^2 + 6xy^2)dx + C(y) = x^3 + 3x^2y^2 + C(y),$$

де  $C(y)$  – довільна диференційована за змінною  $y$  функція. Знайдемо  $C(y)$ , продиференціювавши отриману рівність по  $y$  та врахувавши другу рівність:

$$u(x, y) = x^3 + 3x^2y^2 + C(y).$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (x^3 + 3x^2y^2 + C(y))'_y = 6x^2y + C'(y) = 6x^2y + 4y^3$$

$$C'(y) = 4y^3 \Rightarrow C(y) = \int 4y^3 dy \Rightarrow C(y) = y^4 + C_1.$$

Отже,

$$u(x, y) = x^3 + 3x^2y^2 + C(y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 + C_1.$$

Загальним інтегралом є співвідношення

$$u(x, y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 + C_1 = C.$$

*Відповідь.* Загальний інтеграл розв'язку  $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$ .

#### § 4. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник

**Приклад 4.9.** Знайти загальний інтеграл рівняння:

$$(ye^{xy} + 2 \cos 2x)dx + (xe^{xy} - 2)dy = 0.$$

*Розв'язування.* Тут  $P(x, y) = ye^{xy} + 2 \cos 2x$ ,  $Q(x, y) = xe^{xy} - 2$ .

Перевіримо виконання умови  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ :

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = (ye^{xy} + 2 \cos 2x)'_y = e^{xy} + xye^{xy}$$

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = (xe^{xy} - 2)'_x = e^{xy} + xye^{xy}.$$

Отже, дане диференціальне рівняння є рівнянням у повних диференціалах.

Знайдемо функцію  $u(x, y)$ , використовуючи рівності

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ye^{xy} + 2 \cos 2x \quad \text{або} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xe^{xy} - 2.$$

Інтегруючи першу рівність за змінною  $x$  (вважатимемо змінну  $y$  сталою), знаходимо:

$$u(x, y) = \int (ye^{xy} + 2 \cos 2x)dx + C(y) = y \cdot \frac{e^{xy}}{y} + \frac{2 \sin 2x}{2} + C(y),$$

$$u(x, y) = e^{xy} + \sin 2x + C(y),$$

де  $C(y)$  – довільна диференційована за змінною  $y$  функція. Знайдемо  $C(y)$ , продиференціювавши отриману рівність по  $y$  та врахувавши другу рівність:

$$u(x, y) = e^{xy} + \sin 2x + C(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (e^{xy} + \sin 2x + C(y))'_y = xe^{xy} + C'(y) = xe^{xy} - 2$$

$$C'(y) = -2 \Rightarrow C(y) = \int -2 dy \Rightarrow C(y) = -2y + C_1.$$

Отже,

$$u(x, y) = e^{xy} + \sin 2x + C(y) = e^{xy} + \sin 2x + (-2y + C_1).$$

#### § 4. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник

Загальним інтегралом є співвідношення

$$u(x, y) = e^{xy} + \sin 2x - 2y + C_1 = C.$$

Відповідь. Загальний інтеграл розв'язку  $e^{xy} + \sin 2x - 2y = C$ .

**Приклад 4.10.** Знайти загальний інтеграл рівняння:

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right) dx - \left(\frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2}\right) dy = 0.$$

Розв'язування. ОДЗ:  $x \neq 0, y \neq 0, x \neq y$ . Задане диференціальне рівняння записано у диференціальній формі. Тут

$$P(x, y) = \frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}, \quad Q(x, y) = -\left(\frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2}\right).$$

Перевіримо виконання умови  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ :

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \left(\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right)'_y = -\frac{2y(x-y)^2 - y^2 2(x-y)(-1)}{(x-y)^4} = \frac{-2xy}{(x-y)^3},$$

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = -\left(\frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2}\right)'_x = -\frac{-2x(x-y)^2 + x^2 2(x-y)}{(x-y)^4} = \frac{-2xy}{(x-y)^3},$$

Отже,  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , тобто дане диференціальне рівняння є рівнянням у повних диференціалах.

Знайдемо функцію  $u(x, y)$ , використовуючи рівності

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2} \quad \text{або} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{y} + \frac{x^2}{(x-y)^2}.$$

Інтегруючи першу рівність за змінною  $x$  (вважатимемо змінну  $y$  сталою), знаходимо:

$$u(x, y) = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right) dx + C(y) = \ln x - y^2 \cdot \frac{-1}{(x-y)^1} + C(y),$$

де  $C(y)$  – довільна диференційована за змінною  $y$  функція. Знайдемо  $C(y)$ , продиференціювавши отриману рівність по  $y$  та врахувавши другу рівність:

§ 4. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник

$$u(x, y) = \ln x - y^2 \cdot \frac{-1}{(x-y)^1} + C(y) = \ln x + \frac{y^2}{x-y} + C(y).$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left( \ln x + \frac{y^2}{x-y} + C(y) \right)'_y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y(x-y) - y^2(-1)}{(x-y)^2} + C'(y) = -\frac{1}{y} + \frac{x^2}{(x-y)^2}$$

$$\frac{2yx - 2y^2 + y^2}{(x-y)^2} + C'(y) = \frac{-x^2 + 2xy - y^2 + x^2y}{y(x-y)^2}$$

$$\frac{2yx - y^2}{(x-y)^2} + C'(y) = -\frac{1}{y} + \frac{x^2}{(x-y)^2}$$

$$C'(y) = -\frac{1}{y} + \frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{2yx - y^2}{(x-y)^2}$$

$$C'(y) = -\frac{1}{y} + \frac{x^2 - 2yx + y^2}{(x-y)^2}$$

$$C'(y) = -\frac{1}{y} + \frac{(x-y)^2}{(x-y)^2} = 1 - \frac{1}{y}$$

$$C'(y) = 1 - \frac{1}{y} \Rightarrow C(y) = \int \left( 1 - \frac{1}{y} \right) dy \Rightarrow C(y) = y - \ln y + C_1.$$

Отже,

$$u(x, y) = \ln x + \frac{y^2}{x-y} + C(y) = \ln x + \frac{y^2}{x-y} + (y - \ln y + C_1).$$

Загальним інтегралом є співвідношення

$$u(x, y) = \ln x + \frac{y^2}{x-y} + y - \ln y + C_1 = C.$$

*Відповідь.* Загальний інтеграл розв'язку  $\ln x + \frac{y^2}{x-y} + y - \ln y = C$ .

#### § 4. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник

Розглянемо **третій метод** знаходження загального інтегралу диференціального рівняння в повних диференціалах, тобто розв'язку рівняння (4.1) при умові виконання умов (4.2).

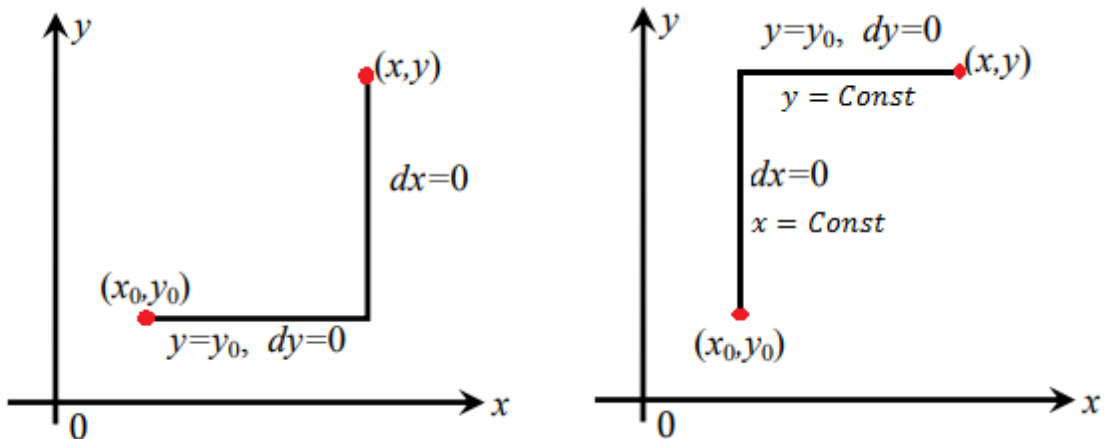
Для диференціального рівняння

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

будемо шукати розв'язок задачі Коші при умові  $y(x_0) = y_0$ . Візьмемо від рівняння криволінійний інтеграл другого роду між точками  $(x_0, y_0)$  та  $(x, y)$ . Оскільки це диференціальне рівняння в повних диференціалах, то значення криволінійного інтегралу

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

**не** буде залежати від контуру інтегрування. Тому, можна вибрати зручний контур, а саме ламану криву (горизонтальний фрагмент + вертикальний або навпаки):



$$\int_{y=y_0}^y P(x, y)dx + Q(x, y) \cdot 0dy + \int_{x=x_0}^x P(x, y) \cdot 0dx + Q(x, y)dy$$

Загальним інтегралом рівняння (4.1) буде (горизонтальний фрагмент + вертикальний):  $x = Const \quad y = Const$

$$u(x, y) - C = \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy - C = 0.$$

Зауважимо, що функцію  $u(x, y) = C$  можна також знайти за формулою:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy. \quad (4.3)$$

#### § 4. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник

**Приклад 4.11.** Знайти частинний розв'язок рівняння:

$$(y^2 - x)dy + (x^2 - y)dx = 0, \quad y(1) = -1.$$

*Розв'язування.* Спочатку знайдемо загальний інтеграл розв'язку рівняння

$$(x^2 - y)dx + (y^2 - x)dy = 0.$$

Тут  $P(x, y) = x^2 - y$ ,  $Q(x, y) = y^2 - x$ .

Перевіримо виконання умови  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ :

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = (x^2 - y)'_y = -1,$$

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = (y^2 - x)'_x = -1.$$

Отже, дане диференціальне рівняння є рівнянням у повних диференціалах.

Знайдемо функцію  $u(x, y)$ , використовуючи рівності (4.3) (вертикальний + горизонтальний фрагмент):

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{x_0}^x (x^2 - y) dx + \int_{y_0}^y (y^2 - x_0) dy \\ u(x, y) &= \left( \frac{x^3}{3} - yx \right) \Big|_{x_0}^x + \left( \frac{y^3}{3} - yx_0 \right) \Big|_{y_0}^y = \\ &= \left( \frac{x^3}{3} - yx \right) - \left( \frac{x_0^3}{3} - yx_0 \right) + \left( \frac{y^3}{3} - yx_0 \right) - \left( \frac{y_0^3}{3} - y_0x_0 \right) = \\ &= \frac{x^3}{3} - yx + \frac{y^3}{3} - yx_0 - \frac{x_0^3}{3} + yx_0 - \frac{y_0^3}{3} + y_0x_0 = \\ &= \frac{x^3}{3} - yx + \frac{y^3}{3} + \left( y_0x_0 - \frac{x_0^3}{3} - \frac{y_0^3}{3} \right) \\ & \quad x_0 = 1, \quad y_0 = -1: \\ u(x, y) &= \frac{x^3}{3} - yx + \frac{y^3}{3} + \left( -1 - \frac{1}{3} - \frac{-1}{3} \right). \end{aligned}$$

§ 4. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник

$$u(x, y) = \frac{x^3}{3} - yx + \frac{y^3}{3} - 1.$$

Обчислення можна було провести інакше:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_1^x (x^2 - y) dx + \int_{-1}^y (y^2 - x)|_{x=1} dy \\ u(x, y) &= \left(\frac{x^3}{3} - yx\right)\Big|_1^x + \left(\frac{y^3}{3} - y\right)\Big|_{-1}^y = \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - yx\right) - \left(\frac{1}{3} - y\right) + \left(\frac{y^3}{3} - y\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - (-1)\right) = \\ &= \frac{x^3}{3} - yx + \frac{y^3}{3} - y - \frac{1}{3} + y + \frac{1}{3} - 1 \\ u(x, y) &= \frac{x^3}{3} - yx + \frac{y^3}{3} - 1 \\ \frac{x^3}{3} - xy + \frac{y^3}{3} &= 1. \end{aligned}$$

Відповідь.  $\frac{x^3}{3} - xy + \frac{y^3}{3} = 1.$

**Приклад 4.12.** Знайти частинний розв'язок рівняння:

$$(3x^2y + 2x)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0, \quad y(0) = 2.$$

*Розв'язування.* Спочатку знайдемо загальний інтеграл розв'язку рівняння

$$(3x^2y + 2x)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0.$$

Тут  $P(x, y) = 3x^2y + 2x$ ,  $Q(x, y) = x^3 - 3y^2$ .

Перевіримо виконання умови  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ :

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = (3x^2y + 2x)'_y = 3x^2$$

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = (x^3 - 3y^2)'_x = 3x^2.$$

Отже, дане диференціальне рівняння є рівнянням у повних диференціалах.

#### § 4. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник

Знайдемо функцію  $u(x, y)$ , використовуючи рівності (4.3):

$$\begin{aligned}u(x, y) &= \int_{x_0}^x (3x^2y + 2x) dx + \int_{y_0}^y (x_0^3 - 3y^2) dy \\u(x, y) &= (x^3y + x^2)|_{x_0}^x + (x_0^3 \cdot y - y^3)|_{y_0}^y = \\&= (x^3y + x^2) - (x_0^3y + x_0^2) + (x_0^3 \cdot y - y^3) - (x_0^3 \cdot y_0 - y_0^3) = \\&= x^3y + x^2 - x_0^3y - x_0^2 + x_0^3 \cdot y - y^3 - x_0^3 \cdot y_0 + y_0^3 = \\&= x^3y + x^2 - y^3 - (x_0^2 + x_0^3 \cdot y_0 - y_0^3) \\&\quad x_0 = 0, \quad y_0 = 2: \\u(x, y) &= x^3y + x^2 - y^3 - (0 + 0 - 8) \\u(x, y) &= x^3y + x^2 - y^3 + 8 \\x^3y + x^2 - y^3 &= -8.\end{aligned}$$

*Обчислення можна було провести інакше:*

$$\begin{aligned}u(x, y) &= \int_0^x (3x^2y + 2x) dx + \int_2^y (x^3 - 3y^2)|_{x=0} dy \\u(x, y) &= (x^3y + x^2)|_0^x + (0 \cdot y - y^3)|_2^y = \\&= (x^3y + x^2) - (0 \cdot y + 0) + (-y^3) - (-8) = x^3y + x^2 - y^3 + 8 \\u(x, y) &= x^3y + x^2 - y^3 + 8. \\x^3y + x^2 - y^3 &= -8.\end{aligned}$$

*Відповідь.*  $x^3y + x^2 - y^3 = -8$ .

Таким чином, рівняння в повних диференціалах інтегрується досить просто. У зв'язку з цим виникає питання, а чи не можна множенням на певний множник  $\mu(x, y)$  довільне рівняння в диференціальній формі

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad \left( \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \quad (4.4)$$

#### § 4. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник

звести до рівняння в повних диференціалах? Виявляється, що за певних умов це можливо зробити.

Функція  $\mu(x, y)$  називається **інтегруючим (інтегрувальним) множителем** рівняння

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

якщо після домноження на неї це рівняння стає рівнянням в повних диференціалах. Можна довести, що всяке диференціальне рівняння першого порядку, яке задовольняє умовам теореми Коші, має багато інтегруючих множників.

**Теорема (про існування інтегрального множника).** Якщо рівняння

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

має загальний інтеграл розв'язку  $u(x, y) = C$ , для якого існують частинні похідні другого порядку  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ , то це рівняння має інтегруючий множник.

**Теорема (про неєдиність інтегруючого множника).**

Якщо  $\mu_0 = \mu(x, y)$  – інтегруючий множник рівняння

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x},$$

а  $u_0(x, y)$  відповідний йому інтеграл, то  $\mu = \mu_0 \cdot g(u_0)$ , де  $g(u)$  – будь-яка неперервно-диференційована функція, яка не дорівнює тотожно нулю, також є інтегруючим множителем диференціального рівняння (4.1).

**Теорема (про загальний вигляд інтегруючого множника).**

Якщо два будь-яких інтегруючих множника  $\mu_0$  і  $\mu_1$  одного диференціального рівняння

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x},$$

#### § 4. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник

а  $u_0(x, y)$  відповідний  $\mu_0$  інтеграл розв'язку, то між інтегральними множниками існує співвідношення:

$$\mu_1 = \mu_0 \cdot g(u_0),$$

де  $g(u)$  – будь-яка не рівна тотожно нулю неперервно-диференційована функція.

Таким чином, для диференціального рівняння (4.4) існує безліч інтегруючих множників та залишилося знайти хоча б один з них. Оскільки не існує загального методу побудови інтегруючих множників, то основною проблемою є знаходження хоча б одного з них.

Розглянемо методи знаходження інтегруючих множників  $\mu(x, y)$ . Ще раз підкреслимо, що загального методу знаходження функцій  $\mu(x, y)$  немає. Інтегруючий множник можна легко знайти лише в деяких окремих випадках. Складемо рівняння для інтегровальних множників. Якщо  $\mu = \mu(x, y)$  – інтегруючий множник рівняння (4.4), то рівняння

$$\mu \cdot P(x, y)dx + \mu \cdot Q(x, y)dy = 0 \quad (4.5)$$

є рівнянням у повних диференціалах, тобто

$$\mu \cdot P(x, y)dx + \mu \cdot Q(x, y)dy = du.$$

Тому, згідно з умовою (4.2), маємо

$$\frac{\partial(\mu \cdot P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu \cdot Q)}{\partial x}.$$

Проводячи диференціювання за вказаними змінними, отримаємо:

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} \cdot P + \mu \cdot \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} \cdot Q + \mu \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} \cdot P - \frac{\partial \mu}{\partial x} \cdot Q = \mu \cdot \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right),$$

або

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y} \cdot P - \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x} \cdot Q &= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial(\ln \mu)}{\partial y} \cdot P - \frac{\partial(\ln \mu)}{\partial x} \cdot Q &= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \quad (4.6) \end{aligned}$$

Таким чином, щоб отримати інтегруючий множник, треба знайти який-небудь частинний розв'язок останнього рівняння. Це рівняння є диференціальним рівнянням з частинними похідними відносно невідомої

#### § 4. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник

функції  $\mu(x, y)$ . В загальному випадку задача знаходження інтегруючого множника  $\mu(x, y)$  для останнього рівняння значно складніша, ніж розв'язування самого рівняння (4.4). Але у простих випадках частинний розв'язок такого рівняння знаходиться порівняно легко.

Розглянемо окремі випадки, коли рівняння (4.5) спрощується і інтегруючий множник рівняння (4.4) можна знайти.

Припустимо, що рівняння (4.4) має інтегруючий множник, який залежить лише від  $x$ , тобто  $\mu = \mu(x)$ ; тоді в рівнянні (4.6) похідна від інтегруючого множника за змінною  $y$  буде дорівнювати нулю, та рівняння (4.6) набуває вигляду:

$$-\frac{\partial(\ln \mu)}{\partial x} \cdot Q = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Для зручності змінюємо знаки:

$$\frac{d(\ln \mu)}{dx} \cdot Q = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Ділимо обидві частини на ненульову функцію  $Q(x, y)$  та розділяємо змінні:

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{d(\ln \mu)}{dx} \Rightarrow d(\ln \mu) = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx \Rightarrow$$

Інтегруємо обидві частини за змінною  $x$ , після чого виражаємо функцію  $\mu$ :

$$\ln \mu = \int \left( \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} \right) dx \Rightarrow \mu = e^{\int \left( \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} \right) dx}.$$

Якщо рівняння (4.4) має інтегруючий множник, який залежить лише від  $y$ , тобто  $\mu = \mu(y)$ ; тоді в рівнянні (4.6) похідна від інтегруючого множника за змінною  $x$  буде дорівнювати нулю, рівняння набуває вигляду:

$$\frac{\partial(\ln \mu)}{\partial y} \cdot P = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

В цьому варіанті,

#### § 4. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник

$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} = \frac{d(\ln \mu)}{dy} \Rightarrow d(\ln \mu) = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} dy \Rightarrow$$

Інтегруємо обидві частини за змінною  $y$ , після чого виражаємо функцію  $\mu$ :

$$\ln \mu = \int \left( \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} \right) dy \Rightarrow \mu = e^{\int \left( \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} \right) dx}.$$

Можна інтегруючий множник знаходити «підбором». При цьому домножують обидві частини рівняння (4.6) на  $\mu$ :

$$\mu(x, y) = x;$$

$$\mu(x, y) = y;$$

$$\mu(x, y) = x \cdot y;$$

$$\mu(x, y) = x^2 \pm y^2.$$

Після чого перевіряють рівняння на належність до класу «у повних диференціалах».

Зауваження: при використанні інтегруючого множника слід враховувати, що множення початкового рівняння на функцію  $\mu(x, y)$  може привести як до втрати деяких розв'язків, так і до появи зайвих розв'язків.

**Приклад 4.13.** Знайти загальний інтеграл рівняння:

$$y dx + (2x + 2y^2 \cdot \sin 2y - 3y \cdot \cos 2y) dy = 0.$$

*Розв'язування.* Оскільки рівняння можна представити у вигляді

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0,$$

та рівняння не є однорідним, лінійним або з відокремлюваними змінними, то будемо перевіряти умови рівняння в повних диференціалах. Тут  $P(x, y) = y$ ,  $Q(x, y) = 2x + 2y^2 \cdot \sin 2y - 3y \cdot \cos 2y$ .

Перевіримо виконання умови  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ :

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = (y)'_y = 1,$$

#### § 4. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = (2x + 2y^2 \cdot \sin 2y - 3y \cdot \cos 2y)'_x = 2.$$

Отже,  $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ , тому будемо шукати інтегруючий множник.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2 - 1 = 1.$$

Оскільки ми отримали число, то звертаємо увагу на простоту функцій  $P(x,y)$  та  $Q(x,y)$ : функція  $P(x,y) = y$  є більш простою, тому будемо працювати із нею.

$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} = \frac{1}{y}.$$

Тоді

$$\frac{d(\ln \mu)}{dy} = \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad d(\ln \mu) = \frac{dy}{y}.$$

Інтегруємо обидві частини зі змінною  $y$ :

$$\int d(\ln \mu) = \int \frac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad \ln \mu = \ln y \quad \Rightarrow \quad \mu = y$$

Домножуючи на  $\mu = y$  обидві частини початкового рівняння

$$y dx + (2x + 2y^2 \cdot \sin 2y - 3y \cdot \cos 2y) dy = 0,$$

отримаємо:

$$y^2 dx + y(2x + 2y^2 \cdot \sin 2y - 3y \cdot \cos 2y) dy = 0,$$

або

$$y^2 dx + (2xy + 2y^3 \cdot \sin 2y - 3y^2 \cdot \cos 2y) dy = 0.$$

Переконаємося, що після домноження ми отримали рівняння в повних диференціалах. Тут

$$M(x,y) = y^2, \quad N(x,y) = 2xy + 2y^3 \cdot \sin 2y - 3y^2 \cdot \cos 2y.$$

Перевіримо виконання умови  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ :

§ 4. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = (y^2)'_y = 2y,$$

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = (2xy + 2y^3 \cdot \sin 2y - 3y^2 \cdot \cos 2y)'_x = 2y.$$

Отже,  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ , тому дане диференціальне рівняння є рівнянням у повних диференціалах.

Знайдемо функцію  $u(x, y)$ , використовуючи рівності

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 \quad \text{або} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy + 2y^3 \cdot \sin 2y - 3y^2 \cdot \cos 2y.$$

Інтегруючи першу рівність за змінною  $x$  (вважатимемо змінну  $y$  сталою), знаходимо:

$$u(x, y) = \int (y^2) dx + C(y) = y^2 x + C(y),$$

де  $C(y)$  – довільна диференційована за змінною  $y$  функція. Знайдемо  $C(y)$ , продиференціювавши отриману рівність по  $y$  та врахувавши другу рівність:

$$u(x, y) = y^2 x + C(y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (y^2 x + C(y))'_y = 2xy + C'(y) = 2xy + 2y^3 \cdot \sin 2y - 3y^2 \cdot \cos 2y$$

$$C'(y) = 2y^3 \cdot \sin 2y - 3y^2 \cdot \cos 2y$$

$$C(y) = \int (2y^3 \cdot \sin 2y - 3y^2 \cdot \cos 2y) dy$$

$$\begin{aligned} I = \int (2y^3 \cdot \sin 2y) dy &= \left| \begin{array}{l} a = 2y^3 \\ db = \sin 2y dy \\ da = 6y^2 dy \\ b = \frac{-\cos 2y}{2} \end{array} \right| = \\ &= \left| \int a \cdot db = a \cdot b - \int b \cdot da \right| = \\ &= 2y^3 \cdot \frac{-\cos 2y}{2} - \int -3y^2 \cdot \cos 2y \cdot dy. \end{aligned}$$

#### § 4. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник

$$\begin{aligned}C(y) &= 2y^3 \cdot \frac{-\cos 2y}{2} + \int 3y^2 \cdot \cos 2y \cdot dy - \int 3y^2 \cdot \cos 2y \cdot dy \\ &= -y^3 \cdot \cos 2y \\ C(y) &= -y^3 \cos 2y + C_1.\end{aligned}$$

Отже,

$$u(x, y) = y^2x + C(y) = y^2x + (-y^3 \cos 2y + C_1).$$

Загальним інтегралом є співвідношення

$$u(x, y) = y^2x - y^3 \cos 2y + C_1 = C.$$

Залишилося лише врахувати, що сума/різниця двох констант є константою.

*Відповідь.* Загальний інтеграл розв'язку  $y^2x - y^3 \cos 2y = C$ .

**Приклад 4.14.** Знайти загальний інтеграл рівняння:

$$(x - xy)dx + (x^2 + y)dy = 0.$$

*Розв'язування.* Оскільки рівняння можна представити у вигляді

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

та рівняння не є однорідним, лінійним або з відокремлюваними змінними, то будемо перевіряти умови рівняння в повних диференціалах. Тут

$$P(x, y) = x - xy, \quad Q(x, y) = x^2 + y.$$

Перевіримо виконання умови  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ :

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = (x - xy)'_y = -x,$$

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = (x^2 + y)'_x = 2x.$$

Отже,  $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ , тому будемо шукати інтегруючий множник.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - (-x) = 3x$$

§ 4. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник

$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} = \frac{3x}{(x - xy)} = \frac{3x}{x(1 - y)} = \frac{3}{1 - y} = \frac{-3}{y - 1}$$

$$\frac{d(\ln \mu)}{dy} = \frac{-3}{y - 1}$$

$$d(\ln \mu) = \frac{-3dy}{y - 1}$$

$$\int d(\ln \mu) = -3 \int \frac{dy}{y - 1}$$

$$\ln \mu = -3 \cdot \ln|y - 1|$$

$$\mu = (y - 1)^{-3} = \frac{1}{(y - 1)^3}$$

Домножуючи на  $\mu = \frac{1}{(y-1)^3}$  обидві частини рівняння

$$(x - xy)dx + (x^2 + y)dy = 0,$$

отримаємо:

$$\frac{1}{(y - 1)^3} \cdot (x - xy)dx + \frac{1}{(y - 1)^3} \cdot (x^2 + y)dy = 0$$

або

$$\frac{x(1 - y)}{(y - 1)^3} dx + \frac{(x^2 + y)}{(y - 1)^3} dy = 0.$$

Переконаємося, що після домноження ми отримали рівняння в повних диференціалах. Тут

$$M(x, y) = \frac{x(1 - y)}{(y - 1)^3}, \quad N(x, y) = \frac{(x^2 + y)}{(y - 1)^3}.$$

Перевіримо виконання умови  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ :

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \left( \frac{x(1 - y)}{(y - 1)^3} \right)'_y = \left( \frac{-x}{(y - 1)^2} \right)'_y = \frac{2x}{(y - 1)^3},$$

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \left( \frac{(x^2 + y)}{(y - 1)^3} \right)'_x = \frac{2x}{(y - 1)^3}.$$

#### § 4. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник

Отже,  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ , тому дане диференціальне рівняння є рівнянням у повних диференціалах.

Знайдемо функцію  $u(x, y)$ , використовуючи рівності

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x(1-y)}{(y-1)^3} = \frac{-x}{(y-1)^2} \quad \text{або} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2+y}{(y-1)^3}.$$

Інтегруючи першу рівність за змінною  $x$  (вважатимемо змінну  $y$  сталою), знаходимо:

$$u(x, y) = \int \left( \frac{-x}{(y-1)^2} \right) dx + C(y) = \frac{-1}{(y-1)^2} \cdot \frac{x^2}{2} + C(y),$$

де  $C(y)$  – довільна диференційована за змінною  $y$  функція. Знайдемо  $C(y)$ , продиференціювавши отриману рівність по  $y$  та врахувавши другу рівність:

$$u(x, y) = \frac{-1}{(y-1)^2} \cdot \frac{x^2}{2} + C(y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left( \frac{-1}{(y-1)^2} \cdot \frac{x^2}{2} + C(y) \right)'_y = \frac{2}{(y-1)^3} \cdot \frac{x^2}{2} + C'(y).$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2}{(y-1)^3} + C'(y) = \frac{(x^2 + y)}{(y-1)^3}.$$

$$C'(y) = \frac{y}{(y-1)^3}.$$

$$C(y) = \int \left( \frac{y}{(y-1)^3} \right) dy = \int \left( \frac{y-1+1}{(y-1)^3} \right) dy = \int \frac{1}{(y-1)^2} + \frac{1}{(y-1)^3} dy$$

$$C(y) = -\frac{1}{y-1} + \frac{-1}{2(y-1)^2} + C_1.$$

Отже,

$$u(x, y) = \frac{-x^2}{2(y-1)^2} + C(y) = \frac{-x^2}{2(y-1)^2} + \left( -\frac{1}{y-1} + \frac{-1}{2(y-1)^2} + C_1 \right).$$

Загальним інтегралом є співвідношення

$$u(x, y) = \frac{-x^2}{2(y-1)^2} - \frac{1}{y-1} - \frac{1}{2(y-1)^2} + C_1 = C.$$

*Відповідь.* Загальний інтеграл розв'язку  $\frac{-x^2}{2(y-1)^2} - \frac{1}{y-1} - \frac{1}{2(y-1)^2} = C$ .

#### § 4. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник

**Приклад 4.15.** Знайти загальний інтеграл рівняння:

$$\sin 2y \cdot dx + 2(x - \cos^2 y \cdot \cos 2y)dy = 0.$$

*Розв'язування.* Оскільки рівняння можна представити у вигляді

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

та рівняння не є однорідним, лінійним або з відокремлюваними змінними, то будемо перевіряти умови рівняння в повних диференціалах. Тут

$$P(x, y) = \sin 2y, \quad Q(x, y) = 2(x - \cos^2 y \cdot \cos 2y).$$

Перевіримо виконання умови  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ :

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = (\sin 2y)'_y = 2 \cos 2y,$$

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = 2(x - \cos^2 y \cdot \cos 2y)'_x = 2.$$

Отже,  $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ , тому будемо шукати інтегруючий множник.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2 - 2 \cos 2y = 2(1 - \cos 2y) = 2 \cdot 2 \sin^2 y$$

$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} = \frac{4 \sin^2 y}{\sin 2y} = \frac{4 \cdot \sin^2 y}{2 \cdot \sin y \cdot \cos y} = \frac{2 \sin y}{\cos y} = 2 \operatorname{tg} y.$$

Тоді можемо записати, що

$$\frac{d(\ln \mu)}{dy} = 2 \operatorname{tg} y \quad \Rightarrow \quad d(\ln \mu) = 2 \operatorname{tg} y \cdot dy$$

$$\int d(\ln \mu) = \int 2 \operatorname{tg} y \cdot dy$$

$$\ln \mu = -2 \cdot \ln |\cos y| = \ln \left| \frac{1}{\cos^2 y} \right|.$$

Остаточно маємо:

$$\mu = \frac{1}{\cos^2 y}.$$

#### § 4. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник

Домножуючи на  $\mu = \frac{1}{\cos^2 y}$  обидві частини рівняння

$$\sin 2y \cdot dx + 2(x - \cos^2 y \cdot \cos 2y)dy = 0.$$

отримаємо

$$\frac{\sin 2y}{\cos^2 y} \cdot dx + \frac{2(x - \cos^2 y \cdot \cos 2y)}{\cos^2 y} dy = 0.$$

або

$$2\operatorname{tg} y \cdot dx + 2\left(\frac{x}{\cos^2 y} - \cos 2y\right) dy = 0.$$

Переконаємося, що після домноження ми отримали рівняння в повних диференціалах. Тут

$$M(x, y) = 2 \cdot \operatorname{tg} y, \quad N(x, y) = 2\left(\frac{x}{\cos^2 y} - \cos 2y\right).$$

Перевіримо виконання умови  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ :

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = (2 \operatorname{tg} y)'_y = \frac{2}{\cos^2 y},$$

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 2\left(\frac{x}{\cos^2 y} - \cos 2y\right)'_x = \frac{2}{\cos^2 y}.$$

Отже,  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ , тому дане диференціальне рівняння є рівнянням у повних диференціалах.

Знайдемо функцію  $u(x, y)$ , використовуючи рівності

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2 \cdot \operatorname{tg} y \quad \text{або} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2\left(\frac{x}{\cos^2 y} - \cos 2y\right).$$

Інтегруючи першу рівність за змінною  $x$  (вважатимемо змінну  $y$  сталою), знаходимо:

$$u(x, y) = \int (2 \cdot \operatorname{tg} y) dx + C(y) = 2 \cdot \operatorname{tg} y \cdot x + C(y),$$

де  $C(y)$  – довільна диференційована за змінною  $y$  функція. Знайдемо  $C(y)$ , продиференціювавши отриману рівність по  $y$  та врахувавши другу рівність:

#### § 4. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник

$$u(x, y) = 2x \cdot \operatorname{tg} y + C(y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (2x \cdot \operatorname{tg} y + C(y))'_y = \frac{2x}{\cos^2 y} + C'(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2x}{\cos^2 y} + C'(y) = 2 \left( \frac{x}{\cos^2 y} - \cos 2y \right)$$

$$C'(y) = -2 \cos 2y$$

$$C(y) = \int (-2 \cos 2y) dy = -2 \cdot \frac{\sin 2y}{2} + C_1.$$

$$C(y) = -\sin 2y + C_1.$$

Отже,

$$u(x, y) = 2x \cdot \operatorname{tg} y + C(y) = 2x \cdot \operatorname{tg} y + (-\sin 2y + C_1).$$

Загальним інтегралом є співвідношення

$$u(x, y) = 2x \cdot \operatorname{tg} y - \sin 2y + C_1 = C.$$

*Відповідь.* Загальний інтеграл розв'язку  $2x \cdot \operatorname{tg} y - \sin 2y = C$ .

**Приклад 4.16.** Знайти загальний інтеграл рівняння:

$$2y^2 \cdot dx + \left( x + e^{\frac{1}{y}} \right) dy = 0.$$

*Розв'язування.* Оскільки рівняння можна представити у вигляді

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

та рівняння не є однорідним, лінійним або з відокремлюваними змінними, то будемо перевіряти умови рівняння в повних диференціалах. Тут

$$P(x, y) = 2y^2, \quad Q(x, y) = x + e^{\frac{1}{y}}.$$

Перевіримо виконання умови  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ :

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = (2y^2)'_y = 4y,$$

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \left( x + e^{\frac{1}{y}} \right)'_x = 1.$$

#### § 4. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник

Отже,  $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ , тому будемо шукати інтегруючий множник.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - 4y$$

$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} = \frac{1 - 4y}{2y^2} = \frac{1}{2y^2} - \frac{2}{y}$$

$$d(\ln \mu) = \left( \frac{1}{2y^2} - \frac{2}{y} \right) \cdot dy$$

$$\int d(\ln \mu) = \int \left( \frac{1}{2y^2} - \frac{2}{y} \right) \cdot dy$$

$$\ln \mu = -\frac{1}{2y} - 2 \cdot \ln|y|$$

$$\mu = e^{(-\frac{1}{2y} - 2 \cdot \ln|y|)} = e^{(-\frac{1}{2y})} \cdot e^{(\ln y^{-2})} = \frac{e^{-\frac{1}{2y}}}{y^2}$$

Домножуючи на  $\mu = \frac{e^{-\frac{1}{2y}}}{y^2}$  обидві частини рівняння

$$2y^2 \cdot dx + \left( x + e^{\frac{1}{y}} \right) dy = 0.$$

отримаємо

$$\frac{e^{-\frac{1}{2y}}}{y^2} \cdot 2y^2 \cdot dx + \frac{e^{-\frac{1}{2y}}}{y^2} \cdot \left( x + e^{\frac{1}{y}} \right) dy = 0.$$

або

$$2e^{-\frac{1}{2y}} \cdot dx + \frac{1}{y^2} \cdot \left( xe^{-\frac{1}{2y}} + e^{\frac{1}{2y}} \right) dy = 0.$$

Переконаємося, що після домноження ми отримали рівняння в повних диференціалах. Тут

$$M(x, y) = 2e^{-\frac{1}{2y}}, \quad N(x, y) = \frac{1}{y^2} \cdot \left( xe^{-\frac{1}{2y}} + e^{\frac{1}{2y}} \right).$$

Перевіримо виконання умови  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ :

#### § 4. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \left( 2e^{-\frac{1}{2y}} \right)'_y = 2e^{-\frac{1}{2y}} \frac{1}{2y^2} = \frac{e^{-\frac{1}{2y}}}{y^2},$$

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \left( \frac{1}{y^2} \cdot \left( xe^{-\frac{1}{2y}} + e^{\frac{1}{2y}} \right) \right)'_x = \frac{e^{-\frac{1}{2y}}}{y^2}.$$

Отже,  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ , тому дане диференціальне рівняння є рівнянням у повних диференціалах.

Знайдемо функцію  $u(x, y)$ , використовуючи рівності

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^{-\frac{1}{2y}} \quad \text{або} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{y^2} \cdot \left( xe^{-\frac{1}{2y}} + e^{\frac{1}{2y}} \right).$$

Інтегруючи першу рівність за змінною  $x$  (вважатимемо змінну  $y$  сталою), знаходимо:

$$u(x, y) = \int \left( 2e^{-\frac{1}{2y}} \right) dx + C(y) = 2e^{-\frac{1}{2y}} \cdot x + C(y),$$

де  $C(y)$  – довільна диференційована за змінною  $y$  функція. Знайдемо  $C(y)$ , продиференціювавши отриману рівність по  $y$  та врахувавши другу рівність:

$$u(x, y) = 2e^{-\frac{1}{2y}} \cdot x + C(y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left( 2e^{-\frac{1}{2y}} \cdot x + C(y) \right)'_y = 2x \cdot e^{-\frac{1}{2y}} \cdot \frac{1}{2y^2} + C'(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x \cdot e^{-\frac{1}{2y}} \cdot \frac{1}{y^2} + C'(y) = \frac{1}{y^2} \cdot \left( xe^{-\frac{1}{2y}} + e^{\frac{1}{2y}} \right)$$

$$C'(y) = \frac{e^{\frac{1}{2y}}}{y^2}$$

$$C(y) = \int \frac{e^{\frac{1}{2y}}}{y^2} dy = - \int e^{\frac{1}{2y}} \cdot d\left(\frac{1}{y}\right) = -2e^{\frac{1}{2y}} + C_1.$$

$$C(y) = -2e^{\frac{1}{2y}} + C_1.$$

#### § 4. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник

Отже,

$$u(x, y) = 2e^{-\frac{1}{2y}} \cdot x + C(y) = 2e^{-\frac{1}{2y}} \cdot x + \left(-2e^{\frac{1}{2y}} + C_1\right).$$

Загальним інтегралом є співвідношення

$$u(x, y) = 2e^{-\frac{1}{2y}} \cdot x - 2e^{\frac{1}{2y}} = C \Rightarrow u(x, y) = e^{-\frac{1}{2y}} \cdot x - e^{\frac{1}{2y}} = C_1.$$

*Відповідь.* Загальний інтеграл розв'язку  $e^{-\frac{1}{2y}} \cdot x - e^{\frac{1}{2y}} = C_1$ .

Знаходження інтегруючого множника – це своєрідне мистецтво.

Потренуємося знаходити ці функції.

**Приклад 4.17.** Знайти інтегруючий множник рівняння:

$$(x^2 + y^2 + 6x)dx + 2ydy = 0.$$

*Розв'язування.* Маємо  $P(x, y) = x^2 + y^2 + 6x$ ,  $Q(x, y) = 2y$ .

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = (x^2 + y^2 + 6x)'_y = 2y,$$

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = (2y)'_x = 0.$$

Умова  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  не виконується. Будемо шукати інтегруючий множник.

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y - 0 = 2y.$$

Лише залежність від  $y$ .

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{2y}{2y} = 1$$

Тоді

$$d(\ln \mu) = 1 \cdot dx \Rightarrow \int d(\ln \mu) = \int 1 \cdot dx \Rightarrow \ln \mu = x.$$
$$\mu = e^x.$$

Домножимо обидві частини початкового рівняння

#### § 4. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник

$$(x^2 + y^2 + 6x)dx + 2ydy = 0.$$

на знайдену функцію  $\mu = e^x$ :

$$e^x(x^2 + y^2 + 6x)dx + 2ye^x dy = 0.$$

Переконаємося, що після домноження ми отримали рівняння в повних диференціалах

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Тут

$$M(x, y) = e^x(x^2 + y^2 + 6x), \quad N(x, y) = 2ye^x.$$

Перевіримо виконання умови  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ :

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = (e^x(x^2 + y^2 + 6x))'_y = e^x(2y) = 2ye^x,$$

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = (e^x(2y))'_x = 2ye^x.$$

Отже,  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ , тому дане диференціальне рівняння є рівнянням у повних диференціалах. Інтегруючий множник знайдено правильно.

*Відповідь.* Інтегруючий множник рівняння  $\mu = e^x$ .

**Приклад 4.18.** Знайти інтегруючий множник рівняння:

$$(2xy^2 - y)dx + (x + y^2 + y)dy = 0.$$

*Розв'язування.* Маємо  $P(x, y) = 2xy^2 - y$ ,  $Q(x, y) = x + y^2 + y$ .

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = (2xy^2 - y)'_y = 4xy - 1,$$

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = (x + y^2 + y)'_x = 1.$$

Умова  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  не виконується. Будемо шукати інтегруючий множник.

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = (4xy - 1) - 1 = 2(2xy - 1).$$

Є залежність від  $x$ .

#### § 4. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{-P} = \frac{2(2xy - 1)}{-y(2xy - 1)} = \frac{-2}{y}$$

Тоді

$$d(\ln \mu) = -\frac{2}{y} \cdot dy \Rightarrow \int d(\ln \mu) = \int -\frac{2}{y} \cdot dy \Rightarrow \ln \mu = -2 \ln y.$$
$$\mu = y^{-2} = \frac{1}{y^2}.$$

Домножимо обидві частини початкового рівняння

$$(2xy^2 - y)dx + (x + y^2 + y)dy = 0.$$

на знайдену функцію  $\mu = \frac{1}{y^2}$ :

$$\frac{1}{y^2} (2xy^2 - y)dx + \frac{1}{y^2} (x + y^2 + y)dy = 0.$$

$$\left(2x - \frac{1}{y}\right) dx + \left(\frac{x}{y^2} + 1 + \frac{1}{y}\right) dy = 0.$$

Переконаємося, що після домноження ми отримали рівняння в повних диференціалах

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Тут

$$M(x, y) = 2x - \frac{1}{y}, \quad N(x, y) = \frac{x}{y^2} + 1 + \frac{1}{y}.$$

Перевіримо виконання умови  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ :

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \left(2x - \frac{1}{y}\right)'_y = \frac{1}{y^2},$$

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \left(\frac{x}{y^2} + 1 + \frac{1}{y}\right)'_x = \frac{1}{y^2}.$$

Отже,  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ , тому дане диференціальне рівняння є рівнянням у повних диференціалах. Інтегруючий множник знайдено правильно.

*Відповідь.* Інтегруючий множник рівняння  $\mu = \frac{1}{y^2}$ .

#### § 4. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник

**Приклад 4.19.** Знайти інтегруючий множник рівняння:

$$(1 + x^2y)dx + (x^3 + x^2)dy = 0.$$

Розв'язування. Маємо  $P(x, y) = 1 + x^2y$ ,  $Q(x, y) = x^3 + x^2$ .

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = (1 + x^2y)'_y = x^2,$$

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = (x^3 + x^2)'_x = 3x^2 + 2x.$$

Умова  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  не виконується. Будемо шукати інтегруючий множник.

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = x^2 - (3x^2 + 2x) = -2x(x + 1).$$

Є залежність від  $x$ .

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{-2x(x + 1)}{x^2(x + 1)} = \frac{-2}{x}$$

Тоді

$$d(\ln \mu) = -\frac{2}{x} \cdot dx \Rightarrow \int d(\ln \mu) = \int -\frac{2}{x} \cdot dx \Rightarrow \ln \mu = -2 \ln x.$$

$$\mu = x^{-2} = \frac{1}{x^2}.$$

Домножимо обидві частини початкового рівняння

$$(1 + x^2y)dx + (x^3 + x^2)dy = 0.$$

на знайдену функцію  $\mu = \frac{1}{x^2}$ :

$$\frac{1}{x^2}(1 + x^2y)dx + \frac{1}{x^2}(x^3 + x^2)dy = 0.$$

$$\left(\frac{1}{x^2} + y\right)dx + (x + 1)dy = 0.$$

Переконаємося, що після домноження ми отримали рівняння в повних диференціалах

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

#### § 4. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник

Тут

$$M(x, y) = \frac{1}{x^2} + y, \quad N(x, y) = x + 1.$$

Перевіримо виконання умови  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ :

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \left(\frac{1}{x^2} + y\right)'_y = 1,$$

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = (x + 1)'_x = 1.$$

Отже,  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ , тому дане диференціальне рівняння є рівнянням у повних диференціалах. Інтегруючий множник знайдено правильно.

*Відповідь.* Інтегруючий множник рівняння  $\mu = \frac{1}{x^2}$ .

**Приклад 4.20.** Знайти інтегруючий множник рівняння:

$$2xy \ln y \, dx + (x^2 + y^2 \sqrt{y^2 + 1}) \, dy = 0.$$

*Розв'язування.* Маємо  $P(x, y) = 2xy \ln y$ ,  $Q(x, y) = x^2 + y^2 \sqrt{y^2 + 1}$ .

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = (2xy \ln y)'_y = 2x(\ln y + 1),$$

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = (x^2 + y^2 \sqrt{y^2 + 1})'_x = 2x.$$

Умова  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  не виконується. Будемо шукати інтегруючий множник.

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x(\ln y + 1) - (2x) = 2x \ln y.$$

Є залежність від  $x, y$ . Незавжно помітити, що при діленні цієї різниці на функцію  $P(x, y) = 2xy \ln y$  відбудеться скорочення та спрощення

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{-P} = \frac{2x \ln y}{-2xy \ln y} = \frac{-1}{y}$$

Тоді

$$d(\ln \mu) = -\frac{1}{y} \cdot dy \Rightarrow \int d(\ln \mu) = \int -\frac{1}{y} \cdot dy \Rightarrow \ln \mu = -\ln y.$$

$$\mu = y^{-1} = \frac{1}{y}.$$

#### § 4. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник

Домножимо обидві частини початкового рівняння

$$2xy \ln y \, dx + (x^2 + y^2 \sqrt{y^2 + 1}) \, dy = 0.$$

на знайдену функцію  $\mu = \frac{1}{y}$ :

$$\frac{1}{y} 2xy \ln y \, dx + \frac{1}{y} (x^2 + y^2 \sqrt{y^2 + 1}) \, dy = 0.$$

$$2x \ln y \, dx + \frac{1}{y} (x^2 + y^2 \sqrt{y^2 + 1}) \, dy = 0.$$

Переконаємося, що після домноження ми отримали рівняння в повних диференціалах

$$M(x, y) \, dx + N(x, y) \, dy = 0.$$

Тут

$$M(x, y) = 2x \ln y, \quad N(x, y) = \frac{1}{y} (x^2 + y^2 \sqrt{y^2 + 1}).$$

Перевіримо виконання умови  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ :

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = (2x \ln y)'_y = \frac{2x}{y},$$

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \left( \frac{1}{y} (x^2 + y^2 \sqrt{y^2 + 1}) \right)'_x = \frac{2x}{y}.$$

Отже,  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ , тому дане диференціальне рівняння є рівнянням у повних диференціалах. Інтегруючий множник знайдено правильно.

*Відповідь.* Інтегруючий множник рівняння  $\mu = \frac{1}{y}$ .

Вище вказана теорія та розібрані приклади показують, що при пошуку інтегруючого множника необхідно кожен раз робити припущення відносно функції  $\mu = \mu(x, y)$ , прислухатися до власної інтуїції та робити певні проби. На жаль, ніяких ознак того, яким повинна бути ця функція в кожному конкретному випадку немає. Ця неоднозначність вибору функції є недоліком методу інтегруючого множника. Але, як тільки припущення зроблено, знайдено хоча б один інтегруючий множник, то легко встановити необхідну та достатню умови існування цілого класу функцій  $\mu = \mu(x, y)$ .

## § 5. Диференціальні рівняння та математичне моделювання процесів

### § 5. Диференціальні рівняння та математичне моделювання процесів

Досліджуючи різноманітні фізичні явища, технологічні процеси у багатьох галузях науки і техніки, деякі динамічні процеси, які виникають в економіці, екології та інших соціальних науках, не завжди вдається безпосередньо простежити залежність між величинами, що описують певний процес чи явище. Однак, у багатьох випадках можна виявити функціональну залежність між характеристиками процесу, швидкостями їх зміни й часом, тобто знайти рівняння, які містять шукані функції та/або їх похідні. Таким чином, з'являються диференціальні рівняння, розв'язки яких потім знаходять.

У багатьох задачах геометрії, економіки, геометричної оптики, картографії та інших областей науки виникає завдання із знаходження кривих за певними властивостями проведених до них дотичних або нормалей. Оскільки кутівий коефіцієнт дотичної до графіка функції дорівнює значенню похідної цієї функції у точці дотику, то такі задачі природно розв'язувати за допомогою диференціальних рівнянь.

Розв'язуючи геометричні задачі за допомогою диференціальних рівнянь, рекомендуємо дотримуватись наступного алгоритму:

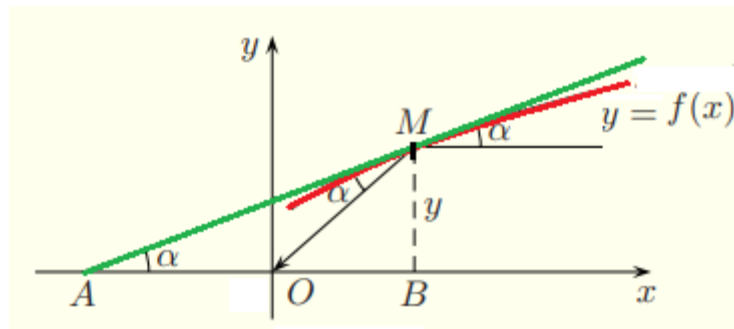
- 1) виконати рисунок і ввести позначення;
- 2) відокремити умови, які виконуються у довільній точці шуканої лінії, від умов, які реалізуються лише в окремих точках, тобто, від додаткових умов;
- 3) всі величини задачі виразити через координати довільної точки і значення похідної у цій точці, враховуючи геометричний зміст похідної;
- 4) за умовою задачі скласти диференціальне рівняння, якому задовольняє шукана крива;
- 5) знайти загальний розв'язок цього рівняння і отримати з нього частинний розв'язок, який задовольняє початковим умовам.

**Приклад 5.1.** Визначити форму дзеркала, що має таку оптичну властивість: спрямований на нього потік паралельних променів збирає в одну точку.

*Розв'язування.* Зробимо переріз дзеркала площиною  $Oxy$ , щоб точка, в яку збираються промені (фокус), була початком координат  $O(0,0)$ , а вісь  $Ox$  –

## § 5. Диференціальні рівняння та математичне моделювання процесів

паралельною до променів, які падають на дзеркало. У перерізі одержуємо деяку криву  $y = f(x)$  (червона лінія), форму якої треба знайти:



Використаємо закон геометричної оптики, згідно з яким кут падіння променя дорівнює куту його відбиття (цей кут позначено через  $\alpha$ ). Нехай  $M(x, y)$  – довільна точка кривої  $y = f(x)$ . Проведемо у цій точці дотичну  $MA$ . Трикутник  $MOA$  рівнобедрений,  $OA = OM$ . Не втрачаючи загальності, вважатимемо, що  $y > 0$ . Оскільки  $y' = \operatorname{tg} \alpha$  (це геометричний зміст похідної), то одержуємо

$$y' = \operatorname{tg} \alpha = \frac{MB}{AB} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$$

або, домножуючи чисельник і знаменник дробу на спряжений до знаменника вираз  $\sqrt{x^2 + y^2} - x$ , отримаємо:

$$y' = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} \Rightarrow y' = \frac{y(\sqrt{x^2 + y^2} - x)}{y^2}$$

$$y \cdot y' = \sqrt{x^2 + y^2} - x.$$

Останнє рівняння є диференціальною моделлю задачі. Воно описує форму перерізу дзеркала площиною  $Oxy$ . Знайдемо розв'язок цього диференціального рівняння.

$$y \cdot y' = \sqrt{x^2 + y^2} - x \quad (+x)$$

$$y \cdot y' + x = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{y \cdot y' + x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1$$

$$\frac{2y \cdot y' + 2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = 1 \Rightarrow \frac{d}{dx}(\sqrt{x^2 + y^2}) = 1$$

## § 5. Диференціальні рівняння та математичне моделювання процесів

$$d(\sqrt{x^2 + y^2}) = dx$$

$$\int d(\sqrt{x^2 + y^2}) = \int dx \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2 + y^2} = x + C$$

$$x^2 + y^2 = (x + C)^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 2xC + C^2,$$

де  $C$  – довільна стала. Отже, маємо рівняння осьового перерізу дзеркала площиною  $Oxy$ :

$$y^2 = 2xC + C^2.$$

Одержали сім'ю парабол  $(y - 0)^2 = 2C(x + \frac{C}{2})$  з вершинами у точках  $(-C/2; 0)$ , а тому поверхня дзеркала як поверхня обертання осьового перерізу навколо осі  $Ox$  має вигляд  $y^2 + z^2 = 2Cx + C^2$ , тобто шукані форми дзеркала описуються сім'єю рівнянь параболоїдів обертання.

*Відповідь.* Шукана форма дзеркала описуються сім'єю рівнянь параболоїдів обертання  $y^2 + z^2 = 2Cx + C^2$ .

**Приклад 5.2.** Знайти та побудувати криву, яка проходить через точку  $M(0;1)$ , якщо кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій точці кривої дорівнює  $k = \frac{-x}{4y}$ .

*Розв'язування.* Оскільки кутовий коефіцієнт дотичної до кривої  $y = f(x)$  в точці  $(x; y)$  дорівнює  $y'$ , то маємо рівняння  $y' = \frac{-x}{4y}$ . Це рівняння 1-го порядку з відокремлюваними змінними.

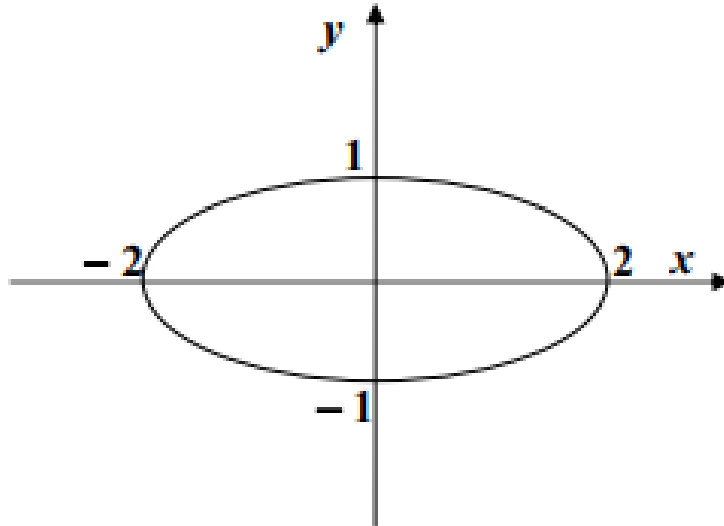
$$\begin{aligned} y' = \frac{-x}{4y} &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{4y} \Rightarrow 4ydy = -xdx \Rightarrow \int 4ydy = - \int xdx \\ &\Rightarrow 2y^2 = -\frac{x^2}{2} + C. \end{aligned}$$

З початкових умов  $x = 0, y = 1$  знаходимо, що

$$2 \cdot 1^2 = -\frac{0^2}{2} + C \Rightarrow C = 2 \Rightarrow 2y^2 = -\frac{x^2}{2} + 2 \Rightarrow \frac{x^2}{2} + 2y^2 = 2.$$

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$  – рівняння шуканої кривої. Це рівняння еліпса з центром симетрії в початку координат та на півосях  $a = 2, b = 1$ .

## § 5. Диференціальні рівняння та математичне моделювання процесів



*Відповідь.* Шукана крива  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$  – це родина еліпсів з центром симетрії в початку координат та на півосях  $a = 2, b = 1$ .

**Приклад 5.3.** Знайти криву, яка проходить через точку  $(0; -3)$ , якщо кутовий коефіцієнт дотичної в довільній її точці дорівнює ординаті цієї точки, збільшеній на 1.

*Розв'язування.* Оскільки кутовий коефіцієнт дотичної до кривої  $y = f(x)$  у точці  $(x, y)$  дорівнює  $y'$ , то маємо рівняння

$$y' = y + 1.$$

Це диференціальне рівняння з відокремленими змінними.

$$\frac{dy}{dx} = y + 1 \Rightarrow \frac{dy}{y + 1} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y + 1} = \int dx$$

$$\ln |y + 1| = x + C \Rightarrow y + 1 = e^{x+C} \Rightarrow y = e^{x+C} - 1.$$

Враховуючи початкову умову  $x = 0, y = -3$ , дістаємо:

$$\ln |-3 + 1| = 0 + C \Rightarrow C = \ln 2.$$

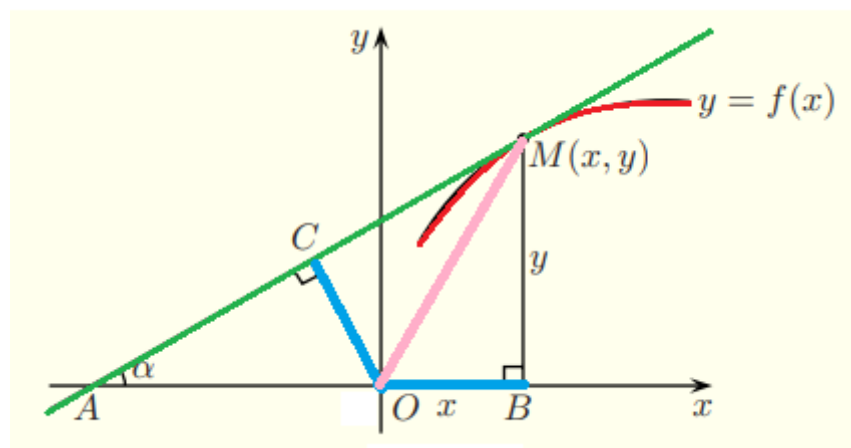
Тоді  $y = e^{x+\ln 2} - 1, y = 2e^x - 1$  – рівняння шуканої кривої.

*Відповідь.*  $y = 2e^x - 1$ .

## § 5. Диференціальні рівняння та математичне моделювання процесів

**Приклад 5.4.** Знайти криву, у якої відстань від довільної дотичної до початку координат дорівнює абсцисі точки дотику.

*Розв'язування.* Нехай  $M(x, y)$  – довільна точка шуканої кривої  $y = f(x)$ . Проведемо у цій точці дотичну  $MA$ ,  $y' = \operatorname{tg} \alpha$  (геометричний зміст похідної).



Трикутники  $OCM$  і  $OBM$  рівні (за умовою  $OC = OB$  (блакитні відрізки), а гіпотенуза (рожева лінія)  $OM$  спільна), тому  $\angle MOB = \angle MOS$ . Оскільки  $\angle AOC = \frac{\pi}{2} - \alpha$ , то

$$\angle MOB = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}.$$

Далі, з трикутника  $OBM$  маємо:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1 + \operatorname{tg} \left( \frac{\alpha}{2} \right)}{1 - \operatorname{tg} \left( \frac{\alpha}{2} \right)} \Rightarrow 1 + \operatorname{tg} \left( \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{y - x}{y + x}.$$

Нарешті, використовуючи формулу універсальної тригонометричної підстановки

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \left( \frac{\alpha}{2} \right)}{1 - \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right)}$$

і співвідношення  $\operatorname{tg} \alpha = y'$ , одержуємо диференціальне рівняння першого порядку:

## § 5. Диференціальні рівняння та математичне моделювання процесів

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy} \Rightarrow y' = \frac{\frac{y^2}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}} \Rightarrow y' = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{\frac{2y}{x}}.$$

Це однорідне рівняння, тому виконаємо заміну:  $\frac{y}{x} = t \Rightarrow y = tx \Rightarrow y' = t'x + t$ :

$$t'x + t = \frac{t^2 - 1}{2t} \Rightarrow t'x = \frac{t^2 - 1}{2t} - t \Rightarrow t'x = \frac{-t^2 - 1}{2t}.$$

Отримали диференціальне рівняння з відокремленими змінними. Виконаємо відокремлення змінних та інтегрування:

$$\frac{dt}{dx} \cdot x = \frac{-t^2 - 1}{2t} \Rightarrow \frac{2t dt}{t^2 + 1} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{2t dt}{t^2 + 1} = -\int \frac{dx}{x}.$$

$$\ln|t^2 + 1| = -\ln|x| + \ln|C| \Rightarrow \ln|t^2 + 1| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|$$

$$\Rightarrow t^2 + 1 = \frac{\pm C}{x}.$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 = \frac{C}{x} \Rightarrow y^2 + x^2 = \pm Cx \Rightarrow (x \pm C)^2 + y^2 = C^2.$$

Отже, крива з наведеною в умові задачі властивістю володіє кожне коло радіуса  $C$  з центром у точці  $(\pm C; 0)$ .

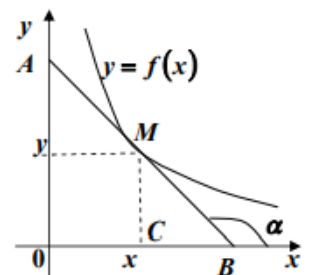
*Відповідь.* Шукана крива – родина кіл  $(x \pm C)^2 + y^2 = C^2$ .

**Приклад 5.5.** Знайти криву, що проходить через точку  $(6; 2)$ , якщо відомо, що відрізок будь-якої дотичної до неї, розташований між осями координат, ділиться точкою дотику навпіл.

*Розв'язування.* Нехай  $M(x, y)$  – довільна точка кривої  $y = f(x)$ . Для визначеності будемо вважати, що крива розміщена в першій чверті. Для складання диференціального рівняння використаємо геометричний зміст похідної:

$$y' = tg\alpha,$$

кутовий коефіцієнт дотичної, у точці  $M(x, y)$  він дорівнює  $y'$ .



## § 5. Диференціальні рівняння та математичне моделювання процесів

$$\operatorname{tg}(\angle MBC) = \frac{|MC|}{|BC|},$$

але

$$\operatorname{tg}(\angle MBC) = \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

За умовою задачі:

$$|MC| = y, \quad |AM| = |MB| \quad |OC| = |CB| = x.$$

Таким чином, отримуємо, що

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{y}{x} \quad \text{або} \quad y' = -\frac{y}{x}.$$

Це рівняння є рівнянням з відокремленими змінними.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\ln|y| = \ln|C| - \ln|x|$$

$$\ln|y| = \ln\left|\frac{C}{x}\right| \Rightarrow y = \frac{C}{x}.$$

Враховуючи початкову умову, обчислимо значення  $C$ :

$$x = 6, \quad y = 2 \quad \Rightarrow \quad C = 2 \cdot 6 \quad \Rightarrow \quad C = 12.$$

$y = \frac{12}{x}$  – рівняння шуканої кривої (гіперболи).

*Відповідь.*  $y = \frac{12}{x}$ .

**Приклад 5.6.** Знайти закон зростання інформаційних потоків у науці (зростання кількості наукових публікацій), якщо відомо, що швидкість зростання прямо пропорційна досягнутому рівню кількості публікацій. Визначити, за який час кількість публікацій подвоїться порівняно з початковою кількістю, якщо відносна швидкість зростання складає 10%.

*Розв'язування.* Позначимо за  $y(t)$  – кількість публікацій у момент часу  $t$ ,  $y_0$  – початкова кількість публікацій, тобто  $y(0) = y_0$ . Швидкість зростання інформаційних потоків як швидкість зміни функції є першою похідною цієї функції. Таким чином, закон зростання інформаційних потоків можна записати у вигляді диференціального рівняння

## § 5. Диференціальні рівняння та математичне моделювання процесів

$$y'(t) = k \cdot y(t), \quad (*)$$

де  $k > 0$  – коефіцієнт пропорційності, що характеризує відгуки на публікації у певній галузі знань. Диференціальне рівняння (\*) разом з початковою умовою  $y(0) = y_0$  є математичною моделлю зростання інформаційних потоків.

Розв'яжемо це рівняння, враховуючи, що  $y'(t) = \frac{dy}{dt}$ :

$$\frac{dy}{dt} = ky \Rightarrow \frac{dy}{y} = kdt$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int kdt \Rightarrow \ln y = kt + C_1 \Rightarrow y = e^{kt+C_1},$$

де  $C_1$  – довільна стала.

$$y = e^{kt} \cdot e^{C_1} \Rightarrow y = C \cdot e^{kt},$$

де  $C = e^{C_1}$  – певна константа.

Оскільки за умовою  $y(0) = y_0$ , то  $y_0 = C \cdot e^{k \cdot 0}$ , тобто  $C = y_0$ , тобто шуканий закон зростання інформаційних потоків у науці визначається формулою  $y = y_0 \cdot e^{kt}$ . Згідно умові завдання Знайдемо тепер час  $T$ , за який потік наукової інформації у порівнянні з початковою кількістю збільшиться вдвічі. За умовою задачі відносна швидкість  $\frac{y'}{y}$  зростання інформаційних потоків складає 10%, тому  $k = 0,1$ . Оскільки

$$y(T) = 2y_0, \text{ то } y(T) = y_0 e^{kT} = 2y_0$$

$$e^{kT} = 2 \Rightarrow kT = \ln 2 \quad T = \frac{\ln 2}{0.1} \approx 6.93 \text{ років.}$$

*Відповідь.* За 6.93 років кількість публікацій подвоїться порівняно з початковою кількістю.

Слід зазначити, що експоненціальний характер зростання потоку наукової інформації зберігатися не може. Це пов'язано із стримуючими факторами, що реагують на певні зміни зовнішніх умов. Зростання рівня буде обмежуватися певним його значенням і механізм зростання кількості публікацій насправді виражатиметься диференціальним рівнянням

$$y' = ky(M - y), \quad \text{де } k > 0, \quad 0 < y < M.$$

## § 5. Диференціальні рівняння та математичне моделювання процесів

Розв'яжемо це рівняння. Маємо

$$\frac{dy}{dt} = ky(M - y) \Rightarrow \frac{dy}{y(M - y)} = kdt$$

$$\int \frac{dy}{y(M - y)} = \int kdt \Rightarrow - \int \frac{dy}{y^2 - My} = k \int dt$$

$$- \int \frac{dy}{\left(y - \frac{M}{2}\right)^2 - \left(\frac{M}{2}\right)^2} = kt + C_1$$

$$- \frac{1}{2 \cdot \left(\frac{M}{2}\right)} \ln \left| \frac{y - \frac{M}{2} - \frac{M}{2}}{y - \frac{M}{2} + \frac{M}{2}} \right| = kt + C_1 \Rightarrow - \frac{1}{M} \ln \left| \frac{y - M}{y} \right| = kt + C_1$$

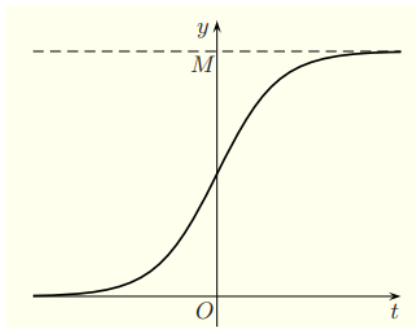
$$\ln \left| \frac{y - M}{y} \right| = -M(kt + C_1) \Rightarrow \frac{y - M}{y} = e^{-Mkt - MC_1}$$

$$y = \frac{Me^{Mkt + C_2}}{1 + e^{Mkt + C_2}} \Rightarrow y = \frac{Me^{Mkt} \cdot e^{C_2}}{1 + e^{Mkt} \cdot e^{C_2}}$$

$$y = \frac{Me^{Mkt} \cdot C}{1 + e^{Mkt} \cdot C} \Rightarrow y = \frac{M}{Ce^{-Mkt} + 1},$$

де результат записано враховуючи довільність сталої  $C_1$ , постійність  $C_2 = MC_1$  та переозначаючи  $e^{C_2}$  через  $C$ .

Криву, визначену останнім рівнянням, часто називають **логістичною кривою**. У початкові моменти часу, коли  $y$  значно менше значення  $M$ , логістична крива практично збігається з графіком показникової функції  $y = Me^{Mkt}$ . Прямі  $y = 0$  і  $y = M$  є асимптотами логістичної кривої (див рис., де побудована логістична крива при  $M = 2C = 4k$ ).



## § 5. Диференціальні рівняння та математичне моделювання процесів

Диференціальне рівняння, одержане у процесі дослідження деякого реального явища або процесу, називають *диференціальною моделлю* цього явища, процесу. Диференціальні моделі ще називають динамічними математичними моделями, оскільки відстежується залежність функції від часу. У таких моделях, крім шуканих залежних величин, містяться також похідні шуканих залежностей, наприклад, швидкості, прискорення та ін. Диференціальні моделі допомагають зрозуміти досліджувані явища і процеси, дають можливість встановити якісні та кількісні характеристики їх станів, з їх використанням можна описати механізм розвитку процесу, а також передбачити його подальший розвиток без проведення реальних експериментів, проведення яких часто є надто дорогим, небезпечним або просто неможливим. Диференціальні моделі є важливою складовою математичного моделювання, яке включає в себе не тільки побудову і дослідження математичних моделей, але й створення обчислювальних алгоритмів і програм, що реалізують ці моделі на електронно-обчислювальних машинах. У процесі побудови диференціальних моделей важливе значення має знання законів тієї області науки, з якою пов'язана природа задачі, що вивчається. Наприклад:

- 1) у механіці це може бути другий закон Ньютона

$$F = ma, \quad (5.1)$$

де  $F$  – сума сил, що діють на тіло,  $m$  – маса тіла,  $a$  – прискорення руху;

- 2) у електротехніці – закон Кірхгофа: алгебрична сума сил струмів, які протікають у певній точці електричного кола, дорівнює нулю;
- 3) у хімії – закон розчинення речовини: швидкість розчинення пропорційна наявній кількості нерозчиненої речовини та різниці концентрацій насиченого розчину і розчину у певний момент часу;
- 4) – закон всесвітнього тяжіння  $F = \frac{k}{r^2} \cdot m_1 m_2$ , де  $m_1, m_2$  – маси двох тіл,  $r$  – відстань між ними,  $k$  – коефіцієнт пропорційності;
- 5) – закон Кірхгофа: алгебрична сума сил струмів, які протікають у певній точці електричного кола, дорівнює нулю;
- 6) – закон Фур'є:  $q = -\lambda(T) \frac{dT}{dx}$ , де  $q$  – питомий потік теплоти,  $\lambda(T)$  – коефіцієнт теплопровідності середовища,  $\frac{dT}{dx}$  – швидкість зміни температури  $T$  і аналогічний закон Нернста про дифузію речовини;

## § 5. Диференціальні рівняння та математичне моделювання процесів

- 7) – закон Ньютона про охолодження тіла: швидкість охолодження тіла прямо пропорційна різниці температур тіла та оточуючого середовища;
- 8) – закон Гука: сила пружності пружини пропорційна її видовженню тощо.

Питання про відповідність диференціальної моделі й реального явища вивчається на основі аналізу результатів досліду та їх порівняння з поведінкою розв'язку одержаного диференціального рівняння.

Розв'язуючи прикладні задачі за допомогою диференціальних рівнянь, виділяють такі три етапи:

- а) побудова диференціального рівняння;
- б) інтегрування рівняння;
- в) дослідження отриманого розв'язку.

При цьому рекомендуємо дотримуватись такої послідовності дій:

- 1) встановити величини, які змінюються у заданому явищі чи процесі, і виявити закони (формули) відповідної науки, які ці величини пов'язують;
- 2) вибрати незалежну змінну і функцію цієї змінної, яку потрібно знайти;
- 3) виходячи з умов задачі, визначити початкові або інші умови, які накладаються на шукану функцію;
- 4) виразити усі величини з умови задачі через незалежну змінну, шукану функцію та її похідні;
- 5) виходячи з умови задачі та закону, який описує задане явище, скласти диференціальне рівняння;
- 6) зінтегрувати одержане диференціальне рівняння;
- 7) якщо задані початкові чи інші умови, знайти частинний розв'язок;
- 8) провести дослідження одержаного розв'язку.

Розглянемо декілька прикладних задач, які приводять до звичайних диференціальних рівнянь.

## § 5. Диференціальні рівняння та математичне моделювання процесів

**Приклад 5.7.** Човен сповільнює свій рух під дією опору води, який пропорційний квадрату швидкості човна. Початкова швидкість човна 5 м/с, а його швидкість через 4 с. складає 2 м/с. Через який час швидкість човна зменшиться до 1 см/с.

*Розв'язування.* Згідно з другим законом Ньютона  $F = ma$ , де  $m$  – маса човна,  $a = \frac{dv}{dt}$  – його прискорення (похідна швидкості  $v(t)$  за часом  $t$ ),  $F$  – сила опору води. За умовою задачі  $F = kv^2$ . Отже, маємо таке диференціальне рівняння:

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = kv^2.$$

З цього одержуємо:

$$\frac{dv}{v^2} = \frac{k}{m} \cdot dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dv}{v^2} = \int \frac{k}{m} \cdot dt \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{v} = \frac{k}{m}t + C$$
$$v = \frac{-m}{kt + Cm}.$$

Використовуючи початкову умову  $v(0) = 5$  знаходимо  $C = -1/5$ , а тому

$$v(t) = \frac{5m}{m - 5kt}.$$

З останньої рівності, враховуючи, що  $v(4) = 2$ , одержуємо, що

$$2 = \frac{5m}{m - 5k \cdot 4} \quad \Rightarrow \quad 2m - 40k = 5 \quad \Rightarrow \quad -40k = 3m \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{k} = -\frac{40}{3},$$

а отже,

$$v(t) = \frac{5m}{m - 5kt} = \frac{\frac{5m}{k}}{\frac{m}{k} - 5t} = \frac{5 \cdot \left(-\frac{40}{3}\right)}{-\frac{40}{3} - 5t} = \frac{-40}{-8 - 3t} = \frac{40}{3t + 8}$$
$$\Rightarrow v(t) = \frac{40}{3t + 8}.$$

Якщо тепер в останнє рівняння підставити  $t = T$  ( $T$  – шуканий час), а також

$$v = 1 \frac{\text{см}}{\text{сек}} = 0,01 \frac{\text{м}}{\text{сек}},$$

то звідси знаходимо

$$0.01 = \frac{40}{3T+8} \quad \Rightarrow \quad 3T + 8 = 4000 \quad \Rightarrow \quad 3T = 3992 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{3992}{3} \text{ с.}$$

*Відповідь.* Через  $T = \frac{3992}{3}$  с швидкість човна зменшиться до 1 см/с.

## § 5. Диференціальні рівняння та математичне моделювання процесів

**Приклад 5.8.** Тіло, яке в початковий момент часу має температуру  $T_0$ , помістили в середовище, в якому підтримується температура  $T_c$ . Визначити закон зміни температури тіла.

*Розв'язування.* Нехай  $T(t)$  – температура тіла в момент часу  $t$ . За законом Ньютона про охолодження тіла функція  $T(t)$  повинна задовольняти рівняння

$$\frac{dT}{dt} = -k(T(t) - T_c),$$

де  $k > 0$  – коефіцієнт пропорційності. Зауважимо, що знак «мінус» у правій частині рівняння відповідає наступним експериментальним даним: якщо  $T(t) > T_c$ , то температура тіла зменшується і швидкість її зміни від'ємна, і навпаки. Оскільки останнє рівняння – рівняння з відокремлюваними змінними, то розв'язуємо його:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} = -k(T(t) - T_c) &\Rightarrow \frac{dT}{T(t) - T_c} = -k dt \\ \int \frac{dT}{T(t) - T_c} = -k \int dt &\Rightarrow \ln|T(t) - T_c| = -kt + C_1 \\ T(t) - T_c = e^{-kt+C_1} &\Rightarrow T(t) - T_c = e^{C_1} \cdot e^{-kt} \\ &\Rightarrow T(t) = C \cdot e^{-kt} + T_c. \end{aligned}$$

Враховуючи початкову умову  $T(0) = T_0$  знаходимо значення константи  $C$ :

$$T_0 = C \cdot e^0 + T_c \Rightarrow C = T_0 - T_c.$$

Можемо остаточно записати закон зміни температури тіла залежно від часу:

$$T(t) = (T_0 - T_c) \cdot e^{-kt} + T_c.$$

Зауважимо, що значення  $k$  буде залежити від матеріалу, з якого зроблено тіло. Якщо природа матеріалу невідома, то значення  $k$  можна знайти, використовуючи інші додаткові умови (як правило відомий час, за який змінюється температура тіла до певної величини).

*Відповідь.* Закон зміни температури тіла  $T(t) = (T_0 - T_c) \cdot e^{-kt} + T_c$ .

## § 5. Диференціальні рівняння та математичне моделювання процесів

**Приклад 5.9.** За який час тіло, нагріте до  $120^\circ\text{C}$ , охолоне до  $30^\circ\text{C}$  в кімнаті з температурою  $T_c = 20^\circ\text{C}$ , якщо до  $100^\circ\text{C}$  воно охолоджується за 30 хв?

Розв'язування. За законом Ньютона швидкість охолодження тіла пропорційна різниці між температурою тіла і температурою середовища:

$$\frac{dT}{dt} = k(T(t) - T_c),$$

де  $k$  – коефіцієнт пропорційності.

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= k(T(t) - 20) \\ \frac{dT}{T(t) - 20} &= k dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dT}{T(t) - 20} = k \int dt \\ \ln|T(t) - 20| &= kt + C_1 \\ T(t) - 20 &= e^{C_1} \cdot e^{kt} \quad \Rightarrow \quad T(t) = C \cdot e^{kt} + 20.\end{aligned}$$

Для знаходження  $C$  використаємо початкову умову  $t = 0$   $T(0) = 120$ :

$$120 = C \cdot e^{k \cdot 0} + 20 \quad \Rightarrow \quad 100 = C$$

$$T(t) = 100 \cdot e^{kt} + 20.$$

Для знаходження коефіцієнта  $k$  треба використати умову, що за 30 хвилин температура знизилася до  $100^\circ\text{C}$ :

$$30 \text{ хв} = 0.5 \text{ год}$$

$$100 = 100 \cdot e^{0.5k} + 20$$

$$80 = 100 \cdot e^{0.5k}$$

$$e^{0.5k} = 0,8 \quad 0.5k = \ln 0,8 \quad k = \frac{\ln 0,8}{0.5} = 2 \ln 0,8$$

$$T(t) = 100 \cdot e^{2 \ln 0,8 \cdot t} + 20.$$

Знайдемо за який час тіло охолоне до  $25^\circ\text{C}$ :

$$25 = 100 \cdot e^{2 \ln 0,8 \cdot t} + 20 \quad \Rightarrow \quad 5 = 100 \cdot e^{2 \ln 0,8 \cdot t} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{20} = e^{2 \ln 0,8 \cdot t}$$

$$\ln\left(\frac{1}{20}\right) = 2 \ln 0,8 \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{-\ln 20}{2 \ln 0,8} = \frac{1}{2} \cdot \log_{1,25} 20 \approx 6,71 \text{ год.}$$

$$t = 6 \text{ год } 42 \text{ хв } 36 \text{ с.}$$

*Відповідь.* За  $t = 6$  год 42 хв 36 с тіло, нагріте до  $120^\circ\text{C}$ , охолоне до  $30^\circ\text{C}$ .

## § 5. Диференціальні рівняння та математичне моделювання процесів

Розглянемо процес остигання чашки кави. Природа перенесення тепла від кави до навколишнього середовища складна і в загальному випадку включає механізми конвекції, випаровування, випромінювання і теплопровідності. У тому випадку, коли різниця температур між об'єктом та навколишнім середовищем не дуже велика, швидкість зміни температури  $T$  об'єкта можна вважати пропорційною цій різниці температур. Коефіцієнт охолодження залежить від механізму передачі тепла, площі тіла, що знаходиться в контакті із середовищем та теплових властивостей самого тіла (кава з цукром або кава зі сливками тощо). Знак «мінус» перед  $k$  підкреслює, що відбувається саме охолодження тіла (щоб уникнути нефізичного ефекту підвищення температури тіла, при  $T > T_c$ ).

**Приклад 5.10.** За який час кава, що має температуру  $100\text{ }^\circ\text{C}$ , охолоне до  $25\text{ }^\circ\text{C}$  в залі кафе, у якому підтримується температура  $T_c = 20\text{ }^\circ\text{C}$ , якщо до  $60\text{ }^\circ\text{C}$  воно охолоджується за  $10\text{ хв}$ ?

*Розв'язування.* За законом Ньютона швидкість охолодження тіла пропорційна різниці між температурою тіла і температурою середовища:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T(t) - T_c),$$

де  $k > 0$  – коефіцієнт пропорційності.

$$\frac{dT}{dt} = -k(T(t) - 20),$$

$$\frac{dT}{T(t) - 20} = -k dt \Rightarrow \int \frac{dT}{T(t) - 20} = k \int dt$$

$$\ln|T(t) - 20| = -kt + C_1$$

$$T(t) - 20 = e^{C_1} \cdot e^{-kt} \Rightarrow T(t) = C \cdot e^{-kt} + 20$$

Для знаходження  $C$  використаємо початкову умову  $t = 0$   $T(0) = 100$ :

$$100 = C \cdot e^{-k \cdot 0} + 20 \Rightarrow 80 = C$$

$$\Rightarrow T(t) = 80 \cdot e^{-kt} + 20.$$

## § 5. Диференціальні рівняння та математичне моделювання процесів

Для знаходження коефіцієнта  $k$  треба використати умову, що за 10 хвилин температура кави знизилася до  $60^{\circ}\text{C}$ :

$$60 = 80 \cdot e^{-10k} + 20$$

$$40 = 80 \cdot e^{-10k}$$

$$e^{-10k} = 0,5 \Rightarrow -10k = \ln 0,5 \Rightarrow 10k = \ln 2 \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{10}$$

$$T(t) = 80 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{10}t} + 20$$

Знайдемо за який час кава охолоне до  $25^{\circ}$ :

$$25 = 80 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{10}t} + 20 \Rightarrow 5 = 80 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{10}t} \Rightarrow \frac{5}{80} = e^{-\frac{\ln 2}{10}t}$$

$$\ln\left(\frac{1}{16}\right) = -\frac{\ln 2}{10} \cdot t \Rightarrow -\ln(16) = -\frac{\ln 2}{10} \cdot t \Rightarrow 4\ln(2) = \frac{\ln 2}{10} \cdot t$$

$$t = 40 \text{ хв}$$

*Відповідь.* За  $t = 40$  хв кава охолоне до  $25^{\circ}\text{C}$ .

**Приклад 5.11.** Відомо, що кількість радіоактивної речовини, яка розпадається за одиницю часу, пропорційна до кількості цієї речовини в розглянутий момент часу  $t$ . За 30 днів розпалося 50 % первісної кількості речовини. Через скільки часу залишиться 1 % первісної кількості речовини?

*Розв'язування.* Позначимо через  $x(t)$  кількість речовини в момент часу  $t$ . Кількість речовини, що розпадається за одиницю часу є швидкістю розпаду цієї речовини. За умовою задачі,  $\frac{dx}{dt} = -kx$ , де  $x$  – кількість радіоактивної речовини,  $k$  – коефіцієнт пропорційності розпаду (знак «мінус» підкреслює зменшення кількості речовини). У початковий момент часу  $t = 0$  було  $x_0$  речовини. Тоді

$$\frac{dx}{dt} = -kx \Rightarrow \frac{dx}{x} = -kdt$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\int kdt \Rightarrow \ln x = -kt + C_1 \Rightarrow x = e^{-kt+C_1},$$

де  $C_1$  – довільна стала.

## § 5. Диференціальні рівняння та математичне моделювання процесів

$$x = e^{-kt} \cdot e^{C_1} \Rightarrow x = C \cdot e^{-kt},$$

де  $C = e^{C_1}$  – певна константа.

Оскільки за умовою  $x(0) = x_0$ , то  $x_0 = C \cdot e^{-k \cdot 0}$ , тобто  $C = x_0$ , тобто шуканий закон розпаду речовини визначається формулою  $x = x_0 \cdot e^{-kt}$ . Знайдемо коефіцієнт пропорційності  $k$ . Через 30 днів залишилася половина початкової кількості, тобто:

$$\frac{x_0}{2} = x_0 \cdot e^{-k \cdot 30},$$

$$e^{30k} = 2 \Rightarrow 30k = \ln 2 \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{30} \Rightarrow x = x_0 \cdot e^{-t \cdot \frac{\ln 2}{30}}.$$

Необхідно знайти час, коли залишиться 1 % первісної кількості речовини:

$$\begin{aligned} 0.01x_0 &= x_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{30}t} & \ln 0.01 &= -t \cdot \frac{\ln 2}{30} \\ t &= -\frac{30 \cdot \ln 0.01}{\ln 2} = \frac{30 \cdot \ln 100}{\ln 2} = 30 \cdot \log_2 100, \\ t &\approx 199,32 \text{ (днів)}. \end{aligned}$$

Відповідь:  $t \approx 199,32$  (днів).

**Приклад 5.12.** (Про радіоактивний розпад). Відомо, що кількість радію – радіоактивної речовини, яка розпадається за одиницю часу, пропорційна до кількості цієї речовини в розглянутий момент часу  $t$ . Знайти закон зміни кількості радію (розпаду радію).

*Розв'язування.* Закон розпаду радію отримано у вигляді:

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -k \cdot Q(t).$$

Інтегруючи це диференціальне рівняння з відокремленими змінними, дістаємо:

$$\frac{dQ}{Q} = -k dt \Rightarrow \ln|Q| = -kt + \ln C \Rightarrow \ln \left| \frac{Q}{C} \right| = -kt.$$

Нехай  $Q_0$  – кількість радію в момент часу  $t = t_0$ . Тоді  $Q_0 = C e^{-kt_0}$ , звідки  $C = Q_0 e^{kt_0}$ . Підставимо знайдене значення  $C$ :  $Q = Q_0 e^{-k(t-t_0)}$ . Якщо  $t_0 = 0$ , то  $Q = Q_0 e^{-kt}$ . Це і є закон зміни початкової кількості радію.

## § 5. Диференціальні рівняння та математичне моделювання процесів

Наступна задача показує, як можна використовувати диференціальні рівняння при роботі в поліції.

**Приклад 5.13.** При обході території два охоронці виявили труп. Огляд місця трагедії показав, що людина була вбита не так давно. На час зняття характеристик патологоанатомом, об 11.00, була зафіксована температура трупа, що була рівна  $31\text{ }^{\circ}\text{C}$ , а через годину, по завершенню огляду, вона вже знизилася до  $29\text{ }^{\circ}\text{C}$  при температурі повітря  $21\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Визначити час вбивства, вважаючи, що на час смерті людина мала температуру  $37\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

*Розв'язування.* За законом Ньютона швидкість охолодження тіла пропорційна різниці між температурою тіла і температурою середовища:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T(t) - T_c),$$

де  $k > 0$  – коефіцієнт пропорційності. Тут ми маємо  $T_c = 21^{\circ}\text{C}$ , тоді

$$\frac{dT}{dt} = -k(T(t) - 21),$$

$$\frac{dT}{T(t) - 21} = -k dt \Rightarrow \int \frac{dT}{T(t) - 21} = -k \int dt$$

$$\ln|T(t) - 21| = -kt + C_1$$

$$T(t) - 21 = e^{C_1} \cdot e^{-kt} \Rightarrow T(t) = C \cdot e^{-kt} + 21$$

Для знаходження  $C$  використаємо початкову умову  $t = 0$   $T(0) = 31$ :

$$31 = C \cdot e^{-k \cdot 0} + 21 \Rightarrow 10 = C$$

$$T(t) = 10 \cdot e^{-kt} + 21 \Rightarrow$$

Для знаходження коефіцієнта  $k$  треба використати умову, що за 1 год температура тіла знизилася до  $29^{\circ}\text{C}$ :

$$29 = 10 \cdot e^{-1k} + 21$$

$$8 = 10 \cdot e^{-k}$$

$$e^{-k} = 0,8 \Rightarrow -k = \ln 0,8 \Rightarrow k = \ln\left(\frac{5}{4}\right).$$

Підставимо отримані значення в рівняння:

$$T(t) = 10 \cdot e^{-\ln\left(\frac{5}{4}\right) \cdot t} + 21.$$

## § 5. Диференціальні рівняння та математичне моделювання процесів

Тепер визначимо час, коли тіло мало температуру  $37^{\circ}$ :

$$37 = 10 \cdot e^{-\ln\left(\frac{5}{4}\right) \cdot t} + 21 \Rightarrow 16 = 10 \cdot e^{-\ln\left(\frac{5}{4}\right) \cdot t} \Rightarrow \frac{16}{10} = e^{-\ln\left(\frac{5}{4}\right) \cdot t}$$

$$\ln(1.6) = -\ln\left(\frac{5}{4}\right) \cdot t \Rightarrow t = \frac{-\ln(1.6)}{\ln(1.25)} \Rightarrow t \approx -2,1.$$

Після переведення десяткових дробів в часові характеристики, отримаємо, що вбивство було скоєно  $t = 2$  години 6 хвилин тому.

Тоді 11 год 00 хвилин – 2 год 6 хвилин = 8 год 54 хвилини.

Вбивство відбулося біля 9.00.

*Відповідь.* Час вбивства 8 години 54 хвилини.

При розв'язанні завдань з фізико-хімічним змістом можна рекомендувати наступний алгоритм:

1. Встановити, яким законам підпорядковується даний процес.
2. Вирішити, що саме треба вибрати за незалежну змінну (як правило, час  $t$ ) і що за шукану функцію (наприклад,  $x = x(t)$ ).
3. Виходячи з умов завдання треба визначити додаткові умови (наприклад,  $x_0 = x(t_0)$ ).
4. Відобразити всі присутні в задачі величини через змінні, функцію та похідну функції, тобто  $t, x, x'$ , використовуючи при цьому фізичний зміст похідної як швидкості зміни змінної  $x$  в досліджуваному процесі.
5. Виходячи з умов завдання та на підставі фізичного закону, якому підпорядковується даний процес, скласти диференціальне рівняння.
6. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння.
7. За початковими умовами знайти частинний розв'язок.

При розв'язанні великої кількості фізико-хімічних задач слід знати, що швидкість зміни змінної величини пропорційна значенням цієї змінної в першій степені. Такі процеси називаються процесами першого порядку і описуються рівнянням:

$$\frac{dx}{dt} = kx.$$

## § 5. Диференціальні рівняння та математичне моделювання процесів

У разі хімічної реакції величини, що входять до неї, означають:

$x$  – кількість речовини в одиниці об'єму (концентрація),

$k$  – постійну величину при заданій температурі (стала швидкості реакції),

$t$  – час.

До таких процесів слід віднести радіоактивний розпад, зміна концентрації розчину, хімічну реакцію, що протікає відповідно до стехіометричного рівняння типу  $A \rightarrow B$ , закон охолодження тіла та ін.

У багатьох випадках побудова диференціального рівняння першого порядку ґрунтується на так званій «лінійності процесу у малому», тобто на диференційовності функцій, які виражають залежність величин. Як правило, можна рахувати, що всі величини, які беруть участь у певному процесі протягом малого проміжку часу, змінюються зі сталою швидкістю. Це дозволяє застосувати відомі закони, які описують явища, що протікають рівномірно, для утворення співвідношення між значеннями  $t$ ,  $t + \Delta t$ , тобто величинами, які беруть участь у процесі, та їх приростами. У результаті одержимо рівність, яка має лише наближений характер, бо навіть за короткий проміжок часу величини змінюються переважно нелінійно. Однак якщо поділити обидві частини одержаної рівності на  $\Delta t$  і перейти до границі при  $\Delta t \rightarrow 0$ , то отримаємо точну рівність. Ця рівність міститиме час  $t$ , залежні від часу величини та їх похідні, тобто буде диференціальним рівнянням, яке описує задане явище. Те саме рівняння у диференціальній формі можна отримати, якщо замінити приріст  $\Delta t$  на диференціал  $dt$ , а прирости функцій – відповідними диференціалами. Таким чином, складаючи диференціальне рівняння, ми робимо ніби «миттєвий кадр» процесу у заданий момент часу, а потім, розв'язуючи рівняння, відновлюємо перебіг процесу. Отже, у процесі розв'язування прикладних задач наведеним методом лежить загальна ідея лінеаризації – заміни функцій на малих проміжках зміни аргумента лінійними функціями. І хоча зустрічаються процеси, для яких лінеаризація неможлива (наприклад, броунівський рух, коли не можна визначити швидкості зміни певних величин у заданий момент часу), у переважній більшості випадків побудувати диференціальну модель явища чи процесу у такий спосіб вдається.

Зауважимо, що при розв'язуванні задач ми ідеалізуємо процес, знехтуємо певними величинами. Наприклад, при розгляді задачі на

## § 5. Диференціальні рівняння та математичне моделювання процесів

витікання рідини ми знехтуємо, наприклад, явищем капілярності (а воно є суттєвим, якщо діаметр отвору малий), завихреннями рідини та деякими іншими факторами. У багатьох задачах складання диференціальних моделей полегшується тим, що відповідний закон науки пов'язує між собою значення деякої величини і швидкості її зміни або пов'язує значення величини, швидкості її зміни чи прискорення.

**Приклад 5.14.** В резервуарі є 100 л розчину, що містить 5 кг розчиненої речовини (солі). До резервуару надходить чиста вода зі швидкістю 30 л/хв. Одночасно з цього резервуара з тією ж швидкістю відводиться розчин. Перемішування забезпечує однакову концентрацію солі у всьому резервуарі. Скільки солі залишиться в резервуарі в момент часу  $t$ ?

*Розв'язування.* За аргумент візьмемо час  $t$ , позначимо через  $x(t)$  кількість солі в резервуарі в момент часу  $t$ . Розглянемо проміжок часу  $\Delta t$  і знайдемо зміну кількості солі в резервуарі за проміжок часу  $\Delta t$ . Зміна кількості солі за час від  $t$  до  $t + \Delta t$ , тобто  $\Delta x(t) = x(t + \Delta t) - x(t)$ , дорівнює різниці кількості солі, яка надійшла (прихід) і кількості видаленої солі у розчині (витрата). В даному випадку кількість солі, яка надходить дорівнює нулю, так як в резервуар надходить чиста вода, тобто прихід дорівнює нулю. Витрата:

$$x(t) = (\text{швидкість витікання розчину}) \times (\text{концентрацію}) \times (\text{час}).$$

Концентрація солі в видаленому розчині дорівнює  $\frac{x}{V}$ , де  $V$  – об'єм розчину, що дорівнює 100 л,  $x(t)$  – загальна кількість солі в момент часу  $t$ . Отже,

$$\Delta x(t) = x(t + \Delta t) - x(t) \Rightarrow \Delta x(t) = -0.3x(t)\Delta t \Rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta t} = -0.3x$$

$$\frac{dx}{dt} = -0.3x \Rightarrow \frac{dx}{x} = -0.3dt \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = -0.3 \int dt \Rightarrow$$

$$\ln|x| = -0.3t + C.$$

$$x = e^{-0.3t+C} \Rightarrow x = C_1 \cdot e^{-0.3t}.$$

Для знаходження коефіцієнта  $C_1$  використаємо початкові умови:

$$t = 0, \quad x = 5: \quad 5 = C_1 \cdot e^0 \Rightarrow x = 5 \cdot e^{-0.3t}.$$

*Відповідь.*  $x = 5 \cdot e^{-0.3t}$ .

## § 5. Диференціальні рівняння та математичне моделювання процесів

**Приклад 5.15.** Визначити закон хімічної реакції першого порядку і визначити час, необхідний для того, щоб концентрація  $x_{A_0} = 0,98 \frac{\text{кмоль}}{\text{м}^3}$  знизилася до  $x = 0,14 \frac{\text{кмоль}}{\text{м}^3}$ , якщо стала швидкості цієї реакції дорівнює  $k = 0,42$ .

*Розв'язування.* При хімічній реакції першого порядку (реакції, що протікає відповідно до рівняння  $A \rightarrow R$ ), його швидкість пропорційна кількості речовини, що ще не прореагувала. Нехай  $x_{A_0}$  – початкова кількість речовини  $A$ ,  $x_A$  – кількість речовини, що ще не прореагувала на момент часу  $t$ . Оскільки об'єм постійний,  $x_A$  є концентрацією речовини, що реагує в момент часу  $t$ . Очевидно, швидкість реакції є  $v = \frac{dx}{dt}$  та диференціальне рівняння реакції має вигляд  $\frac{dx_A}{dt} = -k \cdot x_A$ . Знак « $-$ » вказує на те, що  $x_A$  зі зростанням  $t$  зменшується. У рівнянні реакції розділяємо змінні та інтегруємо:

$$\frac{dx_A}{dt} = -k \cdot x_A \quad \Rightarrow \quad \frac{dx_A}{x_A} = -k \cdot dt$$

$$\int \frac{dx_A}{x_A} = -k \cdot \int dt \quad \Rightarrow \quad \ln|x_A| = -kt + C \quad \Rightarrow \quad x_A = e^{-kt+C} \quad \Rightarrow$$

$$x_A = C_1 e^{-kt}.$$

Сталу  $C_1$  в рівнянні визначаємо, використовуючи додаткову умову: в початковий момент часу  $t = 0$  кількість речовини дорівнює  $x_{A_0}$ :

$$x_{A_0} = C_1 e^0 \quad \Rightarrow \quad x_{A_0} = C_1 \quad \Rightarrow \quad x_A = x_{A_0} e^{-kt}.$$

$$0,14 = 0,98 \cdot e^{-0,42t} \quad \Rightarrow \quad e^{-0,42t} = \frac{0,14}{0,98} \quad \Rightarrow \quad e^{-0,42t} = \frac{1}{7}$$

$$-0,42t = \ln\left(\frac{1}{7}\right) \quad \Rightarrow \quad -0,42t = -\ln(7) \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\ln 7}{0,42} = 4,63 \approx 5 \text{ с.}$$

*Відповідь:*  $t \approx 5 \text{ с.}$

## § 5. Диференціальні рівняння та математичне моделювання процесів

**Приклад 5.16.** Нехай в реторті є деяка кількість бактерій  $N_0 = 10$ . Експериментально встановлено, що швидкість розмноження бактерій пропорційна їх кількості. Знайти залежність приросту числа бактерій від часу.

*Розв'язування.* Позначимо чисельність бактерій в момент часу  $t$  через  $N = N(t)$ , тоді диференціальне рівняння шуканого процесу – швидкість приросту чисельності бактерій, буде мати вигляд:

$$\frac{kN}{dt} = kN,$$

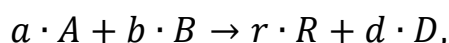
де  $k > 0$  – коефіцієнт пропорційності. З останнього знаходимо, що

$$\frac{kN}{N} = kdt \Rightarrow \ln N = kt + C_1 \Rightarrow N = e^{kt+C_1} \Rightarrow N = C \cdot e^{kt}.$$

Згідно умови задачі при  $t = 0$   $N(0) = N_0 = 10$ , тоді  $10 = C$  і матимемо наступну функціональну залежність:  $N = 10 \cdot e^{kt}$ . Таким чином, чисельність бактерій відповідає експоненціальному закону.

*Відповідь.*  $N = 10 \cdot e^{kt}$ .

При розв'язанні завдань зустрічаються хімічні реакції з двома реагентами, які перетворюються на два продукти, тобто типу



де  $A, B$  – реагенти,  $R, D$  – продукти,  $a, b, r, d$  – стехіометричні коефіцієнти.

Такі процеси називаються процесами другого порядку. Слід знати, що швидкість хімічної реакції такого типу пропорційна добутку концентрацій реагентів у степенях, що дорівнюють стехіометричним коефіцієнтам,  $V = k \cdot C_A^a \cdot C_B^b$ , де  $k$  – стала швидкості. В окремому випадку, коли концентрації вихідних речовин однакові, швидкість пропорційна квадрату концентрації однієї з реагуючих речовин:

$$V = k \cdot C_A^2.$$

**Приклад 5.17.** У резервуарі знаходиться 100 л розчину солі. До нього вливається чиста вода зі швидкістю  $q = 5$  л/хв., а розчин вибігає з цією ж швидкістю. У початковий момент часу розчин мав  $m_0 = 10$  кг солі.

## § 5. Диференціальні рівняння та математичне моделювання процесів

Скільки солі буде знаходитися у резервуарі через 20 хвилин після початку процесу?

*Розв'язування.* Об'єм резервуара  $V = 100$  л. В момент часу  $t$  в ньому знаходиться  $m(t)$  кг солі, отже концентрація розчину дорівнює  $\frac{m}{V}$  кг/л солі. Об'єм, який має  $q$  літрів розчину вміщує  $\frac{m}{V}q$  кг солі. Рівняння процесу має вигляд:

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{m}{V}q.$$

Це є рівняння з відокремлюваними змінними.

$$\begin{aligned}\frac{dm}{dt} = -\frac{m}{V}q &\Rightarrow \int \frac{dm}{m} = -\int \frac{q}{V} dt \Rightarrow \ln m = -\frac{q}{V}t + C_1 \\ &\Rightarrow m = C \cdot e^{-\frac{qt}{V}}.\end{aligned}$$

При  $t = 0$ , то  $m = m_0$ , тоді

$$m_0 = C \cdot e^0 \Rightarrow C = m_0 \Rightarrow m = m_0 \cdot e^{-\frac{qt}{V}}.$$

Ми отримали закон зміни маси солі в залежності від часу.

За час  $t = 20$  хв. розчин буде вміщувати солі<sup>^</sup>

$$m = 10 \cdot e^{-\frac{5}{100} \cdot 20} = 10 \cdot e^{-1} = 3,6788 \cdot \text{кг}.$$

*Відповідь.*  $m = \frac{100}{e} = 3,6788$  кг.

**Приклад 5.18.** Ізольованому проводу надається електричний заряд  $Q = Q_0$ . Внаслідок поганої ізоляції провід втрачає цей заряд. Швидкість втрати заряду за час  $t$  пропорційна наявному заряду. Знайти закон змінювання заряду.

*Розв'язування.* Згідно з умовою задачі маємо, що швидкість зміни заряду проводу  $\frac{dQ}{dt}$  пропорційне наявному заряду:

$$\frac{dQ}{dt} = -k \cdot Q \quad (k > 0),$$

де  $k$  – коефіцієнт пропорційності. Знак «мінус», оскільки заряд зменшується.

## § 5. Диференціальні рівняння та математичне моделювання процесів

$$\int \frac{dQ}{Q} = -\int k dt \Rightarrow \ln|Q| = -kt + C_1$$

$$Q = e^{-kt+C_1} \Rightarrow Q = e^{C_1} \cdot e^{-kt} \Rightarrow Q = C e^{-kt}.$$

Початкові дані  $Q(0) = Q_0$  дозволяють знайти коефіцієнт  $C$ :

$$Q_0 = C e^0 \Rightarrow C = Q_0 \Rightarrow Q = Q_0 e^{-kt}.$$

Таким чином, закон змінювання електричного заряду має вигляд

$$Q = Q_0 e^{-kt}.$$

*Відповідь.*  $Q = Q_0 e^{-kt}$ .

**Приклад 5.19.** У замкненому резервуарі знаходиться 300 л повітря (80% азоту та 20% кисню). До нього через одну трубку вливається щохвилини 2 л. азоту, причому суміш неперервно перемішується, а через іншу трубку відводиться щохвилини також 2 л. суміші. Через який час після початку процесу у резервуарі буде 95% азоту?

*Розв'язування.* Нехай  $t$  – час в хвилинах (незалежна змінна),  $x(t)$  – кількість азоту в резервуарі на момент часу  $t$ . За умовою задачі маємо такі початкові умови: об'єм резервуара  $V = 300$  л,  $x_0 = 300 \cdot 0.8 = 240$  л азоту. За час  $t$  втекло  $2t$  л. азоту та витекло  $2t$  л. суміші, загальна кількість повітря не змінилася, але щохвилини буде збільшуватися кількість азоту в резервуарі. Нам потрібно щоб азоту було 95%, це буде становити 285 л. Зрозуміло, що азоту у суміші, що витікає, буде  $\frac{x}{300} \cdot 2t$ . В резервуарі в момент часу  $t$  знаходиться  $x(t)$  л. азоту, тобто концентрація суміші дорівнює  $\frac{x(t)}{300}$ . Об'єм, який має  $q$  літрів розчину вміщує азоту  $\frac{x(t)}{300} \cdot q$ . Рівняння зміни кількості азоту має вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = 2 - \frac{2 \cdot x(t)}{300}.$$

Зауважимо, що знак «мінус» перед дробом вказує, що розчин витікає (2 літрів щохвилини). Ми отримали рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'язуємо його:

$$\frac{dx}{dt} = 2 - \frac{2 \cdot x}{300} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{300 - x}{150} \Rightarrow \int \frac{dx}{300 - x} = \frac{1}{150} \int dt \Rightarrow$$

## § 5. Диференціальні рівняння та математичне моделювання процесів

$$\begin{aligned}
 -\ln|300 - x| &= \frac{1}{150} \cdot t + \ln C \quad \Rightarrow \quad \ln \left| \frac{1}{300 - x} \right| = \ln e^{\frac{t}{150}} + \ln C \\
 \Rightarrow \ln \left| \frac{1}{300 - x} \right| &= \ln(C \cdot e^{\frac{t}{150}}) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{300 - x} = C \cdot e^{\frac{t}{150}} \\
 \Rightarrow \frac{1}{C \cdot e^{\frac{t}{150}}} &= 300 - x.
 \end{aligned}$$

При  $t = 0$ , то  $x_0 = 240$  кг, тоді

$$300 - 240 = \frac{1}{C} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{60} \quad \Rightarrow \quad 300 - x = \frac{60}{e^{\frac{t}{150}}}.$$

Ми отримали закон зміни маси азоту в суміші в залежності від часу  $t$ .

Знайдемо через який час після початку процесу у резервуарі буде 285 л азоту (95%):

$$\begin{aligned}
 300 - 285 &= \frac{60}{e^{\frac{t}{150}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{15} = \frac{1}{60} \cdot e^{\frac{t}{150}} \quad \Rightarrow \quad 4 = e^{\frac{t}{150}} \quad \Rightarrow \\
 \frac{t}{150} &= \ln 4 \quad \Rightarrow \quad t = 150 \ln 4 \approx 207,94
 \end{aligned}$$

*Відповідь.* Через  $t = 150 \ln 4 \approx 207,94$  хвилин після початку процесу у резервуарі буде 95% азоту.

**Приклад 5.20.** У резервуарі знаходиться 500 л розчину солі. До нього вливається чиста вода зі швидкістю  $a = 4$  л/хв., а розчин витікає зі швидкістю  $b = 2$  л/хв. У початковий момент часу розчин мав  $m_0 = 40$  кг солі. Скільки солі буде знаходитися у резервуарі через 60 хвилин після початку процесу?

*Розв'язування.* Нехай  $t$  – час в хвилинали (незалежна змінна),  $x(t)$  – кількість солі в резервуарі на час  $t$ . За умовою задачі маємо такі початкові умови: об'єм резервуара  $V = 500$  л,  $x_0 = 40$  кг солі, чиста вода вливається та одночасно розчин виливається, причому швидкість виливання менша, тому кількість розчину буде щохвилини збільшуватися на 2л. Зрозуміло, що при цьому процесі буде зменшуватися кількість солі в резервуарі. В 1 літрі солі буде міститися  $\frac{x}{500+2t}$ , оскільки загальний об'єм збільшується щохвилини на 2л. В резервуарі в момент часу  $t$  знаходиться  $x(t)$  кг солі, отже концентрація розчину дорівнює  $\frac{x(t)}{500+2t}$  кг/л солі. Об'єм, який має  $q$

## § 5. Диференціальні рівняння та математичне моделювання процесів

літрів розчину вміщує  $\frac{x(t)}{500+2t} \cdot q$  кг солі. Рівняння зміни кількості солі має вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2 \cdot x(t)}{500 + 2t}.$$

Зауважимо, що знак «мінус» перед дробом вказує, що розчин витікає (6 літрів щохвилини). Ми отримали рівняння з відокремленими змінними. Розв'язуємо його:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{2 \cdot x(t)}{500 + 2t} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{x} = -\int \frac{2}{500 + 2t} dt \quad \Rightarrow \\ \ln x &= -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln|500 + 2t| + \ln C \quad \Rightarrow \quad \ln x = \ln|500 + 2t|^{-1} + \ln C \\ \ln x &= \ln\left(\frac{C}{500 + 2t}\right) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{C}{500 + 2t}. \end{aligned}$$

При  $t = 0$ , то  $x_0 = 40$  кг, тоді

$$40 = \frac{C}{500 + 2 \cdot 0} \quad \Rightarrow \quad C = 500 \cdot 40 = 20000 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2 \cdot 10^4}{500 + 2t}.$$

Ми отримали закон зміни маси солі в залежності від часу  $t$ .

За час  $t = 60$  хв. розчин буде вміщувати солі

$$x = \frac{2 \cdot 10^4}{500 + 2 \cdot 60} = \frac{20000}{620} = 32,258 \text{ кг.}$$

*Відповідь.*  $x = \frac{20000}{620} = 32,258$  кг солі.

**Приклад 5.21.** Підприємство реалізує власну продукцію (наприклад, натуральні цукерки), про яку в момент часу  $t$  з числа  $N_0$  потенційних покупців знає лише  $x = x(t)$  покупців. Для прискорення збуту продукції дано рекламні оголошення у транспорті та по телеграм-каналам. Певна інформація про продукцію розповсюджується серед покупців засобом спілкування один з одним (сарафанне радіо). Вважатимемо, що після рекламних оголошень швидкість зміни числа тих, хто знає про продукцію, прямо пропорційна добутку числа покупців, які знають про товар, на число тих, хто про нього не знає. Знайти залежність між змінними  $x$  і  $t$ , якщо в початковий момент часу  $t = 0$  (після рекламних оголошень) про товар знали  $\frac{N_0}{a}$  чоловік (закон ефективності реклами).

## § 5. Диференціальні рівняння та математичне моделювання процесів

*Розв'язування.* Якщо  $x(t)$  – кількість покупців, яка знає про продукцію підприємства в момент часу  $t$ , то, враховуючи умову задачі, дістаємо наступне диференціальне рівняння

$$x'(t) = kx(N_0 - x), \quad (**)$$

де  $k > 0$  – коефіцієнт пропорційності,  $x'(t) = \frac{dx}{dt}$  швидкість зміни числа тих, хто знає про продукцію. Диференціальне рівняння (\*\*) разом з початковою умовою  $x(0) = \frac{N_0}{a}$  є математичною моделлю закону ефективності реклами. Це диференціальне рівняння першого порядку є рівнянням Бернуллі:

$$x'(t) = kxN_0 - kx^2 \quad \Rightarrow \quad x'(t) - kxN_0 = -kx^2.$$

Розв'яжемо це диференціальне рівняння.

$$\frac{x'}{x^2} - \frac{kN_0}{x} = -k$$

$$-\frac{1}{x} = u \cdot v \quad \Rightarrow \quad \frac{x'}{x^2} = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' + kN_0uv = -k$$

$$u'v + u(v' + kN_0v) = -k$$

$$v' + kN_0v = 0 \qquad u'v = -k$$

$$\frac{dv}{dt} = -kN_0v$$

$$\frac{dv}{v} = -kN_0dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dv}{v} = -kN_0 \int dt \quad \Rightarrow$$

$$\ln|v| = -kN_0t \quad \Rightarrow \quad v = e^{-kN_0t}$$

$$u'v = -k \quad \Rightarrow \quad u'e^{-kN_0t} = -k \quad \Rightarrow \quad u' = -k \cdot e^{kN_0t}$$

$$u = \frac{-1}{N_0} \cdot e^{kN_0t} + C$$

$$-\frac{1}{x} = u \cdot v \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{x} = \left( \frac{-1}{N_0} \cdot e^{kN_0t} + C \right) \cdot e^{-kN_0t}$$

## § 5. Диференціальні рівняння та математичне моделювання процесів

$$-\frac{1}{x} = \frac{-1}{N_0} + C \cdot e^{-kN_0t} \Rightarrow \frac{1}{N_0} - \frac{1}{x} = C \cdot e^{-kN_0t}$$

$$\frac{x - N_0}{N_0x} = \frac{C}{e^{kN_0t}} \Rightarrow \frac{N_0x}{x - N_0} = C \cdot e^{kN_0t}.$$

На диференціальне рівняння  $x'(t) = kx(N_0 - x)$  з початковими умовами можна подивитися як на диференціальне рівняння першого порядку зі змінними, що можна відокремити. У цьому випадку алгоритм розв'язування змінюється. Інтегруючи дане рівняння, знаходимо, що

$$\frac{dx}{dt} = kx(N_0 - x) \Rightarrow \frac{dx}{x(N_0 - x)} = kdt \Rightarrow \int \frac{dx}{x(N_0 - x)} = k \int dt$$

$$kt + c = \frac{1}{N_0} \int \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{N_0 - x} \right) dx$$

$$kt + c = \frac{1}{N_0} (\ln|x| - \ln|N_0 - x|) \Rightarrow kt + c = \frac{1}{N_0} \cdot \ln \left| \frac{x}{N_0 - x} \right|$$

$$\Rightarrow N_0kt + N_0 \cdot c = \ln \left| \frac{x}{N_0 - x} \right| \Rightarrow e^{N_0kt + N_0c} = \frac{x}{N_0 - x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{N_0c} \cdot e^{N_0kt} = \frac{x}{N_0 - x}.$$

Вважаючи  $C_1 = e^{N_0c}$ , приходимо до рівності  $C_1 \cdot e^{N_0kt} = \frac{x}{N_0 - x}$ .

Відмінності у відповіді обґрунтовуються різними константами.

Покладаючи  $C_1 = \frac{-C}{N_0}$ , отримаємо однакову відповідь.

*Відповідь.*  $\frac{N_0x}{x - N_0} = C \cdot e^{kN_0t}$  або  $C_1 \cdot e^{N_0kt} = \frac{x}{N_0 - x}$ .

**Приклад 5.22.** Швидкість розчинення активної лікувальної речовини пігулки пропорційна її наявній масі  $m$  в момент часу  $t$ . Яка частина введеної лікувальної речовини буде в організмі через 4 години після введення 4 мл препарату, якщо через 2 години його маса зменшується удвічі?

## § 5. Диференціальні рівняння та математичне моделювання процесів

*Розв'язування.* Якщо  $m(t)$  – маса активної лікувальної речовини в момент часу  $t$ ,  $m_0 = 4$  – початкова маса активної лікувальної речовини, враховуючи умову задачі  $m(2) = \frac{1}{2}m_0$ . Ми дістанемо наступне диференціальне рівняння

$$m'(t) = -km,$$

де  $k > 0$  – коефіцієнт пропорційності (знак мінус тому, що маса активної лікувальної речовини із часом зменшується).

$$\begin{aligned}\frac{dm}{dt} &= -k \cdot m \quad \Rightarrow \quad \frac{dm}{m} = -k \cdot dt, \\ \int \frac{dm}{m} &= - \int k dt \quad \Rightarrow \quad \ln|m| = -kt + C_1 \\ m &= e^{-kt+C_1} \quad \Rightarrow \quad m = e^{C_1} \cdot e^{-kt} \quad \Rightarrow \quad m = Ce^{-kt}.\end{aligned}$$

Початкові дані  $m(0) = 4$  дозволяють знайти коефіцієнт  $C$ :

$$4 = Ce^0 \quad \Rightarrow \quad C = 4 \quad \Rightarrow \quad m = 4e^{-kt}.$$

Для знаходження коефіцієнта  $k$  використаємо додаткову умову:

$$\begin{aligned}m(2) &= \frac{1}{2}m_0 \quad \Rightarrow \quad m(2) = 2 \\ 2 &= 4e^{-k2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = e^{-k2} \quad \Rightarrow \quad -2k = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{2}\ln(2) \\ & \quad \quad \quad k = \ln\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Таким чином, закон активної лікувальної речовини пігулки пропорційна її наявної масі  $m$  в момент часу  $t$ . має вигляд

$$\begin{aligned}m &= 4e^{-t \cdot \ln\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad m = 4 \cdot \left(e^{\ln\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)^t \quad \Rightarrow \quad m = 4 \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^t \\ & \quad \quad \quad m = 4 \cdot (2)^{\frac{-t}{2}}.\end{aligned}$$

$$m(4) = 4 \cdot (2)^{\frac{-4}{2}} \quad \Rightarrow \quad m = 4 \cdot (2)^{-2} \quad \Rightarrow \quad m = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1.$$

*Відповідь.*  $m = 1$  мл лікувальної речовини буде в організмі через 4 години після введення 4 мл препарату.

## Варіанти індивідуальних завдань

### Варіант 1.

1. Знайти загальний розв'язок рівняння  $(\sqrt{xy} - 5\sqrt{y})y' = x$ .

2. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y'x + y(x - 2) = 0, \quad y(1) = 1.$$

3. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$1) \quad y' \cdot x^2 = xy - y^2;$$

$$2) \quad y' = \frac{x+y-2}{2x-y+8}.$$

4. Знайти загальний розв'язок лінійного рівняння  $y' - \frac{y}{x} = x \cdot \sin 2x$ .

5. Розв'язати задачу Коші  $3y' - \frac{y}{x+2} = \frac{2e^{2x}}{2+x} \cdot y^4, \quad y(0) = 1$ .

6. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$(3x^2 + y - 3 \cos x)dx + (2y + x)dy = 0.$$

7. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку  $M_0(2; 1)$  та має таку властивість: відрізок будь-якої її дотичної між точкою дотику і віссю  $Oy$  ділиться в точці перетину з віссю  $Ox$  у відношенні 1: 2 (рахуючи від осі  $Oy$ ).

### Варіант 2.

1. Знайти загальний розв'язок рівняння  $yy' + x^2 = 1$ .

2. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$3y'\sqrt{y-1} = x + \sqrt{x}, \quad y(0) = 2.$$

3. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$1) \quad xy' - y = \sqrt{y^2 - x^2};$$

$$2) \quad y' = \frac{2x+y-2}{2x-y-6}.$$

4. Знайти загальний розв'язок лінійного рівняння

$$y' + \frac{2y}{x} = 3x^2 - x.$$

5. Розв'язати задачу Коші  $2xy' - 3y = -(5x^2 + 3) \cdot y^3, \quad y(1) = 1$ .

6. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$(x + \sin y)dx + (\sin y + x \cos y)dy = 0.$$

7. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку  $M_0(0; 3)$ , якщо її піддотична в будь-якій точці дорівнює сумі абсциси точки дотику та відстані від початку координат до точки дотику (обмежитися випадком  $\frac{y}{y'} > 0$ ).

**Варіант 3.**

1. Знайти загальний розв'язок рівняння  $(xy^2 + y^2)dx - (x^2y + x^2)dy = 0$ .

2. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y'e^{-2x} = y - 1, \quad y(0) = 2.$$

3. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$1) (2x^2 + xy - 5y^2)dx = (x^2 - 6xy)dy; \quad 2) y' = \frac{3x-y+1}{x+y+7}.$$

4. Знайти загальний розв'язок лінійного рівняння

$$y' \sin x - y = 1 - \cos x.$$

5. Розв'язати задачу Коші  $y' - y \cdot \operatorname{ctg} x = \frac{y^2}{\sin^3 x}, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ .

6. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$(6x + ye^x)dx + (2y + e^x)dy = 0.$$

7. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку  $M_0(1; 4)$  і має таку властивість: в будь-якій її точці  $M$  дотичний вектор  $\overrightarrow{MN}$  з кінцем на осі  $Oy$  має проекцію на вісь  $Ox$  рівну 2.

**Варіант 4.**

1. Знайти загальний розв'язок рівняння  $\ln x \cdot \sin^4 y dx - x \cdot \cos y dy = 0$ .

2. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$6x \cdot \sqrt[3]{y} dx = (x^2 - 1)dy, \quad y(\sqrt{2}) = 1.$$

3. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$1) xy' = y \left( \ln \frac{y}{x} + 1 \right); \quad 2) y' = \frac{x+y+1}{2x-y-7}.$$

4. Знайти загальний розв'язок лінійного рівняння  $(1 - x^2)y' + xy = 1$ .

5. Розв'язати задачу Коші  $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\sin^2 x}, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ .

6. Знайти загальний розв'язок лінійного рівняння

$$(2y + x)dx + (2x + 3)dy = 0.$$

7. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку  $M_0(1; 1)$ , якщо довжина відрізка осі абсцис, що відтинається будь-якою її дотичною, дорівнює довжині цієї дотичної.

## Варіанти індивідуальних завдань

### Варіант 5.

1. Знайти загальний розв'язок рівняння  $\cos x \cdot \sin y \, dx - \sin x \cdot \cos y \, dy = 0$ .
2. Знайти розв'язок диференціального рівняння  
 $(\sqrt{x} - y\sqrt{x})y' = y, \quad y(1) = -1$ .
3. Знайти загальний розв'язок рівняння:  
1)  $y^3 dx = 2(xy^2 - x^3)dy$ ;                      2)  $y' = \frac{3x+y-2}{2x-y-8}$ .
4. Знайти загальний розв'язок лінійного рівняння  $xy' - 2y = x^3 e^{2x}$ .
5. Розв'язати задачу Коші  $y' - \frac{y}{2x} = \frac{x^2}{2y}, \quad y(1) = 1$ .
6. Знайти загальний розв'язок рівняння:  
 $(2xy + y^2 + 4)dx + (x^2 + 2xy)dy = 0$ .
7. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку  $M_0(1; 1)$  та має таку властивість: відрізок, що відтинається будь-якою її дотичною на осі абсцис, дорівнює квадрату ординати точки дотику.

### Варіант 6.

1. Знайти загальний розв'язок рівняння  $y' = \frac{y \ln y \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ .
2. Знайти розв'язок диференціального рівняння  
 $\sin x \cdot \cos^2 y \cdot dx + \cos^2 x \cdot dy = 0, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}$ .
3. Знайти загальний розв'язок рівняння:  
1)  $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$ ;                      2)  $y' = \frac{2x-y}{2x+y-8}$ .
4. Знайти загальний розв'язок лінійного рівняння  $y' - 2y \operatorname{tg} x = \sin x$ .
5. Розв'язати задачу Коші  $xy' - y = y^2 \cdot \ln x, \quad y(1) = 1$ .
6. Знайти загальний розв'язок рівняння :  
 $(6xy + 4x - 2)dx + (3x^2 + 8xy + 5)dy = 0$ .
7. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку  $M_0(1; 2)$  та має таку властивість: відрізок, що відтинається на осі ординат будь-якою її дотичною, дорівнює абсцисі точки дотику.

## Варіанти індивідуальних завдань

### Варіант 7.

1. Знайти загальний розв'язок рівняння  $x\sqrt{4-y^2}dx - (9+x^2)dy = 0$ .

2. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y = (1+x^2)y' \cdot \ln y, \quad y(0) = 1.$$

3. Знайти загальний розв'язок рівняння:

1)  $y^2 dx + (x^2 - xy)dy = 0$ ;

2)  $y' = \frac{3x+y-1}{3x-2y+8}$ .

4. Знайти загальний розв'язок лінійного рівняння  $y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin 2x}{x}$ .

5. Розв'язати задачу Коші  $y' + 2y \cdot \operatorname{tg} x + y^2 \cdot \sin^2 x = 0$ ,  $y(0) = 1$ .

6. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$(4xy + 2)dx + (2x^2 + 6y - 7)dy = 0.$$

7. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку  $M_0(1; 1)$  і має таку властивість: відрізок будь-якої її дотичної дорівнює відстані від точки дотику до початку координат.

### Варіант 8.

1. Знайти загальний розв'язок рівняння  $(1+x^2)y' = y(x - \sqrt{1+x^2})$ .

2. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$\sin y \cos x dy = 2 \cos y \sin x dx, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}.$$

3. Знайти загальний розв'язок рівняння:

1)  $\frac{dx}{x^2+xy+y^2} = \frac{dy}{2y^2-xy}$ ;

2)  $y' = \frac{x+2y-2}{2x+y+8}$ .

4. Знайти загальний розв'язок лінійного рівняння  $xy' - 2y + \frac{x}{(x-1)^2} = 0$ .

5. Розв'язати задачу Коші  $y' + \frac{4x^3 \cdot y}{x^4+1} = y^2(x^4 + 1) \cdot \cos x$ ,  $y(0) = 1$ .

6. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$(x^2 + y^2 + y)dx + (2xy + x + e^y)dy = 0.$$

7. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку  $M_0(1; 0)$  і має таку властивість: відрізок, що відтинається будь-якою її дотичною на осі ординат, дорівнює полярному радіусу точки дотику.

## Варіанти індивідуальних завдань

### Варіант 9.

1. Знайти загальний розв'язок рівняння  $(2 + y')e^y = 1$ .
2. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y' \sin x = y, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

3. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$1) (3x^2 + 6xy + 3y^2)dx + (2x^2 + 3xy)dy = 0; \quad 2) y' = \frac{x+2y}{x-y-3}.$$

4. Знайти загальний розв'язок лінійного рівняння  $y' + 2xy = 2x^2 e^{-x^2}$ .

5. Розв'язати задачу Коші  $2y' - \frac{y}{1+x} = y^3 \cdot \frac{e^x}{x+1}, \quad y(0) = 1$ .

6. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$(2x + 2y - 4)dx + (2y + 2x + 3)dy = 0.$$

7. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку  $M_0(2; e)$  і має таку властивість: будь-яка її піддотична має сталу довжину, що дорівнює 2.

### Варіант 10.

1. Знайти загальний розв'язок рівняння  $(2 + y')e^{2x} = 2$ .
2. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y' = (y + 1) \cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

3. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$1) xy' = y - 2xy; \quad 2) y' = \frac{x+y-2}{2x+y}.$$

4. Знайти загальний розв'язок лінійного рівняння  $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$ .

5. Розв'язати задачу Коші  $y' + \frac{3x^2 \cdot y}{x^3 + 1} = y^2(x^3 + 1) \cdot \sin x, \quad y(0) = 2$ .

6. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$(e^x \sin y + y)dx + (x + e^x \cos y)dy = 0.$$

7. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку  $M_0(1; 2)$  та має таку властивість: добуток абсциси точки дотику на абсцису точки перетину нормалі з віссю  $Ox$  дорівнює подвоєному квадрату відстані від початку координат до точки дотику.

## Варіанти індивідуальних завдань

### Варіант 11.

1. Знайти загальний розв'язок рівняння  $(1 + y)^3 dx + (1 - x)^4 dy = 0$ .

2. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$(1 + e^{2x})y^2 dy = e^x dx, \quad y(0) = 0.$$

3. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$1) (xy + y^2)dx = (2x^2 + xy)dy; \quad 2) y' = \frac{x+2y-6}{2x-2y}.$$

4. Знайти загальний розв'язок лінійного рівняння  $xy' - y = x^3 \cos x$ .

5. Розв'язати задачу Коші  $y' + y = e^{\frac{x}{2}} \cdot \sqrt{y}$ ,  $y(0) = 1$ .

6. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$(3x^2 + 2y^2 - 3y)dx + (4xy - 3x)dy = 0.$$

7. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку  $M_0(1; 2)$  та має таку властивість: точка перетину будь-якої її дотичної з віссю абсцис має абсцису, вдвічі меншу від абсциси точки дотику.

### Варіант 12.

1. Знайти загальний розв'язок рівняння  $xuy' = 4 + x^2$ .

2. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{dx}{x(1-y)} = \frac{dy}{y(x+1)}, \quad y(1) = 2.$$

3. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$1) (y^2 + 2xy - x^2)y' = y^2 - 2xy - x^2; \quad 2) y' = \frac{3x+y-4}{2x-y+6}.$$

4. Знайти загальний розв'язок лінійного рівняння  $x^2 y' - 2xy = 3$ .

5. Розв'язати задачу Коші  $(1 - x^2)y' - xy = x \cdot y^2$ ,  $y(\sqrt{2}) = 1$ .

6. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$(2y - 5)dx + (2x + 6y + 1)dy = 0.$$

7. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку  $M_0(2; 1)$  та має таку властивість: відрізок будь-якої її дотичної між точкою дотику і віссю  $Oy$  ділиться в точці перетину з віссю  $Ox$  у відношенні 1:2 (рахуючи від осі  $Oy$ ).

## Варіанти індивідуальних завдань

### Варіант 13.

1. Знайти загальний розв'язок рівняння  $xy' + 2y = y^2$ .

2. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y' \ln y = y, \quad y(2) = 1.$$

3. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$1) (y^2 - 3x^2)dy = -2xydx; \quad 2) y' = \frac{x+y-5}{2x-y+7}.$$

4. Знайти загальний розв'язок лінійного рівняння  $xy' - 4y = x(x^2 - 1)$ .

5. Розв'язати задачу Коші  $4xy' + 3y = -e^x \cdot x^4 \cdot y^5$ ,  $y(1) = \frac{1}{2}$ .

6. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$(2xy^2 + y \cos(xy))dx + (2x^2y + x \cos(xy))dy = 0.$$

7. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку  $M_0(3; 1)$ , якщо довжина відрізка, що відтинається будь-якою її дотичною на осі ординат, дорівнює піднормалі.

### Варіант 14.

1. Знайти загальний розв'язок рівняння  $y' = (3y + 1) \cdot \operatorname{tg} x$ .

2. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$2y(1 + e^{y^2})dy = dx, \quad y(0) = 0.$$

3. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$1) y' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}; \quad 2) y' = \frac{3x+y-5}{2x-y+5}.$$

4. Знайти загальний розв'язок лінійного рівняння  $y' + 3y = e^{2x}$ .

5. Розв'язати задачу Коші  $y' + 4xy = 2xe^{-x^2} \cdot \sqrt{y}$ ,  $y(0) = 4$ .

6. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$(6x - 4y + 2)dx + (6y^2 - 4x)dy = 0.$$

7. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку  $M_0(0; 1)$  та має таку властивість: трикутник, утворений віссю  $Oy$ , дотичною до кривої в довільній точці і радіусом-вектором точки дотику, рівнобедрений (основою цього трикутника є відрізок дотичної від точки дотику до осі  $Oy$ ).

## Варіанти індивідуальних завдань

### Варіант 15.

1. Знайти загальний розв'язок рівняння  $y' = e^{2x-3y}$ .

2. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y'e^{-y} = x - 1, \quad y(1) = -e.$$

3. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$1) (xy' - y)\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = x; \quad 2) y' = \frac{x+y+1}{x-y+3}.$$

4. Знайти загальний розв'язок лінійного рівняння  $xy' - y = xe^x$ .

5. Розв'язати задачу Коші  $y' + \frac{5x^4y}{x^5+4} = 2y^2(x^5 + 4) \cdot e^{-2x}$ ,  $y(0) = \frac{1}{4}$ .

6. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$(2xy + \sin y)dx + (x^2 + x \cos y)dy = 0.$$

7. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку  $M_0(0; 8)$  та має таку властивість: будь-яка її піднормаль має сталу довжину, що дорівнює 2.

### Варіант 16.

1. Знайти загальний розв'язок рівняння  $xy' = y \cdot \ln y$ .

2. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$2y(1 + e^{y^2})dy = dx, \quad y(0) = 0.$$

3. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$1) y^2 + x^2y' = yxy'; \quad 2) y' = \frac{2x+3y-2}{2x-y+6}.$$

4. Знайти загальний розв'язок лінійного рівняння  $xy' + 2y = 3x$ .

5. Розв'язати задачу Коші  $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$ ,  $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ .

6. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$1) (2 \sin y - y \cos x)dx + (2x \cos y + \cos x)dy = 0.$$

7. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку  $M_0(1; 2)$  та має таку властивість: в будь-якій її точці  $M$  дотичний вектор  $\overline{MN}$  з кінцем на осі  $Oy$  має проекцію на вісь  $Ox$  рівну  $-1$ .

## Варіанти індивідуальних завдань

### Варіант 17.

1. Знайти загальний розв'язок рівняння  $y^2 y' = (3x - 4)x$ .

2. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y' y \sqrt{1 + x^2} + x \sqrt{1 + y^2} = 0, \quad y(1) = 1.$$

3. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$1) \quad x^2 y' = xy \ln \frac{y}{x} + xy; \quad 2) \quad y' = \frac{x+3y-4}{x-y+8}.$$

4. Знайти загальний розв'язок лінійного рівняння  $y' + 2y \operatorname{ctg} x = \sin^3 x$ .

5. Розв'язати задачу Коші  $-y' \cdot \cos x + y = y^2 \cos x (1 - \sin x)$ ,  $y(0) = 1$ .

6. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$(2xy^2 + 3x^2y)dx + (x^3 + 2yx^2 + 2y)dy = 0.$$

7. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку  $M_0(3; 1)$  і має таку властивість: відрізок будь-якої її дотичної між точкою дотику і віссю  $Ox$  ділиться навпіл в точці перетину з віссю  $Oy$ .

### Варіант 18.

1. Знайти загальний розв'язок рівняння  $xuy' = 1 - x^2$ .

2. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$x(y^2 + 1)dy = y(1 - x^2)dx, \quad y(1) = 1.$$

3. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$1) \quad (5y^2 + 5xy + x^2)dx = (x^2 + 4xy)dy; \quad 2) \quad y' = \frac{x+3y-1}{x+y+5}.$$

4. Знайти загальний розв'язок лінійного рівняння  $xy' - 2y = 2x^4$ .

5. Розв'язати задачу Коші  $y' - \frac{2y}{x+1} = y^2(x+1)^3$ ,  $y(0) = 1$ .

6. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$(2x + 2)dx + (2y + 1)dy = 0.$$

7. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку  $M_0(\sqrt{2}; 0)$ , якщо сума довжин будь-якої її дотичної та піддотичної дорівнює добутку координат точки дотику.

## Варіанти індивідуальних завдань

### Варіант 19.

1. Знайти загальний розв'язок рівняння  $yy' = x$ .

2. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y' \cos^2 x = \sin^2 x \cos^2 y, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}.$$

3. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$1) \quad xy' - y \ln \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x}; \quad 2) \quad y' = \frac{4x+y-2}{2x+y+2}.$$

4. Знайти загальний розв'язок лінійного рівняння  $xy' - y + \frac{x^2}{(x-1)^2} = 0$ .

5. Розв'язати задачу Коші  $y' - \frac{y}{x-1} = \frac{y^2}{x-1}, \quad y(2) = 1$ .

6. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$(x^2 + \sin y + 3)dx + (x \cos y + y + 2)dy = 0.$$

7. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку  $M_0\left(\frac{1}{2}; -1\right)$  та має таку властивість: довжина відрізка, що відтинається будь-якою її дотичною на осі абсцис, дорівнює квадрату абсциси точки дотику.

### Варіант 20.

1. Знайти загальний розв'язок рівняння  $y' = (3x + 2) \cdot \operatorname{tg} y$ .

2. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y' = \sin(x - y) - \sin(x + y), \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

3. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$1) \quad xy' - y = \sqrt{y^2 + x^2}; \quad 2) \quad y' = \frac{3x+y+2}{2x+y+4}.$$

4. Знайти загальний розв'язок лінійного рівняння  $xy' + y = x + 1$ .

5. Розв'язати задачу Коші  $y' + \frac{2y}{x} = 3x^2 \cdot \sqrt[3]{y^4}, \quad y(1) = 1$ .

6. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$(2y + 3 \cos 3x)dx + (2x + 2 \sin 2y)dy = 0.$$

7. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку  $M_0(1; 0)$ , якщо довжина відрізка осі абсцис, що відтинається будь-якою її нормаллю, на 2 більша від абсциси точки дотику.

## Варіанти індивідуальних завдань

### Варіант 21.

1. Знайти загальний розв'язок рівняння  $y' \cdot \operatorname{tg} x = 4 + y$ .

2. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y(1 + e^x)dy = e^x dx, \quad y(0) = 1.$$

3. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$1) \quad y(x^2 + y^2) = x^3 y';$$

$$2) \quad y' = \frac{5x - y - 1}{2x + y + 8}.$$

4. Знайти загальний розв'язок лінійного рівняння  $\frac{dx}{dy} + x \operatorname{tg} y = \sin 2y$ .

5. Розв'язати задачу Коші  $y' - y \cdot \operatorname{tg} x = -\frac{4}{3} \cdot y^4 \cdot \sin x$ ,  $y(0) = 1$ .

6. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$(x^2 + y^2 + y)dx + (2xy + x + e^y)dy = 0.$$

7. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку  $M_0(1; 3)$  та має таку властивість: відрізок будь-якої її дотичної, що знаходиться між осями координат, ділиться в точці дотику у відношенні 2:1 (рахуючи від осі  $Oy$ ).

### Варіант 22.

1. Знайти загальний розв'язок рівняння  $(y^2 + 4)dx = e^{2x} y dy$ .

2. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y' = \cos(2x + 3y) + \cos(2x - 3y), \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

3. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$1) \quad (8y + 10x)dx = (5y + 7x)dy;$$

$$2) \quad y' = \frac{x + 3y + 1}{x - y + 9}.$$

4. Знайти загальний розв'язок лінійного рівняння  $(1 - x)y' - y = (1 - x)^3$ .

5. Розв'язати задачу Коші  $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2} \cdot y^2$ ,  $y(0) = 1$ .

6. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$(3x^2 y + 2)dx + (x^3 + 3y^2 - 1)dy = 0.$$

7. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку  $M_0(1; 0)$  та має таку властивість: відрізок, що відтинається на осі ординат будь-якою її нормаллю, дорівнює відстані точки, в якій проведена нормаль, до початку координат.

## Варіанти індивідуальних завдань

### Варіант 23.

1. Знайти загальний розв'язок рівняння  $(x^2y - x^2)dy = (xy - y)dx$ .

2. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$(9 + x^2) \ln y \, dy = y \, dx, \quad y(2) = 1.$$

3. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$1) \left(x - y \cos \frac{y}{x}\right) dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0; \quad 2) y' = \frac{x+2y-3}{x+y}.$$

4. Знайти загальний розв'язок лінійного рівняння  $y' + \frac{y}{1+x} = \frac{\cos x}{1+x}$ .

5. Розв'язати задачу Коші  $2xy' + 2y = y^2 \cdot x^2 \cdot \ln x$ ,  $y(1) = 1$ .

6. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$(2x + y - 2)dx + (x + 2y - 1)dy = 0.$$

7. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку  $M_0(0; -2)$  та має таку властивість: кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій її точці дорівнює ординаті цієї точки, збільшеній на три одиниці.

### Варіант 24.

1. Знайти загальний розв'язок рівняння  $(x^2y - x^2)dy = (xy^2 + y^2)dx$ .

2. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y' \sin x = y \ln y, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e.$$

3. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$1) xy' - y = x \cdot \operatorname{tg} \frac{y}{x}; \quad 2) y' = \frac{5x+2y+3}{x-y+2}.$$

4. Знайти загальний розв'язок лінійного рівняння  $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}$ .

5. Розв'язати задачу Коші  $xy' + y = y^2 \cdot 3x^4$ ,  $y(1) = 1$ .

6. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$(4x + y)dx + (x + 1)dy = 0.$$

7. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку  $M_0(1; 2)$  та має таку властивість: відрізок нормалі в будь-якій точці кривої, що міститься між осями координат, ділиться навпіл у цій точці.

## Варіанти індивідуальних завдань

### Варіант 25.

1. Знайти загальний розв'язок рівняння  $\sqrt{1-y^2} \cdot dx + y\sqrt{1-x^2} \cdot dy = 0$ .

2. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y' \operatorname{tg} x = y + 2, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2.$$

3. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$1) (x^2y^2 - x^4)y' + 2xy^3 = 0; \quad 2) y' = \frac{x+2y}{x-y-6}.$$

4. Знайти загальний розв'язок лінійного рівняння  $xy' + y = x\sqrt{1-x^2}$ .

5. Розв'язати задачу Коші  $(x-1)y' - y = 4x^3 \cdot y^2, \quad y(2) = \frac{1}{2}$ .

6. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$(3 + ye^x)dx + (y + e^x)dy = 0.$$

7. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку  $M_0(2; -3)$  та має таку властивість: відрізок будь-якої її дотичної, що знаходиться між осями координат, ділиться в точці дотику у відношенні 3:1 (рахуючи від осі Oy).

### Варіант 26.

1. Знайти загальний розв'язок рівняння  $(xy^2 + x)dx = (yx^2 - y)dy$ .

2. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y^2(1 + e^{2x})dy = e^x dx, \quad y(0) = 1.$$

3. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$1) (xy' - y)\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = x; \quad 2) y' = \frac{x+3y-3}{2x-y+8}.$$

4. Знайти загальний розв'язок лінійного рівняння  $xy' + y + x = 0$ .

5. Розв'язати задачу Коші  $5xy' + 7y = y^6(6x - 7), \quad y(1) = 1$ .

6. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$(2x + e^y)dx + (xe^y - 2y)dy = 0.$$

7. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку  $M_0(2; 1)$  і має таку властивість: будь-яка її піддотична вдвічі більша від абсциси точки дотику.

## Варіанти індивідуальних завдань

### Варіант 27.

1. Знайти загальний розв'язок рівняння  $y^2 y' = (x - 1)x$ .
2. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$2y(1 + e^{y^2})dy = dx, \quad y(0) = 0.$$

3. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$1) \quad xy' \cos \frac{y}{x} = y \cos \frac{y}{x} - x; \quad 2) \quad y' = \frac{y-2}{2x-y+4}.$$

4. Знайти загальний розв'язок лінійного рівняння  $y' + y \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$ .
5. Розв'язати задачу Коші  $y' + 2xy = y^2(2x - 1) \cdot e^{x^2}$ ,  $y(0) = 1$ .
6. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$(3x^2y - 2x + 1)dx + (x^3 + 3y^2 + 2)dy = 0.$$

7. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку  $M_0(1; 0)$  та має таку властивість: відрізок будь-якої її нормалі, що знаходиться між осями координат, ділиться точкою лінії у відношенні 3: 2 (рахуючи від осі  $Oy$ ).

### Варіант 28.

1. Знайти загальний розв'язок рівняння  $xuy' = 1 + x + 2x^2$ .
2. Знайти розв'язок диференціального рівняння  $2^y dy = 2^x dx$ ,  $y(3) = 2$ .
3. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$1) \quad \left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right) dx + ye^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = xdy; \quad 2) \quad y' = \frac{x+3}{2x-y+8}.$$

4. Знайти загальний розв'язок лінійного рівняння  $y \frac{dx}{dy} + 2x = y^3$ .
5. Розв'язати задачу Коші  $3xy' + 5y = y^4(4x - 5)$ ,  $y(1) = 1$ .
6. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$(6x + 4y - 1)dx + (8y + 4x + 3)dy = 0.$$

7. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку  $M_0(0; 5)$  та має таку властивість: довжина відрізка будь-якої її нормалі стала і дорівнює 5.

## Варіанти індивідуальних завдань

### Варіант 29.

1. Знайти загальний розв'язок рівняння  $\sin x \cdot \operatorname{tg} y \cdot dx = \frac{dy}{\sin x}$ .
2. Знайти розв'язок диференціального рівняння  $xyy' = 1 - x^2$ ,  $y(1) = 1$ .
3. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$1) \quad 2y(x + y)y' = y^2 - x^2; \quad 2) \quad y' = \frac{4x+y-2}{2x+y+2}.$$

4. Знайти загальний розв'язок лінійного рівняння  $y' - \frac{y}{x} = x^2$ .
5. Розв'язати задачу Коші  $(x + 1)y' - y = y^2 \cdot 3x^2$ ,  $y(0) = 1$ .
6. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$(2y^2 + 6xy)dx + (4xy + 3x^2 + 3)dy = 0.$$

7. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку  $M_0(1; 1)$  та має таку властивість: кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій її точці в 4 рази більший від кутового коефіцієнта прямої, що з'єднує цю ж точку з початком координат.

### Варіант 30.

1. Знайти загальний розв'язок рівняння  $y' = 2^{x+y}$ .
2. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$3(1 + y^2)dx = 2xydy, \quad y(1) = 0.$$

3. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$1) \quad (xy^2 - x^3)y' = y^3; \quad 2) \quad y' = \frac{2x-y-6}{2x+y+2}.$$

4. Знайти загальний розв'язок лінійного рівняння  $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{2}{\cos x}$ .
5. Розв'язати задачу Коші  $4xy' + 6y = y^5 \cdot (5x - 6)$ ,  $y(1) = 1$ .
6. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$(3x^2y + y^2)dx + (x^3 + 2xy)dy = 0.$$

7. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку  $M_0(1; 1)$  та має таку властивість: відрізок будь-якої її нормалі, що знаходиться між осями координат, ділиться точкою лінії у відношенні 1:2 (рахуючи від осі  $Oy$ ).

## Додатки

### Додатки. Деякі види диференціальних рівнянь першого порядку



Вид диференціального рівняння	Алгоритм розв'язування
<p>з відокремлюваними змінними</p> $P(x)dx = Q(y)dy$ $y' = P(x) \cdot G(y)$	<p>1. Відокремити (розділити) змінні:  <math>P(x)dx = Q(y)dy</math></p> <p>2. Інтегрувати обидві частини рівняння за відповідною змінною:  <math display="block">\int P(x)dx = \int Q(y)dy + C</math></p>
<p>з відокремлюваними змінними</p> $y' = P(x) \cdot G(y)$	<p>1. Відокремити (розділити) змінні:  <math>y' = P(x) \cdot Q(y) \quad \frac{dy}{Q(y)} = P(x)dx</math></p> <p>2. Інтегрувати обидві частини рівняння за відповідною змінною:  <math display="block">\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x)dx + C</math></p>
<p>Однорідне ДР I-го порядку</p> $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y}\right)$ $y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{або} \quad x' = f\left(\frac{x}{y}\right)$	<p>1. Підстановка <math>\frac{y}{x} = z, y = x \cdot z</math>, де <math>z = z(x)</math> – нова невідома функція</p> <p>2. Похідна <math>y' = (z \cdot x)'</math>  <math>y' = z' \cdot x + z \cdot x' = z' \cdot x + z</math>          або в диференціалах  <math>dy = d(zx) = zdx + xdz.</math></p> <p>3. Підставляємо все (<math>y</math> та <math>y'</math> (або <math>dy</math>)) в ДР. Отримаємо ДР з відокремлюваними змінними відносно <math>x</math> та <math>z</math>.</p> <p>4. Розв'язавши ДР з відокремлюваними змінними, зробимо обернену заміну <math>y = z \cdot x</math>, тому <math>z = \frac{y}{x}</math>, і отримаємо загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.</p>

## Додатки

<p>Диференціальне рівняння, що зводиться до однорідного</p> $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$	<ol style="list-style-type: none"> <li>Виконати заміну змінних <math>\begin{cases} x = X + x_0, \\ y = Y + y_0, \end{cases}</math> де <math>(x_0; y_0)</math> є розв'язком системи рівнянь <math>\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0, \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0. \end{cases}</math></li> <li>Розв'язувати однорідне диференціальне рівняння <math>Y' = g\left(\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}\right)</math>. Підстановка <math>\frac{Y}{X} = z</math>, <math>Y = X \cdot z</math>, де <math>z = z(x)</math> – нова невідома функція</li> </ol>
<p>Диференціальне рівняння, що зводиться до однорідного</p> $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$	<ol style="list-style-type: none"> <li>Виконати заміну змінних <math>z = a_1x + b_1y + c_1</math></li> <li>Розв'язувати однорідне диференціальне рівняння</li> </ol>
<p>Лінійне однорідне рівняння I-го порядку</p> $y' + P(x) \cdot y = 0$	$y = C \cdot e^{-\int P(x)dx}$
<p>Лінійне неоднорідне рівняння I-го порядку</p> $y' + P(x) \cdot y = Q(x),$ $Q(x) \neq 0$	<p>Метод Бернуллі:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Використовуємо заміну <math>y = u \cdot v</math>  <math>y' = u' \cdot v + u \cdot v'</math></li> <li>Все підставляємо в рівняння, далі розв'язуємо систему <math>\begin{cases} v' + P(x)v = 0 \\ u'v = Q(x) \end{cases}</math></li> <li>Отримані функції підставляємо в <math>y = u(x) \cdot v(x)</math></li> </ol>
<p>Лінійне неоднорідне рівняння I-го порядку</p> $y' + P(x) \cdot y = Q(x),$ $Q(x) \neq 0$	<p>Метод Лагранжа</p> $y = C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx}$ <p>Все підставляємо в рівняння, далі знаходимо функцію <math>C'(x)</math> та <math>C(x)</math></p>

## Додатки

<p>Рівняння Бернуллі</p> $y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^n$	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Поділимо на функцію <math>y^n</math>:  <math display="block">\frac{y'}{y^n} + P(x) \cdot y^{1-n} = Q(x)</math> </li> <li>2. Виконати заміну: <math>y^{1-n} = u \cdot v</math>  <math display="block">\frac{(1-n)y'}{y^n} = u' \cdot v + u \cdot v'</math> </li> <li>3. Все підставляємо в рівняння з першого пункту. Далі за схемою лінійного рівняння.</li> </ol>
<p>Рівняння в повних диференціалах</p> $P(x; y)dx + Q(x; y)dy = 0,$ $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$	$\int_{x_0}^x P(t, y_0)dt + \int_{y_0}^y Q(x, t)dt = C$

## Додатки

### Додатки. Таблиця похідних та правила диференціювання

#### Основні правила диференціювання

Нехай функції  $u = u(x)$  та  $v = v(x)$  є диференційовними в точці  $x$ ,  $A$  – певна константа.

Тоді справджуються наступні правила:

$$\begin{aligned}(A \cdot u(x))' &= A \cdot (u(x))' \\ (u + v)' &= u' + v' & (u - v)' &= u' - v' \\ (u \cdot v)' &= u' \cdot v + u \cdot v' \\ \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{(v)^2} \\ (u(v))' &= u' \cdot v'\end{aligned}$$

	Формула	Приклади
<b>Степеневі функції</b>		
1.	$\begin{aligned}(x^n)' &= n \cdot x^{n-1} \\ \left(\frac{1}{x}\right)' &= \frac{-1}{x^2} \\ (\sqrt{x})' &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ (\sqrt[3]{x})' &= \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}} \\ (u^n)' &= n \cdot u^{n-1} \cdot u' \\ \left(\frac{1}{u}\right)' &= \frac{-1 \cdot u'}{u^2} \\ (\sqrt{u})' &= \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' \\ (\sqrt[5]{u})' &= \frac{1 \cdot u'}{5 \cdot \sqrt[5]{u^4}}\end{aligned}$	$\begin{aligned}(x)' &= 1 \\ (x^2)' &= 2x \\ (x^3)' &= 3x^2 \\ ((x + 2)^{204})' &= 204 \cdot (x + 2)^{203} \\ ((5x + 3)^{13})' &= 13 \cdot (5x + 3)^{12} \cdot 5 \\ (\sqrt{5x + 7})' &= \frac{1}{2\sqrt{5x + 7}} \cdot 5 \\ \left(\frac{1}{7x - x^2}\right)' &= \frac{-1}{(7x - x^2)^2} \cdot (7 - 2x)\end{aligned}$
<b>Показникові та логарифмічні функція</b>		
2.	$\begin{aligned}(a^x)' &= a^x \cdot \ln a \\ (e^x)' &= e^x \\ (\ln x)' &= \frac{1}{x} \\ (\log_a x)' &= \frac{1}{x \cdot \ln a} \\ (\ln u)' &= \frac{1}{u} \cdot u'\end{aligned}$	$\begin{aligned}(2^x)' &= 2^x \cdot \ln 2 \\ (e^{5-3x})' &= e^{5-3x} \cdot (-3) \\ (e^{x^2+3})' &= e^{x^2+3} \cdot (2x) \\ (\ln(4x - 3))' &= \frac{1}{4x - 3} \cdot 4 \\ (\log_2 x)' &= \frac{1}{x \cdot \ln 2} \\ (\log_7(3x + 1))' &= \frac{1}{(3x + 1) \cdot \ln 7} \\ (\ln(3x^2 + 5))' &= \frac{1}{3x^2 + 5} \cdot 6x\end{aligned}$

Додатки

<b>Тригонометричні функції</b>	
3.	$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ $(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}, \quad x \neq \pi k$
	$(\sin 2x)' = 2\cos 2x$ $(\cos 3x)' = -3\sin 3x$ $(\operatorname{tg} 4x)' = \frac{4}{\cos^2 4x}$ $(\operatorname{ctg} 5x)' = \frac{-5}{\sin^2 5x}$
<b>Обернена тригонометрія</b>	
4.	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad  x  < 1$ $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad  x  < 1$ $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ $(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$
	$(\arcsin 3x)' = \frac{3}{\sqrt{1-(3x)^2}}$ $(\arccos 4x)' = \frac{-4}{\sqrt{1-(4x)^2}}$ $(\operatorname{arctg} 5x)' = \frac{5}{1+(5x)^2}$ $(\operatorname{arcctg} 6x)' = \frac{-6}{1+(6x)^2}$
<b>Гіперболічні функції</b>	
5.	$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$ $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$ $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$ $(\operatorname{cth} x)' = \frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}$
	$(\operatorname{sh} 3x)' = 3\operatorname{ch} 3x$ $(\operatorname{ch} 4x)' = 4\operatorname{sh} 4x$ $(\operatorname{th} 5x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 5x} \cdot 5 = \frac{5}{\operatorname{ch}^2 5x}$ $(\operatorname{cth} 7x)' = \frac{-7}{\operatorname{sh}^2 7x}$

Додатки

Додатки. Таблиця інтегралів

Основні властивості невизначеного інтегралу  $\int f(x)dx = F(x) + C$

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \qquad d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

$$\int A \cdot f(x)dx = A \cdot F(x) + C$$

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int (A \cdot f(x) + B \cdot g(x))dx = A \int f(x)dx + B \int g(x)dx$$

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C$$

№	Формула $\int f(x)dx = F(x) + C$	Приклади
<b>Інтегрування константи</b>		
1.	$\int Adx = Ax + C$	$\int \pi dx = \pi x + C$ $\int -2dx = -2x + C$ $\int 0dx = 0 + C = C$ $\int \cos 5 dx = x \cdot \cos 5 + C$
<b>Інтегрування степеневих функцій</b>		
2.	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$ $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$	$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$ $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$ $\int y^4 dy = \frac{y^5}{5} + C$ $\int \frac{1}{u^2} du = \frac{-1}{u} + C$ $\int \frac{du}{u^n} = \frac{u^{-n+1}}{-n+1} + C, \quad n \neq 1$ $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$ $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+4}} = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{3x+4} + C$ $\int \sqrt{u} du = \frac{2u\sqrt{u}}{3} + C$

<b>Інтегрування мінус першого степеня (формула логарифма)</b>		
3.	$\int u^{-1} du = \int \frac{du}{u} = \ln u  + C$	$\int \frac{dx}{x} = \ln x  + C$ $\int \frac{dx}{x+3} = \ln x+3  + C$ $\int \frac{dy}{2y} = \frac{1}{2} \cdot \ln y  + C$ $\int \frac{du}{5u+2} = \frac{1}{5} \ln 5u+2  + C$ $\int \frac{d(2z+6)}{2z+6} = \ln 2z+6  + C$
<b>Інтегрування тригонометричних функцій</b>		
4.	$\int \cos u \, du = \sin u + C$ $\int \sin u \, du = -\cos u + C$ $\int \operatorname{tg} u \cdot du = -\ln \cos u  + C$ $\int \operatorname{ctg} u \cdot du = \ln \sin u  + C$ $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tgu} + C$ $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctgu} + C$	$\int \cos(3x) dx = \frac{\sin(3x)}{3} + C$ $\int \sin(2x) dx = -\frac{\cos(2x)}{2} + C$ $\int \operatorname{tg}(4y) dy = -\frac{\ln \cos(4y) }{4} + C$ $\int \operatorname{ctg} 3z dz = \frac{\ln \sin 3z }{3} + C$ $\int \frac{dx}{\cos^2(7x)} = \frac{1}{7} \cdot \operatorname{tg} 7x + C$ $\int \frac{dx}{\sin^2 9x} = -\frac{1}{9} \operatorname{ctg} 9x + C$
<b>Інтегрування гіперболічних функцій</b>		
5.	$\int \operatorname{ch} u \, du = \operatorname{sh} u + C$ $\int \operatorname{sh} u \, du = \operatorname{ch} u + C$ $\int \operatorname{th} u \cdot du = \ln \operatorname{ch} u  + C$ $\int \operatorname{cth} u \cdot du = \ln \operatorname{sh} u  + C$ $\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{thu} + C$ $\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cthu} + C$	$\int \operatorname{ch}(3x) dx = \frac{\operatorname{sh}(3x)}{3} + C$ $\int \operatorname{sh}(2x) dx = \frac{\operatorname{ch}(2x)}{2} + C$ $\int \operatorname{th}(4y) dy = \frac{\ln \operatorname{ch}(4y) }{4} + C$ $\int \operatorname{cth} 3z dz = \frac{\ln \operatorname{sh} 3z }{3} + C$ $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2(7x)} = \frac{\operatorname{th} 7x}{7} + C$ $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 9x} = -\frac{1}{9} \operatorname{cth} 9x + C$
<b>Інтегрування показникових функцій</b>		
6.	$\int e^u du = e^u + C$ $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$	$\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} + C$ $\int e^{7x+3} dx = \frac{e^{7x+3}}{7} + C$ $\int 4^x dx = \frac{4^x}{\ln 4} + C$

Додатки

		$\int \frac{dx}{e^x} = \int e^{-x} dx = -e^{-x} + C$ $\int 2^{3x+8} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{2^{3x+8}}{\ln 2} + C$
7.	$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \begin{cases} \arcsin u + C \\ -\arccos u + C \end{cases}$ $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{u}{a}\right) + C \\ -\arccos\left(\frac{u}{a}\right) + C \end{cases}$ $\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u + C$ $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{u}{a}\right) + C$ $\int \frac{du}{a^2-u^2} = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg}\left(\frac{u}{a}\right) + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ $\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}} = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{x}{5}\right) + C \\ -\arccos\left(\frac{x}{5}\right) + C \end{cases}$ $\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{4}\right) + C$ $\int \frac{dz}{9+z^2} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{z}{3}\right) + C$ $\int \frac{dz}{1+z^2} = \operatorname{arctg} z + C$ $\int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) + C$ $\int \frac{du}{7+u^2} = -\frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arcctg}\left(\frac{u}{\sqrt{7}}\right) + C$ $\int \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C$
<b>Інтегрування кореня квадратного – довгий логарифм</b>		
8.	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \ln \left  u + \sqrt{a^2+u^2} \right  + C$ $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln \left  u + \sqrt{u^2-a^2} \right  + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{5^2+x^2}} = \ln \left  x + \sqrt{25+x^2} \right  + C$ $\int \frac{dx}{x^2-9} = \frac{1}{2 \cdot 3} \ln \left  \frac{x-3}{x+3} \right  + C$
<b>Інтегрування різниці квадратів – високий логарифм</b>		
9.	$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{u-a}{u+a} \right  + C$	$\int \frac{dx}{x^2-9} = \frac{1}{2 \cdot 3} \ln \left  \frac{x-3}{x+3} \right  + C$ $\int \frac{dx}{x^2-25} = \frac{1}{2 \cdot 5} \ln \left  \frac{x-5}{x+5} \right  + C$ $\int \frac{dx}{16-x^2} = \frac{-1}{2 \cdot 4} \ln \left  \frac{x-4}{x+4} \right  + C$ $\int \frac{dx}{(x-2)^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left  \frac{x-2-1}{x-2+1} \right  + C$ $= \frac{1}{2} \ln \left  \frac{x-3}{x-1} \right  + C$ $\int \frac{dy}{(y+3)^2-4} = \frac{1}{2 \cdot 2} \ln \left  \frac{y+3-2}{y+3+2} \right  + C$ $= \frac{1}{4} \ln \left  \frac{y+1}{y+5} \right  + C$

## Інтегрування кореня квадратного із квадратом змінної

10.

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{1}{2} \left( u\sqrt{a^2 - u^2} + a^2 \arcsin\left(\frac{u}{a}\right) \right) + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \ln \left| u + \sqrt{a^2 + u^2} \right| + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 - a^2} \right| + C$$

$$\int \sqrt{a^2 + u^2} du = \frac{1}{2} \left( u\sqrt{a^2 + u^2} + a^2 \ln \left| u + \sqrt{a^2 + u^2} \right| \right) + C$$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2} \left( x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| \right) + C$$

$$\int \sqrt{16 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left( x\sqrt{16 - x^2} + 16 \arcsin\left(\frac{x}{4}\right) \right) + C$$

$$\int \sqrt{9 + x^2} dx = \frac{1}{2} \left( x\sqrt{9 + x^2} + 9 \ln \left| x + \sqrt{9 + x^2} \right| \right) + C$$

$$\int \sqrt{x^2 - 25} dx = \frac{1}{2} \left( x\sqrt{x^2 - 25} - 25 \ln \left| x + \sqrt{x^2 - 25} \right| \right) + C$$

### Питання для самоперевірки:

1. Які задачі математики та фізики приводять до поняття диференціального рівняння?
2. Запишіть загальний вигляд диференціального рівняння першого порядку?
3. Яке рівняння називається диференціальним рівнянням I-го порядку?
4. Що називається звичайним диференціальним рівнянням?
5. Що називається порядком диференціального рівняння?
6. Яку форму диференціального рівняння першого порядку називають нормальною, симетричною?
7. Що означає розв'язати диференціальне рівняння?
8. Що називається загальним розв'язком диференціального рівняння?
9. Що називається частинним розв'язком диференціального рівняння?
10. Що називається загальним інтегралом розв'язку диференціального рівняння?
11. Поняття загального інтегралу та частинного інтегралу диференціального рівняння.
12. Що таке інтегральна крива? Які її властивості?
13. Які умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші?
14. Який геометричний зміст задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку?
15. Сформулюйте задачу Коші для диференціального рівняння першого порядку.
16. Сформулюйте теорему існування і єдиності розв'язку диференціального рівняння першого порядку.
17. Які точки називаються особливими точками диференціального рівняння?
18. Які розв'язки диференціального рівняння називаються особливими?
19. Чи можливо отримати особливий розв'язок (якщо він існує) рівняння  $y' = f(x, y)$  із його загального розв'язку?
20. Яке диференціальне рівняння першого порядку називається рівнянням з відокремлюваними змінними?

## Додатки

21. Як інтегруються диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними?
22. Вкажіть спосіб зведення рівняння  $y' = f(ax + by + c)$  до рівняння з відокремлюваними змінними?
23. Яку функцію  $f(x, y)$  називають однорідною степеня  $k$ ? Наведіть приклади однорідних функцій 0, 1, 2, 3 степенів, а також неоднорідних?
24. Які диференціальні рівняння першого порядку називаються однорідними?
25. Як інтегруються однорідні диференціальні рівняння першого порядку?
26. Якщо функції  $M(x, y)$ ,  $N(x, y)$  однорідні, то чи досить для того, щоб рівняння  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  було однорідним?
27. Які диференціальні рівняння першого порядку називаються лінійними?
28. Як інтегруються лінійні диференціальні рівняння першого порядку?
29. Яке диференціальне рівняння називається лінійним однорідним?
30. Яке диференціальне рівняння називається лінійним неоднорідним?
31. Запишіть загальний вигляд лінійного диференціального рівняння першого порядку?
32. Яка відмінність між лінійним неоднорідним і лінійним однорідним рівняннями?
33. Які існують методи розв'язання лінійного диференціального рівняння першого порядку?
34. У чому полягає сутність методу варіації довільної сталої знаходження розв'язку диференціального рівняння?
35. У чому полягає метод Бернуллі розв'язання лінійного диференціального рівняння першого порядку?
36. Чи має лінійне неоднорідне рівняння з неперервними коефіцієнтами особливі розв'язки?
37. Які диференціальні рівняння першого порядку називаються рівняннями Бернуллі?
38. Як інтегруються диференціальні рівняння Бернуллі?
39. Яке диференціальне рівняння називається рівнянням в повних диференціалах?
40. Як інтегруються диференціальні рівняння в повних диференціалах?

## Тести

1. Диференціальним називається рівняння у якого невідома функція входить під знак

інтеграла	логарифма	кореня	похідної або диференціала
-----------	-----------	--------	---------------------------

2. Порядком диференціального рівняння називається:

найвищий степінь невідомої функції	найвищий степінь вільної змінної	найвищий порядок похідної невідомої функції	найнижчий порядок похідної невідомої функції
------------------------------------	----------------------------------	---	--

3. Порядком диференціального рівняння називається:

Найбільший степінь однієї зі змінної	сума всіх порядків похідних, що входять у рівняння
найвищий числовий коефіцієнт при змінної	найбільший порядок похідної невідомої функції

4. Указати диференціальне рівняння

$\sin(x+4) = \frac{1}{2}$	$(x^2 + y^2 + 2x)x = 0$
$(x - y^2)x = 2(x + y)y$	$(xy^2 + 3x)dx + (yx^2 - 3y)dy = 0$

5. Указати диференціальне рівняння

$\sin(x^2 - 4) \cdot \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$
$(x - y^2)y' = (x + y)y$	$(xy^2 + 3x)x = (yx - 3y)y$

6. Указати диференціальне рівняння

$xy + x - y + 1 = 0$	$(x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2)x_3 = 0$
$(xe^y - y) = 2y'$	$e^{x+y}(x+y) = 1$

7. Рівняння виду  $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$  називається диференціальним рівнянням ....

однорідним	лінійним неоднорідним	Якоба Бернуллі	в повних диференціалах
------------	-----------------------	----------------	------------------------

Додатки

8. Рівняння виду  $y' = P(x) \cdot Q(y)$  називається диференціальним рівнянням

однорідним	лінійним неоднорідним	Якоба Бернуллі	З відокремлюваними змінними
------------	--------------------------	----------------	--------------------------------

9. Рівняння виду  $y' = P\left(\frac{y}{x}\right)$  називається диференціальним рівнянням ....

однорідним	лінійним неоднорідним	Якоба Бернуллі	в повних диференціалах
------------	--------------------------	----------------	---------------------------

10. Рівняння виду  $y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^n$  називається диференціальним рівнянням ....

однорідним	лінійним неоднорідним	Якоба Бернуллі	в повних диференціалах
------------	--------------------------	----------------	---------------------------

11. Указати, яку підстановку треба застосувати при розв'язуванні лінійного диференціального рівняння  $y' + p(x) \cdot y = Q(x)$

$y = x \cdot t$	$y = \frac{t}{x}$	$y = u \cdot v$	$y = \frac{u}{v}$
-----------------	-------------------	-----------------	-------------------

12. Указати, яку підстановку треба застосувати при розв'язуванні лінійного диференціального рівняння  $y' = Q\left(\frac{y}{x}\right)$

$y = x \cdot t$	$y = \frac{t}{x}$	$y = u \cdot v$	$y = \frac{u}{v}$
-----------------	-------------------	-----------------	-------------------

13. Загальним інтегралом диференціального рівняння  $F(x, y, y') = 0$  буде функція

$x^2 + y^2 = \ln C(x^2 - 2) $	$y = \ln C(x^2 - 1) $	$y = C_1 e^{C_2 x}$	$(C_1 x^2 + C_2 y^2) y = xy$
-------------------------------	-----------------------	---------------------	------------------------------

14. Початкова умова задачі Коші для диференціального рівняння 1-го порядку

$y(\pi) = 0$	$y(\pi) = 0, y'(\pi) = 0$	$y(0) = 0, y'(0) = 0$	$y'(\pi) = 0$
--------------	---------------------------	-----------------------	---------------

15. Степінь однорідності функції  $f(x, y) = \frac{y}{x} + \sin\left(\frac{y}{x}\right)$  є

0	1	2	3
---	---	---	---

16. Степінь однорідності функції  $f(x, y) = \frac{y^3 + x^3}{x^2 y}$  є

0	1	2	3
---	---	---	---

Додатки

17. Указати яку підстановку треба застосувати для розв'язування диференціального рівняння  $2xy' + y = x^2$

$y = x \cdot t$	$y = \frac{t}{x}$	$y = u \cdot v$	$y = \frac{u}{v}$
-----------------	-------------------	-----------------	-------------------

18. Указати яку підстановку треба застосувати для розв'язування диференціального рівняння  $2xyy' = x^2 + y^2$

$y = x \cdot t$	$y = \frac{t}{x}$	$y = u \cdot v$	$y = \frac{u}{v}$
-----------------	-------------------	-----------------	-------------------

19. Указати тип диференціального рівняння  $(4x + 3)y' + 2y = x$

Бернуллі	однорідним	лінійним	з відокремлювальними змінними
----------	------------	----------	-------------------------------

20. Указати тип диференціального рівняння  $(x^2y + y)y' = (xy^2 - x)$

Бернуллі	однорідним	лінійним	з відокремлювальними змінними
----------	------------	----------	-------------------------------

21. Рівняння  $xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0$  буде рівнянням

Бернуллі	однорідним	лінійним	з відокремлювальними змінними
----------	------------	----------	-------------------------------

22. Рівняння  $x(x-1)y' + y = x^2(2x-1)$  буде рівнянням

лінійним	Бернуллі	однорідним	з відокремлювальними змінними
----------	----------	------------	-------------------------------

23. Рівняння  $(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0$  буде рівнянням

однорідним	Бернуллі	лінійним	з відокремлювальними змінними
------------	----------	----------	-------------------------------

24. Рівняння  $(x - y)y' = x + 2y$  буде рівнянням

однорідним	Бернуллі	лінійним	з відокремлювальними змінними
------------	----------	----------	-------------------------------

25. Рівняння  $xy' + 2y = x - 1$  буде рівнянням

лінійним	однорідним	Бернуллі	з відокремлювальними змінними
----------	------------	----------	-------------------------------

## Додатки

26. Рівняння  $y' - 2ye^x = 2\sqrt{y}$  буде рівнянням

Бернуллі	однорідним	лінійним	з відокремлювальними змінними
----------	------------	----------	-------------------------------

27. Рівняння  $3xy^2y' - 2y^3 = x^2$  буде рівнянням

Бернуллі	однорідним	лінійним	з відокремлювальними змінними
----------	------------	----------	-------------------------------

28. Рівняння  $xy' - y = xtg \frac{y}{x}$  буде рівнянням

однорідним	Бернуллі	лінійним	з відокремлювальними змінними
------------	----------	----------	-------------------------------

29. Рівняння  $(x-1)y' - y = y^2x$  буде рівнянням

Бернуллі	однорідним	лінійним	з відокремлювальними змінними
----------	------------	----------	-------------------------------

30. Рівняння  $xy^2dy = (x^3 + y^3)dx$  буде рівнянням

однорідним	Бернуллі	лінійним	з відокремлювальними змінними
------------	----------	----------	-------------------------------

31. Рівняння  $(x-y)dx - dy = 0$  буде рівнянням

лінійним	однорідним	Бернуллі	з відокремлювальними змінними
----------	------------	----------	-------------------------------

32. Рівняння  $(x^2 + 2y)dx = dy$  буде рівнянням

лінійним	однорідним	Бернуллі	з відокремлювальними змінними
----------	------------	----------	-------------------------------

33. Рівняння  $(e^x - 3y)dx = xdy$  буде рівнянням

лінійним	однорідним	Бернуллі	з відокремлювальними змінними
----------	------------	----------	-------------------------------

34. Рівняння  $(x-y+1)dx = (1+x)dy$  буде рівнянням

лінійним	однорідним	Бернуллі	з відокремлювальними змінними
----------	------------	----------	-------------------------------

35. Рівняння  $(3x+y)dy = (2y-x)dx$  буде рівнянням

однорідним	Бернуллі	лінійним	з відокремлювальними змінними
------------	----------	----------	-------------------------------

Додатки

36. Рівняння  $2xyu' + y^2 = 5x^2$  буде рівнянням

і Бернуллі і однорідним	однорідним	і Бернуллі і лінійним	з відокремлювальними змінними
----------------------------	------------	--------------------------	----------------------------------

37. Рівняння  $ctgxy' + y^3 = y^2$  буде рівнянням

з відокремлювальними змінними	однорідним	Бернуллі	лінійним
-------------------------------	------------	----------	----------

38. Рівняння  $(1+x)y' + 2x^2y^2 = 0$  буде рівнянням

з відокремлювальними змінними	однорідним	Бернуллі	лінійним
-------------------------------	------------	----------	----------

39. Рівняння  $(xy + 2y)dx + 2x \ln y dy = 0$  буде рівнянням

з відокремлювальними змінними	однорідним	Бернуллі	лінійним
-------------------------------	------------	----------	----------

40. Рівняння  $2x\sqrt{4+y^2} dx = (3+x^2)dy$  буде рівнянням

з відокремлювальними змінними	однорідним	Бернуллі	лінійним
-------------------------------	------------	----------	----------

41. Рівняння  $ctgxy' + y^3 = y^2$  буде рівнянням

з відокремлювальними змінними	однорідним	Бернуллі	лінійним
-------------------------------	------------	----------	----------

42. Рівняння  $(1+x)y' - 2y^2 = 0$  буде рівнянням

з відокремлювальними змінними	однорідним	Бернуллі	лінійним
-------------------------------	------------	----------	----------

43. Рівняння  $(xy + 2y)dx + 4xdy = 0$  буде рівнянням

і лінійне однорідне і з відокремлювальними змінними	однорідним	Бернуллі	лінійним
--	------------	----------	----------

44. Рівняння  $2x\sqrt{4+y^2} dx = (1+x^2)dy$  буде рівнянням

однорідним	Бернуллі	лінійним	з відокремлювальними змінними
------------	----------	----------	-------------------------------

45. Указати загальний розв'язок диференціального рівняння  $(x+1)y' = y$

$y = \ln x+1  + C$	$y = x+1$	$(1+x)\ln y = C$	$(1+x) = yC$
--------------------	-----------	------------------	--------------

Додатки

46. Указати загальний розв'язок диференціального рівняння  $ydx = xdy$

$y = -2x + C$	$y = Cx^2$	$y = Cx$	$y = x + C$
---------------	------------	----------	-------------

47. Указати загальний розв'язок диференціального рівняння

$$(2x + 3)y' + y^2 = 0$$

$y = \frac{1}{2} \ln  2x + 3  + C$	$y = \frac{C}{\ln  2x + 3 }$
$y = \pm \sqrt{\ln  2x + 3  + C}$	$y = \frac{2}{\ln  2x + 3  + C}$

48. Указати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними

$2xyy' = y^2 - x$	$xy' = y(1 - \ln x + \ln y)$	$(1 + x)(y' + y) = e^{-x}$	$y' = y \cdot \cos x$
-------------------	------------------------------	----------------------------	-----------------------

49. Указати однорідне диференціальне рівняння

$2xyy' = y^2 - x$	$xy' = y(1 - \ln x + \ln y)$	$(1 + x)(y' + y) = e^{-x}$	$y' = y \cdot \cos x$
-------------------	------------------------------	----------------------------	-----------------------

50. Указати лінійне диференціальне рівняння

$2xyy' = y^2 - x$	$xy' = y(1 - \ln x + \ln y)$	$(1 + x)(y' + y) = e^{-x}$	$y' = y \cdot \cos x$
-------------------	------------------------------	----------------------------	-----------------------

51. Указати диференціальне рівняння Бернуллі

$2xyy' = y^2 - x$	$xy' = y(1 - \ln x + \ln y)$	$(1 + x)(y' + y) = e^{-x}$	$y' = y \cdot \cos x$
-------------------	------------------------------	----------------------------	-----------------------

52. Указати диференціальне рівняння в повних диференціалах

$2xydy + (x - y^2)dx = 0$	$(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy = 0$
$(x + 2y^2)dx + 2xydy = 0$	$(xy^2 + x)dx + (yx^2 - y)dy = 0$

53. Указати диференціальне рівняння, що можна звести до однорідного

$y' = \frac{2x + y + 3}{3x - 5y + 1}$	$y' = 2x + y + 3$
$(3x^2 + 2y + 1)dx = (2y - x + 5)dy$	$(3x^2 + y^2)dx = (x - 3y)dy$

Додатки

54. Указати однорідне диференціальне рівняння

$2xydy + (x - y^2)dx = 0$	$(x^2 + y^2 + 2xy)dx + 2xydy = 0$
$(x + 2y^2)dx + 2xydy = 0$	$(xy^2 + x)dx + (yx^2 - y)dy = 0$

55. Указати лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку

$2xydy + (x - y^2)dx = 0$	$(x^2 + y^2 + 2xy)dx + 2xydy = 0$
$(x + 2y)dx + 2xydy = 0$	$(xy^2 + x)dx + (yx^2 - y)dy = 0$

56. Указати диференціальне рівняння Бернуллі

$2xydy + (x - y^2 + 1)dx = 0$	$(x^2 + y^2 + 2xy)dx + 2xydy = 0$
$(2y - xy^2)dx + 2xydy = 0$	$(xy^2 + x)dx + (yx^2 - y)dy = 0$

57. Указати диференціальне рівняння в повних диференціалах

$ydx - (x - 2\sqrt{xy})dy = 0$	$(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy = 0$
$(x - y^2)dx + 2xydy = 0$	$(xy^2 + 3x)dx + (yx^2 - 3y)dy = 0$

58. Указати диференціальне рівняння в повних диференціалах

$ydx - (x - 2\sqrt{xy})dy = 0$	$(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy = 0$
$(x - y^2)dx + 2xydy = 0$	$(xy^2 + 3x)dx + (yx^2 - 3y)dy = 0$

59. Частинним розв'язком диференціального рівняння  $y' \cdot \operatorname{tg} x = y$ , при початковій умові  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$  буде

$y = \cos x$	$y = e^{\cos x}$	$y = \sin x$	$y = e^{\sin x}$
--------------	------------------	--------------	------------------

60. Частинним розв'язком диференціального рівняння  $y' - y = 1$ , при початковій умові  $y(0) = 3$  буде

$y = e^{x+c} - 1$	$y = e^{3x} - 1$	$y = 3e^x - 1$	$y = e^x - 3$
-------------------	------------------	----------------	---------------

Додатки

61. Загальним розв'язком диференціального рівняння  $F(x, y, y') = 0$  буде функція

$y = Ce^{tg^2 x}$	$(x^2 + y^2)y = C + x$	$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}$	$(x^2 + y^2)^2 = 2axy$
-------------------	------------------------	--------------------------------	------------------------

62. Лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 1-го порядку

$x^2 y' + 2xy = x\sqrt{x}$	$x^2 y' = y^2 + 2x^2$	$x^2 y' + 2xy = 0$	$xy' = y(\ln y - \ln x)$
----------------------------	-----------------------	--------------------	--------------------------

63. Указати диференціальне рівняння Бернуллі

$3y' + 2xy = 2xy^2 e^{-2x^2}$	$3y' + 2xy = 2xye^{-2x^2}$	$y' + 2xy = 2xe^{-2x^2}$	$y' + 2xy = 2e^{-2x^2}$
-------------------------------	----------------------------	--------------------------	-------------------------

64. Указати диференціальне рівняння Бернуллі

$3y' + xy = 2xe^{-2x^2}$	$3y' + 2xy = 2xye^{-x^2}$	$y' + 2xy = 2x \sin x$	$y' + 2xy = 2\sqrt{y} \cdot e^{-2x^2}$
--------------------------	---------------------------	------------------------	--

65. Указати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними

$y' + 2xy = xy^2$	$x^2 y' + x = \cos y$	$xyy' = x + y^2$	$y' + 2y = 2e^{3x}$
-------------------	-----------------------	------------------	---------------------

66. Встановити відповідності між назвами диференціальних рівнянь та їхніми формулами

1.	З відокремлюваними змінними	a)	$y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^n, n \neq 0,1$
2.	Однорідне	b)	$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$
3.	Лінійне	c)	$y' = f\left(\frac{ax + by}{cx + dy}\right)$
4.	Бернуллі	d)	$P(x; y)dx + Q(x; y)dy = 0,$ $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$
5.	В повних диференціалах	e)	$y' = f(x) \cdot g(y)$
6.	Рівняння, що зводиться до однорідного	f)	$y' + P(x) \cdot y = Q(x)$

Додатки

67. Встановити відповідності між назвами диференціальних рівнянь та їхніми формулами

1.	З відокремлюваними змінними	a)	$xdy = (x + y)dx$
2.	Однорідне	b)	$(x + 2y + 3)dy = (2x - y - 1)dx$
3.	Лінійне	c)	$(x + xy)dy = (2 - y)dx$
4.	Бернуллі	d)	$dy = (x + y)dx$
5.	В повних диференціалах	e)	$(x + 2y)dy = (2x - y)dx$
6.	Рівняння, що зводиться до однорідного	f)	$dy = (y^2 - xy)dx$

68. Встановити відповідності між назвами диференціальних рівнянь та їхніми формулами

1.	З відокремлюваними змінними	a)	$y' = xy^2 - y$
2.	Однорідне	b)	$(x - y + 2)y' = 3x + 2y - 1$
3.	Лінійне	c)	$2xyy' = x^2 - y^2 + 3x$
4.	Бернуллі	d)	$y' = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$
5.	В повних диференціалах	e)	$y' = e^{x+y}$
6.	Рівняння, що зводиться до однорідного	f)	$xy' = 2x^2 - y$

69. Встановити відповідності між назвами диференціальних рівнянь та їхніми формулами

1.	З відокремлюваними змінними	a)	$y' = \frac{x^2 - 2xy}{x^2 + 4y^2}$
2.	Однорідне	b)	$(xy + x^2)y = xy - 1$
3.	Лінійне	c)	$2xyy' = x - y^2$
4.	Бернуллі	d)	$y' = yx^2 + y^2x^2$
5.	В повних диференціалах	e)	$y' = \sin x \cdot y^2 + xy$
6.	Рівняння, що не є диференціальним	f)	$y' = 2x^2 + y$

Додатки

70. Встановити відповідності між назвами диференціальних рівнянь та їхніми формулами

1.	З відокремлюваними змінними	a)	$y' + \sin x = 2xy$
2.	Однорідне	b)	$xy' = 2yx^2 - y$
3.	Лінійне	c)	$2xyy' = x^2 - y^2 + 3x$
4.	Бернуллі	d)	$(x + y + 1)y' = 2x - y - 3$
5.	В повних диференціалах	e)	$y' = 2x\sqrt{y} - y$
6.	Рівняння, що зводиться до однорідного	f)	$y' = \frac{xy + y^2}{2x^2 + xy + y^2}$

**Неоднозначні варіанти відповідей на питання тесту**

71. Рівняннями з відокремлюваними змінними будуть рівняння виду

$y' = f(x; y)$	$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$	$y' = g(x) \cdot p(y)$	$f(x)dx = p(y)dy$
----------------	----------------------------------	------------------------	-------------------

72. Якими методами можна інтегрувати лінійне неоднорідне диференціальне рівняння?

Варіації сталих	Бернуллі	Коші	підбору
-----------------	----------	------	---------

73. Рівняннями з відокремлюваними змінними будуть рівняння виду

$2yy' = x^2 + y^2x^2$	$y' = y + y^2x$	$xy' = y^2 + y^2x$	$y' = e^{2x} + y$
-----------------------	-----------------	--------------------	-------------------

74. Однорідними диференціальними рівняннями I-го порядку буде

$xyy' = x^2 + y^2$	$y' = x + y$	$xy' = x + y$	$x^2y' = y^2 + y^2x^2$
--------------------	--------------	---------------	------------------------

**Рекомендована література:**

1. **Вища математика: Основні означення, приклади і задачі:** Навч. посіб. Кн. 1/ Г. Л. Кулініч, Л. О. Максименко, В. В. Плахотник, Г. Й. Призва; За ред. Г. Л. Кулініча. — К.: Либідь, 1994. — 288 с.
2. Перестюк М. О., Свищук М. Я. **Збірник задач з диференціальних рівнянь.** — К.: ТВіМС, 2004. — 224 с.
3. Гудименко Ф.С., Павлюк І.А., Волкова В.О. **Збірник задач з диференціальних рівнянь.** — К.: Вища школа, 1972. — 156 с.
4. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. **Диференціальні рівняння.** — К.: Либідь, 2003. — 600 с.
5. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. **Диференціальні рівняння в задачах.** — К.: Либідь, 2003. — 504 с.
6. С. Д. Івасишен, В. П. Лавренчук, П. П. Настасієв, І. І. Дрінь. **Диференціальні рівняння: методи та застосування:** Навч. посіб. — Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2010. — 288 с.
7. Шкіль М. І., Лейфура В. М., Самусенко П. Ф. **Диференціальні рівняння.** — К.: Техніка, 2003. — 368 с.
8. Парасюк І. О. **Вступ до якісної теорії диференціальних рівнянь.** — К.: ВПЦ "Київський університет", 2005. — 88 с.
9. **Звичайні диференціальні рівняння** [Електронний ресурс]: Навч. посіб. / В.М. Лось, В.В. Мальчиков; КПІ ім. Ігоря Сікорського.— Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. — 66 с.
10. **Методичні рекомендації для проведення практичних занять, організації самостійної роботи з навчальної дисципліни «Диференціальні рівняння»,** Розділ: Диференціальні рівняння першого порядку. Частина I Диференціальні рівняння першого порядку, розв'язані стосовно похідної: Одеса : Університет Ушинського, 2023. 42 с.

## Додатки

11. **Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни “Диференціальні рівняння”** / Укладач: Дронов С.Г.,– Кам’янське, ДДТУ, 2019. - 58 с.
12. Г.В. Габрусев, О.М. Самборська **Звичайні диференціальні рівняння**. Навч. посіб. – Тернопіль: ТНТУ імені Івана Пулюя, 2014. – 172 с.
13. Гой Т. П. **Диференціальні рівняння** : навчальний посібник / Т. П. Гой, О. В. Махней. – Івано-Франківськ : Сімик, 2012. – 352 с.
14. **Диференціальні рівняння**. Навчальний посібник для інженерних спеціальностей [Електронний ресурс]: навч. посіб. / І. М. Копась. – Електронні текстові дані (1 файл: 2504 Кбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 126 с.
15. **Диференціальні рівняння та їх застосування** : навч.-метод. посіб. / Пріщенко О.П., Черногор Т.Т. – Харків : НТУ «ХП», 2017. – 88 с.
16. **Диференціальні рівняння для інформатиків**: підручник / Ф.Г. Гаращенко, В.Т. Матвієнко, І.І. Харченко. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008. – 352 с.
17. **Вища математика. Частина 5**: Навч. посібник / В.Л. Копорулін, І.В. Щербина, І.В. Пасічник, Т.П. Бас. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2016. – 62 с.
18. **Диференціальні рівняння** : практикум / уклад.: П. Ф. Жук. – К. : НАУ, 2013. – 56 с.
19. Кадильникова Т.М. **Вища математика в прикладах та задачах. Частина IV**: Навч. посіб. / Т.М. Кадильникова, І.В. Щербина, П.Г. Хорошманенко – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2010. – 96 с.
20. Кривошея С.А. **Диференціальні та інтегральні рівняння**: Підручник / С.А. Кривошея, М. О. Перестюк, В.М. Бурим. – К.: Либідь, 2004. – 407 с.
21. Шумейко О.О. **Модульне і підсумкове оцінювання: тести з вищої математики** / О.О. Шумейко, Т.В. Наконечна, О.В. Нікулін. – Дніпропетровськ: «Наука і освіта», 2009. – 172 с.

## Додатки

22. Нікулін О.В. **Вища математика: факти і формули, задачі і тести** / О.В. Нікулін, Т.В. Наконечна . – Дніпропетровськ: Біла К.О., 2015. – 187 с.
23. Валєєв К. Г., Джаладова І. А., Лютий О.І. та ін. **Вища математика: Навч.- метод. посібник для самост. вивч. дисц.** – К.: КНЕУ, 2002.
24. Гудименко Ф.С., Павлюк І.А., Волкова В.О. **Збірник задач з диференціальних рівнянь** – К.: Вища школа, 1972. – 154 с.
25. Ляшко І.І., Боярчук О.К., Гай Я.Г., Калайда О.Ф. **Диференціальні рівняння.** – К.: Вища школа, 1981. – 503 с.