

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

# ВИЩА МАТЕМАТИКА

## ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

**Навчальний посібник**

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра  
за спеціальностями  
G7 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка,  
G9 Прикладна механіка

Укладачі: О. В. Борисенко, В. В. Листопадова

Електронне мережеве навчальне видання

Київ  
КПІ ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО  
2025

УДК 517.9  
В 41

Укладачі: *Борисенко Ольга Володимирівна*, канд. фіз.-мат. наук, доц.  
*Листопадова Валентина Вікторівна*, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Рецензент *Вакал Є. С.*, канд. фіз.-мат. наук, доц., Київський національний  
університет імені Тараса Шевченка

Відповідальний редактор *Горбачук В. М.*, д-р фіз.-мат. наук, проф.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
(протокол №9 від 26.06.2025 р.)  
за поданням вченої ради фізико-математичного факультету  
(протокол № 7 від 04.06.2025 р.)*

В 41 **Вища математика. Диференціальні рівняння** [Електронний ресурс] : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальностями G7 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка, G9 Прикладна механіка / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: О. В. Борисенко, В. В. Листопадова. – Електрон. текст. дані (1 файл). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025. – 102 с.

У навчальному посібнику викладено необхідний теоретичний матеріал розділу «Диференціальні рівняння», наведено велику кількість розв'язаних прикладів, запропоновано завдання з відповідями для самостійної роботи. Посібник містить 30 варіантів індивідуальних типових завдань. Призначений для здобувачів ступеня бакалавра за технічними спеціальностями, буде також корисним викладачам для проведення лекційних і практичних занять.

УДК 517.9

Реєстр. № НП 24/25-603. Обсяг 4,6 авт. арк.

Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»  
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056  
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів  
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025

## Зміст

Зміст.....	3
Вступ.....	5
1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ.....	6
1.1. Загальні поняття та означення.....	6
1.2. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними.....	8
1.3. Диференціальні рівняння, які зводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними.....	11
1.4. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку.....	13
1.5. Диференціальні рівняння, які зводяться до однорідних.....	15
1.6. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку.....	16
1.7. Диференціальні рівняння, які зводяться до лінійних. ДР Бернуллі.....	20
1.8. Диференціальні рівняння в повних диференціалах.....	22
Завдання для самостійної та аудиторної роботи.....	24
2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ.....	29
2.1. Основні поняття та означення. Задача Коші.....	29
2.2. Диференціальні рівняння вищих порядків, які допускають зниження порядку.....	30
Завдання для самостійної та аудиторної роботи.....	34
3. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ.....	37
3.1. Основні поняття та означення.....	37
3.2. Лінійні однорідні диференціальні рівняння вищих порядків (ЛОДР). Структура загального розв'язку.....	39
3.3. Лінійні однорідні диференціальні рівняння вищих порядків зі сталими коефіцієнтами.....	40

3.4. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами.....	46
3.4.1. Метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа).....	47
3.4.2. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами та спеціальною правою частиною.....	52
Завдання для самостійної та аудиторної роботи.....	62
4.СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ .....	66
Завдання для самостійної та аудиторної роботи.....	70
ВАРІАНТИ ТИПОВИХ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ .....	72
Література.....	102

## Вступ

Математична освіта є важливою складовою в системі фундаментальної підготовки фахівця в будь-якій сфері сучасної діяльності. Очевидно, що значну роль при вивченні математики відіграє навчально-методична література, яку використовує в своїй роботі викладач.

Даний навчальний посібник відповідає навчальним програмам з вищої математики для підготовки бакалаврів спеціальностей G7 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка, G9 Прикладна механіка НТУУ «КПІ ім.Ігоря Сікорського» денної та заочної форм навчання і складається з наступних тем: диференціальні рівняння першого порядку, диференціальні рівняння вищих порядків, які допускають зниження порядку, лінійні однорідні диференціальні рівняння вищих порядків, лінійні неоднорідні диференціальні рівняння вищих порядків, лінійні неоднорідні диференціальні рівняння вищих порядків зі сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною, системи диференціальних рівнянь першого порядку в нормальній формі. Кожна тема містить необхідний теоретичний матеріал з поданням основних формул, означень та теорем з доведенням, зразки розв'язання типових навчальних прикладів з детальним поясненням, які можуть бути використані в лекційній та аудиторній роботі, достатню кількість завдань для самостійної аудиторної та домашньої роботи студентів, відповіді до них. У кінці посібника наведено 30 варіантів індивідуальних типових завдань за вказаними темами у зручному для використання форматі. Виконання запропонованих навчальних завдань має сприяти засвоєнню студентами методів розв'язування диференціальних рівнянь.

Навчальний посібник рекомендований студентам і викладачам технічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

# 1. Диференціальні рівняння першого порядку

## 1.1. Загальні поняття та означення

*Диференціальним* називається рівняння, яке пов'язує незалежну змінну, функції цих змінних і похідні або диференціали від цих функцій.

Рівняння, які містять похідні по багатьом незалежним змінним, називаються диференціальними *рівняннями в частинних похідних*.

Рівняння, які містять похідні лише по одній із незалежних змінних, називаються *звичайними диференціальними рівняннями*.

Порядок старшої похідної, яка входить в рівняння, називається *порядком* диференціального рівняння.

$F(x, y, y', y'', y''') = 0$  - звичайне диференціальне рівняння 3-го порядку,

$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$  - звичайне диференціальне рівняння n-го порядку,

$y' = f(x, y)$ ;  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ;  $xy' - \sqrt{x-1} = 2$  - звичайні диференціальні рівняння 1-го порядку.

ДР може не містити в явному вигляді  $x$  або  $y$ , але наявність похідної обов'язкова.

**Приклади** диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = -kx \quad - \text{рівняння радіоактивного розпаду,}$$

$k$  – стала розпаду,

$x$  – кількість нерозкладеної речовини в момент часу  $t$ ,

швидкість розкладу  $\frac{dx}{dt}$  пропорційна кількості речовини, яка розкладається;

$m \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}\left(t, \vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right)$  - рівняння руху точки маси  $m$  під впливом сили  $\vec{F}$ , яка залежить від часу  $t$ , положення точки  $\vec{r}$  та її швидкості  $\frac{d\vec{r}}{dt}$ ,

сила дорівнює добутку маси на прискорення.

*Розв'язок* диференціального рівняння (ДР) – це функція, яка при підстановці в ДР перетворює його на тотожність.

Наприклад, рівняння радіоактивного розпаду  $\frac{dx}{dt} = -kx$  має розв'язок  $x = C \cdot e^{-kt}$ , де  $C$  – будь-яка константа.

Процес знаходження розв'язку ДР називається **інтегруванням ДР**.

**Загальним розв'язком** диференціального рівняння  $n$ -го порядку називається функція  $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ , яка залежить від  $n$  довільних сталих  $C_1, C_2, \dots, C_n$  і задовольняє наступним властивостям:

- 1) задовольняє ДР при будь-яких конкретних значеннях сталих  $C_1, C_2, \dots, C_n$ ,
- 2) при відповідному виборі сталих  $C_1, C_2, \dots, C_n$  дає будь-який розв'язок ДР.

Кожний конкретний розв'язок ДР, отриманий із загального розв'язку при певному виборі довільних сталих, називається **частинним розв'язком ДР**.

Щоб із загального розв'язку виділити частинний, треба задати **початкові умови Коші**:

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y_1, \quad y''|_{x=x_0} = y_2, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_{n-1}$$

(для диференціального рівняння  $n$ -го порядку).

Ці умови виражають початкове положення процесу, який описує задане диференціальне рівняння.

Задача знаходження розв'язку диференціального рівняння при заданих початкових умовах називається **задачею Коші**.

ДР першого порядку можна подати у вигляді

$F(x, y, y') = 0$  або  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ , або  $y' = f(x, y)$ . Загальний розв'язок такого ДР залежить від однієї сталої  $y = \varphi(x, C)$ .

Сталу можна визначити за допомогою початкової умови  $y|_{x=x_0} = y_0$ .

Загальний розв'язок ДР часто знаходиться в неявному вигляді :

$\Phi(x, y, C) = 0$ , він має назву: **загальний інтеграл** диференціального рівняння першого порядку.

**Теорема** (існування та єдиності розв'язку задачі Коші)

Якщо в рівнянні  $y' = f(x, y)$  функція  $f(x, y)$  та її частинна похідна  $f'_y(x, y)$  неперервні в деякій точці  $M_0(x_0, y_0)$  і в околі цієї точки, то існує єдиний розв'язок  $y = \varphi(x)$ , який задовольняє початкову умову  $y|_{x=x_0} = y_0$ .

З геометричної точки зору загальний розв'язок  $y = \varphi(x, C)$  являє собою сімейство кривих на площині  $OXY$ , які називаються **інтегральними кривими** диференціального рівняння, частинному розв'язку відповідає єдина крива цього сімейства, яка проходить через задану точку  $M_0(x_0, y_0)$ .

Диференціальне рівняння  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  геометрично встановлює залежність між координатами точки і кутовим коефіцієнтом дотичної до графіку розв'язку в цій самій точці.

Якщо розв'язок диференціального рівняння вдалося звести до обчислення інтегралів, серед яких є такі інтеграли, які не можна обчислити в елементарних функціях, то говорять, що дане **ДР проінтегровано в квадратурах**.

## **1.2. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними**

**Відокремити змінні** в диференціальному рівнянні  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  означає подати його у рівносильному вигляді:  $M(x)dx = N(y)dy$ ,

в лівій частині маємо вираз, який залежить тільки від змінної  $x$ , а в правій – від змінної  $y$ . Функції  $M(x)$  і  $N(y)$  будемо вважати неперервними.

Найпростішим диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними є ДР вигляду

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \Rightarrow dy = f(x) dx, \text{ тоді}$$

$$\int dy = \int f(x) dx \Rightarrow y = \int f(x) dx + C \text{ маємо загальний розв'язок.}$$

Розглянемо рівняння  $\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y)$ . Якщо  $f_2(y) \neq 0$ , то рівняння перепишемо у вигляді  $\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$ , проінтегруємо

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C \text{ і отримаємо загальний розв'язок.}$$

Ми зауважили, що  $f_2(y) \neq 0$ . Але, якщо  $f_2(y) = 0$  при якомусь значенні  $y = b$ , то функція  $y = b$  також є розв'язком даного ДР, бо в цьому випадку  $y' = 0$ .

Якщо розв'язок  $y = b$  не можна отримати із загального розв'язку ні при якому значенні сталої  $C$ , то його називають **особливим розв'язком** ДР.

В загальному випадку ДР 1-го порядку з відокремлюваними змінними ,  
буде мати вигляд:

$$M_1(x) \cdot N_1(y)dx + M_2(x) \cdot N_2(y)dy = 0.$$

Відокремлюємо змінні при умові, що  $N_1(y) \neq 0$  і  $M_2(x) \neq 0$

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx = -\frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy \quad \text{і інтегруємо}$$

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx = -\int \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy + C$$

$$(\text{або } \int \frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = C) .$$

**Приклад 1.** Знайти загальний розв'язок ДР

$$\sqrt{1-y^2} dx + \sqrt{1-x^2} dy = 0.$$

■  $\sqrt{1-y^2} dx = -\sqrt{1-x^2} dy$ , при умові, що  $y \neq \pm 1$ ,  $x \neq \pm 1$ , маємо

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \Rightarrow$$

$\arcsin x + \arcsin y = C$  (маємо загальний інтеграл) ■

**Приклад 2.** Знайти загальний розв'язок ДР

$$x dx + y dy = 0.$$

■  $x dx = -y dy \Rightarrow$

$$\int x dx = -\int y dy \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + C \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C.$$

Геометрично загальний розв'язок являє собою сімейство концентричних кіл

$$\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C \Rightarrow x^2 + y^2 = C_1^2\right)$$

з центром в точці (0;0) і радіусом в залежності від сталої C. ■

**Приклад 3.** Знайти загальний розв'язок ДР

$$e^{x^2} (\ln y) dx = dy.$$

■  $e^{x^2} dx = \frac{dy}{\ln y}$ , ( $\ln y \neq 0$ )  $\Rightarrow$

$$\int e^{x^2} dx = \int \frac{dy}{\ln y} ,$$

отримані інтеграли не беруться в елементарних функціях, але при цьому ДР вважається зінтегрованим (розв'язаним), маємо **розв'язок в квадратурах**. ■

**Приклад 4.** Знайти загальний розв'язок ДР

$$y' = \frac{y}{x}$$

■  $y' = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \quad (y \neq 0) \Rightarrow$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln C, \quad C > 0$$

(сталу можна подавати у такому вигляді з метою запису розв'язку в більш зручному вигляді), тоді  $\ln|y| = \ln|x| + \ln C \Rightarrow y = Cx$  ■

**Приклад 5.** Повернемося до рівняння, яке описує процес радіоактивного розпаду:  $\frac{dx}{dt} = -kx$ ,

■ Знайдемо розв'язок  $x(t)$ , якщо в початковий момент  $t = t_0$   $x = x_0$ ,

$$\frac{dx}{dt} = -kx \Rightarrow \frac{dx}{x} = -k dt \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = - \int k dt \Rightarrow \ln|x| = -kt + \ln C,$$

$$(C > 0) \Rightarrow \ln \left| \frac{x}{C} \right| = -kt \Rightarrow \frac{x}{C} = e^{-kt} \Rightarrow x = C e^{-kt}$$

і з урахуванням початкової умови маємо:

$$x_0 = C e^{-kt_0} \quad \text{звідки} \quad C = x_0 e^{kt_0},$$

$$\text{тоді} \quad x = x_0 e^{kt_0} e^{-kt} \Rightarrow x = x_0 e^{k(t_0-t)} \Rightarrow$$

$$x = x_0 e^{-k(t-t_0)}. \quad \blacksquare$$

**Приклад 6.** Знайти загальний розв'язок ДР

$$(xy^2 + y^2)dx + (x^2 - x^2y)dy = 0.$$

■  $(xy^2 + y^2)dx + (x^2 - x^2y)dy = 0 \Rightarrow$

$$y^2(x+1)dx + x^2(1-y)dy = 0$$

(маємо рівняння з відокремлюваними змінними)  $\Rightarrow$

$$y^2(x+1)dx = -x^2(1-y)dy \quad (\text{поділимо рівність на } x^2y^2 \neq 0) \Rightarrow$$

$$\frac{(x+1)dx}{x^2} = -\frac{(1-y)dy}{y^2} \Rightarrow \int \frac{(x+1)dx}{x^2} = -\int \frac{(1-y)dy}{y^2} \Rightarrow$$

$$\int \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx + \int \left( \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y} \right) dy = 0 \Rightarrow$$

$$\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \ln|y| = C \Rightarrow \ln \left[ \frac{x}{y} \right] = \frac{x+y}{xy} + C$$

(загальний розв'язок, який називається загальний інтеграл).

Щоб розв'язати рівняння, було зроблено припущення, що  $x, y \neq 0$ ,

якщо  $x, y = 0$ , то будемо мати  $x = 0, y = 0$  – інтегральні криві даного рівняння (задовольняють ДР). Вони не утворюються із загального інтеграла ні при якому значенні  $C$ .

Отже, розв'язки  $x = 0, y = 0$  є особливими і їх записують додатково до загального інтеграла.

**Приклад 7.** Знайти частинний розв'язок ДР. (Розв'язати задачу Коші):

$$\frac{dx}{dt} = 4t\sqrt{x} \quad \text{при умові} \quad x(1) = 1.$$

$$\blacksquare \frac{dx}{dt} = 4t\sqrt{x} \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = 4t dt \quad (x \neq 0) \Rightarrow$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int 4t dt \Rightarrow$$

$$\int x^{-1/2} dx = 4 \int t dt \Rightarrow$$

$$2\sqrt{x} = 2t^2 + 2C \Rightarrow \sqrt{x} = t^2 + C \Rightarrow$$

$$x = (t^2 + C)^2.$$

Викорисовуємо початкову умову  $x(1) = 1$  для знаходження сталої  $C$ :

$\sqrt{1} = 1^2 + C$ , звідки  $C = 0$ , а  $x = t^4$  є *частинним розв'язком* ДР (або розв'язком задачі Коші). ■

### **1.3. Диференціальні рівняння, які зводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними**

Розглянемо ДР вигляду

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c), \quad \text{де } a, b, c - \text{сталі,}$$

яке зводиться до ДР з відокремлюваними змінними.

Для цього введемо заміну  $z(x) = ax + by + c \Rightarrow$

$$\frac{dz}{dx} = a + b \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = a + b \cdot f(z),$$

маємо ДР з відокремленими змінними, відокремлюємо змінні

$$\frac{dz}{a+b \cdot f(z)} = dx, \text{ інтегруємо}$$

$$x = \int \frac{dz}{a+b \cdot f(z)} + C. \text{ Повертаємося до старої змінної.}$$

**Приклад 1.** Знайти загальний розв'язок ДР

$$\frac{dy}{dx} = 2x + y.$$

■  $2x + y = z(x) \Rightarrow$

$$2 + \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} \Rightarrow$$

$$2 + z = \frac{dz}{dx} \Rightarrow \frac{dz}{2+z} = dx \Rightarrow$$

$$\int \frac{dz}{2+z} = \int dx \Rightarrow$$

$$\ln |2 + z| = x + \ln C \Rightarrow$$

$$\ln \left| \frac{2+z}{C} \right| = x \Rightarrow$$

$$\frac{2+z}{C} = e^x \Rightarrow 2 + z = C e^x$$

$$\Rightarrow 2 + 2x + y = C e^x \Rightarrow$$

$$y = C e^x - 2x - 2 \text{ - загальний розв'язок ДР. } \blacksquare$$

**Приклад 2.** Знайти загальний розв'язок ДР

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-y} + 1.$$

■ Нехай  $x - y = z \Rightarrow 1 - \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} \Rightarrow$

$$1 - \frac{1}{z} - 1 = \frac{dz}{dx} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow z dz = -dx \Rightarrow \int z dz = -\int dx \Rightarrow$$

$$\frac{z^2}{2} = -x + C$$

$$\Rightarrow (x - y)^2 = -2x + C. \blacksquare$$

#### 1.4. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

**Означення.** Функція  $f(x; y)$  називається *однорідною  $k$ -го виміру*, якщо

$$f(tx; ty) = t^k \cdot f(x; y) \text{ для довільного } t \neq 0.$$

$2x^2y - 5x^3 + xy^2 = f(x; y)$  - однорідна функція **3-го виміру**, тому що

$$2(tx)^2(ty) - 5(tx)^3 + tx(ty)^2 = t^3 \cdot f(x; y).$$

$$\text{Рівняння } M(x; y)dx + N(x; y)dy = 0, \quad (*)$$

де  $M(x; y)$ ,  $N(x; y)$  - однорідні функції однакового виміру, називається **однорідним диференціальним рівнянням**.

Диференціальне рівняння (\*) можна подати у вигляді

$$y' = f(x; y), \text{ де}$$

$f(x; y)$ - однорідна функція 0-го виміру, яку завжди можна звести до функції  $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ .

Тоді маємо рівняння  $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ ,

введемо заміну  $z(x) = \frac{y}{x} \Rightarrow y = z \cdot x \Rightarrow$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}x + z \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{dx}x + z = \varphi(z)$$

і отримаємо диференціальне рівняння з відокремленими змінними.

**Приклад 1.** Знайти загальний розв'язок ДР

$$(xy - y^2)dx - (x^2 - 2xy)dy = 0.$$

$$\blacksquare (xy - y^2)dx - (x^2 - 2xy)dy = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy},$$

поділимо чисельник і знаменник на  $x^2 \neq 0$ ,

$$\text{будемо мати: } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 - 2\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

Введемо заміну  $z(x) = \frac{y}{x} \Rightarrow y = z \cdot x \Rightarrow$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}x + z \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{dx}x + z = \frac{z-z^2}{1-2z}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx}x = \frac{z-z^2}{1-2z} - z$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx}x = \frac{z-z^2-z+2z^2}{1-2z} \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{dx}x = \frac{z^2}{1-2z} \Rightarrow \frac{(1-2z)dz}{z^2} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{(1-2z)dz}{z^2} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\int \left( \frac{1}{z^2} - \frac{2}{z} \right) dz = \ln|x| \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{z} - 2 \ln|z| = \ln|x| + C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z} + \ln z^2 = -\ln|x| + C \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\frac{y}{x}} + \ln \left( \frac{y}{x} \right)^2 \cdot |x| + C = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x}{y} + \ln \frac{y^2 C}{x} = 0, \quad (x > 0). \blacksquare$$

**Приклад 2.** Знайти загальний розв'язок ДР

$$xy' = y \ln \frac{y}{x}.$$

$$\blacksquare xy' = y \ln \frac{y}{x} \Rightarrow y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}.$$

Введемо заміну  $z(x) = \frac{y}{x} \Rightarrow y = z \cdot x \Rightarrow$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}x + z \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{dx}x + z = z \ln z \Rightarrow \frac{dz}{dx}x = z \ln z - z \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{z(\ln z - 1)} = \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\int \frac{dz}{z(\ln z - 1)} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\int \frac{d(\ln z - 1)}{(\ln z - 1)} = \ln|x| \Rightarrow$$

$$\ln|\ln z - 1| = \ln|x| + \ln C \Rightarrow$$

$$\ln z - 1 = |x|C, \quad C > 0,$$

$$\ln z = |x|C + 1 \Rightarrow$$

$$z = e^{C|x|+1} \Rightarrow$$

$$\frac{y}{x} = e^{C|x|+1} \Rightarrow$$

$$y = xe^{C|x|+1}. \quad \blacksquare$$

### 1.5. Диференціальні рівняння, які зводяться до однорідних

Розглянемо ДР першого порядку вигляду

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right),$$

де  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$  – сталі.

Дане рівняння перетворюється на однорідне шляхом переносу початку координат  $(0; 0)$  в точку  $(x_1; y_1)$  перетину прямих  $a_1x + b_1y + c_1 = 0$  і  $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ .

Зв'язок між новими та старими координатами задається формулами:

$$X = x - x_1, \quad Y = y - y_1 \Rightarrow$$

$$x = X + x_1, \quad y = Y + y_1, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}.$$

Перепишемо ДР в нових змінних, маємо

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1(X+x_1)+b_1(Y+y_1)+c_1}{a_2(X+x_1)+b_2(Y+y_1)+c_2}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}\right) - \text{однорідне ДР.}$$

**Приклад 1.** Знайти загальний розв'язок ДР

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y+1}{x+y-3}.$$

$$\blacksquare \text{ Складемо систему } \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1, y = 2.$$

$$\text{Введемо нові змінні } \begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y + 2 \end{cases}.$$

Перепишемо ДР в нових змінних, маємо

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X+1-(Y+2)+1}{X+1+Y+2-3} \Rightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{X-Y}{X+Y},$$

отримали однорідне ДР,  $\frac{dY}{dX} = \frac{1-\frac{Y}{X}}{1+\frac{Y}{X}}$ , яке розв'язується заміною

$$z(x) = \frac{Y}{X} \Rightarrow Y = z \cdot X \Rightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{dz}{dX}X + z.$$

Підставляємо в ДР, маємо

$$\frac{dz}{dX}X + z = \frac{1-z}{1+z} \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{dX}X = \frac{1-z-z-z^2}{1+z} \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{dX}X = \frac{1-2z-z^2}{1+z} \text{ це ДР з відокремленими змінними.}$$

Розв'язуємо його

$$\frac{(1+z)dz}{z^2+2z-1} = -\frac{dX}{X} \Rightarrow \int \frac{(1+z)dz}{z^2+2z-1} = -\int \frac{dX}{X} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{d(z^2+2z-1)}{z^2+2z-1} = -\int \frac{dX}{X} \Rightarrow$$

$$\int \frac{d(z^2+2z-1)}{z^2+2z-1} = -2 \int \frac{dX}{X} \Rightarrow$$

$$\ln|z^2 + 2z - 1| = -2 \ln|X| + \ln C \Rightarrow$$

$$\ln|z^2 + 2z - 1| = \ln \frac{C}{X^2} \Rightarrow$$

$$C = X^2 \cdot (z^2 + 2z - 1) \Rightarrow$$

$$C = X^2 \cdot \left( \left( \frac{Y}{X} \right)^2 + 2 \left( \frac{Y}{X} \right) - 1 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = Y^2 + XY - X^2 \Rightarrow$$

$$C = (y - 2)^2 + (x - 1)(y - 2) - (x - 1)^2 \Rightarrow$$

$$y^2 - x^2 + 2xy - 6y = C_1. \blacksquare$$

## 1.6. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Розглянемо рівняння, які є лінійними відносно невідомої функції та її похідної

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x). \quad (1)$$

Будемо вважати, що  $p(x)$  і  $f(x)$  відомі неперервні функції в області, в якій необхідно зінтегрувати ДР .

Якщо  $f(x) = 0$ , то маємо лінійне однорідне ДР (або ЛОДР) :

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0,$$

змінні в якому відокремлюються.

В загальному вигляді :  $dy = -p(x)y dx \Rightarrow$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int p(x)dx, (y \neq 0), \Rightarrow$$

$$\ln|y| = - \int p(x)dx + \ln C \Rightarrow$$

$$y = C \cdot e^{-\int p(x)dx}, C \neq 0.$$

Отримали загальний розв'язок ЛОДР,

позначимо його  $y_{з.о.}$ , тобто

$$y_{з.о.} = C \cdot e^{-\int p(x)dx}. \quad (2)$$

Якщо  $f(x) \neq 0$ , маємо лінійне неоднорідне ДР (або ЛНДР).

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного ДР ( $y_{з.н.}$ ) шукаємо у вигляді

$$y_{з.н.} = C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}. \quad (3)$$

Підставляємо його разом з похідною в (1), звідки знаходимо  $C(x)$ ,

яку потім підставляємо в (3), маємо відповідь.

Тобто:  $\frac{dy}{dx} = \frac{dC(x)}{dx} \cdot e^{-\int p(x)dx} - C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot p(x)$  (похідна від  $y_{з.н.}$ ).

Підставляємо  $y_{з.н.}$  та  $\frac{dy}{dx}$  в (1), маємо

$$\frac{dC(x)}{dx} \cdot e^{-\int p(x)dx} - C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot p(x) + p(x) C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} = f(x),$$

$$\frac{dC(x)}{dx} = f(x)e^{\int p(x)dx} \Rightarrow$$

$$C(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx} dx + C_1 \quad (4)$$

підставляємо (4) в (3) і отримаємо відповідь:

$$y_{з.н.} = (\int f(x)e^{\int p(x)dx} dx + C_1) \cdot e^{-\int p(x)dx}.$$

Користуватися готовою формулою для відповіді не рекомендуємо. Зручно до кожного такого ДР застосовувати наведений алгоритм розв'язування . Цей спосіб розв'язання називається **методом варіації довільної сталої**.

**Приклад 1.** Знайти загальний розв'язок ДР

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}.$$

■  $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}$ . Розглянемо відповідне до ЛНДР однорідне рівняння  $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = 0 \Rightarrow$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x}y \Rightarrow \ln|y| = -\ln|x| + \ln|C| \Rightarrow$$

$y_{з.о.} = \frac{C}{x}$ . Загальний розв'язок ЛНДР  $y_{з.н.}$  шукаємо у вигляді

$$y_{з.н.} = \frac{C(x)}{x} \Rightarrow y' = C'(x)\frac{1}{x} - C(x)\frac{1}{x^2}.$$

Підставляємо  $y_{з.н.}$  та  $y'$  в умову, маємо

$$C'(x)\frac{1}{x} - C(x)\frac{1}{x^2} + C(x)\frac{1}{x^2} = \frac{\sin x}{x} \Rightarrow$$

$$C'(x)\frac{1}{x} = \frac{\sin x}{x} \Rightarrow$$

$$\frac{dC(x)}{dx} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\sin x}{x} \Rightarrow$$

$$dC(x) = x \frac{\sin x}{x} dx \Rightarrow$$

$$C(x) = -\cos x + C_1. \Rightarrow$$

$$y_{з.н.} = \frac{-\cos x}{x} + \frac{C_1}{x} \Rightarrow$$

$$y_{з.н.} = \frac{C_1 - \cos x}{x}. \blacksquare$$

Розглянемо інший спосіб розв'язування ЛНДР.

$$\text{Шукаємо розв'язок ДР } \frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x) \quad (1)$$

у вигляді  $y = uv$ , де  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$  - невідомі функції, які залежать від  $x$ , до того одну із них вибираємо довільно (не рівну нулю), а іншу шукаємо із умови, що  $y = uv$  задовольняє рівняння (1). Такий спосіб розв'язування називається **методом Ейлера-Бернуллі**.

$$y = uv \Rightarrow y' = u'v + v'u$$

підставляємо в (1):

$$u'v + v'u + p(x)uv = f(x),$$

З першого, наприклад, і третього доданків виносимо за дужку спільний множник :  $v(u' + p(x)u) + v'u = f(x)$ .

Нехай вираз в дужках дорівнює нулю ( в цьому полягає довільність вибору функції  $u$ ).

$u' + p(x)u = 0 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -p(x)u \Rightarrow$  маємо рівняння з відокремленими змінними, звідки

$$\frac{du}{u} = -p(x) dx \Rightarrow \ln |u| = -\int p(x) dx \Rightarrow$$

$$u = e^{-\int p(x) dx}.$$

Підставляємо знайдене значення  $u$  в рівняння  $v'u = f(x) \Rightarrow$

$$v'e^{-\int p(x) dx} = f(x) \Rightarrow$$

(знову маємо рівняння з відокремленими змінними)

$$\frac{dv}{dx} = f(x)e^{\int p(x) dx} \Rightarrow$$

$$v = \int f(x)e^{\int p(x) dx} dx + C.$$

І остаточно маємо:  $y = uv \Rightarrow y = e^{-\int p(x) dx}(\int f(x)e^{\int p(x) dx} dx + C)$ .

Звертаємо увагу на те, що загальний розв'язок виражений через одну сталу, бо маємо ДР 1-го порядку і тому при пошуку функції  $u$  сталу не додавали, приймали її за нуль.

**Приклад 2.** Знайти загальний розв'язок ДР

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2.$$

■ Шукаємо розв'язок ДР у вигляді  $y = u(x)v(x) \Rightarrow y' = u'v + v'u$ , підставляємо в задане рівняння :

$$u'v + v'u - \frac{uv}{x} = x^2 \Rightarrow$$

$$v\left(u' - \frac{u}{x}\right) + v'u = x^2.$$

$$\text{Нехай } u' - \frac{u}{x} = 0 \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{u}{x} \Rightarrow$$

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\ln[u] = \ln[x] \Rightarrow u = x.$$

$$\text{Залишок рівняння } v'u = x^2 \Rightarrow$$

$$v'x = x^2 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = x \Rightarrow$$

$$v = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow$$

$$y = x\left(\frac{x^2}{2} + C\right) \text{ загальний розв'язок. } \blacksquare$$

## 1.7. Диференціальні рівняння, які зводяться до лінійних.

### ДР Бернуллі

$$\text{ДР типу } \frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^\alpha,$$

де  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ ,

називається рівнянням **Бернуллі**.

ДР Бернуллі  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^\alpha$  можна звести до лінійного:

$$y^{-\alpha} \frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-\alpha} = Q(x) \text{ і зробити заміну}$$

$$z = y^{1-\alpha} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = (1-\alpha)y^{-\alpha} \frac{dy}{dx}.$$

Підставляємо  $z$  та її похідну в рівняння Бернуллі і маємо лінійне рівняння.

$$\frac{dz}{dx} + P(x)z = (1-\alpha)Q(x).$$

Знаходимо невідому функцію  $z$ , повертаємося до попередньої змінної  $y$ , маємо загальний розв'язок.

Або відразу робимо заміну  $y = u(x)v(x) \Rightarrow y' = u'v + v'u$  і застосовуємо вже відомий алгоритм розв'язування.

**Приклад 1.** Знайти загальний розв'язок ДР

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} + \frac{x^2}{2y}.$$

■ Вводимо заміну  $y = u(x)v(x) \Rightarrow y' = u'v + v'u$ ,

підставляємо в умову:

$$u'v + v'u = uv \cdot \frac{1}{2x} + \frac{x^2}{2uv} \Rightarrow$$

$$v\left(u' - \frac{u}{2x}\right) + v'u = \frac{x^2}{2uv}.$$

$$\text{Нехай } u' - \frac{u}{2x} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{2x} \Rightarrow \ln|u| = \frac{1}{2}\ln|x| \Rightarrow u = \sqrt{x}.$$

Підставляємо знайдене  $u$  в  $v'u = \frac{x^2}{2uv}$ ,

маємо  $v' \cdot \sqrt{x} = \frac{x^2}{2\sqrt{x} \cdot v} \Rightarrow$

$$\frac{dv}{dx} \cdot \sqrt{x} = \frac{x^2}{2\sqrt{x} \cdot v} \Rightarrow$$

$$v dv = \frac{x}{2} dx \Rightarrow \int v dv = \int \frac{x}{2} dx \Rightarrow$$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{x^2}{4} + \frac{C}{2} \Rightarrow$$

$$v^2 = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{x^2}{2} + C} \Rightarrow$$

$$y = \sqrt{x\left(\frac{x^2}{2} + C\right)} \Rightarrow$$

$$y^2 = \frac{x^3}{2} + Cx. \blacksquare$$

**Приклад 2.** Знайти загальний розв'язок ДР

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2xy+y^3}.$$

■ Якщо дане рівняння переписати у вигляді

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2xy+y^3}{1} \text{ і шукати функцію } x = x(y), \text{ то відносно невідомої } x \text{ воно є}$$

лінійним  $\frac{dx}{dy} = 2xy + y^3$ .

Вводимо заміну  $x = u(y)v(y) \Rightarrow x' = u'v + v'u$ ,

підставляємо в умову:

$$u'v + v'u = 2uvy + y^3 \Rightarrow v(u' - 2uy) + v'u = y^3.$$

Нехай  $u' - 2uy = 0 \Rightarrow$

$$\frac{du}{dy} = 2uy \Rightarrow \int \frac{du}{u} = \int 2y dy \Rightarrow$$

$$\ln|u| = y^2 \Rightarrow u = e^{y^2}.$$

Підставляємо в

$$v(u' - 2uy) + v'u = y^3 \quad \text{маємо}$$

$$v'e^{y^2} = y^3 \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{dy} e^{y^2} = y^3 \Rightarrow$$

$$dv = y^3 e^{-y^2} \Rightarrow$$

$$\int dv = \int y^3 e^{-y^2} dy \Rightarrow$$

$$v = \frac{1}{2} \int y^2 e^{-y^2} dy^2 \Rightarrow$$

$$v = -\frac{1}{2} e^{-y^2} (1 + y^2) + C \Rightarrow$$

$$x = u(y)v(y) = e^{y^2} \left(-\frac{1}{2} e^{-y^2} (1 + y^2) + C\right) = C e^{y^2} - \frac{1}{2} (1 + y^2).$$

$$x = C e^{y^2} - \frac{1}{2} (1 + y^2). \quad \blacksquare$$

### 1.8. Диференціальні рівняння в повних диференціалах.

Рівняння вигляду  $M(x; y)dx + N(x; y)dy = 0$ , де ліва частина є повним диференціалом деякої функції  $U(x; y)$ , тобто

$$M(x; y)dx + N(x; y)dy = dU(x; y),$$

називається диференціальним **рівнянням в повних диференціалах**.

Тобто рівняння набуває вигляду

$$dU(x; y) = 0 \Rightarrow U(x; y) = C \Rightarrow U(x; y(x)) = C -$$

загальний інтеграл рівняння.

Для того, щоб вираз  $M(x; y)dx + N(x; y)dy$  був повним диференціалом деякої функції  $U(x; y)$ , необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова Ейлера:

$$\frac{\partial M(x; y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial N(x; y)}{\partial x}.$$

Якщо умова Ейлера виконана, то рівняння легко інтегрується, дійсно:

$$Mdx + Ndy = dU \quad \text{з іншого боку}$$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy, \quad \text{звідки}$$

$$M(x; y) = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad N(x; y) = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Шукаємо функцію  $U(x; y) = \int M(x; y)dx + C(y)$

(при обчисленні  $\int M(x; y)dx$  у розглядаємо як сталу, тому  $C(y)$  є будь-якою функцією, залежною від  $y$ ).

Для знаходження функції  $C(y)$  диференціюємо  $U(x; y)$  по  $y$ :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\int M(x; y)dx + C(y)) = N(x; y) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \int M(x; y)dx + C'(y) = N(x; y),$$

знаходимо з цього рівняння  $C'(y)$ , інтегруємо і маємо  $C(y)$ , значення якого підставляємо в

$U(x; y) = \int M(x; y)dx + C(y)$ , щоб отримати остаточну відповідь.

**Приклад 1.** Знайти загальний розв'язок ДР

$$(x + y + 1)dx + (x - y^2 + 3)dy = 0.$$

■ Перевіряємо умову Ейлера:  $\frac{\partial(x+y+1)}{\partial y} = \frac{\partial(x-y^2+3)}{\partial x} \Rightarrow$

$1 \equiv 1$ , маємо диференціальне рівняння в повних диференціалах, тоді

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x + y + 1, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = x - y^2 + 3,$$

$$U(x; y) = \int (x + y + 1)dx + C(y) = \frac{x^2}{2} + yx + x + C(y),$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x - y^2 + 3 = \frac{\partial\left(\frac{x^2}{2} + yx + x + C(y)\right)}{\partial y} \Rightarrow$$

$$x - y^2 + 3 = x + C'(y) \Rightarrow$$

$$C'(y) = 3 - y^2 \Rightarrow$$

$$C(y) = 3y - \frac{y^3}{3} + C_1 \Rightarrow$$

$$U(x; y) = \frac{x^2}{2} + yx + x + 3y - \frac{y^3}{3} + C_1.$$

Отже, загальний інтеграл має вигляд

$$3x^2 + 6yx + 6x + 18y - 2y^3 = C_2. \quad \blacksquare$$

**Приклад 2.** Знайти загальний розв'язок ДР

$$(e^x + y + \sin y) dx + (e^y + x + x \cos y) dy = 0$$

■ Перевіряємо умову Ейлера:  $\frac{\partial(e^x+y+\sin y)}{\partial y} = \frac{\partial(e^y+x+x\cos y)}{\partial x} \Rightarrow$

$$1 + \cos y \equiv 1 + \cos y,$$

тобто маємо диференціальне рівняння в повних диференціалах. Тоді

$$\frac{\partial U}{\partial x} = e^x + y + \sin y, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = e^y + x + x\cos y,$$

$$U(x; y) = \int(e^x + y + \sin y)dx + C(y) = e^x + yx + x\sin y + C(y),$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = e^y + x + x\cos y = (e^x + yx + x\sin y + C(y))'$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial y} = e^y + x + x\cos y = x + x\cos y + C'(y) \Rightarrow$$

$$C'(y) = e^y, \quad C(y) = e^y + C_1 \Rightarrow$$

$$U(x; y) = e^x + yx + x\sin y + e^y + C_1. \blacksquare$$

### Завдання для самостійної та аудиторної роботи

Знайти загальний або частинний розв'язок ДР з відокремлюваними змінними

1.  $xdx = ydy;$

2.  $xdy = (y + 1)dx;$

3.  $y' + \sin \frac{x+y}{2} = \sin \frac{x-y}{2};$

4.  $x + y' = 0;$

5.  $4x^3 - y' = 0;$

6.  $(x + 1)ydx = dy;$

7.  $dy = y\cos^2 x dx;$

8.  $2xdx = 3y^2 dy;$

9.  $y' = x^2 y - x^2;$

10.  $dy = y \sin x dx;$

11.  $y' \frac{5x+3}{y} = 1;$

12.  $y' = (2y + 1) \operatorname{tg} x;$

13.  $3^{x^2+y} dy - x dx = 0;$

14.  $(y + 1)y' = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} + xy;$

15.  $y' = \frac{xy^3+x}{-x^2y^2+y^2};$

16.  $(y^2 + 3)dx - \frac{e^x}{x} y dy = 0;$

17.  $2y \sin \frac{1}{x^2} + x^3 y' = 0;$

18.  $\frac{dy}{3x} - \frac{dx}{2y} = 0,$  якщо  $y(4) = 5.$

19.  $1 + y^2 = y'\sqrt{x}$ , якщо  $y\left(\frac{\pi^2}{4}\right) = 0$ .
20.  $e^x(1 + e^y) + y'e^y(1 + e^x) = 0$ , якщо  $y(0) = 0$ .
21.  $\frac{y}{y'} = \ln y$ , якщо  $y(2) = 1$ ;
22.  $y'(4 + x^2) + y^2 = 0$ , якщо  $y(2) = \frac{8}{\pi}$ .

### Відповіді

1.  $x^2 - y^2 = C$ .      2.  $y = Cx - 1$ .      3.  $y = \operatorname{arctg} e^{C-2\sin\frac{x}{2}}$
4.  $y = C - \frac{1}{2}x^2$ .      5.  $y = x^4 + C$ .      6.  $y = e^{0,5x^2+x+C}$ .
7.  $y = e^{\frac{1}{2}(x+\sin x+C)}$ .      8.  $y = \sqrt[3]{x^2 + C}$ .      9.  $y = 1 + Ce^{x^3/3}$
10.  $y = e^{C-\cos x}$ .      11.  $y = C\sqrt[5]{5x + 3}$ .      12.  $y = \frac{1}{2}\left(\frac{C}{\cos^2 x} - 1\right)$ .
13.  $3^y + 3^{-x^2} = C \cdot \ln 3$ .      14.  $y + \ln y = \arcsin x + \frac{x^2}{2} + C$ .
15.  $\sqrt[3]{y^3 + 1} = \frac{C}{\sqrt{x^2 - 1}}$ .      16.  $\ln(y^2 + 3) = 2(C - xe^{-x} - e^{-x})$ .
17.  $\cos\frac{1}{x^2} + \ln y = 0$ .      18.  $y = \sqrt{1,5x^2 + 1}$ .      19.  $y = \operatorname{tg} 2\sqrt{x}$ .
20.  $y = \ln \frac{3-e^x}{1+e^x}$ .      21.  $2(x - 2) = \ln^2 y$ .      22.  $y = \frac{2}{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}$ .

Зінтегрувати ДР, які зводяться до ДР з відокремленими змінними

23.  $\frac{dy}{dx} = x - 3y$ ;      24.  $y' = \frac{2}{2x+y}$ .

### Відповіді

23.  $\sqrt{1 - 3x + 9y} = e^{-x-C}$ .      24.  $y - \ln(2x + y + 1) = C$ .

Зінтегрувати **однорідні ДР**

25.  $(3x^2 + 2xy - y^2)dx - (3y^2 + 2xy - x^2)dy = 0$ ;
26.  $(x + y)dy + ydx = 0$ ;      27.  $(x - y)dy = (x + y)dx$ ;
28.  $xydy - (x^2 + y^2)dx = 0$ ;      29.  $xydx - (x^2 + y^2)dy = 0$ ;

30.  $(x - y)dy - ydx = 0$ ;                      31.  $xdy - y\ln\frac{y}{x}dx = 0$ ;
32.  $xy' + y = \frac{x^2+y^2}{x}$ , якщо  $y(1) = 0$  ;
33.  $(x^2 - y^2)dx + xydy = 0$ , якщо  $y(1) = 2$  ;
34.  $(x^2 + xy+y^2)dx - xydy = 0$  , якщо  $y(1) = 0$  ;
35.  $(x + 2y)dx + (x - 2y)dy = 0$ , якщо  $y(1) = 1,5$  .

**Відповіді**

25.  $x^3+x^2y - xy^2 - y^3 = C$  .                      26.  $y^2 + 2xy = C$ ./
27.  $\ln C(x^2 + y^2) = 2\arctg\frac{y}{x}$ .                      28.  $y = x\sqrt{\ln Cx^2}$  .
29.  $y = Ce^{x^2/2y^2}$ .                      30.  $y = Ce^{-x/y}$ .
31.  $y = xe^{1+Cx}$ .                      32.  $y = x - \frac{x}{\ln ex}$ .
33.  $xe^{y^2/2x^2} = e^2$ .                      34.  $x\ln(x + y) = y$  .
35.  $(y - x)(2y + x)^2 = 8$  .

Зінтегрувати ДР , які зводяться до однорідних ДР

36.  $y' = \frac{x+y-2}{y-x-4}$  ;                      37.  $y' = \frac{3x-y+1}{y+x-5}$  ;
38.  $(x - 2y + 3)dy - (2x + y - 1)dx = 0$ , якщо  $y(1) = 1$  .

**Відповіді**

36.  $x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C$  .
37.  $(y - 4)^2 + 2(y - 4)(x - 1) - 3(x - 1)^2 = C$  .
38.  $x^2 + xy - y^2 - x + 3y = 3$  .

Зінтегрувати лінійні ДР

39.  $y' - \frac{y}{x} = 2x^2$ ;                      40.  $2y' - y\text{ctg}x = \cos x$ ;
41.  $y' + \frac{y}{x} = 4$  ;                      42.  $y' - \frac{y}{x} = -1/x$  ;
43.  $y' + \frac{2y}{x} = x^3$ ;                      44.  $y' - \frac{3y}{x} = -x/2$  ;

$$45. \quad y' + \frac{y}{x} = (\cos x)/x; \quad 46. \quad y' + \frac{y}{x+1} = 3x - 1.$$

$$47. \quad y' + \frac{3y}{x} = 7x^3 + 2x^2;$$

$$48. \quad y' - y = e^x, \text{ якщо } y(e) = e^e;$$

$$49. \quad y' + 2y = 4x, \text{ якщо } y(0) = 3;$$

$$50. \quad y' + \frac{y-1}{x} = 1, \text{ якщо } y(2) = 2;$$

$$51. \quad y' - y \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}^2 x, \text{ якщо } y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3};$$

$$52. \quad y' = y \ln e^x, \text{ якщо } y(2) = 12.$$

### Відповіді

$$39. \quad y = x^3 + Cx.$$

$$40. \quad y = \sin x + C\sqrt{\sin x}.$$

$$41. \quad y = 2x + \frac{C}{x}.$$

$$42. \quad y = Cx + 1.$$

$$43. \quad y = \frac{x^4}{6} + \frac{C}{x^2}.$$

$$44. \quad y = \frac{x^2}{2} + Cx^3.$$

$$45. \quad y = \frac{\sin x + C}{x}.$$

$$46. \quad y = x^2 - 1 + \frac{C}{x+1}.$$

$$47. \quad y = x^4 + \frac{x^3}{3} + \frac{C}{x^3}.$$

$$48. \quad y = e^x(x + 1 - e).$$

$$49. \quad y = 4e^{-2x} + 2x - 1.$$

$$50. \quad y = \frac{1}{2}x + 1.$$

$$51. \quad y = \operatorname{tg} x + 2\sin x.$$

$$52. \quad y = 3x^x.$$

### Зінтегрувати ДР Бернуллі

$$53. \quad y'x + y + xy^2 = 0;$$

$$54. \quad y' - xy + y^3 e^{-x^2} = 0;$$

$$55. \quad y' + xy = xy^3;$$

$$56. \quad y'x + y = y^2 \ln x;$$

$$57. \quad y' + 2xy = 2x^3 y^3;$$

$$58. \quad y' + y = xy^{1-n};$$

$$59. \quad xdx = \left(\frac{x^2}{y} - y^3\right)dy;$$

$$60. \quad y' - y \operatorname{tg} x + y^2 \cos x = 0;$$

### Відповіді

$$53. \quad y = \frac{1}{x \ln Cx}.$$

$$54. \quad y^2 = \frac{e^{x^2}}{2x+C}.$$

55.  $y^2 = \frac{1}{1+Ce^{x^2}}$  .

56.  $y(\ln x + 1 + Cx) = 1$ .

57.  $y^2(x^2 + \frac{1}{2} + Ce^{2x^2}) = 1$ .

58.  $ny^n = nx - 1 + Ce^{-nx}$  .

59.  $x^2 = y^2(C - y^2)$  .

60.  $y(x + C) = \operatorname{sech} x$  .

Зінтегрувати ДР в повних диференціалах

61.  $(2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy = 0$ ;

62.  $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0$ ;

63.  $yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy = 0$ ;

64.  $\frac{xdy}{x^2+y^2} = \left(\frac{y}{x^2+y^2} - 1\right) dx$ .

### Відповіді

61.  $x^4 - x^2y^2 + y^4 = C$ .

62.  $x e^y - y^2 = C$ .

63.  $x^y = C$ .

64.  $x + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = C$ .

## 2. Диференціальні рівняння вищих порядків

### 2.1. Основні поняття та означення. Задача Коші

*Звичайним диференціальним рівнянням  $n$ -го порядку* називають рівняння вигляду

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1)$$

де  $x$  – незалежна змінна,  $y(x)$  – невідома функція,  $y', y'', \dots, y^{(n)}$  – її похідні,  $F$  – задана відома функція, визначена в деякій області.

В деяких випадках це рівняння можна розв'язати відносно старшої похідної, тобто записати у вигляді

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \quad (2)$$

*Розв'язком диференціального рівняння (2)* на деякому інтервалі  $(a; b)$  називають  $n$  раз неперервно диференційовану функцію на цьому інтервалі  $y = \varphi(x)$ , яка при підстановці в рівняння перетворює його в тотожність.

Графік розв'язку називається *інтегральною кривою*.

Для диференціальних рівнянь вищих порядків, так як і для рівнянь першого порядку, розглядається задача Коші.

**Задача Коші.** Знайти розв'язок рівняння (2), який задовольняє початковим умовам:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', y''(x_0) = y_0'', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \quad (3)$$

де  $x_0 \in (a; b)$ ,  $y_0, y_0', y_0'', \dots, y_0^{(n-1)}$  – задані відомі числа.

Зокрема, для рівнянь другого порядку задача Коші полягає у знаходженні розв'язку рівняння  $y'' = f(x, y, y')$ , який задовольняє початковим умовам  $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$ .

Існування та єдиність розв'язку задачі Коші визначається наступною теоремою .

**Теорема.** Якщо функція  $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  і її частинні похідні по аргументам  $y, y', \dots, y^{(n-1)}$  неперервні в деякій області  $D$ , яка містить точку  $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})$ , то існує єдиний розв'язок  $y = \varphi(x)$  рівняння (2), який задовольняє початкові умови (3) і визначений в деякому околі точки  $x_0$ .

Розглянемо поняття загального та частинного розв'язку рівняння (2).

**Загальним розв'язком** рівняння (2) в області  $D$  називають функцію  $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ , де  $C_1, C_2, \dots, C_n$  - довільні сталі, таку що

- 1) функція має неперервні частинні похідні по  $x$  до  $n$ -го порядку включно;
- 2) функція задовольняє рівняння при довільних значеннях сталих  $C_1, C_2, \dots, C_n$ ;
- 3) при заданих початкових умовах сталі  $C_1, C_2, \dots, C_n$  можна підібрати так, що функція  $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$  буде задовольняти цим умовам.

Якщо загальний розв'язок знаходиться в неявному вигляді

$\Phi(x, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$ , то його називають **загальним інтегралом рівняння**.

**Частинний розв'язок** одержують із загального, якщо надати довільним сталим конкретних числових значень.

З геометричної точки зору, загальним розв'язком рівняння (2) є параметрична сім'я інтегральних кривих, які залежать від параметрів  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , а частинний розв'язок - це окрема крива цієї сім'ї.

## **2.2. Диференціальні рівняння вищих порядків, які допускають зниження порядку**

Розглянемо деякі типи рівнянь вищих порядків, які допускають зниження порядку.

1.  $y^{(n)} = f(x)$ ,

де  $f(x)$  - задана неперервна функція на  $(a; b)$ .

Це рівняння інтегрується в квадратурах шляхом послідовного інтегрування  $n$  раз. Для цього запишемо рівняння у вигляді

$$\frac{dy^{(n-1)}}{dx} = f(x), \text{ або } dy^{(n-1)} = f(x)dx,$$

зінтегруємо його

$$\int dy^{(n-1)} = \int f(x)dx$$

і отримаємо розв'язок  $y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1$ , де  $C_1$  - стала інтегрування.

Аналогічно

$$\frac{dy^{(n-2)}}{dx} = \int f(x)dx + C_1;$$

$$\int dy^{(n-2)} = \int (\int f(x)dx + C_1)dx;$$

$$y^{(n-2)} = \int (\int f(x)dx)dx + C_1x + C_2.$$

Інтегруючи послідовно  $n$  раз, отримаємо загальний розв'язок рівняння

$$y = \int (\dots (\int f(x)dx) \dots) dx + \frac{C_1 x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{C_2 x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_{n-1}x + C_n.$$

**Приклад 1.** Розв'язати диференціальне рівняння  $y''' = 12x - \sin x$ .

*Розв'язання.* Запишемо рівняння у вигляді

$$\frac{dy''}{dx} = 12x - \sin x \text{ або } dy'' = (12x - \sin x)dx.$$

Зінтегруємо послідовно три рази дане рівняння:

$$\int dy'' = \int (12x - \sin x)dx;$$

$$y'' = \int (12x - \sin x)dx = \frac{12x^2}{2} + \cos x + C_1 = 6x^2 + \cos x + C_1;$$

$$y' = \int (6x^2 + \cos x + C_1)dx = 2x^3 + \sin x + C_1x + C_2;$$

$$y = \int (2x^3 + \sin x + C_1x + C_2)dx = \frac{2x^4}{4} - \cos x + \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3 \quad - \text{ загальний розв'язок рівняння. } \blacksquare$$

**2. Рівняння, яке не містить в явному вигляді шуканої функції  $y$ :**

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Порядок цього рівняння можна понизити, якщо зробити підстановку:

$$y^{(k)} = z(x), \quad y^{(k+1)} = z'(x), \quad y^{(k+2)} = z''(x), \quad \dots, \quad y^{(n)} = z^{(n-k)}(x).$$

Тоді одержимо рівняння

$$F(x, z, z', z'', \dots, z^{(n-k)}) = 0.$$

Таким чином, порядок рівняння зменшився на  $k$  одиниць.

Розв'язавши це рівняння, визначимо  $z = g(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$ .

Повернемося до заміни  $y^{(k)} = g(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$ ,

інтегруємо і маємо загальний розв'язок даного рівняння

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n) .$$

Зокрема, рівняння другого порядку  $F(x, y', y'') = 0$  за допомогою підстановки

$y' = z(x) \Rightarrow y'' = z'(x)$  перетвориться в рівняння першого порядку:  
 $F(x, z, z') = 0$ .

**Приклад 2.** Розв'язати задачу Коші  $xy'' = y'$ ,  $y(1) = 1$ ,  $y'(1) = 1$ .

*Розв'язання.* Зробимо підстановку  $y' = z(x) \Rightarrow y'' = z'(x)$ . Тоді рівняння набуде вигляду :

$$xz' = z .$$

Це рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Відокремимо змінні і зінтегруємо дане рівняння:

$$\frac{x dz}{dx} = z \quad | \cdot dx ,$$

$$x dz = z dx \quad | \cdot \frac{1}{xz} ,$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} ,$$

$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x} ,$$

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln|C_1| ,$$

$$z = C_1 \cdot x .$$

Повертаючись до заміни, одержимо

$$y' = C_1 x ,$$

$$\frac{dy}{dx} = C_1 x ,$$

$$dy = C_1 x dx .$$

Зінтегрувавши, отримаємо загальний розв'язок рівняння

$$\int dy = \int C_1 x dx ,$$

$$y = \frac{C_1 x^2}{2} + C_2.$$

З початкових умов знайдемо сталі  $C_1, C_2$ :

$$y'(1) = 1, \quad y' = C_1 x, \quad 1 = C_1 \cdot 1, \quad C_1 = 1,$$

$$y(1) = 1, \quad y = \frac{C_1 x^2}{2} + C_2, \quad 1 = \frac{1}{2} \cdot 1 + C_2, \quad C_2 = \frac{1}{2}.$$

Тоді  $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$  - частинний розв'язок даного рівняння. ■

### 3. Рівняння яке не містить в явному вигляді незалежну змінну $x$ :

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Це рівняння допускає пониження порядку на одиницю за допомогою заміни

$$y' = z(y),$$

$$y'' = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z' \cdot z,$$

$$y''' = \frac{d}{dy} (z' \cdot z) \frac{dy}{dx} = (z''z + (z')^2) \cdot z = z''z^2 + (z')^2 \cdot z \text{ і т.д.}$$

Підставимо заміну в дане рівняння і одержимо рівняння  $(n-1)$  порядку відносно нової шуканої функції  $z$ :  $F(y, z, z', \dots, z^{(n-1)}) = 0$ .

Якщо  $z = \varphi(y, C_1, C_2, \dots, C_n)$  - розв'язок цього рівняння, то повертаючись до заміни  $y' = \varphi(y, C_1, C_2, \dots, C_n)$ , інтегруємо і маємо загальний інтеграл даного рівняння. При інтегруванні можуть з'явитися особливі розв'язки.

Зокрема, для рівняння другого порядку  $F(y, y', y'') = 0$  підстановка  $y' = z(y) \Rightarrow y'' = z' \cdot z$  зведе його до рівняння першого порядку  $F(y, z, z') = 0$ .

### Приклад 3. Зінтегрувати диференціальне рівняння $y y'' - 2(y')^2 = 0$ .

Розв'язання. Підстановка  $y' = z(y) \Rightarrow y'' = z' \cdot z$  зведе дане рівняння до рівняння першого порядку  $y \cdot z' \cdot z - 2z^2 = 0$ . Звідки

$$z(yz' - 2z) = 0,$$

$$z = 0 \text{ або } yz' - 2z = 0.$$

З першого рівняння, повертаючись до заміни, маємо

$$\frac{dy}{dx} = 0, \quad y = C_1.$$

Друге рівняння є рівнянням з відокремленими змінними. Відокремивши змінні, знаходимо його розв'язок

$$yz' = 2z, \quad y \frac{dz}{dy} = 2z,$$

$$ydz = 2zdy \left| \cdot \frac{1}{yz}, \right.$$

$$\frac{dz}{z} = 2ydy,$$

$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{2dy}{y},$$

$$\ln|z| = 2\ln|y| + \ln|C_2|,$$

$$z = C_2 y^2.$$

Повертаючись до заміни і зінтегрувавши отримане рівняння з відокремлюваними змінними, знаходимо загальний розв'язок рівняння

$$\frac{dy}{dx} = C_2 y^2,$$

$$dy = C_2 y^2 dx,$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int C_2 dx,$$

$$-\frac{1}{y} = C_2 x + C_3,$$

$$y = -\frac{1}{C_2 x + C_3}.$$

Отже, задане рівняння має розв'язки

$$y = C_1 \text{ та } y = -\frac{1}{C_2 x + C_3}. \blacksquare$$

### Завдання для самостійної та аудиторної роботи

1. Зінтегрувати рівняння, які допускають зниження порядку.

1.  $y'' = x + \sin x$ .

2.  $y'' = \arctg x$ .

3.  $y'' = \ln x$ .

4.  $y'' = e^{3x} + x^3$ .

5.  $y''' = \frac{1}{x}$ .

6.  $y''' = \cos 2x$ .

7.  $xy'' = y'$ .

8.  $y'' = \frac{y'}{x} + x$ .

9.  $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$ .

10.  $2xy'y'' = (y')^2 + 1$ .

11.  $y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0$ .

12.  $y'' = \frac{1}{4\sqrt{y}}$ .

13.  $(y'')^2 = y'$ .

14.  $y'' = 1 - (y')^2$ .

15.  $2yy'' = 1 + (y')^2$ .

16.  $(y')^2 + 2yy'' = 0$ .

17.  $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$ .

18.  $yy'' = (y')^2$ .

2. Знайти частинний розв'язок рівнянь, який задовольняє початкові умови.

1.  $y''(x^2 + 1) = 2xy'$ ;  $y(0) = 1, y'(0) = 3$ .

2.  $xy'' + x(y')^2 - y' = 0$ ;  $y(2) = 2, y'(2) = 1$ .

3.  $y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y}$ ;  $y(2) = 0, y'(2) = 4$ .

4.  $xy'' + y' = \ln x$ ;  $y(1) = -2, y'(1) = -1$ .

5.  $yy'' = (y')^2 - (y')^3$ ;  $y(1) = 1, y'(1) = -1$ .

6.  $y^3 y'' = -1$ ;  $y(1) = 1, y'(1) = 0$ .

### Відповіді

1.1.  $y = \frac{1}{6}x^3 - \sin x + C_1x + C_2$ . 2.  $y = \frac{1}{2}(x^2 - 1)\operatorname{arctg}x - \frac{1}{2}x \ln(1 + x^2) + C_1x + C_2$ .

3.  $y = \frac{1}{2}x^2(\ln x - \frac{3}{2}) + C_{1x} + C_2$ . 4.  $y = \frac{1}{9}e^{3x} + \frac{1}{20}x^5 + C_1x + C_2$ .

5.  $y = x^2 \ln \sqrt{x} + C_1x^2 + C_2x + C_3$ . 6.  $y = -\frac{1}{8}\sin 2x + C_1x^2 + C_1x + C_3$ .

7.  $y = C_1x^2 + C_2$ . 8.  $y = \frac{1}{3}x^3 + C_1x^2 + C_2$ .

$$9. y = (C_1x - C_1^2)e^{\frac{x}{C_1+1}} + C_2.$$

$$10. y = \frac{2}{3C_1}\sqrt{(C_1-1)^3} + C_2.$$

$$11. y = \frac{x+C_1}{x+C_2}.$$

$$12. x = \pm \frac{4}{3}(\sqrt{y} - 2C_1)^2 + C_2.$$

$$13. y = \frac{1}{12}(x+C_1)^3 + C_2.$$

$$14. y = \ln|e^{2x} + C_1| - x + C_2.$$

$$15. (x+C_2)^2 = 4C_1(y-C_1).$$

$$16. y = C_1(x+C_2)^{\frac{2}{3}}.$$

$$17. y \cos^2(x+C_1) = C_2.$$

$$18. y = C_1e^{C_2x}.$$

$$2. 1. y = x^3 + 3x + 1.$$

$$2. y = 2 + \ln \frac{x^2}{4}.$$

$$3. y = \frac{2}{5}x^2\sqrt{2x} - \frac{16}{5}.$$

$$4. y = x \ln|x| - 2x.$$

$$5. y - x = 2 \ln|y|.$$

$$6. y = \sqrt{2x - x^2}.$$

### 3. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків

#### 3.1. Основні поняття і означення

Рівняння вигляду

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_n(x)y = f(x), \quad (1)$$

яке містить невідому функцію  $y$  та її похідні лінійно, де  $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x), f(x)$  – неперервні на деякому інтервалі  $(a; b)$  функції, називається **лінійним диференціальним рівнянням  $n$ -го порядку**.

За таких умов рівняння (1) має єдиний розв'язок  $y = y(x)$ , який задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', y''(x_0) = y_0'', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

де  $x_0 \in (a; b)$ ,  $y_0, y_0', y_0'', \dots, y_0^{(n-1)}$  – задані відомі числа.

Цей розв'язок визначений і  $n$  раз неперервно-диференційований на  $(a; b)$ .

Особливих розв'язків диференціальне рівняння (1) не має.

Для скороченого запису рівняння використовують операторний запис. Для цього вводять лінійний диференціальний оператор  $L$ :

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + p_2(x) \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} + \dots + p_n(x). \quad (2)$$

#### **Властивості диференціального оператора**

1. Постійний множник можна виносити за знак лінійного диференціального оператора:

$$L(cy) = cL(y), \quad c \in R.$$

2. Лінійний диференціальний оператор від суми доданків дорівнює сумі операторів від кожного доданку:

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2).$$

За допомогою оператора (2) рівняння (1) можна записати в операторному вигляді:

$$L(y) = f(x). \quad (1')$$

Якщо  $f(x) \neq 0$ , то рівняння називається **неоднорідним**, якщо  $f(x) = 0$ , то рівняння називається **однорідним**.

Означення 1. Функція  $y = y(x)$  називається **розв'язком диференціального рівняння (1)**, якщо  $L(y(x)) = f(x)$  (для однорідного рівняння  $L(y(x)) \equiv 0$ ).

Означення 2. Функції  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$  - називаються **лінійно залежними**, якщо можна підібрати такі сталі  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  не всі рівні нулеві, так що буде виконуватись тотожність

$$\lambda_1 \varphi_1(x) + \lambda_2 \varphi_2(x) + \dots + \lambda_n \varphi_n(x) = 0.$$

Означення 3. Функції  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$  - називаються **лінійно незалежними**, якщо не можна підібрати коефіцієнти  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  не всі рівні нулеві, так щоб виконувалась тотожність

$$\lambda_1 \varphi_1(x) + \lambda_2 \varphi_2(x) + \dots + \lambda_n \varphi_n(x) = 0.$$

1) Якщо дві функції лінійно залежні, то їх відношення є стала

величина:  $\frac{y_2}{y_1} = \lambda.$

2) Якщо дві функції лінійно незалежні, то їх відношення є змінна

величина:  $\frac{y_2}{y_1} = \varphi(x).$

Розглянемо необхідні умови лінійної залежності  $n$  функцій.

Означення 4.

**Визначником Вронського** називають функціональний визначник вигляду:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = W[y_1, y_2, \dots, y_n].$$

Зокрема,  $W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.$

### ***Властивості визначника Вронського***

**Теорема 1.** Визначник Вронського або скрізь на числовій осі дорівнює нулю, або в жодній точці не дорівнює нулю.

**Теорема 2.** Якщо функції  $y_1, y_2, \dots, y_n$  - лінійно залежні і мають похідні до  $(n-1)$  порядку, то Вронскіан цих функцій тотожно дорівнює нулю.

Якщо функції  $y_1, y_2, \dots, y_n$  - лінійно незалежні і мають похідні до  $(n-1)$  порядку, то Вронскіан цих функцій не дорівнює нулю.

Для цієї теореми має місце обернене твердження.

З цих теорем слідує: для того, щоб  $n$  розв'язків диференціального рівняння (1') були лінійно незалежними на  $(a; b)$  необхідно і достатньо, щоб їх Вронскіан не дорівнював нулю в жодній точці цього інтервалу.

### **3.2. Лінійні однорідні диференціальні рівняння вищих порядків (ЛОДР). Структура загального розв'язку**

Розглянемо ЛОДР  $n$ -ого порядку:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_n(x)y = 0, \quad L(y) = 0. \quad (3)$$

#### ***Властивості розв'язків***

1) Якщо функція  $y_1 = f_1(x)$  є розв'язком рівняння (3), то  $Cy_1$ , де  $C$ - стала величина, теж є розв'язком рівняння (3):

$$L(Cy_1) = C \cdot L(y_1) = C \cdot 0 = 0.$$

2) Якщо функції  $y_1 = f_1(x)$  і  $y_2 = f_2(x)$  є розв'язками рівняння (3), то їх сума  $y_1 + y_2$  - теж є розв'язком рівняння (3):

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) = 0 + 0 = 0.$$

**Означення 5.** Будь яка сукупність  $n$  лінійно незалежних частинних розв'язків  $y_1, y_2, \dots, y_n$  ЛОДР  $n$ -го порядку називається його **фундаментальною системою розв'язків**.

З попереднього випливає, для того щоб система  $n$  розв'язків диференціального рівняння (3) була фундаментальною системою розв'язків необхідно і достатньо, щоб Вронскіан цих розв'язків був відмінний від нуля хоча б в одній точці інтервалу неперервності коефіцієнтів диференціального рівняння (3). Всі ці розв'язки повинні бути ненульовими.

**Теорема 3** (про структуру загального розв'язку ЛОДР  $n$ -го порядку)

Якщо частинні розв'язки  $y_1, y_2, \dots, y_n$  рівняння (3) утворюють фундаментальну систему розв'язків, то загальний розв'язок такого рівняння має вигляд:  $y_{з.о.} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ , де  $C_1, C_2, \dots, C_n$  - довільні сталі величини.

**3.3. Лінійні однорідні диференціальні рівняння вищих порядків зі сталими коефіцієнтами**

Для простоти розглянемо випадок, якщо  $n = 2$ .

Розглянемо ЛОДР другого порядку з постійними коефіцієнтами:

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0, p_1, p_2 \in R. \quad (4)$$

Згідно теореми про структуру розв'язку ЛОДР загальний розв'язок цього рівняння будемо шукати у вигляді  $y_{з.о.} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ , де  $y_1, y_2$  - частинні, лінійно незалежні розв'язки.

Частинний розв'язок цього рівняння будемо знаходити, дотримуючись ідеї Ейлера, у вигляді  $y = e^{kx}$ , де  $k$  - стала (дійсна чи комплексна), яку потрібно знайти. Знайдемо похідні:  $y' = k e^{kx}$ ,  $y'' = k^2 e^{kx}$  і підставимо їх в рівняння (4):

$$\begin{aligned} k^2 e^{kx} + p_1 k e^{kx} + p_2 e^{kx} &= 0, \\ e^{kx} (k^2 + p_1 k + p_2) &= 0. \end{aligned}$$

Оскільки  $e^{kx} \neq 0$ , то

$$k^2 + p_1 k + p_2 = 0. \quad (5)$$

Отже, якщо  $k$  буде коренем рівняння (5), то функція  $y = e^{kx}$  буде розв'язком рівняння (4).

Квадратне рівняння (5) називається **характеристичним рівнянням** диференціального рівняння (4).

Алгебраїчне рівняння, яке отримуємо з ЛОДР зі сталими коефіцієнтами заміною похідних відповідними степенями  $k$ , називається **характеристичним рівнянням** даного диференціального рівняння.

Розглянемо випадки:

**1)  $D > 0$ ,  $k_1 \neq k_2$  - корені характеристичного рівняння дійсні і різні.**

Кожному кореню відповідає частинний розв'язок:

$$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x}.$$

Ці розв'язки  $y_1, y_2$  - є лінійно незалежні, тому що  $\frac{y_2}{y_1} = e^{(k_2 - k_1)x} \neq const$ .

Тоді за теоремою про структуру розв'язку ЛОДР загальний розв'язок цього рівняння знаходимо у вигляді:

$$y_{з.о.} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \quad (6)$$

**2)  $D = 0$ ,  $k_1 = k_2 = k$  - корені характеристичного рівняння дійсні і рівні.**

За формулою один з розв'язків буде  $y_1 = e^{kx}$ .

Другий розв'язок шукатимемо у вигляді  $y_2 = u(x)e^{kx}$ , де  $u(x)$  - невідома функція від  $x$ . Знайшовши  $y_2'$  і  $y_2''$  та підставивши їх у рівняння (4), дістанемо

$$(u'' + 2u'k + uk^2)e^{kx} + p_1(u' + uk)e^{kx} + p_2ue^{kx} = 0,$$

$$\text{або } u'' + (2k + p_1)u' + (k^2 + p_1k + p_2)u = 0.$$

Оскільки  $k$  - корінь рівняння (5), то  $k^2 + p_1k + p_2 = 0$  і  $2k + p_1 = 0$  (за теоремою Вієта), тому  $u'' = 0$ , звідси  $u = C_1x + C_2$ , де  $C_1, C_2$  - довільні сталі. Поклавши  $C_1 = 1, C_2 = 0$ , знайдемо частинний розв'язок рівняння (5)  $y_2 = xe^{kx}$ . Розв'язки  $y_1$  і  $y_2$  - лінійно незалежні, оскільки

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{x} \neq const.$$

Тому загальний розв'язок рівняння (5), згідно теореми про структуру загального розв'язку ЛОДР, матиме вигляд

$$y_{з.о.} = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}. \quad (7)$$

**3)  $D < 0$ ,  $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$  - корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені.**

Оскільки коефіцієнти рівняння (4) є дійсними, то комплексні корені характеристичного рівняння можуть входити лише парами, тобто комплексному кореню  $k_1 = \alpha + \beta i$  відповідає комплексно-спряжений корінь  $k_2 = \alpha - \beta i$ . Кожному кореню відповідає його частинний розв'язок:

$$y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x}, \quad y_2 = e^{(\alpha - \beta i)x}.$$

Скористаємося формулою Ейлера:  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ , тоді

$$y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{\beta i x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x),$$

$$y_2 = e^{(\alpha - \beta i)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-\beta i x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x).$$

Зауважимо, що коли комплексна функція  $z(x) = u(x) + iv(x)$ , де  $u(x)$  і  $v(x)$  - відповідно дійсна та уявна частини, є розв'язком рівняння (4), то розв'язками будуть також функції  $u(x)$  і  $v(x)$ .

Справді, підставивши функцію  $z(x)$  у рівняння (4), дістанемо

$$(u'' + iv'') + p_1(u' + iv') + p_2(u + iv) = 0, \text{ або } (u'' + p_1u' + p_2u) + i(v'' + p_1v' + p_2v) = 0.$$

Остання тотожність можлива, якщо вирази в дужках одночасно дорівнюють нулю. Це означає, що функції  $u(x)$  і  $v(x)$  - розв'язки рівняння (4). Згідно з зауваженням, частинними розв'язками рівняння (4) є функції

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Ці розв'язки є лінійно-незалежними, оскільки

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{\alpha x} \cos \beta x}{e^{\alpha x} \sin \beta x} = \operatorname{ctg} \beta x \neq \operatorname{const}.$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (4), згідно з теоремою про загальний розв'язок ЛОДР, запишемо у вигляді:

$$y_{z.o.} = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), \quad (8)$$

де  $C_1, C_2$  - довільні сталі.

**Приклад 1.** Зінтегрувати рівняння  $y'' - 2y' - 15y = 0$ .

*Розв'язання.* Запишемо характеристичне рівняння:  $k^2 - 2k - 15 = 0$ .

Знайдемо його корені:  $k_1 = -3; k_2 = 5$ .

Частинні розв'язки запишемо у вигляді:  $y_1 = e^{-3x}; y_2 = e^{5x}$ .

Отже,  $y_{з.о.} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{5x}$ . ■

**Приклад 2.** Розв'язати задачу Коші:  $y'' - 10y' + 25y = 0$ ,  $y(0) = 1, y'(0) = 7$ .

*Розв'язання.* Запишемо характеристичне рівняння:  $k^2 - 10k + 25 = 0$ .

Знайдемо його корені:  $k_1 = k_2 = 5$ .

Частинні розв'язки запишемо у вигляді:  $y_1 = e^{5x}; y_2 = x e^{5x}$ .

Тоді,  $y_{з.о.} = C_1 e^{5x} + C_2 x e^{5x} = e^{5x} (C_1 + C_2 x)$ .

Знайдемо  $y_{з.о.}' = 5e^{5x} (C_1 + C_2 x) + e^{5x} \cdot C_2 = e^{5x} (5C_1 + 5C_2 x + C_2)$ .

Для знаходження сталих  $C_1$  і  $C_2$  використаємо початкові умови:

$$y(0) = 1 \Rightarrow e^{5 \cdot 0} (C_1 + C_2 \cdot 0) = 1 \Rightarrow C_1 = 1;$$

$$y'(0) = 7 \Rightarrow e^{5 \cdot 0} (5 \cdot 1 + 5C_2 \cdot 0 + C_2) = 7 \Rightarrow 5 + C_2 = 7 \Rightarrow C_2 = 2.$$

Отже,  $y = e^{5x} (1 + 2x)$  - частинний розв'язок. ■

**Приклад 3.** Зінтегрувати рівняння  $y'' + 2y' + 5y = 0$ .

*Розв'язання.* Запишемо характеристичне рівняння:  $k^2 + 2k + 5 = 0$ .

Знайдемо його корені:  $D = 4 - 20 = -16$ ,  $k = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$ .

Частинні розв'язки запишемо у вигляді:

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x = e^{-x} \cos 2x; y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x = e^{-x} \sin 2x.$$

Отже,  $y_{з.о.} = C_1 e^{-x} \cos 2x + C_2 e^{-x} \sin 2x = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$ . ■

Застосуємо розглянутий метод знаходження розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку до рівнянь вищих порядків.

Нехай маємо лінійне однорідне диференціальне рівняння  $n$ -го порядку

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_n y = 0, \quad (9)$$

де  $p_1, p_2, \dots, p_n$  - дійсні числа.

Характеристичним рівнянням для рівняння (9) називають алгебраїчне рівняння  $n$ -го степеня вигляду

$$k^n + p_1 k^{n-1} + p_2 k^{n-2} + \dots + p_n = 0. \quad (10)$$

Як відомо, рівняння (10) має  $n$  коренів  $k_1, k_2, \dots, k_n$ .

Залежно від коренів характеристичного рівняння розглянемо різні випадки побудови лінійно незалежних частинних розв'язків рівняння (9):

- 1) кожному простому дійсному кореню  $k$  рівняння (10) відповідає частинний розв'язок  $e^{kx}$  рівняння (9);
- 2) кожному дійсному кореню  $k$  кратності  $r > 1$  рівняння (10) відповідає  $r$  частинних розв'язків вигляду  $e^{kx}, xe^{kx}, \dots, x^{r-1}e^{kx}$  рівняння (9);
- 3) кожній парі  $k = \alpha \pm \beta i$  простих комплексно-спряжених коренів рівняння (10) відповідає два частинних розв'язки  $e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x$  рівняння (9);
- 4) кожній парі  $k = \alpha \pm \beta i$  комплексно-спряжених коренів кратності  $r > 1$  рівняння (10) відповідає  $2r$  частинних розв'язків виду  $e^{\alpha x} \cos \beta x, xe^{\alpha x} \cos \beta x, x^2 e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{r-1} e^{\alpha x} \cos \beta x;$   
 $e^{\alpha x} \sin \beta x, xe^{\alpha x} \sin \beta x, x^2 e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{r-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$  рівняння (9).

Загальна сума кратностей всіх коренів рівняння (10) дорівнює  $n$ , тому кількість всіх частинних розв'язків рівняння (9) дорівнює  $n$ , тобто збігається з порядком рівняння (9).

Позначимо ці частинні розв'язки через  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . Можна довести, що знайдені частинні розв'язки утворюють фундаментальну систему розв'язків, і тоді загальний розв'язок рівняння (9), згідно з теоремою про загальний розв'язок ЛОДР, запишемо у вигляді:

$$y_{z.o.} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n, \quad (11)$$

де  $C_1, C_2, \dots, C_n$  - довільні сталі величини.

**Приклад 4.** Зінтегрувати рівняння  $y''' - 3y'' - y' + 3y = 0$ .

*Розв'язання.* Запишемо характеристичне рівняння:  $k^3 - 3k^2 - k + 3 = 0$ .

Знайдемо його корені:  $k^2(k-3) - (k-3) = 0$ ,  $(k-3)(k^2-1) = 0$ ,

$(k-3)(k-1)(k+1) = 0$ , звідки

$k_1 = 3, k_2 = 1, k_3 = -1$  - корені дійсні і різні.

Кожному простому кореню відповідають частинні розв'язки:

$$y_1 = e^{k_1 x} = e^{3x}, y_2 = e^{k_2 x} = e^x, y_3 = e^{k_3 x} = e^{-x}.$$

Отже, згідно з формулою (11) загальний розв'язок даного диференціального рівняння має вигляд

$$y_{z.o} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 = C_1 e^{3x} + C_2 e^x + C_3 e^{-x}. \blacksquare$$

**Приклад 5.** Зінтегрувати рівняння  $y^{IV} - 2y''' + y'' = 0$ .

*Розв'язання.* Складемо характеристичне рівняння:  $k^4 - 2k^3 + k^2 = 0$ .

Знайдемо його корені:

$$k^2(k^2 - 2k + 1) = 0, \quad k^2(k - 1)^2 = 0,$$

$$k^2 = 0, (k - 1)^2 = 0,$$

звідки  $k_1 = k_2 = 0, k_3 = k_4 = 1$ .

Кожному кратному кореню відповідають частинні розв'язки:

$$y_1 = e^{k_1 x} = e^{0x} = 1, \quad y_2 = x e^{k_1 x} = x,$$

$$y_3 = e^{k_3 x} = e^x, \quad y_4 = x e^{k_2 x} = x e^x.$$

Отже, згідно з формулою (11) загальний розв'язок даного диференціального рівняння має вигляд

$$y_{z.o} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + C_4 y_4 = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + C_4 x e^x. \blacksquare$$

**Приклад 6.** Зінтегрувати рівняння  $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$ .

*Розв'язання.* Складемо характеристичне рівняння:  $k^3 - 6k^2 + 12k - 8 = 0$ .

Звідси  $(k^3 - 8) - 6k(k - 2) = 0$ ,  $(k - 2)(k^2 + 2k + 4) - 6k(k - 2) = 0$ ,

$$(k - 2)(k^2 + 2k + 4 - 6k) = 0, \quad (k - 2)(k^2 - 4k + 4) = 0,$$

$$(k - 2)(k - 2)^2 = 0, \quad (k - 2)^3 = 0, \quad k_1 = k_2 = k_3 = 2.$$

Кожному кореню відповідають частинні розв'язки:

$$y_1 = e^{k_1 x} = e^{2x}, y_2 = x e^{2x}, y_3 = x^2 e^{2x}.$$

Тоді, згідно з формулою (11) загальний розв'язок даного диференціального рівняння має вигляд

$$y_{z.o} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + C_3 x^2 e^{2x} = e^{2x} (C_1 + C_2 x + C_3 x^2). \blacksquare$$

**Приклад 7.** Зінтегрувати рівняння  $y^{VI} - 4y^V + 29y^{IV} = 0$ .

*Розв'язання.* Складемо характеристичне рівняння:

$$k^6 - 4k^5 + 29k^4 = 0,$$

Звідки  $k^4(k^2 - 4k + 29) = 0$ ,

$$k^4 = 0, \quad k^2 - 4k + 29 = 0,$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0, \quad \Delta = 16 - 4 \times 29 = 16 - 116 = -100,$$

$$y_1 = e^{0x} = 1, \quad y_2 = x, \quad k_{5,6} = \frac{4 \pm \sqrt{-100}}{2} = \frac{4 \pm 10i}{2} = 2 \pm 5i, \quad \alpha = 2, \beta = 5$$

$$y_3 = x^2, \quad y_4 = x^3, \quad y_5 = e^{\alpha x} \cos \beta x = e^{2x} \cos 5x, \quad y_6 = e^{\alpha x} \sin \beta x = e^{2x} \sin 5x.$$

Тоді, згідно з формулою (11) загальний розв'язок даного диференціального рівняння має вигляд

$$y_{3.0} = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 e^{2x} \cos 5x + C_6 e^{2x} \sin 5x. \blacksquare$$

### **3.4. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння вищих порядків (ЛНДР)**

Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння

$$L(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_n(x)y = f(x), \quad (1)$$

де  $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x), f(x)$  – неперервні на деякому інтервалі  $(a; b)$

функції.

**Теорема 1** (про структуру загального розв'язку ЛНДР)

Загальний розв'язок ЛНДР є сумою його довільного частинного розв'язку і загального розв'язку відповідного однорідного рівняння:

$$\underline{y_{з.н.}} = \underline{y_{з.о.}} + \underline{y_{ч.н.}}, \quad (2)$$

де  $y_{з.о.}$  - загальний розв'язок ЛОДР  $L(y) = 0$ ,

$y_{ч.н.}$  - частинний розв'язок ЛНДР  $L(y) = f(x)$ .

*Доведення.*

Маємо  $L(y_{з.о.}) = 0$ ,  $L(y_{ч.н.}) = f(x)$ ,

тоді  $L(y_{з.о.} + y_{ч.н.}) = L(y_{з.о.}) + L(y_{ч.н.}) = 0 + f(x) = f(x)$ .

Отже,  $y_{з.о.} + y_{ч.н.}$  – загальний розв'язок рівняння  $L(y) = f(x)$ .

## **Теорема 2** (про накладання розв'язків)

Загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння

$$L(y) = f_1(x) + f_2(x)$$

має вигляд:  $y_{з.н.} = y_{з.о.} + y_{ч.н.1} + y_{ч.н.2}$ ,

де  $y_{з.о.}$  - загальний розв'язок ЛОДР  $L(y) = 0$ ,

$y_{ч.н.1}$  - частинний розв'язок ЛНДР  $L(y) = f_1(x)$ ,

$y_{ч.н.2}$  - частинний розв'язок ЛНДР  $L(y) = f_2(x)$ .

Доведення:

Маємо  $L(y_{з.о.}) = 0$ ,  $L(y_{ч.н.1}) = f_1(x)$ ,  $L(y_{ч.н.2}) = f_2(x)$ .

Тоді

$$L(y_{з.о.} + y_{ч.н.1} + y_{ч.н.2}) = L(y_{з.о.}) + L(y_{ч.н.1}) + L(y_{ч.н.2}) = 0 + f_1(x) + f_2(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

Отже,  $y_{з.о.} + y_{ч.н.1} + y_{ч.н.2}$  - загальний розв'язок рівняння  $L(y) = f_1(x) + f_2(x)$ .

### **3.4.1. Метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа)**

Розглянемо питання про знаходження частинного розв'язку неоднорідного рівняння (1). Оскільки рівняння (1) лінійне, то частинний розв'язок можна побудувати методом варіації довільних сталих.

Для простоти викладок розглянемо цей метод для неоднорідного лінійного рівняння другого порядку

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x). \quad (3)$$

Згідно теореми про структуру загального розв'язку ЛНДР:

$$y_{з.н.} = y_{з.о.} + y_{ч.н.}$$

Суть методу полягає в тому, що розв'язується відповідне однорідне рівняння

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0, \quad L(y) = 0, \quad (4)$$

для якого записується загальний розв'язок зі сталими  $C_1, C_2$ :

$$y_{з.о.} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

де  $y_1(x), y_2(x)$  - частинні лінійно-незалежні розв'язки однорідного рівняння.

Розв'язок неоднорідного рівняння (3)  $y_{ч.н.}$  шукаємо в такому ж вигляді як і  $y_{з.о.}$ , проте величини  $C_1(x)$  і  $C_2(x)$  вже розглядаємо як функції від аргумента  $x$ :

$$y_{ч.н.} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x), \quad (5)$$

Оскільки  $y_{ч.н.}$  – це частинний розв'язок рівняння  $L(y) = f(x)$ , то він повинен задовольняти це рівняння.

$$\text{Знайдемо } y'_{ч.н.} = C_1'(x)y_1(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_2(x)y_2'(x).$$

При знаходженні  $y'_{ч.н.}$  функції  $C_1(x)$  і  $C_2(x)$  поводять себе як сталі, тому

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0.$$

$$\text{Тоді, } y'_{ч.н.} = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x).$$

При знаходженні  $y''_{ч.н.}$ ,  $C_1(x)$  і  $C_2(x)$  поводять себе вже як функції від  $x$  (відбувається варіація сталими  $C_1, C_2$ ):

$$y''_{ч.н.} = C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x).$$

Підставимо  $y_{ч.н.}$ ,  $y'_{ч.н.}$ ,  $y''_{ч.н.}$  в рівняння  $L(y) = f(x)$ :

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x) + p_1(x)C_1(x)y_1'(x) + p_1(x)C_2(x)y_2'(x) + p_2(x)C_1(x)y_1(x) + p_2(x)C_2(x)y_2(x) = f(x),$$

$$C_1(x)(y_1''(x) + p_1(x)y_1'(x) + p_2(x)y_1(x)) + C_2(x)(y_2''(x) + p_1(x)y_2'(x) + p_2(x)y_2(x)) + C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x),$$

$$C_1(x)L(y_1) + C_2(x)L(y_2) + C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x).$$

Оскільки  $y_1(x), y_2(x)$  – частинні розв'язки однорідного рівняння, то  $L(y_1) = 0, L(y_2) = 0$ .

$$\text{Тоді } C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x).$$

Отже, для визначення  $C_1'(x), C_2'(x)$  одержали систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases} \quad (6)$$

Розв'яжемо її за формулами Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = W[y_1, y_2],$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix} = -y_2 f(x),$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix} = y_1 f(x).$$

Звідки  $C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-y_2 f(x)}{W} \Rightarrow C_1(x) = -\int \frac{y_2 f(x)}{W} dx,$

$$C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{y_1 f(x)}{W} \Rightarrow C_2(x) = \int \frac{y_1 f(x)}{W} dx$$

Тоді  $y_{ч.н.} = -y_1 \int \frac{y_2 f(x)}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 f(x)}{W} dx.$

Якщо  $n = 3$ :  $y''' + p_1(x)y'' + p_2(x)y' + p_3(x)y = f(x),$ , то для знаходження

$C_1'(x), C_2'(x), C_3'(x)$  потрібно розв'язати систему:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + C_3'(x)y_3 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + C_3'(x)y_3' = 0 \\ C_1'(x)y_1'' + C_2'(x)y_2'' + C_3'(x)y_3'' = f(x). \end{cases} \quad (7)$$

Для рівняння  $n$ -го порядку, для знаходження  $C_1'(x), C_2'(x), \dots, C_n'(x)$

потрібно розв'язати систему:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \dots + C_n'(x)y_n = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \dots + C_n'(x)y_n' = 0 \\ \dots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)} + C_2'(x)y_2^{(n-2)} + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases} \quad (8)$$

**Приклад 1.** Зінтегрувати рівняння:

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}.$$

*Розв'язання.* За теоремою про структуру розв'язку ЛНДР маємо:

$$y_{з.н.} = y_{з.о.} + y_{ч.н.}$$

Розглянемо відповідне однорідне рівняння  $y''+y=0$ ,  
 складемо його характеристичне рівняння  $k^2+1=0$ ,  $k^2=-1$ ,  
 та знайдемо корені  $k_{1,2}=\pm i$ ,  $\alpha=0$ ,  $\beta=1$ .

Запишемо відповідні частинні розв'язки однорідного рівняння

$$y_1=\cos x, \quad y_2=\sin x,$$

$$\text{знайдемо їх похідні } y_1'=-\sin x, \quad y_2'=\cos x,$$

Тоді, згідно з формулою (11) загальний розв'язок має вигляд

$$y_{з.о.}=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

Частинний розв'язок даного неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_{ч.н.}=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x.$$

Для знаходження  $C_1'(x)$ ,  $C_2'(x)$  розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x+C_2'(x)\sin x=0 \\ -C_1'(x)\sin x+C_2'(x)\cos x=\frac{1}{\cos x}, \end{cases}$$

$$W=\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}=\cos^2 x+\sin^2 x=1,$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix}=-\frac{\sin x}{\cos x}=-\operatorname{tg}x, \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ \sin x & \frac{1}{\cos x} \end{vmatrix}=1,$$

$$\text{звідки } C_1'(x)=-\operatorname{tg}x \Rightarrow C_1(x)=-\int \operatorname{tg}x dx = \ln|\cos x|,$$

$$C_2'(x)=1 \Rightarrow C_2(x)=\int dx = x.$$

Запишемо частинний розв'язок даного рівняння

$$y_{ч.н.}=\cos x \ln|\cos x|+x\sin x.$$

Тоді, загальний розв'язок даного неоднорідного рівняння має вигляд

$$y_{з.н.}=C_1\cos x+C_2\sin x+\cos x \ln|\cos x|+x\sin x. \quad \blacksquare$$

## Приклад 2,

Розв'язати задачу Коші:

$$y'' - y' = \frac{1}{1+e^x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

Розв'язання.  $y_{з.н.} = y_{з.о.} + y_{ч.н.}$ .

Складемо характеристичне рівняння відповідного однорідного рівняння

$$k^2 - k = 0, \quad k(k-1) = 0,$$

звідки  $k_1 = 0, \quad k_2 = 1$ .

Запишемо відповідні частинні розв'язки та їх похідні

$$y_1 = 1, \quad y_2 = e^x; \quad y_1' = 0, \quad y_2' = e^x.$$

Тоді, загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$y_{з.о.} = C_1 + C_2 e^x.$$

Згідно методу Лагранжа, частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_{ч.н.} = C_1(x) + C_2(x)e^x.$$

Для знаходження  $C_1'(x), C_2'(x)$  розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot 1 + C_2'(x) \cdot e^x = 0 \\ C_1'(x) \cdot 0 + C_2'(x) \cdot e^x = \frac{1}{1+e^x}, \end{cases} \quad \begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)e^x = 0 \\ C_2'(x)e^x = \frac{1}{1+e^x}. \end{cases}$$

Звідки  $C_2'(x) = \frac{1}{e^x(1+e^x)}$ ;  $C_1'(x) = -C_2'(x)e^x = -\frac{1}{1+e^x}$ ;

$$C_1(x) = -\int \frac{dx}{1+e^x} = -\int \frac{(1+e^x)-e^x}{1+e^x} dx = -\int \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right) dx = -x + \int \left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) dx = -x + \int \frac{d(1+e^x)}{1+e^x} = -x + \ln(1+e^x),$$

$$\begin{aligned} C_2(x) &= \int \frac{dx}{e^x(1+e^x)} = \int \frac{1+e^x - e^x}{(1+e^x)e^x} dx = \\ &= \int \frac{1+e^x}{(1+e^x)e^x} dx - \int \frac{e^x}{(1+e^x)e^x} dx = \int e^{-x} dx - \int \frac{dx}{1+e^x} = \\ &= -e^{-x} - x + \ln(1+e^x). \end{aligned}$$

Запишемо частинний розв'язок даного рівняння

$$y_{ч.н.} = -x + \ln(1+e^x) + (-e^{-x} - x + \ln(1+e^x))e^x.$$

Тоді, загальний розв'язок даного неоднорідного рівняння має вигляд

$$y_{з.н.} = C_1 + C_2 e^x - x + \ln(1+e^x) + e^x(-e^{-x} - x + \ln(1+e^x)).$$

Для знаходження довільних сталих  $C_1, C_2$  використаємо початкові

умови. Оскільки

$$\begin{aligned}
y_{3.н.}' &= C_2 e^x - 1 + \frac{e^x}{1+e^x} + e^x(e^{-x} - x + \ln(1+e^x)) + e^x(e^{-x} - 1 + \frac{e^x}{1+e^x}) = \\
&= C_2 e^x - 1 + \frac{e^x}{1+e^x} - 1 - x e^x + e^x \ln(1+e^x) + 1 - e^x + \frac{e^{2x}}{1+e^x}, \\
\text{то } &\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 + \ln 2 + \ln 2 - 1 \\ 2 = C_2 - 1 + \frac{1}{2} + \ln 2 - 1 + \frac{1}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 - 2\ln 2; \\ C_2 = 3 - \ln 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} C_1 = 2 - 2\ln 2 - (3 - \ln 2); \\ C_2 = 3 - \ln 2 \end{cases};$$

$$\text{звідки } \begin{cases} C_1 = -1 - \ln 2 \\ C_2 = 3 - \ln 2 \end{cases}.$$

Знаходимо шуканий розв'язок

$$y(x) = -1 - \ln 2 + e^x(3 - \ln 2) - x + \ln(1+e^x) - x e^x + e^x \ln(1+e^x) - 1. \quad \blacksquare$$

### **3.4.2. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння вищих порядків (ЛНДР) зі сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною**

Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$L(y) \equiv y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_n y = f(x), \quad (9)$$

де  $p_1, p_2, \dots, p_n$  - сталі дійсні числа,  $f(x)$  - неперервна на інтервалі  $(a; b)$  функція.

При знаходженні частинного розв'язку рівняння (9) методом Лагранжа часто доводиться виконувати громіздкі операції, пов'язані зі знаходженням інтегралів та розв'язуванням системи (8).

Якщо права частина рівняння (9) має **спеціальний вигляд**, а саме

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x), \quad (10)$$

де  $P_n(x)$ ,  $Q_m(x)$  - многочлени з дійсними коефіцієнтами степенів  $n$  і  $m$  відповідно,  $\alpha$  і  $\beta$  - дійсні числа, то частинний розв'язок можна знайти простішим методом, ніж метод Лагранжа, не вдаючись до операції інтегрування. Такий метод називають **методом невизначених коефіцієнтів**. Розглянемо його для різних виглядів правої частини.

1. Нехай права частина має вигляд  $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$ ,

де  $P_n(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \dots + b_{n-1}x + b_n$ , ( $n \geq 0$ ) – многочлен з дійсними коефіцієнтами,  $\alpha$  – дійсне число. Тоді

а) якщо число  $\alpha$  не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок рівняння (9) шукають у вигляді

$$y_{ч.н.} = A_n(x)e^{\alpha x}, \quad (11)$$

де  $A_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$  – многочлен  $n$ -го степеня з невизначеними коефіцієнтами. Тобто частинний розв'язок має ту ж структуру, що і права частина диференціального рівняння (9).

б) Якщо  $\alpha$  є коренем характеристичного рівняння кратності  $k$ , то частинний розв'язок рівняння (9) шукають у вигляді

$$y_{ч.н.} = x^k A_n(x)e^{\alpha x},$$

де  $A_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$  – многочлен  $n$ -го степеня з невизначеними коефіцієнтами.

Коефіцієнти  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$  знаходяться шляхом підстановки виразу (11) і його похідних  $y_{ч.н.}', y_{ч.н.}'', \dots, y_{ч.н.}^{(n-1)}, y_{ч.н.}^{(n)}$  в (9) і прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях  $x$ . В результаті чого отримаємо систему  $n+1$  лінійних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів многочлена  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ .

**Приклад 3.** Зінтегрувати рівняння:

$$2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1.$$

*Розв'язання.* Загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_{з.н.} = y_{з.о.} + y_{ч.н.}$$

Розглянемо відповідне однорідне рівняння  $2y'' + 5y' = 0$ ,

складемо його характеристичне рівняння  $2k^2 + 5k = 0$ ,  $k(2k+5) = 0$ ,

та знайдемо його корені  $k_1 = 0$ ,  $2k+5 = 0$ ,

$$k_2 = -5/2.$$

Запишемо відповідні частинні розв'язки однорідного рівняння

$$y_1 = e^{0x} = 1, \quad y_2 = e^{-5/2x}.$$

Тоді, загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$y_{з.о.} = C_1 + C_2 e^{-5/2x}.$$

Знаходимо частинний розв'язок неоднорідного рівняння за правою частиною  $f(x) = 5x^2 - 2x - 1$ . У цьому разі  $P_n(x) = 5x^2 - 2x - 1$ ,  $n=2$ -многочлен другого степеня;  $\alpha = 0$  є однократним коренем характеристичного рівняння,  $k=1$  (випадок б). Тому частинний розв'язок даного неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_{ч.н.} = xA_2(x) = x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx,$$

де  $A, B, C$  - невизначені коефіцієнти.

Знайдемо похідні  $y'_{ч.н.} = 3Ax^2 + 2Bx + C$ ,  $y''_{ч.н.} = 6Ax + 2B$ ,

підставимо  $y''_{ч.н.}$ ,  $y'_{ч.н.}$ ,  $y_{ч.н.}$  в задане рівняння:

$$2(6Ax + 2B) + 5(3Ax^2 + 2Bx + C) = 5x^2 - 2x - 1,$$

$$12Ax + 4B + 15Ax^2 + 10Bx + 5C = 5x^2 - 2x - 1.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях  $x$  в лівій і правій частинах виразу:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 15A = 5 \Leftrightarrow A = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \\ x & 12A + 10B = -2 \Leftrightarrow 10B = -2 - 12A = -2 - 12 \cdot \frac{1}{3} = -6 \\ & B = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5} \\ x^0 & 5C + 4B = -1 \Leftrightarrow 5C = -1 - 4B = -1 + 4 \cdot \frac{3}{5} = \frac{7}{5} \Rightarrow C = \frac{7}{25}. \end{array}$$

Отже, частинний розв'язок заданого рівняння

$$y_{ч.н.} = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{25}x.$$

Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y_{з.н.} = C_1 + C_2 e^{-5/2x} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{25}x. \blacksquare$$

#### **Приклад 4**. Зінтегрувати рівняння:

$$y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3.$$

*Розв'язання.* Загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_{з.н.} = y_{з.о.} + y_{ч.н.}$$

Запишемо характеристичне рівняння, яке відповідає однорідному диференціальному рівнянню:  $k^3 - 4k^2 + 5k - 2 = 0$ . Цілі корені рівняння

шукаємо серед дільників вільного члена 2:  $\pm 1; \pm 2$ . Скористаємося схемою Горнера.

	1	-4	5	-2
1	1	-3	2	0

Отже,  $(k-1)(k^2-3k+2)=0$ .

Звідси  $k_1=1, k_2=1, k_3=2$  - корені характеристичного рівняння,

$y_1=e^x, y_2=e^x x, y_3=e^{2x}$  - відповідні частинні розв'язки однорідного рівняння. Тоді, загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$y_{3.0} = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{2x}.$$

Знаходимо частинний розв'язок неоднорідного рівняння з правою частиною  $f(x)=2x+3$ . У цьому разі  $P_n(x)=2x+3, n=1$ - многочлен першого степеня;  $\alpha=0$  не є коренем характеристичного рівняння, (випадок а). Тому частинний розв'язок даного неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_{ч.н.} = Ax + B,$$

де  $A, B$  - невизначені коефіцієнти.

Враховуючи, що  $y'_{ч.н.} = A, y''_{ч.н.} = 0, y'''_{ч.н.} = 0$ , підставимо  $y'''_{ч.н.}, y''_{ч.н.}, y'_{ч.н.}, y_{ч.н.}$  у задане рівняння, тоді дістанемо

$$5A - 2Ax - 2B = 2x + 3.$$

Після прирівнювання коефіцієнтів з відповідними степенями  $x$ , матимемо

$$\begin{array}{l|l} x & -2Ax = 2 \Rightarrow A = -1, \\ x^0 & 5A - 2B = 3 \Rightarrow -2B = 8 \Rightarrow B = -4. \end{array}$$

Отже, частинний розв'язок заданого рівняння  $y_{ч.н.} = -x - 4$ .

Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y_{3.н} = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{2x} - x - 4. \blacksquare$$

**Приклад 5.** Зінтегрувати рівняння:

$$y'' - 3y' + 2y = e^x(3 - 4x).$$

*Розв'язання.* Загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_{з.н.} = y_{з.о.} + y_{ч.н.}$$

Запишемо характеристичне рівняння, яке відповідає однорідному диференціальному рівнянню:  $k^2 - 3k + 2 = 0$ .

Його корені  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = 1$ ,

$y_1 = e^{2x}$ ,  $y_2 = e^x$  - відповідні частинні розв'язки однорідного рівняння. Тоді, загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$y_{з.о.} = C_1 e^{2x} + C_2 e^x .$$

Знаходимо частинний розв'язок неоднорідного рівняння з правою частиною  $f(x) = e^x (3 - 4x)$ .

У цьому разі  $P_n(x) = 3 - 4x$ ,  $n=1$ - многочлен першого степеня,  $\alpha=1$  - однократний корінь характеристичного рівняння (випадок б). Тому частинний розв'язок даного неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_{ч.н.} = e^x (Ax + B) x = e^x (Ax^2 + Bx).$$

Знайдемо похідні

$$y'_{ч.н.} = e^x (Ax^2 + Bx) + e^x (2Ax + B) = e^x (Ax^2 + Bx + 2Ax + B),$$

$$y''_{ч.н.} = e^x (Ax^2 + Bx + 2Ax + B) + e^x (2Ax + B + 2A) =$$

$$= e^x (Ax^2 + Bx + 4Ax + 2B + 2A),$$

підставимо  $y''_{ч.н.}$ ,  $y'_{ч.н.}$ ,  $y_{ч.н.}$  в задане рівняння:

$$e^x (Ax^2 + Bx + 4Ax + 2B + 2A) - 3 e^x (Ax^2 + Bx + 2Ax + B) + 2 e^x (Ax^2 + Bx) = e^x (3 - 4x),$$

$$Ax^2 + Bx + 4Ax + 2B + 2A - 3Ax^2 - 3Bx - 6Ax - 3B + 2Ax^2 + 2Bx = 3 - 4x,$$

$$-2Ax + 2A - B = 3 - 4x.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях  $x$  в лівій і правій частинах виразу:

$$\begin{array}{l|l} x & -2A = -4 \Leftrightarrow A = 2, \\ x^0 & -B + 2A = 3 \Leftrightarrow B = 2A - 3 = 1. \end{array}$$

Отже, частинний розв'язок заданого рівняння має вигляд:

$$y_{ч.н.} = e^x (2x^2 + x).$$

Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y_{з.н.} = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + e^x (2x^2 + x) . \blacksquare$$

2. Нехай права частина має вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x),$$

де  $P_n(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \dots + b_{n-1} x + b_n$ , ( $n \geq 0$ ),

$Q_m(x) = d_0 x^m + d_1 x^{m-1} + d_2 x^{m-2} + \dots + d_{m-1} x + d_m$ , ( $m \geq 0$ ), – многочлени з дійсними коефіцієнтами,  $\alpha$  – дійсне число.

Нехай  $n \geq m$ . Розглянемо випадки:

а) якщо  $\alpha + \beta i$  не є корінь характеристичного рівняння, то

$$y_{ч.н.} = e^{\alpha x} (A_n(x) \cos \beta x + B_n(x) \sin \beta x);$$

б) якщо  $\alpha + \beta i$  є корінь характеристичного рівняння кратності  $k$ , то

$$y_{ч.н.} = e^{\alpha x} x^k (A_n(x) \cos \beta x + B_n(x) \sin \beta x),$$

де  $A_n(x)$ ,  $B_n(x)$  – многочлени  $n$ -го степеня з невизначеними коефіцієнтами.

**Приклад 6.** Зінтегрувати рівняння:  $2y'' + 5y' = 29x \sin x$ .

*Розв'язання.* Загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_{з.н.} = y_{з.о.} + y_{ч.н.}$$

Запишемо характеристичне рівняння, яке відповідає однорідному диференціальному рівнянню:

$$2y'' + 5y' = 0 \Leftrightarrow 2k^2 + 5k = 0,$$

$$k(2k + 5) = 0.$$

Його корені  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = -\frac{5}{2}$ .

$y_1 = e^{0x} = 1$ ,  $y_2 = e^{-\frac{5}{2}x}$  – відповідні частинні розв'язки однорідного рівняння.

Тоді, загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$y_{з.о.} = C_1 + C_2 e^{-5/2x}.$$

Знаходимо частинний розв'язок неоднорідного рівняння з правою частиною  $f(x) = 29x \sin x$ . У цьому разі  $P_n(x) = 29x$ ,  $n = 1$  – многочлен першого степеня,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ ,  $\alpha \pm \beta i = \pm i$  – не корінь характеристичного

рівняння (випадок а). Тому частинний розв'язок даного неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_{ч.н.} = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x.$$

Знайдемо похідні

$$\begin{aligned} y'_{ч.н.} &= A\cos x - (Ax + B)\sin x + C\sin x + (Cx + D)\cos x = \\ &= (A + Cx + D)\cos x + (C - Ax - B)\sin x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y''_{ч.н.} &= C\cos x - (A + Cx + D)\sin x - A\sin x + (C - Ax - B)\cos x = \\ &= (2C - Ax - B)\cos x - (2A + Cx + D)\sin x. \end{aligned}$$

Підставимо  $y''_{ч.н.}$ ,  $y'_{ч.н.}$ ,  $y_{ч.н.}$  в задане рівняння:

$$\begin{aligned} 2(2C - Ax - B)\cos x - 2(2A + Cx + D)\sin x + 5(A + Cx + D)\cos x + \\ + 5(C - Ax - B)\sin x = 29x\sin x, \end{aligned}$$

$$(4C - 2Ax - 2B + 5A + 5Cx + 5D)\cos x - (4A + 2Cx + 2D - 5C + 5Ax + 5B)\sin x = 29x\sin x.$$

Прирівняємо коефіцієнти при  $\cos x$ ,  $\sin x$  і  $x\cos x$ ,  $x\sin x$  в лівій і правій частинах виразу:

$$\begin{array}{l|l} \cos x & 4C - 2B + 5A + 5D = 0 \\ \sin x & -4A - 2D + 5C - 5B = 0 \\ x\cos x & -2A + 5C = 0 \quad / \quad -5 \\ x\sin x & -2C - 5A = 29 \quad / \quad 2 \end{array}$$

$$\begin{cases} 10A - 25C = 0 \\ -10A - 4C = 58 \end{cases}$$

$$-29C = 58,$$

$$C = -2, A = -5;$$

$$\begin{cases} -2B + 5D = 33 \\ -5B - 2D = -10 \end{cases} \quad \begin{cases} -10B + 25D = 165 \\ 10B + 4D = 20 \end{cases}$$

$$29D = 185, \quad D = \frac{185}{29},$$

$$B = -\frac{16}{29}.$$

Частинний розв'язок заданого рівняння має вигляд:

$$y_{ч.н.} = \left(-5x - \frac{16}{29}\right)\cos x + \left(-2x + \frac{185}{29}\right)\sin x.$$

Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y_{з.н.} = C_1 + C_2 e^{-\frac{5}{2}x} + \left(-5x - \frac{16}{29}\right) \cos x + \left(-2x + \frac{185}{29}\right) \sin x. \blacksquare$$

**Приклад 7.** Зінтегрувати рівняння  $y^{IV} - y = \cos x$ .

*Розв'язання.*

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_{з.н.} = y_{з.о.} + y_{ч.н.}$$

Знайдемо загальний розв'язок одорідного рівняння  $y^{IV} - y = 0$ .

Характеристичне рівняння  $k^4 - 1 = 0$ ,

$$(k^2 - 1)(k^2 + 1) = 0, \text{ має корені}$$

$$k_{1,2} = \pm 1, \quad k_{3,4} = \pm i.$$

$y_1 = e^x$ ,  $y_2 = e^{-x}$ ,  $y_3 = e^{0x} \cos x = \cos x$ ,  $y_4 = e^{0x} \sin x = \sin x$  - відповідні частинні розв'язки однорідного рівняння. Тоді, загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$y_{з.о.} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

Знаходимо частинний розв'язок неоднорідного рівняння з правою частиною  $f(x) = \cos x$ . У цьому разі  $P_n(x) = 1$ ,  $n=0$ - многочлен нульового степеня,  $\alpha=0$ ,  $\beta=1$ ,  $\alpha \pm \beta i = \pm i$  - однократний корінь характеристичного рівняння (випадок б). Тому частинний розв'язок даного неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_{ч.н.} = (A \cos x + B \sin x)x.$$

Знайдемо похідні

$$y'_{ч.н.} = (-A \sin x + B \cos x)x + A \cos x + B \sin x,$$

$$y''_{ч.н.} = (-A \cos x - B \sin x)x - A \sin x + B \cos x - A \sin x + B \cos x = \\ = (-A \cos x - B \sin x)x - 2A \sin x + 2B \cos x,$$

$$y'''_{ч.н.} = (A \sin x - B \cos x)x - A \cos x - B \sin x - 2A \cos x - 2B \sin x = \\ = (A \sin x - B \cos x)x - 3A \cos x - 3B \sin x,$$

$$y^{IV}_{ч.н.} = (A \cos x + B \sin x)x + A \sin x - B \cos x + 3A \sin x - 3B \cos x = \\ = (A \cos x + B \sin x)x + 4A \sin x - 4B \cos x,$$

і підставимо їх в задане рівняння:

$$(A \cos x + B \sin x)x + 4A \sin x - 4B \cos x - (A \cos x + B \sin x)x = \cos x,$$

$$4A\sin x - 4B\cos x = \cos x.$$

Прирівняємо коефіцієнти при  $\cos x$ ,  $\sin x$  в лівій і правій частинах виразу:

$$\cos x : -4B=1 \Leftrightarrow B=-\frac{1}{4},$$

$$\sin x : 4A=0 \Leftrightarrow A=0.$$

Частинний розв'язок заданого рівняння має вигляд:

$$y_{ч.н.} = -x\sin x.$$

Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y_{з.н.} = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x - x\sin x. \blacksquare$$

**Приклад 8.** Зінтегрувати рівняння  $y'' - 4y' + 4y = 8(x^2 + e^{2x} + \sin 2x)$ .

*Розв'язання.*

Функція  $f(x) = 8(x^2 + e^{2x} + \sin 2x)$  є сумою трьох різних функцій спеціального вигляду:  $f_1(x) = 8x^2$ ,  $f_2(x) = 8e^{2x}$  і  $f_3(x) = 8\sin 2x$ . Згідно теореми про суперпозицію розв'язків, загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_{з.н.} = y_{з.о.} + y_{ч.н.1} + y_{ч.н.2} + y_{ч.н.3},$$

де  $y_{ч.н.1}$  - частинний розв'язок рівняння  $y'' - 4y' + 4y = 8x^2$ ,

$y_{ч.н.2}$  - частинний розв'язок рівняння  $y'' - 4y' + 4y = 8e^{2x}$ ,

$y_{ч.н.3}$  - частинний розв'язок рівняння  $y'' - 4y' + 4y = 8\sin 2x$ .

Характеристичне рівняння  $k^2 - 4k + 4 = 0$  має корені  $k_{1,2} = 2$ , тоді  $y_1 = e^{2x}$ ,  $y_2 = xe^{2x}$  - відповідні частинні розв'язки однорідного рівняння і загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$y_{з.о.} = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}.$$

Для  $f_1(x) = 8x^2$  маємо  $P_n(x) = 8x^2$ ,  $n=2$  - многочлен другого степеня,  $\alpha=0$  - не корінь характеристичного рівняння (випадок а). Тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння  $y'' - 4y' + 4y = 8x^2$  шукаємо у вигляді

$$y_{ч.н.1} = Ax^2 + Bx + C.$$

Знайдемо похідні  $y'_{ч.н.1} = 2Ax + B$ ,  $y''_{ч.н.1} = 2A$  і підставимо їх в рівняння

$$2A - 4(2Ax + B) + 4Ax^2 + 4Bx + 4C = 8x^2,$$

$$2A - 8Ax - 4B + 4Ax^2 + 4Bx + 4C = 8x^2.$$

Прирівнюючи коефіцієнти у лівій та правій частинах, при однакових степенях  $x$ , маємо

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 4A = 8 \Rightarrow A = 2, \\ x & -8A + 4B = 0 \Rightarrow 4B = 16 \Rightarrow B = 4, \\ x^0 & 2A - 4B + 4C = 0 \Rightarrow 4C = 4B - 2A \Rightarrow C = 3. \end{array}$$

Отже,  $y_{ч.н.1} = 2x^2 + 4x + 3$ .

Для  $f_2(x) = 8e^{2x}$  маємо  $P_n(x) = 8$ ,  $n=0$  - многочлен нульового степеня,  $\alpha=2$  - двократний корінь характеристичного рівняння (випадок б). Тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння  $y'' - 4y' + 4y = 8e^{2x}$  шукаємо у вигляді  $y_{ч.н.2} = Ax^2e^{2x}$ . Знайдемо похідні

$$y'_{ч.н.2} = 2Axe^{2x} + 2Ax^2e^{2x} = e^{2x}(2Ax + 2Ax^2),$$

$$y''_{ч.н.2} = 2e^{2x}(2Ax + 2Ax^2) + e^{2x}(2A + 4Ax) = e^{2x}(8Ax + 4Ax^2 + 2A)$$

та підставимо їх в рівняння:

$$8Ax + 4Ax^2 + 2A - 8Ax - 8Ax^2 + 4Ax^2 = 8.$$

Звідси отримаємо  $2A = 8 \Rightarrow A = 4$ .

Отже,  $y_{ч.н.2} = 4x^2e^{2x}$ .

Для  $f_3(x) = 8\sin 2x$  маємо  $P_n(x) = 8$ ,  $n=0$  - многочлен нульового степеня,  $\alpha=0$ ,  $\beta=2$ ,  $\alpha \pm \beta i = \pm 2i$  - не корінь характеристичного рівняння (випадок а). Тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння  $y'' - 4y' + 4y = 8\sin 2x$  шукаємо у вигляді  $y_{ч.н.3} = A\cos 2x + B\sin 2x$ .

Знайдемо похідні

$$y'_{ч.н.3} = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x,$$

$$y''_{ч.н.3} = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x,$$

та підставимо їх в рівняння

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + 8A\sin 2x - 8B\cos 2x + 4A\cos 2x + 4B\sin 2x = 8\sin 2x,$$

$$8A\sin 2x - 8B\cos 2x = 8\sin 2x.$$

Прирівняємо коефіцієнти при  $\cos 2x$ ,  $\sin 2x$  в лівій і правій частинах виразу:

$$\begin{array}{l} \sin 2x \mid 8A = 8 \Rightarrow A = 1, \\ \cos 2x \mid -8B = 0 \Rightarrow B = 0. \end{array}$$

Отже,  $y_{\text{ч.н.3}} = \cos 2x$ .

Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y_{\text{з.н.}} = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + 2x^2 + 4x + 3 + 4x^2 e^{2x} + \cos 2x. \blacksquare$$

### Завдання для самостійної та аудиторної роботи

1. Знайти загальні та частинні розв'язки ЛОДР.

1.  $y'' + y' - 2y = 0$ .

2.  $y'' - 2y' - y = 0$ .

3.  $y'' - 4y' = 0$ .

4.  $y'' - 9y = 0$ .

5.  $y'' + y = 0$ .

6.  $y'' + 6y' + 13y = 0$ .

7.  $3y'' - 2y' - 8y = 0$

8.  $4y'' - 8y' + 5y = 0$ .

9.  $y'' - 2y' + y = 0$ .

10.  $4y'' - 20y' + 25y = 0$ .

11.  $y''' + 9y' = 0$ .

12.  $y^{IV} - 3y''' = 0$ .

13.  $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ .

14.  $y''' - 5y'' + 9y' - 5y = 0$ .

15.  $y'' - 4y' + 3y = 0$ ;

$y(0) = 6, \quad y'(0) = 10$ .

16.  $y'' + 4y' + 29y = 0$ ;

$y(0) = 0, \quad y''(0) = 15$ .

17.  $y''' = -y'$ ;

$y(0) = 2, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -1$ .

18.  $y''' - y' = 0$ ;

$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$ .

### Відповіді

1.  $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$ .

2.  $y = C_1 e^{(1+\sqrt{2})x} + C_2 e^{(1-\sqrt{2})x}$ .

3.  $y = C_1 e^{4x} + C_2$ .

4.  $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$ .

5.  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ .

6.  $y = e^{-3x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$ .

$$7. y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{\frac{-4x}{3}}.$$

$$8. y = e^x (C_1 \cos \frac{x}{2} + C_2 \sin \frac{x}{2}).$$

$$9. y = e^x (C_1 + C_2 x).$$

$$10. y = (C_1 + C_2 x) e^{2,5x}.$$

$$11. y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + C_3.$$

$$12. y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{3x}.$$

$$13. y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x.$$

$$14. y = C_1 e^x + e^x (C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x).$$

$$15. y = 4e^x + 2e^{3x}.$$

$$16. y = 3e^{-2x} \sin 5x.$$

$$17. y = 1 + \cos x.$$

$$18. y = 3e^{-2x} \sin 5x.$$

2. Знайти загальні розв'язки диференціальних рівнянь методом Лагранжа

$$1. y'' + y = \operatorname{ctg} x.$$

$$2. y'' + y = \frac{1}{\sin x}.$$

$$3. y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

$$4. y'' + 2y' + y = \frac{e^x}{x^2}.$$

$$5. y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^3}.$$

$$6. y'' + y = -\operatorname{ctg}^2 x.$$

$$7. y'' - y' = e^{2x} \sin(e^x).$$

$$8. y'' - y' = e^{2x} \cos(e^x).$$

$$9. y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}.$$

$$10. y'' - y' = e^{2x} \sqrt{1 - e^{2x}}.$$

**Відповіді**

$$1. y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \sin x \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|.$$

$$2. y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x \cos x + \sin x \ln |\sin x|.$$

$$3. y = \left( -\frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} \ln(e^x + 1) + C_1 \right) e^{-x} + \left( \frac{1}{2} \ln \frac{e^x}{e^x + 1} + C_2 \right) e^x.$$

$$4. y = e^x (C_1 - \ln x + C_2 x - 1).$$

$$5. y = \left( C_1 + C_2 x + \frac{1}{2x} \right) e^{-2x}.$$

$$6. y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + 2.$$

$$7. y = C_1 + C_2 e^x - \sin e^x.$$

$$8. y = C_1 e^x - \cos e^x + C_2.$$

$$9. y = e^x (C_1 + C_2 x - \ln \sqrt{2x} + 1 + x \operatorname{arctg} x).$$

$$10. y = \frac{1}{2} e^x (\arcsin e^x + e^x \sqrt{1 - e^{2x}} + C_1) + \frac{1}{3} \sqrt{(1 - e^{2x})^3} + C_2.$$

**3. Знайти загальні та частинні розв'язки ДР методом невизначених коефіцієнтів**

$$1. y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3.$$

$$2. y'' - 2y' + 2y = 2x.$$

$$3. y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}.$$

$$4. y'' - 3y' + 2y = e^x(3 - 4x).$$

$$5. y'' - 7y' + 6y = \sin x.$$

$$6. y'' + 2y' + 5y = -\frac{17}{2} \cos 2x.$$

$$7. 2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1.$$

$$8. y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}.$$

$$9. y'' + y = \cos x.$$

$$10. 5y''' - 6y' + 5y = e^{\frac{3}{5}x} \sin \frac{4}{5}x.$$

$$11. y'' + 4y' + 3y = x + e^{2x}.$$

$$12. y'' - 4y' + 4y = 8(x^2 + e^{2x} + \sin 2x).$$

$$13. y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3.$$

$$14. y^{IV} + y''' = x^2 - 1.$$

$$15. 3y''' + 5y'' + y' - y = -8e^{-x}.$$

$$16. y^{IV} - 8y' = xe^{2x}.$$

$$17. y^{IV} - 8y'' + 16y = \cos x.$$

$$18. y^{IV} - y = 5e^x \sin x.$$

$$19. y'' - y' = 2(1 - x);$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

$$20. y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3, 2.$$

$$21. y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3); \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2.$$

$$22. y'' + y' - 12y = (16x + 22)e^{4x}; \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 5.$$

$$23. y'' + y = -\sin 2x; \quad y(\pi) = y'(\pi) = 1.$$

$$24. y'' - 2y' + 37y = 36e^x \cos 6x; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 6.$$

$$25. y''' + 3y'' - 4y = -6e^{-2x}; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = -2.$$

$$26. y^{IV} + 8y'' + 16y = \cos x; \quad y(0) = \frac{1}{9}, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -\frac{1}{9}, \quad y'''(0) = 0.$$

## Відповіді

$$1. y = (C_1 + C_2 x)e^{3x} + \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}.$$

$$2. y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + x + 1.$$

$$3. y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 3x e^{2x}.$$

$$4. y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + e^x(2x^2 + x).$$

$$5. y = C_1 e^{6x} + C_2 e^x + \frac{5}{74} \sin x + \frac{7}{74} \cos x.$$

$$6. y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) - \frac{1}{2} \cos 2x - 2 \sin 2x.$$

$$7. y = C_1 + C_2 e^{-\frac{5}{2}x} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{25} \cos x.$$

$$8. y = e^{2x}(C_1 + C_2 x) + \frac{3}{2}x^2 e^{2x}.$$

$$9. y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}x \sin x.$$

$$10. y = e^{\frac{3}{5}x}(C_1 \cos \frac{4}{5}x + C_2 \sin \frac{4}{5}x) - \frac{1}{8}x e^{\frac{3}{5}x} \cos \frac{4}{5}x.$$

$$11. y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{3}x + \frac{1}{15}e^{2x} - \frac{4}{9}.$$

$$12. y = e^{2x}(C_1 + C_2 x) + 2x^2 + 4x + 3 + 4x^2 e^{2x} + \cos 2x.$$

$$13. y = (C_1 + C_2 x)e^x + C_3 e^{2x} - x - 4.$$

$$14. y = \frac{1}{60}x^5 - \frac{1}{2}x^3 + C_1 x^2 + C_2 x + C_3 + C_4 \cos x + C_5 \sin x.$$

$$15. y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + C_3 e^{\frac{1}{3}x} + x^2 e^{-x}.$$

$$16. y = C_1 + C_2 e^{2x} + e^{-x}(C_3 \cos \sqrt{3}x + C_4 \sin \sqrt{3}x) + \frac{1}{48}e^{2x}(x^2 - 2x).$$

$$17. y = (C_1 + C_2 x) \cos 2x + (C_3 + C_4 x) \sin 2x + \frac{1}{9} \cos x.$$

$$18. y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - e^x \sin x.$$

$$19. y = e^x + x^2.$$



**Приклад 1.** Розв'язати систему ДР

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 5y \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases}$$

■ Необхідно знайти  $y(t)$ ,  $x(t)$ . Продиференціюємо, наприклад, друге рівняння (тоді будемо виключати змінну  $x$ ):

$$y'' = 2x' - y',$$

далі замість  $x'$  в ньому напишемо праву частину з першого рівняння системи:

$$y'' = 2(x - 5y) - y'.$$

$x$  виражаємо з другого рівняння:

$$x = \frac{1}{2}(y' + y)$$

і підставляємо в останнє рівняння:

$$y'' = 2\left(\frac{1}{2}(y' + y) - 5y\right) - y', \text{ звідки маємо}$$

$$y'' = y' + y - 10y - y' \Rightarrow$$

$y'' + 9y = 0 \Rightarrow k^2 + 9 = 0$  - відповідне характеристичне рівняння, яке має корені  $k_{1,2} = \pm 3i$ . Тоді

$$y(t) = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t. \text{ Знайдемо } x(t)$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}(y' + y) = \frac{1}{2}(-3C_1 \sin 3t + 3C_2 \cos 3t + C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t) = \\ &= \frac{C_1}{2}(\cos 3t - 3\sin 3t) + \frac{C_2}{2}(3\cos 3t + \sin 3t). \text{ Отже} \end{aligned}$$

$$x(t) = \frac{C_1}{2}(\cos 3t - 3\sin 3t) + \frac{C_2}{2}(3\cos 3t + \sin 3t),$$

$$y(t) = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t \blacksquare$$

**Приклад 2.** Розв'язати систему ДР

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$$

$$\blacksquare \frac{dy}{dt} = x + 3y \Rightarrow y'' = x' + 3y'.$$

З першого рівняння  $x' = x - y$ , тоді

$$y'' = x - y + 3y',$$

виражаємо  $x$  з другого рівняння  $x = y' - 3y \Rightarrow$

$$y'' = y' - 3y - y + 3y' \Rightarrow$$

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Складаємо відповідне характеристичне рівняння  $k^2 - 4k + 4 = 0 \Rightarrow$

$$k_{1,2} = 2 \Rightarrow$$

$y(t) = e^{2t}(C_1 + C_2t)$ . Знайдемо  $x(t)$ ,

$$x(t) = y' - 3y = 2e^{2t}(C_1 + C_2t) + e^{2t}C_2 = e^{2t}(2C_1 + (2t + 1)C_2), \text{ маємо}$$

$$x(t) = e^{2t}(2C_1 + (2t + 1)C_2),$$

$$y(t) = e^{2t}(C_1 + C_2t). \blacksquare$$

**Приклад 3.** Розв'язати систему ДР

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = x + e^t + e^{-t} \end{cases}$$

$$\blacksquare \frac{dy}{dt} = x + e^t + e^{-t} \Rightarrow y'' = x' + e^t - e^{-t} \Rightarrow y'' = y + e^t - e^{-t} \Rightarrow$$

$y'' - y = e^t - e^{-t}$ . Розглядаємо відповідне однорідне рівняння

$$y'' - y = 0 \Rightarrow k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm 1 \Rightarrow$$

загальний розв'язок однорідного рівняння  $y_{3.0.} = C_1e^t + C_2e^{-t}$ .

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння  $y'' - y = e^t - e^{-t}$  шукаємо у вигляді  $y_{\text{ч.н.}} = y_{(\text{ч.н.})_1} + y_{(\text{ч.н.})_2} = Ate^t + Bte^{-t}$ . Щоб знайти коефіцієнти,

підставляємо  $y_{\text{ч.н.}}$  в  $y'' - y = e^t - e^{-t}$ .

$$(y' = Ae^t + Ate^t + Be^{-t} - Bte^{-t},$$

$$y'' = Ae^t + Ae^t + Ate^t - Be^{-t} - Be^{-t} + Bte^{-t}) \Rightarrow$$

$$Ae^t + Ae^t + Ate^t - Be^{-t} - Be^{-t} + Bte^{-t} - Ate^t - Bte^{-t} = e^t - e^{-t} \Rightarrow$$

$$2Ae^t - 2Be^{-t} = e^t - e^{-t},$$

прирівнюємо коефіцієнти справа і зліва при  $e^t$  і  $e^{-t}$ :

$$2A = 1, -2B = -1 \Rightarrow A = 1/2, B = 1/2,$$

$$y_{\text{ч.н.}} = y_{(\text{ч.н.})_1} + y_{(\text{ч.н.})_2} = \frac{t}{2}(e^t + e^{-t}).$$

І загальний розв'язок неоднорідного рівняння буде

$$y_{3.H.} = y_{3.o.} + y_{ч.H.} = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + \frac{t}{2}(e^t + e^{-t}) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + t \cdot cht.$$

$$x(t) = \frac{dy}{dt} - e^t - e^{-t} = C_1 e^t - C_2 e^{-t} + cht + t \cdot sht - e^t - e^{-t} =$$

$$C_1 e^t - C_2 e^{-t} + cht + t \cdot sht - 2cht, \text{ остаточно маємо:}$$

$$x(t) = C_1 e^t - C_2 e^{-t} - cht + t \cdot sht,$$

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + t \cdot cht. \blacksquare$$

**Приклад 4.** Розв'язати систему ДР

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 3y + 20\sin 2t \end{cases}$$

$$\blacksquare \frac{dy}{dt} = 3x - 3y + 20\sin 2t \Rightarrow y'' = 3x' - 3y' + 40\cos 2t \Rightarrow$$

$$y'' = 3(-x + y) - 3y' + 40\cos 2t \Rightarrow y'' + 3x - 3y + 3y' = 40\cos 2t \Rightarrow$$

$$(3x = y' + 3y - 20\sin 2t), y'' + y' + 3y - 20\sin 2t - 3y + 3y' = 40\cos 2t \Rightarrow$$

$$y'' + 4y' = 20\sin 2t + 40\cos 2t.$$

$$y'' + 4y' = 0 \Rightarrow k^2 + 4k = 0 \Rightarrow k_1 = 0, k_2 = -4 \Rightarrow y_{3.o.} = C_1 + C_2 e^{-4t}.$$

$$y_{ч.H.} = A\sin 2t + B\cos 2t.$$

$$y' = 2A\cos 2t - 2B\sin 2t, y'' = -4A\sin 2t - 4B\cos 2t.$$

Щоб знайти коефіцієнти  $A, B$ , підставляємо  $y_{ч.H.}$  та його похідні в

$$y'' + 4y' = 20\sin 2t + 40\cos 2t:$$

$$-4A\sin 2t - 4B\cos 2t + 4(2A\cos 2t - 2B\sin 2t) = 20\sin 2t + 40\cos 2t.$$

$$\sin 2t: -4A - 8B = 20,$$

$$\cos 2t: -4B + 8A = 40 \Rightarrow A = 3, B = -4 \Rightarrow$$

$$y_{ч.H.} = 3\sin 2t - 4\cos 2t,$$

$$y_{3.H.} = y_{3.o.} + y_{ч.H.} = C_1 + C_2 e^{-4t} + 3\sin 2t - 4\cos 2t.$$

$$3x = y' + 3y - 20\sin 2t \Rightarrow$$

$$3x = -4C_2 e^{-4t} + 6\cos 2t + 8\sin 2t + 3(C_1 + C_2 e^{-4t} + 3\sin 2t - 4\cos 2t) - 20\sin 2t \Rightarrow 3x = 3C_1 - C_2 e^{-4t} - 3\sin 2t - 6\cos 2t \Rightarrow$$

$$x = C_1 - \frac{1}{3}C_2 e^{-4t} - \sin 2t - 2\cos 2t, \text{ остаточно маємо:}$$

$$x = C_1 - \frac{1}{3}C_2e^{-4t} - \sin 2t - 2\cos 2t ,$$

$$y = C_1 + C_2e^{-4t} + 3\sin 2t - 4\cos 2t. \blacksquare$$

### Завдання для самостійної та аудиторної роботи

Розв'язати системи ДР

$$1. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$$

$$2. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y \\ \frac{dy}{dt} = 4x - y. \end{cases}$$

$$3. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 8y - x \\ \frac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$$

$$4. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - 7x \\ \frac{dy}{dt} = -2x - 5y. \end{cases}$$

$$5. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 7x + y \\ \frac{dy}{dt} = -x + 5y + 14e^{6t}. \end{cases}$$

$$6. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 8y \\ \frac{dy}{dt} = -5x - 2y + \frac{1}{4}(18 + 33t - 18t^2). \end{cases}$$

$$7. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - 5y + 16(\sin 2t - \cos 2t) \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$$

$$8. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y \\ \frac{dy}{dt} = -6x - 4y + (6t + 1)e^{3t}. \end{cases}$$

### Відповіді

- $x = e^t(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t),$   
 $y = e^t(C_1 \sin 3t - C_2 \cos 3t).$
- $x = e^t(C_1 + C_2 t),$   
 $y = e^t(2C_1 - C_2 + 2C_2 t).$
- $x = 2C_1 e^{3t} - 4C_2 e^{-3t},$   
 $y = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t}.$
- $x = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t),$   
 $y = e^{-6t}(C_1 + C_2) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t.$
- $x = e^{6t}(C_1 + C_2 t + 7t^2),$   
 $y = e^{6t}(C_2 - C_1 - C_2 t + 14t - 7t^2).$
- $x = C_1 \cos 6t + C_2 \sin 6t - t^2 + 2t + 1),$   
 $y = \frac{1}{8}((6C_2 - 2C_1) \cos 6t - (6C_1 + 2C_2) \sin 6t + 2t^3 - 3t^2 - 4t).$
- $x = e^{4t}((C_1 + 2C_2) \cos 2t) + (C_2 - 2C_1) \sin 2t) + 2 \cos 2t - 3 \sin 2t$   
 $y = e^{4t}(C_1 \cos 2t) + C_2 \sin 2t) + \sin 2t.$
- $x = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t} + (t - 1)e^{3t},$   
 $y = -6C_1 e^{-3t} - C_2 e^{2t} + e^{3t}.$

## ВАРІАНТИ ТИПОВИХ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

### Варіант 1

1. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння з відокремлюваними змінними:

$$y' \sin x - y \cos x = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

2. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$2x^3 y' = y(2x^2 - y^2).$$

3. Зінтегрувати лінійне диференціальне рівняння:

$$y' - 2xy = 2xe^{x^2}.$$

4. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$y' + 2y/x = 3x^2 y^{4/3}.$$

5. Зінтегрувати диференціальне рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$yy'' = (y')^2.$$

6. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + 4y' + 3y = 0.$$

7. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1)  $y''' - y'' = 6x + 5$ ;

2)  $y'' + 2y' + y = (6x + 5)e^x$ ;

3)  $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 5x$ .

8. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' + 3y' + 2y = \cos e^x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

## Варіант 2

1. Зінтегрувати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$xydy + (1 + y^2)dx = 0.$$

2. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$(x - y)dx + (x + y)dy = 0.$$

3. Зінтегрувати лінійне диференціальне рівняння:

$$y' + 2y = e^{-x}.$$

4. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$xy^2y' = x^2 + y^3.$$

5. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$y'' = xe^x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

6. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

7. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1)  $y''' - 13y'' + 12y' = x - 1;$

2)  $y'' - 4y' + 8y = (6x - 11)e^{-x};$

3)  $y'' + 2y' = 10e^x(\sin x + \cos x).$

8. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' + 4y' + 5y = e^{-2x} / \cos x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

### Варіант 3

1. Зінтегрувати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0.$$

2. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0.$$

3. Зінтегрувати лінійне диференціальне рівняння:

$$(x + y^2)dy = ydx .$$

4. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$xydy = (y^2 + x)dx .$$

5. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$yy'' + y'^2 = 1, \quad y(0) = y'(0) = 1.$$

6. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y^{IV} - 3y''' = 0.$$

7. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1)  $y''' - y' = 3x^2 - 2x + 1;$

2)  $y'' + 2y' = (12x + 16)e^x;$

3)  $y'' + y = -4 \cos x - 2 \sin x .$

8. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \sin^2 x / \cos x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

#### Варіант 4

1. Зінтегрувати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$ydy/dx + x = 1.$$

2. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$(x + 2y)dx - xdy = 0.$$

10. Зінтегрувати лінійне диференціальне рівняння:

$$xy' + (x + 1)y = 3x^2 e^{-x}.$$

11. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$xy^2 y' = x^2 + y^3.$$

12. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$y'' y^3 = 1, \quad y(1/2) = y'(1/2) = 1.$$

13. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0.$$

14. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1)  $7y'''' - y'' = 12x;$

2)  $y'' + y = (4x + 9)e^{2x};$

3)  $y'' + y = 2 \cos 3x - 3 \sin 3x.$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' + y' = e^x \cos e^x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

## Варіант 5

1. Зінтегрувати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$y' = 10^{x+y}.$$

2. Розв'язати задачу Коші для однорідного диференціального рівняння:

$$xy' = xe^{y/x} + y, \quad y(1) = 0.$$

3. Зінтегрувати лінійне диференціальне рівняння:

$$xy' + y = x(2 \ln x + 1).$$

4. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$y' = y^4 \cos x + y \operatorname{tg} x.$$

5. Зінтегрувати диференціальне рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$y' y'' = -x.$$

6. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

7. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1)  $y''' + y' = 5x^2 - 1$ ;

2)  $y'' + 6y' + 13y = -4xe^x$ ;

3)  $y'' + 2y' + 5y = -2 \sin x$ .

8. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' + 2y' + 2y = \frac{e^{-x}}{\cos x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

## Варіант 6

1. Зінтегрувати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$e^{-y} (1 + dy/dx) = 1.$$

2. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$y' = \frac{x + y}{x - y}.$$

3. Зінтегрувати лінійне диференціальне рівняння:

$$2x(x^2 + y)dx = dy.$$

4. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$y' + 2y = y^2 e^x.$$

5. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$y''(x+2)^5 = 1, \quad y(-1) = 1/12, \quad y'(-1) = 1/4.$$

6. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y''' - 2y' + y = 0.$$

7. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1)  $3y' + y''' = 6x - 1$ ;

2)  $y'' + 2y' + 5y = (8x + 4)e^x$ ;

3)  $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 4x$ .

8. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \sin^2 x / \cos x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

## Варіант 7

1. Зінтегрувати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$y' - 2xy^2 = 2xy.$$

2. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$(x^2 + y^2)dx - xydy = 0.$$

3. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння:

$$y' \cos x - y \sin x = 2x, \quad y(0) = 0.$$

4. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$y' - y \cos x = y^2 \cos x.$$

5. Зінтегрувати диференціальне рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$y''' - y''^3 = 0.$$

6. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + y = 0.$$

7. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1)  $y''' - y' = x^2 + x$ ;

2)  $y'' + 2y' + y = (18x + 21)e^{2x}$ ;

3)  $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 3x$ .

8. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' - 5y' + 6y = e^{4x} \cos e^x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

## Варіант 8

1. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння з відокремлюваними змінними:

$$xy' + y = y^2, \quad y(1) = 0,5.$$

2. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$y' = y/x + \cos y/x.$$

3. Зінтегрувати лінійне диференціальне рівняння:

$$x^2 y' + xy + 1 = 0.$$

4. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$2y' \ln x + y/x = y^{-1} \cos x.$$

5. Зінтегрувати диференціальне рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$y'' = (y')^2.$$

6. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y''' + 27y = 0.$$

7. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1)  $y'' + 2y' + 2y = 1 + x$ ;

2)  $y'' + 3y' + 2y = (2x - 5)e^x$ ;

3)  $y'' - 4y' + 8y = e^x (5 \sin x - 3 \cos x)$ ;

8. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' - 2y' + 2y = e^x \sin^2 x / \cos x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

## Варіант 9

1. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння з відокремлюваними змінними:

$$xy' + y = y^2, \quad y(1) = 0,5.$$

2. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$y' = y/x + \cos y/x.$$

3. Зінтегрувати лінійне диференціальне рівняння:

$$x^2 y' + xy + 1 = 0.$$

4. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$2y' \ln x + y/x = y^{-1} \cos x.$$

5. Зінтегрувати диференціальне рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$y'' = (y')^2.$$

6. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y''' + 27y = 0.$$

7. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1)  $y'' + 2y' + 2y = 1 + x$ ;

2)  $y'' + 3y' + 2y = (2x - 5)e^x$ ;

3)  $y'' - 4y' + 8y = e^x (5 \sin x - 3 \cos x)$ ;

8. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' - 2y' + 2y = e^x \sin^2 x / \cos x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

## Варіант 10

1. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння з відокремлюваними змінними:

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}, \quad y(2) = 0.$$

2. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$xyy' = y^2 + 2x^2.$$

3. Зінтегрувати лінійне диференціальне рівняння:

$$(xy + e^x)dx - xdy = 0.$$

4. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$y' - 2ye^x = 2\sqrt{y}e^x.$$

5. Зінтегрувати диференціальне рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$xy'' = y' \ln y' / x.$$

6. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' - 4y = 0.$$

7. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1)  $y'' + 8y' = 8x$ ;

2)  $y'' - 4y' + 4y = (18x - 21)e^{-x}$ ;

3)  $y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x$ .

8. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3x} \cos e^x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

## Варіант 11

1. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння з відокремлюваними змінними:

$$y' \operatorname{ctgx} + y = 2 \quad y(0) = -1.$$

2. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$xy' \ln(y/x) = x + y \ln(y/x).$$

3. Зінтегрувати лінійне диференціальне рівняння:

$$xy' - 2y = 2x^4.$$

4. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$y' + 2xy = y^2 e^{x^2}.$$

5. Зінтегрувати диференціальне рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$xy'' = (1 + 2x^2)y'.$$

6. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:  $y''' - 2y'' = 0$ .

7. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1)  $y'' - y' + y = x^3 + 6$ ;

2)  $y'' - y' = (2x + 5)e^{2x}$ ;

3)  $y'' + y = 2 \cos 7x + 3 \sin 7x$ .

8. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' - 2y' + 2y = e^x / \cos x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

## Варіант 12

1. Зінтегрувати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0, \quad y(0) = 1.$$

2. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'.$$

3. Зінтегрувати лінійне диференціальне рівняння:

$$(2x + 1)y' = 4x + 2y.$$

4. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$(x^3 + e^y)y' = 3x^2.$$

5. Зінтегрувати диференціальне рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$y''' = x.$$

6. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + 2y' - 5y = 0.$$

7. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1)  $y'' - 2y' = x^2 - 1$ ;

2)  $y'' - 2y' + y = (3x + 7)e^{2x}$ ;

3)  $y'' + 2y' = -2e^x (\sin x + \cos x)$ .

8. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' + y = \sin^2 x / \cos x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

### Варіант 13

1. Зінтегрувати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\sqrt{y^2 + 1} dx = xy dy.$$

2. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$xy' \sin(y/x) + x = y \sin(y/x).$$

3. Зінтегрувати лінійне диференціальне рівняння:

$$x^2 + xy' = y.$$

4. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$3xy^2 y' - 2y^3 = x^2.$$

5. Зінтегрувати диференціальне рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$y'' = 1 + (y')^2.$$

6. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + 3y' = 0.$$

7. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1)  $y'' - 8y' + 7y = 14$ ;

2)  $y'' - 2y' = (1 - 2x)e^x$ ;

3)  $y'' - 4y' + 4y = -e^{-2x} \sin 6x$ .

8. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' - y' = e^{2x} \cos e^x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

## Варіант 14

1. Зінтегрувати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$xydx + (x + 1)dy = 0.$$

2. Розв'язати задачу Коші для однорідного диференціального рівняння:

$$xy' - y + x \operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right) = 0, \quad y(1) = \frac{\pi}{2}.$$

3. Зінтегрувати лінійне диференціальне рівняння:

$$y' + y \operatorname{tg} x = \sec x.$$

4. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$y' + 2xy = 2xy^2.$$

5. Зінтегрувати диференціальне рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$xy'' + y' = 0.$$

6. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння яке зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' - 7y' + 10y = 0.$$

7. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1)  $y'' - 4y' + 4y = x^2$ ;

2)  $y'' - 3y' + 2y = (15x - 12)e^{-x}$ ;

3)  $y'' + 2y' = 4e^x (\sin x + \cos x)$ .

8. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' + y = 1/\cos x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

## Варіант 15

1. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння з відокремлюваними змінними:

$$(xy^2 + x)dx + (x^2y - y)dy = 0, \quad y(0) = 1.$$

2. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$xy' \cos y / x = y \cos y / x - x.$$

3. Зінтегрувати лінійне диференціальне рівняння:

$$y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x.$$

4. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$y' = \frac{4}{x} y + x\sqrt{y}.$$

5. Зінтегрувати диференціальне рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$y'' + \frac{2}{1-y} (y')^2 = 0.$$

6. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' - 4y' + 2y = 0.$$

7. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1)  $y^{IV} + 2y''' + y'' = x^2 + x - 1;$

2)  $y'' + y' - 6y = (20x + 14)e^{-2x};$

3)  $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 6x.$

8. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' + 8y' + 20y = 4e^{-4x} \sin^2 2x / \cos 2x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

## Варіант 16

1. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння з відокремлюваними змінними:

$$(1 + e^x)yy' = e^x, \quad y(0) = 1.$$

2. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$yy' = 2y - x.$$

3. Зінтегрувати лінійне диференціальне рівняння:

$$(1 + x^2)y' + y = \operatorname{arctg}x.$$

4. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$xy' + y = y^2 \ln x.$$

5. Зінтегрувати диференціальне рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$y'' = 2x \ln x.$$

6. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' - 2y' + 2y = 0.$$

7. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1)  $y^{IV} + y''' = 12x + 6;$

2)  $y'' - 6y' + 9y = 4(1 - x)e^{-x};$

3)  $y'' + y = 2 \cos 4x + 3 \sin 4x.$

8. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' + 6y' + 8y = 4 \cos e^{2x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

## Варіант 17

1. Зінтегрувати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$y' \operatorname{tg} x = y.$$

2. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$x dy = (y + \sqrt{x^2 + y^2}) dx.$$

3. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння:

$$xy' + y - e^x = 0, \quad y(1) = 2.$$

4. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$2xy' - y^2 + x = 0.$$

5. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$y^3 y'' - 4y^4 + 4 = 0, \quad y(0) = \sqrt{2}, \quad y'(0) = \sqrt{2}.$$

6. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + 4y' + 13y = 0.$$

7. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1)  $y''' - 6y'' + 9y' = 3x - 1;$

2)  $y'' - 6y' = (16x + 24)e^x;$

3)  $y'' + 2y' + 5y = 10 \cos x.$

8. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' + 8y' + 20y = 4e^{-4x} / \cos 2x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

## Варіант 18

1. Зінтегрувати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$3e^x \operatorname{tg} y dx + (1 - e^x) \sec^2 y dy = 0.$$

2. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$y' = e^{y/x} + y/x.$$

3. Зінтегрувати лінійне диференціальне рівняння:

$$y' \cos x + y = 1 - \sin x.$$

4. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$y' + y = x\sqrt{y}.$$

5. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$y'' = (y')^2 - y, \quad y(1) = -\frac{1}{4}, \quad y'(1) = \frac{1}{2}.$$

6. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

7. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1)  $y'''' + 3y'' + 2y' = x^2 + 2x + 3;$

2)  $y'' - 5y' = (8x + 6)e^x;$

3)  $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 8x.$

8. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' - 8y' + 20y = 4e^{4x} \sin^2 2x / \cos 2x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

## Варіант 19

1. Зінтегрувати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$xy' = 1 - x^2.$$

2. Розв'язати задачу Коші для однорідного диференціального рівняння:

$$xy' = y(1 + \ln y/x), \quad y(1) = e^{-1/2}.$$

3. Зінтегрувати лінійне диференціальне рівняння:

$$y' + 2xy = xe^{-x^2}.$$

4. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$x^2 y^2 y' + xy^3 = 1.$$

5. Зінтегрувати диференціальне рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$y'' - 2\operatorname{ctg}x y' = \sin^3 x.$$

6. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' - 4y' + 8y = 0.$$

7. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$1) y^{IV} + 2y''' + y'' = 2 - 3x^2;$$

$$2) y'' + 2y' + 5y = (8x - 14)e^{-x};$$

$$3) y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 4x.$$

8. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' + 2y' = 4e^{2x} \cos e^{2x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

## Варіант 20

1. Зінтегрувати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$xy' - y = y^3.$$

2. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$(4x - 3y)dx + (2y - 3x)dy = 0.$$

3. Зінтегрувати лінійне диференціальне рівняння:

$$xy' - y = x^2 \cos x.$$

4. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$xy' - 4y - x^2 \sqrt{y} = 0.$$

5. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$xy'' + y' + x = 0.$$

6. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

7. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1)  $y'' + y''' = x$ ;

2)  $y'' + 6y' + 13y = (16x + 20)e^x$ ;

3)  $y'' + 2y' = 3e^x (\sin x + \cos x)$ .

8. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' - 8y' + 20y = 4e^{4x} / \cos 2x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

## Варіант 21

1. Зінтегрувати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\operatorname{tg} x \sin^2 y dx + \cos^2 x \operatorname{ctg} y dy = 0.$$

2. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$2x^2 y' = x^2 + y^2.$$

3. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння:

$$y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}, \quad y(0) = 0.$$

4. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$y' + 2xy = 2xy^2.$$

5. Зінтегрувати диференціальне рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$(y'')^2 = y'.$$

6. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y''' - y'' - y' + y = 0.$$

7. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1)  $y''' - 2y'' = 3x^2 + x - 4$ ;

2)  $y'' - 4y' + 4y = -e^x(8x + 4)$ ;

3)  $y'' - 4y' + 8y = e^x(2 \sin x - \cos x)$ .

8. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' + 4y' + 8y = 4e^{-2x} \sin^2 2x / \cos 2x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

## Варіант 22

1. Зінтегрувати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$y^2 \sin x dx + \cos^2 x \ln y dy = 0.$$

2. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$x^2 dy = (y^2 - xy + x^2) dx.$$

3. Зінтегрувати лінійне диференціальне рівняння:

$$y' + \frac{2y}{x} = x^3.$$

4. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$x dy = (x^5 y^2 - 2y) dx.$$

5. Розв'язати диференціальне рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$xy'' = y'.$$

6. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$$

7. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1)  $y^{(4)} + 2y''' + y'' = 12x^2 - 6x;$

2)  $y'' + 2y' = (8x - 12)e^x;$

3)  $y'' + 2y' + 5y = \cos 2x.$

8. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' - 10y' + 24y = 4e^{2x} \cos e^{-4x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

## Варіант 23

1. Зінтегрувати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$e^x \sin^3 y + (1 + e^{2x})y' \cos y = 0.$$

2. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$xy' = y(\ln y - \ln x).$$

3. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння:

$$y' - \frac{y}{1-x^2} - 1 - x = 0, \quad y(0) = 0.$$

4. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$y'x + y = -xy^2.$$

5. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$y'' = \frac{1}{x}, \quad y(1) = y'(1) = 1.$$

6. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$4y'' + 4y' + y = 0.$$

7. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1)  $y''' - y'' = 4x^2 - 3x + 2;$

2)  $y'' + y = 4xe^x;$

3)  $y'' + y = 2 \cos 7x - 3 \sin 7x.$

8. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' + 4y' + 8y = 4e^{-2x} / \cos 2x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

## Варіант 24

1. Зінтегрувати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$2x\sqrt{1-y^2} = y'(1+x^2).$$

2. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$(x-y)dx + xdy = 0.$$

3. Зінтегрувати лінійне диференціальне рівняння:

$$(2e^y - x)y' = 1.$$

4. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$y' - xy = -y^3 e^{-x^2}.$$

5. Зінтегрувати диференціальне рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$2y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}; \quad y(1) = \frac{\sqrt{2}}{5}, \quad y'(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

6. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

7. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1)  $y''' + 3y'' + 2y' = 3x^2 + 2x$ ;

2)  $y'' - 4y' + 2y = e^{-x}(32x - 32)$ ;

3)  $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 5x$ .

8. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' - 4y' + 8y = 4e^{2x} \sin^2 x / \cos 2x; \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

## Варіант 25

1. Зінтегрувати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$e^y (1 + x^2) dy - 2x(1 + e^y) dx = 0.$$

2. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$xy' = y + x \cos^2 y / x.$$

3. Зінтегрувати лінійне диференціальне рівняння:

$$y' x \ln x - y = 3x^2 \ln^2 x.$$

4. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння Бернуллі:

$$y' + \frac{3x^2 y}{x^3 + 1} = y^2 (x^3 + 1) \sin x, \quad y(0) = 1.$$

5. Зінтегрувати диференціальне рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$y''' = x + \cos x.$$

6. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y^{IV} - y = 0.$$

7. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1)  $y^V - y^{IV} = 2x + 3;$

2)  $y'' + 5y' + 6y = -4xe^x;$

3)  $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x} \sin 4x.$

8. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' - 6y' + 8y = 4e^{6x} \cos e^{2x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

## Варіант 26

1. Зінтегрувати диференціальне рівняння з відокремленими змінними:

$$y' = a^{x+y} \quad (a > 0, a \neq 1).$$

2. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$xy' = \sqrt{y^2 - x^2} + y.$$

3. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння:

$$y' + y \cos x = \cos x, \quad y(0) = 1.$$

4. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$y' - 2y \operatorname{tg} x + y^2 \sin x = 0.$$

5. Зінтегрувати диференціальне рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$xy'' = xy' + y'.$$

6. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y''' - 8y = 0.$$

7. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1)  $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = 2x$ ;

2)  $y'' - 5y' + 6y = (20 - 16x)e^{-x}$ ;

3)  $y'' + 2y' = 6e^x (\sin x + \cos x)$ .

8. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' - 4y' + 8y = \frac{4e^{2x}}{\cos 2x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

## Варіант 27

1. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння з відокремлюваними змінними:

$$y \ln y dx + x dy = 0, \quad y(1) = 1.$$

2. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$(y + \sqrt{xy}) dx = x dy.$$

3. Зінтегрувати лінійне диференціальне рівняння:

$$(2x - y^2) y' = 2y.$$

4. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння Бернуллі:

$$y' + y = e^{x/2} \sqrt{y}, \quad y(0) = \frac{9}{4}.$$

5. Зінтегрувати диференціальне рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x.$$

6. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + 4y = 0.$$

7. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1)  $y''' - y'' = 6x^2 + 3x;$

2)  $y'' - 7y' + 10y = (1 - 2x)e^{-x};$

3)  $y'' - 4y' + 8y = e^x (3 \sin x + 5 \cos x).$

8. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' + 4y = 4 \sin^2 2x / \cos 2x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

## Варіант 28

1. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння з відокремлюваними змінними:

$$x\sqrt{1-y^2} dx + y\sqrt{1-x^2} dy = 0, \quad y(0) = 1.$$

2. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$xy' - y = (x + y) \ln \frac{x + y}{x}.$$

3. Зінтегрувати лінійне диференціальне рівняння:

$$xy' - 2y = x^3 \cos x.$$

4. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$4xy' + 3y = -e^x x^4 y^5.$$

5. Зінтегрувати диференціальне рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$yy'' - y'(1 + y') = 0.$$

6. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + 2y' + 10y = 0.$$

7. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$1) y''' - 5y'' + 6y' = 6x^2 + 2x - 5;$$

$$2) y'' + 4y = (7 - 6x)e^x;$$

$$3) y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos x.$$

8. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' - 2y' = 4e^{4x} \cos e^{2x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

## Варіант 29

1. Зінтегрувати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0.$$

2. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$(x^2 + y^2)y' = 2xy.$$

3. Зінтегрувати лінійне диференціальне рівняння:

$$y' + 2xy = 2xe^{-x^2}.$$

4. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$y' + \frac{2y}{x} = 2\frac{\sqrt{y}}{\cos^2 x}.$$

5. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$(1+x^2)y'' - 2xy' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3.$$

6. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' - 4y' + 5y = 0.$$

7. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1)  $y''' - 13y'' + 12y' = 18x^2 - 39;$

2)  $y'' + 2y' + 10y = (4 - 8x)e^x;$

3)  $y'' + 2y' + 5y = -17 \sin 2x.$

8. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' + 4y = 4/\cos 2x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

### Варіант 30

1. Зінтегрувати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$(1 + y^2)dx = xdy.$$

2. Зінтегрувати однорідне диференціальне рівняння:

$$y^2 + x^2 y' = xy y'.$$

3. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння:

$$y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^3 x}, y(0) = 0.$$

4. Зінтегрувати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$y' - \frac{y}{x-1} = \frac{y^2}{x-1}.$$

5. Зінтегрувати диференціальне рівняння, яке допускає зниження порядку:

$$(1 - x^2)y'' - xy' = 2.$$

6. Зінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$2y'' - 5y' + 2y = 0.$$

7. Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1)  $y''' - 5y'' + 6y' = (x - 1)^2$ ;

2)  $y'' + 4y' + 3y = (9x + 15)e^x$ ;

3)  $y'' + y = 2 \cos 5x + 3 \sin 5x$ .

8. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' + 4y' + 5y = \frac{e^{-2x} \sin^2 x}{\cos x}, y(0) = y'(0) = 0.$$

## Література

1. Дубовик В. П. Вища математика : навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : А.С.К., 2005. – 648 с. : іл. – Бібліогр.: с. 632-633. – (Університет. б-ка). – ISBN 966-539-320-0.
2. Вища математика. Збірник задач : навч. посіб. / [В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П. Вовкодав та ін.]; за ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. – К. : А.С.К., 2004. – 480 с. : іл. – (Університет. б-ка). – ISBN 966-319-036-1.
3. Грималюк В. П. Вища математика : навч. посіб. Ч. 1 / Грималюк В. П., Кухарчук М. М., Ясінський В. В. – К. : Віпол, 2004. – 376 с. : іл. 324. – Бібліогр.: с. 370. – (Університет. б-ка). – ISBN 966-622-044-X.
4. Герасимчук В.С. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах. Невизначений, визначений та невласні інтеграли. Звичайні диференціальні рівняння. Прикладні задачі/ В.С. Герасимчук, Г.С. Васильченко, В.І. Кравцов. – К.: Книги України ЛТД, 2010. –470с. – ISBN 978-966-2331-05-9.
5. Івасишен С.Д. Диференціальні рівняння: Методи та застосування: навч. посібник/ С.Д. Івасишен, В.П. Лавренчук, П.П. Настасієв, І.І. Дрінь. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2010.–288с. - ISBN 978-966-423-135-7.
6. Васильченко І.П. та ін. Вища математика: основні означення, приклади і задачі. Навч посібник: У двох книгах. Книга 2/ І.П. Васильченко, В.Я. Данилов, А.І. Лобанов, Є.Ю. Таран. – друге видання зі змінами. – К.: Либідь, 1994. – 280 с.
7. Шкіль М.І. Вища математика / М.І. Шкіль, Т.В. Колесник. – Київ: Вища шк., 1986. –512 с.
8. Стрижак Т.Г. Математичний аналіз: приклади і задачі: навч. посіб. / Стрижак Т.Г., Коновалова Н.Р. – К.: Либідь, 1995. – 240 с.
9. Зайцев Є. П. Вища математика: інтегральне числення функцій однієї та багатьох змінних, звичайні диференціальні рівняння, ряди: навч. посіб. / Є. П. Зайцев. – К.: Алерта, 2018. – 608 с.
10. Барановська Л.В. Інтегральне числення функцій однієї змінної Звичайні диференціальні рівняння : метод. вказівки до викон. типового розрахунку для студ. техн. спец. [Електронний ресурс] / Л. В. Барановська, В. В. Листопадова, вид. 2-е доп., перероб. – К. : НТУУ “КПІ”, 2014. – 112 с. – Режим доступу: <http://kmf.kpi.ua/>