Міністерство освіти і науки України

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Вища математика

Частина 1

Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія
Диференціальне числення

Курс лекцій

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за
спеціальностями 186 Видавництво та поліграфія, 133 Галузеве
машинобудування

Укладачі: О. І. Кушлик-Дивульська, Т. В. Авдєєва

Електронне мережеве навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2025

УДК 514.74, 514.742.2, 514.12 (514)
517, 517.2

Укладачі: *Кушлик-Дивульська Ольга Іванівна*, канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь ФМФ КПІ ім. Ігоря Сікорського;

Авдєєва Тетяна Василівна, старший викладач кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь ФМФ КПІ ім. Ігоря Сікорського.

Рецензент *Л. М. Іллічева, канд. фіз.-мат. наук, доцент,*
Національний авіаційний університет

Відповідальний редактор *В. М. Горбачук, доктор фіз.-мат. наук, професор,*
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 3 від 09.01.2025р.)
за поданням вченої ради фізико-математичного факультету
(протокол № 13 від 18.12.2024 р.)

Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення [Електронний ресурс] : курс лекцій: навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра спец. 186 Видавництво та поліграфія, 133 Галузеве машинобудування / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: О. І. Кушлик-Дивульська, Т. В. Авдєєва. – Електрон. текст. дані (1 файл: 5,5 Мбайт) . – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025. – 269 с.

Розглянуто основні поняття та теореми лінійної, векторної алгебри, аналітичної геометрії на площині та в просторі, диференціального числення функції однієї змінної. Теоретичний матеріал відповідає силабусу освітнього компонента «Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення» спеціальності 186 Видавництво та поліграфія. Наведено приклади розв'язання типових задач. Додатки містять довідковий матеріал основних тем.

Для студентів технічних спеціальностей Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського».

УДК 514.74, 514.742.2, 514.12 (514)
517, 517.2

Реєстр. № НП 24/25-188. Обсяг 14,0 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056
https://kpi.ua
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

Передмова

Навчальне видання відповідає силабусу освітнього компонента, який складено відповідно до освітньої програми підготовки бакалаврів «*Технології друкованих і електронних видань»,* яка розроблена з урахуванням Стандарту вищої освіти України: перший (бакалаврський) рівень, галузь знань 18 – Виробництво та технології, спеціальність 186 – Видавництво та поліграфія. Більшу частину викладеного матеріалу охоплено для спеціальності 133 «Галузеве машинобудування» освітніх програм «Комп'ютеризовані технології поліграфічних систем», «Комп'ютерно-інтегровані технології проектування обладнання хімічної інженерії», «Інжиніринг обладнання виробництва полімерних та будівельних матеріалів та виробів» подібних освітніх компонентів.

Ґрунтовне вивчення освітнього компонента «Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення» є одним з основних, що формують базову підготовку для вивчення навчальної дисципліни «Вища математика», зокрема, її розділу «Математичний аналіз».

Навчальне видання складається з трьох розділів, відповідно до кожної теми розділу подано лекції. Матеріал містить основні поняття, означення, формули, теореми (більшість з доведенням). Після кожної лекції є завдання для самоконтролю, як теоретичного, так і практичного характеру. За основу написання лекційного курсу укладачами взято відомі навчальні посібники [1], [2], [3], [4], також використано матеріал власних напрацювань [5], [6], [7]. Курс лекцій є більш повним виданням [5].

Навчальне видання призначено для студентів денної та заочної форми навчання технічних спеціальностей. Його можна використати для студентів економічних спеціальностей, також для підготовки до занять, заліків, екзаменів студентами всіх форм навчання, які вивчають подібний матеріал.

Розділ 1. Елементи лінійної алгебри і аналітичної геометрії

Тема 1.1. Елементи лінійної алгебри

Лекція 1. Визначники, їх властивості

1.1. Основні поняття.

1.2. Визначники другого і третього порядків, їх властивості.

1.3. Мінори та алгебраїчні доповнення.

1.4. Обчислення визначників вищих порядків.

1.5. Правила Крамера розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР).

1.1. Основні поняття

Предметом розгляду лінійної алгебри є теорія систем лінійних алгебраїчних рівнянь, які в загальному вигляді можна подати так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1.1}$$

Означення. Система (1.1) називається *системою m лінійних рівнянь з n невідомими* (*змінними*), де x_1, x_2, ..., x_n — невідомі; a_{ij} $\left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right)$ — коефіцієнти системи рівнянь; b_i $\left(i=\overline{1,m}\right)$ — вільні члени, або праві частини системи рівнянь. Якщо всі b_i=0 $\left(i=\overline{1,m}\right)$, то система лінійних рівнянь називається *однорідною*.

Розв'язком системи рівнянь (1.1) є множина таких чисел k_1, k_2, ..., k_n, у результаті підставляння яких замість відповідних невідомих x_1, x_2, ..., x_n в кожне з рівнянь системи (1.1) останні перетворюються на правильні числові рівності.

Якщо система рівнянь не має жодного розв'язку, вона називається *несумісною*, а якщо має хоча б один розв'язок — *сумісною*. Сумісна система рівнянь називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок, і *невизначеною*, якщо розв'язків більш як один.

1.2. Визначники другого і третього порядків, їх властивості

Розглянемо спочатку системи рівнянь, в яких кількість невідомих і кількість рівнянь рівні між собою, тобто $m=n$. Нехай, наприклад, $m=n=2$, тоді маємо систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

Означення. *Визначником другого порядку* називається *число*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Якщо $m=n=3$, то маємо систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими:

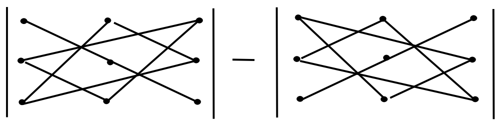
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Означення. *Визначником третього порядку* називається вираз (число):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \qquad (1.2)$$

Для запам'ятовування правила обчислення визначника третього порядку пропонуємо таку схему (правило трикутників):



Позначимо точками елементи визначника, тоді доданки зі знаком «плюс» − це добутки елементів a_{11}, a_{22}, a_{33}, розміщених на *головній діагоналі* визначника, і добутки елементів a_{13}, a_{21}, a_{32} і a_{12}, a_{23}, a_{31}, розміщених у вершинах трикутників, основи яких паралельні головній діагоналі. Зі знаком «мінус» беруться доданки, що є добутками елементів a_{13}, a_{22}, a_{31}, розміщених на *побічній* діагоналі визначника, та у вершинах трикутників, основи яких паралельні побічній діагоналі визначника a_{11}, a_{23}, a_{32} та a_{12}, a_{21}, a_{33}.

Запропонуємо ще одне правило обчислення визначника третього порядку (правило Саррюса).

У початковому визначнику за третім стовпцем запишемо ще раз перший і другий стовпці:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

Для знаходження визначника за цим правилом треба утворити зі знаком «плюс» алгебраїчну суму добутків елементів, розміщених на головній діагоналі визначника, і на діагоналях, паралельних їй, а зі знаком «мінус» — добутків елементів, розміщених на побічній діагоналі, та на діагоналях, паралельних їй.

Визначник

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

рядки якого є стовпцями попереднього визначника, називають *транспонованим* щодо визначника (1.2).

Властивості визначників

Властивість 1. Визначник не змінюється в результаті транспонування.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

З властивості 1 випливає, що будь-яке твердження, котре справджується для рядків визначника, справджується і для його стовпців, і навпаки.

Властивість 2. Якщо один із рядків (стовпців) визначника складається лише з нулів, то такий визначник дорівнює нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Властивість 3. Якщо поміняти місцями будь-які два рядки (стовпці) визначника, то його знак зміниться на протилежний.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Властивість 4. Визначник, який має два однакові рядки (стовпці), дорівнює нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Властивість 5. Якщо елементи будь-якого рядка (стовпця) визначника помножити на стале число *C*, то й визначник помножиться на *C*.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & Ca_{13} \\ a_{21} & a_{22} & Ca_{23} \\ a_{31} & a_{32} & Ca_{33} \end{vmatrix} = C \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

З останньої властивості випливає, що спільний множник елементів рядка можна виносити за знак визначника.

Властивість 6. Визначник, який має два пропорційні рядки (стовпці), дорівнює нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ Ca_{11} & Ca_{12} & Ca_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & Ca_{11} & a_{13} \\ a_{21} & Ca_{21} & a_{23} \\ a_{31} & Ca_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Властивість 7. Якщо всі елементи будь-якого рядка (стовпця) визначника можна подати у вигляді суми двох доданків, то такий визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких елементами цього рядка (стовпця) будуть відповідно перший доданок у першому визначнику і другий доданок у другому визначнику, а решта елементів будуть ті самі, що й у початковому визначнику.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & b_{33} \end{vmatrix}.$$

Властивість 8. Визначник не зміниться, якщо до елементів будь-якого рядка (стовпця) додати відповідні елементи довільного іншого рядка, попередньо помножені на деяке число.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} & a_{23}+ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

1.3. Мінори та алгебраїчні доповнення

Означення. *Мінором* деякого елемента визначника третього порядку називається визначник другого порядку, який отримується з визначника третього порядку шляхом викреслення рядка і стовпця, на перетині яких знаходиться даний елемент.

Так, наприклад, у визначнику $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ мінором елемента a_{32} є визначник $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$. Мінор елемента a_{ij} будемо позначати M_{ij}.

Означення. *Алгебраїчним доповненням елемента* a_{ij} називається його мінор, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$. Алгебраїчне доповнення будемо позначати A_{ij}.

Згідно з означенням маємо

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \tag{1.3}$$

Наприклад, алгебраїчним доповненням елемента a_{11} є число $A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, а алгебраїчним доповненням елемента a_{23} – число $A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

Запишемо розклад визначника Δ за елементами першого рядка у термінах алгебраїчних доповнень цих елементів:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \tag{1.4}$$

Доведемо справедливість формули (1.4) для будь-якого рядка (стовпця) визначника третього порядку.

Теорема 1. *Визначник третього порядку можна розкласти за елементами довільного його рядка або стовпця, іншими словами, визначник третього порядку дорівнює сумі добутків елементів довільного його рядка або стовпця на їх алгебраїчні доповнення, тобто*

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}, \ \ \Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31};$$

$$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}, \ \ \Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32};$$

$$\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}, \ \Delta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}. \qquad (1.5)$$

Доведення. Доведення всіх формул (1.5) (справедливість 1-ї випливає з означення) проводиться за однією і тією ж схемою. Доведемо, наприклад, рівність $\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$.

Маємо

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= -a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{22}a_{11}a_{33} - a_{22}a_{13}a_{31} - a_{23}a_{11}a_{32} + a_{23}a_{12}a_{31}.$$

Порівнюючи рівність із означенням визначника 3-го порядку, переконуємося у справедливості однієї із рівностей (1.5). Теорему доведено.

Теорема 2. *Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю, тобто*

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0, \qquad a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} + a_{31}A_{32} = 0,$$

$$a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} = 0, \qquad a_{11}A_{13} + a_{21}A_{23} + a_{31}A_{33} = 0,$$

$$a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} = 0, \qquad a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31} = 0,$$

$$a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} = 0, \qquad a_{12}A_{13} + a_{22}A_{23} + a_{32}A_{33} = 0,$$

$$a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} = 0, \qquad a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31} = 0,$$

$$a_{31}A_{21} + a_{32}A_{22} + a_{33}A_{23} = 0, \qquad a_{13}A_{12} + a_{23}A_{22} + a_{33}A_{32} = 0.$$

Доведення. Доведення проводиться за тією ж схемою, що і доведення теореми 1. Доведемо, наприклад, рівність $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0$.

Справді, $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = -a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$

$$= -a_{11}a_{12}a_{33} + a_{11}a_{13}a_{32} + a_{12}a_{11}a_{33} - a_{12}a_{13}a_{31} - a_{13}a_{11}a_{32} + a_{13}a_{12}a_{31} = 0.$$

1.4. Обчислення визначників вищих порядків

Означення. *Визначником n-го порядку* називається число Δ, яке дорівнює алгебраїчній сумі добутків елементів будь-якого рядка або стовпця на відповідні їм алгебраїчні доповнення:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{ij}A_{ij} + \dots + a_{in}A_{in} =$$

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{ij}A_{ij} + \dots + a_{nj}A_{nj}. \tag{1.6}$$

Алгебраїчні доповнення, що входять до формули (1.6), за якою обчислюють визначник, є, у свою чергу, мінорами, узятими з відповідними знаками, тобто визначниками (n–1)-го порядку. Отже, обчислення визначника n-го порядку зводиться до обчислення n визначників (n–1)-го порядку.

Зауваження. З формули (1.6) випливає, що за наявності у визначнику нульових елементів відповідні алгебраїчні доповнення обчислювати не потрібно.

Згідно з властивістю 8, яка справджується для визначників будь-якого порядку, можна визначник перетворити так, щоб у його рядках або стовпцях усі елементи, крім одного, дорівнювали нулю. Тоді, розклавши визначник за елементами цього рядка або стовпця, *зведемо задачу знаходження визначника n-го порядку до знаходження **одного** визначника (n–1)-го порядку.*

1.5. Правила Крамера розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)

Як було описано, система двох лінійних рівнянь з двома змінними має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.7}$$

а систему трьох лінійних рівнянь з трьома змінними записують у вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1.8}$$

Теорема. *Система лінійних алгебраїчних рівнянь (1.7) має єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли її головний визначник* $\Delta \neq 0$, *причому* $x_1,\ x_2$ *можна знайти за* ***формулами Крамера***:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta},$$

де $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{vmatrix}.$

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ – називається *головним визначником* системи (1.7), а $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}$ – *допоміжні визначники*, які дістають з визначника Δ заміною першого, другого стовпців відповідно стовпцем вільних членів.

Зауваження. 1. Формули Крамера мають місце і для систем більшого розміру.Так, для системи (1.8) мають вигляд:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta},$$

де $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ – головний визначник системи (1.8), а

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} -$$

також є допоміжними визначниками, які дістають з визначника Δ заміною першого, другого і третього стовпців відповідно стовпцем вільних членів.

Наслідок формул Крамера. Системи (1.7) і (1.8) мають:

а) єдиний розв'язок, коли $\Delta \neq 0$;

б) безліч розв'язків, коли $\Delta = \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = 0$ $(\Delta = \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \Delta_{x_3} = 0)$;

в) не мати жодного розв'язку, коли $\Delta = 0$ і хоча б один із визначників $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}$ $(\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3})$ відмінний від нуля.

2. Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1.9}$$

Теорема. *Якщо головний визначник* Δ, *складений із коефіцієнтів при невідомих системи* n *лінійних рівнянь з* n *невідомими (1.9), відмінний від нуля, то така система рівнянь має єдиний розв'язок (сумісна і визначена), який обчислюється за формулами:*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, \ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

де Δ *— головний визначник системи, який утворюється з коефіцієнтів при невідомих у лівій частині системи (1.9);* Δ_j *— визначник, який утворюється заміною j-го стовпця в головному визначнику на стовпець вільних членів***.**

Справедливий також наслідок, як і для систем (1.7), (1.8).

Завдання для самоконтролю

1. Дати означення визначників 2, 3-го порядку.

2. Сформулювати основні властивості визначників.

3. Записати системи лінійних алгебраїчних рівнянь 2, 3-го порядку.

4. Записати формули Крамера для систем 2, 3-го порядку.

5. Скориставшись правилом обчислення визначників 3-го порядку, довести властивості 1-8.

6. Скориставшись властивостями визначників, обчислити:

а) $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & ax_1+bx_2 \\ y_1 & y_2 & ay_1+by_2 \\ z_1 & z_2 & az_1+bz_2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} (a_1+b_1)^2 & a_1^2+b_1^2 & a_1+b_1 \\ (a_2+b_2)^2 & a_2^2+b_2^2 & a_2+b_2 \\ (a_3+b_3)^2 & a_3^2+b_3^2 & a_3+b_3 \end{vmatrix}$.

Відповідь. а) 0; б) 0; в) 0.

7. Розклавши визначник за рядком або стовпцем, що складається лише з букв, обчислити:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$.

Відповідь. а) $8a+15b+12c-19d$; б) $2a-8b+c+5d$; в) $abcd$.

8. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}$.

Відповідь. а) 90; б) 52; в) 100.

9. Розв’язати за правилом Крамера системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+11x_3+5x_4=2, \\ x_1+x_2+5x_3+2x_4=1, \\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4=-3, \\ x_1+x_2+3x_3+2x_4=-3, \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x_1+5x_2+4x_3+x_4=20, \\ x_1+3x_2+2x_3+x_4=11, \\ 2x_1+10x_2+9x_3+7x_4=40, \\ 3x_1+8x_2+9x_3+2x_4=37. \end{cases}$

Відповідь. а) $x_1=0$, $x_2=5$, $x_3=2$, $x_4=-7$; б) $x_1=1$, $x_2=x_3=2$, $x_4=0$.

Лекція 2. Матриці

2.1. Матриці та дії над ними.

2.2. Обернена матриця, її побудова.

2.3. Матричний метод розв'язування СЛАР.

2.1. Матриці та дії над ними

Означення. ***Матрицею*** розміру $m \times n$ називається сукупність елементів a_{ij}, розміщених у вигляді прямокутної таблиці, що має m рядків і n стовпчиків:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ або } A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Перший індекс кожного елемента вказує на номер рядка, в якому цей елемент розміщений, другий – на номер стовпця. Матриці позначають прописними буквами латинського алфавіту: $A, B, C, \ldots$. Використовують також більш компактний запис: $A_{ij(m \times n)}$.

Матриця називається ***числовою,*** якщо її елементи a_{ij} – числа; ***функціональною***, якщо елементи – функції. Ми будемо розглядати, в основному, числові матриці.

Матриці A і B мають однакові розміри, якщо у них однакова кількість рядків і однакова кількість стовпців. Матриці A і B вважаються ***рівними*** між собою, якщо вони мають однакові розміри, а їхні елементи, що знаходяться на однакових місцях, рівні між собою.

Матриця, в якої кількість рядків дорівнює кількості стовпців (тобто $m = n$), називається ***квадратною*** матрицею. Квадратна матриця порядку n має вигляд:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Елементи a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} утворюють головну діагональ матриці, а елементи a_{1n}, a_{2n-1},…, a_{n1} – побічну.

Деякі квадратні матриці мають назви. Зокрема, до них відносяться нульова, діагональна та одинична матриці.

Нульовою називається матриця, всі елементи якої − нулі.

Якщо всі елементи квадратної матриці, окрім розташованих на головній діагоналі, дорівнюють нулю, то в цьому випадку матриця називається ***діагональною***.

Якщо всі елементи діагональної матриці дорівнюють одиниці, то вона називається ***одиничною*** матрицею. Одинична матриця має вигляд:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицю, яку одержують із матриці A заміною її рядків відповідними стовпцями, називають ***транспонованою*** і позначають A^T. Транспонована матриця для матриці $A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ має вигляд:

$$A^T_{n\times m}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Означення. ***Сумою (різницею)*** матриць A *і* B називається матриця C, елементи якої

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij} \quad \left(c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}\right),$$

де a_{ij} та b_{ij} – відповідно елементи матриць *A* і *B*. При цьому записують

$$C = A + B \quad (C = A - B).$$

Додавати або віднімати можна тільки матриці однакових розмірів.

Означення. ***Добутком*** матриці *A* на число α називається матриця $C = \alpha A$ такого ж розміру, елементи якої

$$c_{ij} = \alpha\, a_{ij}\,,$$

де a_{ij} – елементи матриці *A*, тобто при множенні матриці на число треба всі елементи матриці помножити на це число.

Для довільних матриць *A, B, C* однакових розмірів і довільних чисел α та β справджуються рівності:

$$A + B = B + A;$$
$$(A + B) + C = A + (B + C);$$
$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B;$$
$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A;$$
$$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A).$$

Множення матриці на матрицю

Означення. ***Добутком матриці*** $A = (a_{ij})$ розміру $m \times p$ на матрицю $B = (b_{ij})$ розміру $p \times n$ називається така матриця $C = AB$ розміру $m \times n$, $C = (c_{ij})$, кожний елемент можна знайти за формулою:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\,.$$

Кожний елемент матриці *C* утворюється як сума добутків відповідних елементів *i*-го рядка матриці *A* на відповідні елементи *j*-го стовпця матриці *B*, тобто за схемою:

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vdots & b_{1j} & \vdots \\ \vdots & b_{2j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & b_{pj} & \vdots \end{pmatrix}$$

Зазначимо, що в результаті множення дістанемо матрицю розміру $m \times n$.

Зауважимо, що перемножувати можна тільки ті матриці, в яких кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої. З існування добутку AB не означає, що існує добуток BA.

З означення випливає, що добуток матриць *некомутативний*: $AB \neq BA$.

Якщо $AB = BA$, то матриці A і B називаються ***комутативними.***

2.2. Обернена матриця, її побудова

Означення. Матриця A^{-1} називається ***оберненою*** до квадратної матриці A, якщо добуток цих матриць дорівнює одиничній матриці, тобто

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

Обернена матриця існує для будь-якої квадратної матриці A, яка є ***невиродженою***, тобто, коли $\det A \neq 0$.

Теорема *(необхідні і достатні умови існування оберненої матриці).* *Для матриці A існує обернена матриця A^{-1} тоді і тільки тоді, коли A − невироджена матриця, її можна для матриці третього порядку знайти за формулою*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \qquad (2.1)$$

де A_{ij} −алгебраїчні доповнення до відповідних елементів матриці A.

Алгоритм знаходження оберненої матриці

1. Обчислити визначник матриці A. Якщо $\det A \neq 0$, то матриця A має обернену, в іншому випадку оберненої матриці не існує.

2. Обчислити алгебраїчні доповнення A_{ij} елементів a_{ij} матриці A.

3. Записати обернену матрицю за формулою (2.1).

Зауваження. Для невиродженої матриці другого порядку можна запропонувати швидкий метод знаходження оберненої матриці.

Нехай $A=\begin{pmatrix} a & b \\ x & y \end{pmatrix}$, $\det A \neq 0, \Rightarrow A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} y & -b \\ -x & a \end{pmatrix}$, тобто обернена матриця має винесеним множник $\dfrac{1}{\det A}$, елементи головної діагоналі поміняли місцями, а для побічної – залишаються на своїх місцях, але з протилежним знаком. Наприклад, для матриці $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$, $\det A=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}=17\neq 0$, обернена має вигляд

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} y & -b \\ -x & a \end{pmatrix}=\frac{1}{17}\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.3. Матричний метод розв'язування СЛАР

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1j}x_j+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2j}x_j+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots \\ a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{ij}x_j+\ldots+a_{in}x_n=b_i, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nj}x_j+\ldots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases} \qquad (2.2)$$

Утворимо матриці: $A-$ коефіцієнтів при невідомих, $X-$ із невідомих, B – із вільних членів:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Тоді, згідно з означенням добутку матриць, систему рівнянь (2.2) можна записати в матричному вигляді:

$$AX = B, \tag{2.3}$$

який значно скорочує запис системи рівнянь.

Система складається з n лінійних рівнянь з n невідомими, матриця A — квадратна і припустимо, що $\Delta(A) \neq 0$ – матриця невироджена. Тоді для матриці A побудуємо обернену A^{-1}. Помноживши тепер матричну рівність $AX = B$ зліва на матрицю A^{-1}, дістанемо:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B,$$

або остаточно $X = A^{-1}B$.

Останній вираз – це розв'язок системи лінійних рівнянь. Зауважимо, що в такому вигляді можна записати розв'язок будь-якого матричного рівняння, якщо матриця A задовольняє умови існування A^{-1}.

Зауваження 1. Нехай дано квадратну матрицю A. Доведемо, що коли $\Delta(A) \neq 0$, існує обернена матриця A^{-1}. Розглянемо матрицю, яка складається із алгебраїчних доповнень до транспонованої матриці

$$B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Утворимо добутки AB та BA.

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = C.$$

За правилом множення матриць елементи матриці C знаходимо за формулою:

$$c_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn}. \tag{2.4}$$

Якщо $i = j$, то згідно з властивістю визначників, маємо: $c_{ii} = \Delta(A)$, тобто знаходимо значення визначника матриці A; якщо $i \neq j$, то вираз (2.4) є сумою добутків елементів i-го рядка визначника на алгебраїчні доповнення, що відповідають j-му рядку цього самого визначника. За властивістю визначників така алгебраїчна сума дорівнює нулю. Отже, $c_{ij} = 0$, якщо $i \neq j$. Матриця C набирає вигляду: $C = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \Delta \end{pmatrix}$. Щоб ця матриця стала одиничною, треба помножити її на $\dfrac{1}{\Delta(A)}$.

$$E = \frac{1}{\Delta(A)} C = A \frac{1}{\Delta(A)} B = AA^{-1}.$$

Отже, обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Доведемо, що для матриці A матриця A^{-1} єдина. Для цього припустимо протилежне. Нехай існує одна матриця C, така що $AC = CA = E$. Тоді

$$CAA^{-1} = C(AA^{-1}) = CE = C,$$

а водночас

$$CAA^{-1} = (CA)A^{-1} = EA^{-1} = A^{-1}, \text{ звідси } C = A^{-1}.$$

Приходимо до висновку, що початкове припущення неправильне, тобто обернена матриця єдина.

Розглянемо детальніше (на прикладі також) матричний метод розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Матричний метод для системи третього порядку

Нехай дано систему: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$

Розглянемо три матриці:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Перша матриця називається ***матрицею коефіцієнтів при змінних в системі***, друга ***матрицею-стовпцем змінних***, третя – ***матрицею-стовпцем вільних членів***. Тоді систему можна записати у матричному вигляді: $A\cdot X=B$. Якщо матриця системи рівнянь невироджена $(\Delta\neq 0)$, то розв'язок системи знаходимо у вигляді $X=A^{-1}B$ або

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Приклад. Розв'язати задану систему рівнянь методом Крамера та за допомогою матричного методу.

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=-6, \\ 3x_1+4x_2-2x_3=20, \\ 5x_1-6x_2+4x_3=-12. \end{cases}$$

Розв'язування.

І. Метод Крамера.

Знаходимо визначник системи Δ, розкладаючи його за елементами першого рядка:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -6 & 4 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}-(-3)\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -6 \end{vmatrix}=2(16-12)+3(12+10)+(-18-20)=$$

$$=8+66-38=36.$$

Знаходимо визначники Δ_1, Δ_2, Δ_3.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -6 & -3 & 1 \\ 20 & 4 & -2 \\ -12 & -6 & 4 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -10 & 4 & -2 \\ 6 & -6 & 4 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -10 & -6 & -2 \\ 6 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-2)(-6)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 12(12-6) = 12\cdot 6 = 72,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 3 & 20 & -2 \\ 5 & -12 & 4 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -10 & -2 \\ 5 & 6 & 4 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -10 & -2 \\ 11 & -14 & 0 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & -4 & 0 \\ 11 & -14 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2)(-2)\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 11 & 7 \end{vmatrix} = 4(49-22) = 4\cdot 27 = 108,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -6 \\ 3 & 4 & 20 \\ 5 & -6 & -12 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 3 & 4 & -10 \\ 5 & -6 & 6 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & -6 & -10 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix} = (-2)(-6)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 12(2\cdot 6 - 5\cdot 3) = 12(-3) = -36.$$

Тоді

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{72}{36} = 2; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{108}{36} = 3; \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-36}{36} = -1.$$

II. Матричний спосіб. Матриця A з коефіцієнтів при невідомих для заданої системи рівнянь має вид: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

Шукаємо алгебраїчні доповнення до кожного елемента матриці:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 4\cdot 4 - (-6)(-2) = 16 - 12 = 4,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -(3\cdot 4 - 5(-2)) = -(12+10) = -22,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = 3(-6) - 5\cdot 4 = -18 - 20 = -38,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}-3 & 1\\ -6 & 4\end{vmatrix}=-((-3)4-(-6)1)=-(-12+6)=6,$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 5 & 4\end{vmatrix}=2\cdot 4-5\cdot 1=3,$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & -3\\ 5 & -6\end{vmatrix}=-(2(-6)-5(-3))=-(-12+15)=-3,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 4 & -2\end{vmatrix}=(-3)(-2)-4\cdot 1=6-4=2,$$

$$A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-(2(-2)-3\cdot 1)=-(-4-3)=7,$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & 4\end{vmatrix}=2\cdot 4-3(-3)=8+9=17.$$

Щоб отримати обернену матрицю A^{-1} необхідно алгебраїчні доповнення до елементів рядка записати у відповідний стовпчик, попередньо поділивши їх на визначник матриці A.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{4}{36} & \frac{6}{36} & \frac{2}{36}\\ -\frac{22}{36} & \frac{3}{36} & \frac{7}{36}\\ -\frac{38}{36} & -\frac{3}{36} & \frac{17}{36}\end{pmatrix}.$$

Стовпчик вільних членів $B=\begin{pmatrix}-6\\ 20\\ -12\end{pmatrix}.$

Розв’язок системи шукаємо так:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=A^{-1}B=\begin{pmatrix}\frac{4}{36}&\frac{6}{36}&\frac{2}{36}\\-\frac{22}{36}&\frac{3}{36}&\frac{7}{36}\\-\frac{38}{36}&-\frac{3}{36}&\frac{17}{36}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6\\20\\-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4(-6)+6\cdot20+2(-12)}{36}\\\frac{(-22)(-6)+3\cdot20+7(-12)}{36}\\\frac{(-38)(-6)+(-3)20+7(-12)}{36}\end{pmatrix}$$

$$=$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{12(-2+10-2)}{36}\\\frac{12(11+5-7)}{36}\\\frac{12(19-5-17)}{36}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{6}{3}\\\frac{9}{3}\\\frac{-3}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1=2;\ x_2=3;\ x_3=-1.$

Зауваження. Розв’язування матричних рівнянь

Розглянемо різного виду матричні рівняння

$$AX=B, \tag{1}$$

$$YA=D, \tag{2}$$

$$AZB=C, \tag{3}$$

де A,B,C і D – задані матриці, а X,Y та Z – шукані матриці, причому A та B є невиродженими квадратними матрицями порядку n.

Знайдемо розв’язки цих рівнянь. Аналогічно доведенню формули (1) для матричного рівняння, яке відповідає СЛАР, тобто

$$A^{-1}\left(AX\right)=A^{-1}B\Leftrightarrow\left(A^{-1}A\right)X=A^{-1}B\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow EX=A^{-1}B\Leftrightarrow X=A^{-1}B$, отримуємо

$$X=A^{-1}B, \tag{4}$$

$$Y=DA^{-1}. \tag{5}$$

Для знаходження розв’язку рівняння (3) обидві частини цього рівняння помножимо зліва на матрицю A^{-1} і справа – на B^{-1}:

$$A^{-1}\left(AZB\right)B^{-1}=A^{-1}CB^{-1}\Leftrightarrow\left(A^{-1}A\right)Z\left(BB^{-1}\right)=A^{-1}CB^{-1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow EZE = A^{-1}CB^{-1} \Leftrightarrow Z = A^{-1}CB^{-1}. \qquad (6)$$

Завдання для самоконтролю

1. Означте матрицю, опишіть її різновиди.

2. Записати визначення алгебраїчних дій над матрицями: сума (різниця) двох матриць, добуток матриці на число.

3. Пояснити на прикладі двох квадратних матриць однакового розміру дію множення матриці на матрицю. За яких умов можна множити матриці різних розмірів? Навести приклад.

4. Розв'язати системи методом Крамера та матричним методом.

1. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

Відповідь. 1. $(1,1,1)$. 2. $(-1,0,1)$.

Лекція 3. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь

3.1. Поняття рангу матриці, його обчислення.

3.2. Критерій сумісності систем лінійних алгебраїчних рівнянь, теорема Кронекера-Капеллі.

3.3. Метод Гаусса.

3.4. Системи лінійних однорідних рівнянь.

3.1. Поняття рангу матриці, його обчислення

Означення. ***Рангом матриці*** A називають порядок найбільшого ненульового мінора цієї матриці.

Позначають ранг матриці $\mathrm{rang}(A)$ або $r(A)$. Якщо матриця містить хоча б один ненульовий елемент, то її $r(A) \geq 1$.

На практиці для матриць більшого розміру зручно обчислювати ранг за допомогою елементарних перетворень над рядками (стовпцями), які її рангу не змінюють.

Елементарні перетворення

1. Перестановка рядків (стовпців) місцями.
2. Множення рядка (стовпця) на деяке ненульове число.
3. Викреслювання одного із пропорційних рядків (стовпців).
4. Викреслювання нульового рядка (стовпця).
5. Додавання до одного із рядків (стовпців) іншого рядка (стовпця), помноженого на деяке число.

3.2. Критерій сумісності систем лінійних алгебраїчних рівнянь, теорема Кронекера-Капеллі

Розглянемо систему m лінійних рівнянь із невідомими $x_1, x_2, ..., x_n$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{3.1}$$

У відповідність до системи обчислимо ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

та розширеної матриці $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$.

Має місце теорема.

Теорема Кронекера-Капеллі. *Система лінійних алгебраїчних рівнянь (3.1) сумісна тоді і тільки тоді, коли* $r(A) = r(B)$.

Наслідок 1. Якщо $r(A)=r(B)=n$, тобто кількості невідомих, то система має єдиний розв'язок; якщо $r(A)=r(B)=k<n$ − система невизначена (має безліч розв'язків), причому $(n-k)$ змінних обирають вільними, через вільні виражають базові.

Наслідок 2. Якщо $r(A)<r(B)$, тоді система несумісна.

3.3. Метод Гаусса

Нехай нам дана система лінійних рівнянь (3.1). Вважаємо, що в заданій системі коефіцієнт $a_{11}\neq 0$.

Утворимо множник $\left(-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}\right)$. Помножимо на дане число перше рівняння і додамо до другого. Побудуємо число $\left(-\dfrac{a_{31}}{a_{11}}\right)$ і виконаємо перетворення для третього рівняння і т.д. Врешті, перетворимо останнє рівняння із множником $\left(-\dfrac{a_{m1}}{a_{11}}\right)$. В результаті цих дій утворилася нова система

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ \quad a'_{22}x_2+\ldots+a'_{2n}x_n=b'_2, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad a'_{l2}x_2+\ldots+a'_{\ln}x_n=b'_l. \end{cases} \tag{3.2}$$

Система (3.2) отримується в результаті виключення з рівнянь системи (3.1), крім першого, невідомої змінної x_1. Вона рівносильна системі (3.1), так як застосували елементарні перетворення.

В процесі таких перетворень в системі може з'явитися рівняння, всі коефіцієнти якого і вільний член дорівнюють 0. Таке рівняння задовольняється будь-яким n-вимірним вектором і не впливає на розв'язок системи. Тому ми можемо таке рівняння вивести з нашої системи, зменшивши кількість рівнянь системи. Отже, $l\leq m$. Наряду з такими рівняннями в системі можуть з'явитись рівняння, у яких всі коефіцієнти біля невідомих є нулі, а вільний член не дорівнює нулю (рівняння виду: $0 \cdot X = b, \quad b \neq 0$). Таке рівняння не задовольняється жодним n-вимірним вектором (не має розв'язку), значить, і система, в якій воно є, розв'язків не має, тобто система буде несумісною. Отже, якщо в системі (3.2) немає рівняння виду $0 \cdot X = b$, тобто вона сумісна, ми можемо застосувати до неї ще такі цикли перетворень, виключаючи невідомі x_2, x_3, x_4 і т.д.

Вважаємо, що (3.2) не містить рівнянь виду $0 \cdot X = b$. Виконуємо далі перетворення.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad a'_{22}x_2 + ... + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \quad a''_{33}x_3 + ... + a''_{3n}x_n = b''_3, \\ \qquad .... \\ a^{(k-1)}_{kk}x_k + ... + a^{(k-1)}_{kn}x_n = b^{(k-1)}_k \end{cases} \tag{3.3}$$

Вважаємо, що (3.3) не містить рівнянь виду $0 \cdot X = b$. Система (2.7) буде рівносильна всім своїм попереднім системам, а отже рівносильна системі (3.1).

Можливі два випадки:

1) $k = n$, отримується система виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad a'_{22}x_2 + ... + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \quad a''_{33}x_3 + ... + a''_{3n}x_n = b''_3, \\ \qquad .... \\ \qquad a^{(k-1)}_{kn}x_n = b^{(k-1)}_k, \end{cases} \tag{3.4}$$

в останньому рівнянні якої залишиться тільки одне невідоме. Така система називається ***системою трикутного виду***. Вона буде мати єдиний розв'язок і буде визначеною.

2) $k < n$, система називається системою ***трапецієвидною***, кількість рівнянь k буде меншою за кількість невідомих n. В цьому випадку система має множину розв'язків – ***система невизначена***.

- Метод Гаусса дозволяє знайти всі розв'язки системи (3.1), якщо вони існують або довести, що система несумісна.

- Якщо в системі з'являться рівняння виду $0 \cdot X = b$, то це означає, що задана система несумісна.
- Якщо система зводиться до трикутного виду, вона сумісна і визначена.
- Якщо система зводиться до виду трапеції, то така система буде сумісна, але невизначена.
- Метод Гаусса дає можливість дослідити питання про існування ненульових розв'язків систем лінійних однорідних рівнянь.

3.4. Системи лінійних однорідних рівнянь

Застосуємо здобуті результати для аналізу розв'язків однорідної системи рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

З теореми Кронекера-Капеллі випливає, що система рівнянь (3.5) завжди сумісна: $\mathrm{rang}A = \mathrm{rang}B$. *Тривіальний розв'язок* $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ завжди існує. Розглянемо матрицю *A*, складену з коефіцієнтів при невідомих. Нехай її ранг дорівнює *r*. Якщо $r = n$, то система (3.5) має єдиний розв'язок, і він тривіальний. Якщо $r < n$, то система (3.5) має також розв'язки, які відмінні від тривіальних.

Отже, можна сформулювати твердження: ***система однорідних лінійних рівнянь (3.5) має нетривіальні розв'язки тоді і тільки тоді, коли*** $\Delta(A) = 0$.

Нехай ранг матриці системи рівнянь (3.5) $r < n$. Це означає, що матриця *A* має мінор *r*-го порядку, відмінний від нуля. Відповідно до загальної теорії систему рівнянь можна переписати у вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = -a_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = -a_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n, \end{cases} \tag{3.6}$$

для якої головний визначник не є вже нулем.

Така система розв'язків (3.6) для однорідної системи рівнянь (3.5) називається *фундаментальною системою розв'язків*.

Розглянемо однорідну систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Припустимо, що визначник системи (3.7) відмінний від нуля. Тоді згідно з правилом Крамера система буде мати єдиний розв'язок $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Дійсно, всі три визначники $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ у цьому випадку дорівнюють нулю, оскільки в кожному з них міститься стовпчик з нульових елементів. Розв'язок $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ називають ***нульовим*** (тривіальним).

Якщо головний визначник системи (3.7) дорівнює нулю, то згідно з властивостями визначника, один з його рядків є лінійною комбінацією інших або є пропорційні рядки. Але оскільки вільні члени системи (3.7) дорівнюють нулю, то вказані залежності завжди будуть виконуватись і для рівнянь. Це означає, що в системі (3.7) буде або два незалежних рівняння (якщо не всі мінори головного визначника дорівнюють нулю), або одне (якщо рівні нулю всі мінори, але не всі елементи визначника дорівнюють нулю). В обох випадках система (3.7) невизначена і має безліч розв'язків.

Результат дослідження можна сформулювати у вигляді такої теореми.

Теорема. *Однорідна система трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими має відмінні від нульового розв'язки лише у тому випадку, коли її визначник дорівнює нулю.*

Приклади до лекції

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$ методом Гаусса.

Розв'язування.

Складемо розширену матрицю з коефіцієнтів при невідомих системи та вільних членів. Помножимо перший рядок на (–1) і додамо до другого, помножимо перший рядок на (–2) і додамо до третього. У першому стовпчику утворились нулі, крім першого рядка. Потім помножимо другий рядок на 5 і додамо до третього.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -7 & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Матриця коефіцієнтів (без вільного стовпчика) звелась до виду трикутника, отже система сумісна і визначена.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ \qquad\quad x_2 + x_3 = 1, \\ \qquad\quad -2x_3 = -4. \end{cases}$$

З третього рівняння визначаємо x_3, з другого x_2 і з першого x_1.

$$x_3 = -4 \div (-2); \quad x_3 = 2;$$
$$x_2 = 1 - x_3 = 1 - 2 = -1;$$
$$x_1 = 5 - 2x_2 - 3x_3 = 5 + 2 - 6 = 1.$$

Відповідь: (1; -1; 2)

Приклад 2. Розв'язати систему лінійних однорідних рівнянь $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ 3x + 6y + 5z = 0, \\ x + 4y + 3z = 0 \end{cases}$ методом Гаусса.

Розв'язування.

Складаємо розширену матрицю. Помножимо перший рядок на (–3) і додамо до другого, помножимо перший рядок на (–1) і додамо до третього. Потім помножимо другий рядок на (–1) і додамо до третього:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ми отримали рядок, що складається з усіх нулів і маємо право виключити його з системи. Таким чином, матриця звелась до виду трапеції, отже система сумісна, але невизначена, має вигляд

$$\begin{cases} x+y+z=0, \\ 3y+2z=0. \end{cases}$$

З другого рівняння визначаємо y через z, а з першого x через z і записуємо загальний розв'язок системи.

$$3y=-2z; \quad y=-\frac{2}{3}z;$$

$$x=-y-z=\frac{2}{3}z-z=-\frac{1}{3}z.$$

Відповідь: $\left\{-\frac{1}{3}z;-\frac{2}{3}z;z\right\}, z\in\mathbb{R}.$

Приклад 3. Розв'язати систему лінійних рівнянь $\begin{cases} x-y+2z=4, \\ 3x-y-z=2, \\ 5x-3y+3z=6 \end{cases}$ методом Гаусса.

Розв'язування.

Складаємо розширену матрицю. Помножимо перший рядок на (–3) і додамо до другого, помножимо перший рядок на (–5) і додамо до третього. Потім помножимо другий рядок на (–1) і додамо до третього:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -7 & -10 \\ 0 & 2 & -7 & -14 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Ми отримали рядок, всі коефіцієнти якого дорівнюють нулю, а вільний член не дорівнює нулю. Отже, система несумісна.

Відповідь: система не має розв'язків.

Завдання для самоконтролю

1. Означте ранг матриці, поясніть його обчислення на прикладах.

2. Елементарні перетворення, обчислення рангу матриці.

3. Теорема Кронекера-Капеллі, її застосування на практиці.

4. Пояснити застосування методу Гаусса на практиці, навести приклади розв'язування сумісної (визначеної, невизначеної) та несумісної системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

5. Розв'язування систем лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь.

6. Розв'язати системи лінійних рівнянь методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x+3y-6z=12, \\ 3x+2y+5z=-10, \\ 2x+5y-3z=6. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x-y-z=0, \\ x+2y+3z=14, \\ 4x+3y+2z=16. \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x+2y-z=0, \\ x+2y+9z=0, \\ x+y+2z=0. \end{cases}$

г) $\begin{cases} 4x+y+z=0, \\ x+3y+z=0, \\ x+y+2z=0. \end{cases}$ д) $\begin{cases} x+2y+z=8, \\ 3x+2y+z=10, \\ 4x+3y-2z=4. \end{cases}$

Відповідь. 6. а) $(0,0,-2)$; б) $(1,2,3)$; в) $(5t,-7t,t), t\in\mathbb{R}$; г) $(0,0,0)$; д) $(1,2,3)$.

Тема 1.2. Векторна алгебра

Лекція 4. Вектори в просторі. Скалярний добуток

4.1. Основні поняття.

4.2. Лінійні операції з векторами.

4.3. Вектори в прямокутній системі координат.

4.4. Скалярний добуток векторів та його властивості.

4.1. Основні поняття

Величина, яка повністю характеризується своїм числовим значенням в обраній системі одиниць, називається ***скалярною*** або ***скаляром.*** Такими, наприклад, є маса тіла, об'єм тіла, температура середовища й т.п. Скаляр визначається числом, додатним чи від'ємним, або рівним нулю. Величина, яка крім числового значення характеризується напрямком, називається ***векторною*** або ***вектором.*** До них відноситься сила, переміщення, швидкість і т.д. Вектором називається напрямлений відрізок.

Під ***модулем (довжиною)*** вектора $|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}|$ розуміють числове значення довжини відрізка, без зазначення напрямку ($|\overrightarrow{AB}|$ позначає модуль вектора $\overrightarrow{AB}$).

Вектор $\vec{0}$, модуль якого дорівнює нулю, називається ***нульовим*** або ***нуль-вектором*** (напрямок нульового вектора довільний).

Означення. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються ***колінеарними,*** якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Нульовий вектор напрямлений однаково з будь-яким вектором; довжина його дорівнює нулю, тобто $|\vec{0}| = 0$.

Означення. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються ***рівними***, якщо вони колінеарні, однаково напрямлені та їх довжини рівні.

Означення. Три вектори називають ***компланарними***, якщо при приведенні їх до спільного точки-початку вони лежать в одній площині.

4.2. Лінійні операції з векторами

Додавання векторів

Щоб побудувати суму даних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, треба відкласти ці вектори від довільної точки та побудувати на них паралелограм. Сумою векторів буде діагональ, що виходить з початку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 4.1).

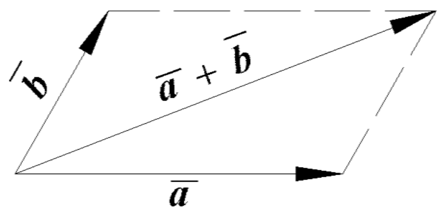


Рис. 4.1. Правило паралелограма

Цей спосіб побудови називається ***правилом паралелограма.***

Суму двох векторів можна побудувати також за ***правилом трикутника.***

Побудова суми векторів − відкласти вектор $\vec{b}$ від кінця вектора $\vec{a}$. Сумою

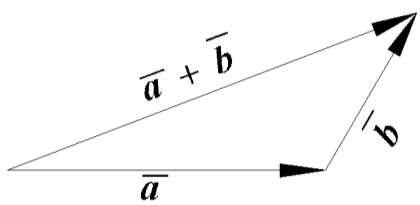


Рис. 4.2. Правило трикутника

векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ буде вектор, що з'єднує початок $\vec{a}$ з кінцем $\vec{b}$ (рис. 4.2).

Щоб побудувати суму n даних векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$, треба від довільної точки відкласти $\vec{a}_1$, потім від його кінця відкласти $\vec{a}_2$ і т.д., нарешті від кінця $\vec{a}_{n-1}$ відкласти $\vec{a}_n$. Сумою векторів буде вектор, напрямлений від початку $\vec{a}_1$ до кінця $\vec{a}_n$ (рис. 4.3).

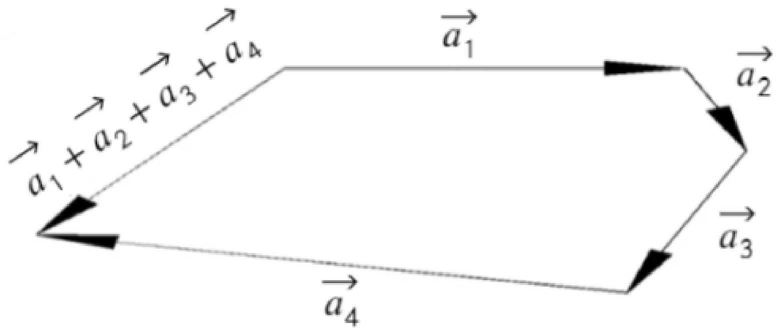


Рис. 4.3. Правило багатокутника

Віднімання векторів Щоб побудувати різницю векторів $\vec{a}-\vec{b}$, треба відкласти ці вектори від довільної точки, з'єднати їх кінці та вибрати на цьому відрізку напрямок від кінця $\vec{b}$ до кінця $\vec{a}$ (рис. 4.4).

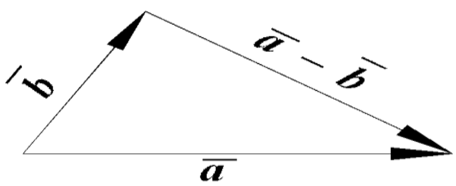


Рис. 4.4. Різниця векторів

Множення вектора на число

Добутком ненульового вектора $\vec{a}$ на число k називається вектор $k\vec{a}$, модуль якого дорівнює: $|k\vec{a}|=|k||\vec{a}|$. Вектор $k\vec{a}$ має напрям вектора $\vec{a}$, якщо $k>0$, і протилежний напрям, якщо $k<0$ (для $k=0$, $0\cdot\vec{a}=\vec{0}$).

Ці три операції називаються лінійними операціями з векторами.

Проекція вектора на вісь

Проекцією вектора на вісь називається довжина направленого відрізка, початок якого є проекція початку вектора і кінець – проекція його кінця, яка береться із знаком плюс, якщо напрями відрізка і осі збігаються, і зі знаком мінус, якщо їх напрями протилежні (рис. 4.5): $np_{\bar{l}}\,\overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, $np_{\bar{l}}\overrightarrow{CD}=-\left|\overrightarrow{C_1D_1}\right|$.

Властивості проекції

1) $np_{\bar{l}}\,\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\cos\varphi$;

2) $np_{\bar{l}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=np_{\bar{l}}\,\vec{a}+np_{\bar{l}}\,\vec{b}$;

3) $np_{\bar{l}}\left(k\cdot\vec{a}\right)=k\cdot np_{\bar{l}}\vec{a}$.

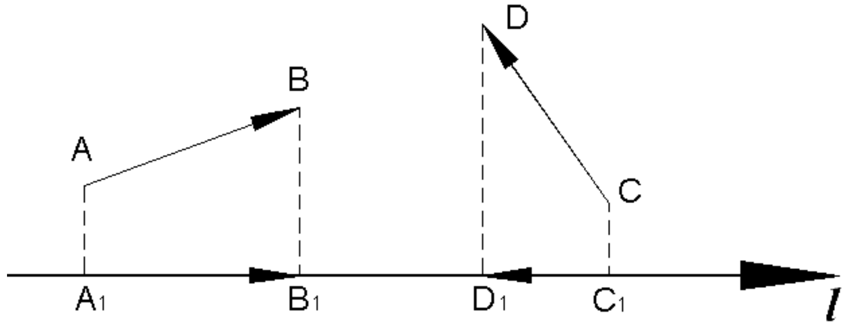


Рис. 4.5. Проекція вектора на вісь

4.3. Вектори в прямокутній системі координат

Нехай у просторі задано три попарно перпендикулярні осі Ox, Oy, Oz. Координатами вектора $\vec{a}=\left(a_x;\, a_y;\, a_z\right)$ на осі називаються проекції вектора на ці осі: $a_x=np_{ox}\vec{a}$, $a_y=np_{oy}\vec{a}$, $a_z=np_{oz}\vec{a}$.

Якщо $\vec{i},\, \vec{j},\, \vec{k}$ − одиничні вектори, що лежать на осях координат і співнапрямлені з ними, то $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$.

Якщо точки мають координати: $A\left(x_1;\, y_1;\, z_1\right)$, $B\left(x_2;\, y_2;\, z_2\right)$, то координати вектора $\overrightarrow{AB}=\left(x_2-x_1;\, y_2-y_1;\, z_2-z_1\right)$.

Правила дій над векторами, заданими своїми координатами

Якщо $\vec{a}=\left(a_x;\, a_y;\, a_z\right)$, $\vec{b}=\left(b_x;\, b_y;\, b_z\right)$, то $\vec{a}+\vec{b}=\left(a_x+b_x;\, a_y+b_y;\, a_z+b_z\right)$;

$$\vec{a}-\vec{b}=\left(a_x-b_x;\, a_y-b_y;\, a_z-b_z\right);\quad k\cdot\vec{a}=\left(k\cdot a_x;\, k\cdot a_y;\, k\cdot a_z\right).$$

Довжина вектора. Напрямні косинуси вектора

Позначимо α, β, γ кути між додатними напрямами осей координат Ox, Oy, Oz та вектором $\vec{a}$. Ці кути називаються ***напрямними кутам, їх косинуси*** − ***напрямними косинусами.*** Проекції вектора $\vec{a}$ на координатні осі подаються так (рис. 4.6):

$$a_x = |\vec{a}|\cos\alpha,\ a_y = |\vec{a}|\cos\beta,\ a_z = |\vec{a}|\cos\gamma,$$

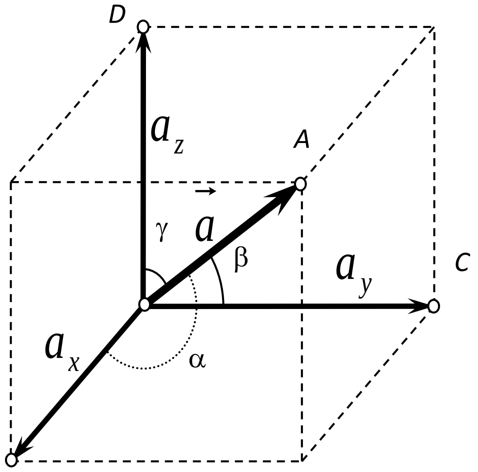


Рис. 4.6. Напрямні косинуси вектора

Тоді

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2};$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|};\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|};\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|},$$

де $\alpha, \beta, \gamma -$ кути між $\vec{a}$ та осями Ox, Oy, Oz.

Для напрямних конусів справедливе співвідношення

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

яке називають ***основною тригонометричною тотожністю в просторі***.

Поділ відрізка в даному відношенні

Нехай точки *A*, *B* мають координати $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$.

Якщо відрізок *AB* поділимо точкою *M* у відношенні $AM : MB = \lambda$, то координати точки *M* знаходять за формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}; \qquad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Якщо $\lambda = 1$, то отримуємо формули для знаходження координат середини відрізка:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};\ y = \frac{y_1 + y_2}{2};\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

4.4. Скалярний добуток векторів та його властивості

Означення. ***Скалярним добутком векторів*** називається число, що дорівнює добутку довжин векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) \qquad (4.1)$$

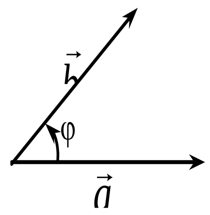


Рис. 4.7. Вектори

Якщо кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ гострий, то $\vec{a}\cdot\vec{b}>0,$ якщо тупий, то $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$; якщо прямий, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=0.$ Коли один із векторів $\vec{a}$ чи $\vec{b}$ є нульовим, то його можна вважати ортогональним до будь-якого іншого вектора.

Аналітичні властивості скалярного добутку, що випливають із його означення:

$$1)\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a};$$

$$2)\ \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b});$$

$$3)\ \vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2=|\vec{a}|^2;$$

$$4)\ \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c};$$

$$5)\ \begin{gathered}\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,np_{\vec{a}}\,\vec{b}=|\vec{b}|\,np_{\vec{b}}\,\vec{a}\\ np_{\vec{a}}\,\vec{b}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}\end{gathered}\ .$$

Рівність (4) є наслідком формули (5) і властивості проекцій суми векторів:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=|\vec{a}|\,np_{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c})=|\vec{a}|(np_{\vec{a}}\vec{b}+np_{\vec{a}}\vec{c})=$$
$$=|\vec{a}|\,np_{\vec{a}}\vec{b}+|\vec{a}|\,np_{\vec{a}}\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.$$

Отже, у разі скалярного множення суми векторів на вектор можна розкривати дужки. Нехай вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ подано через їх проекції на координатні осі

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},\quad \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}.$$

Записавши таблицю скалярного множення для одиничних векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, ортів декартової системи координат: $\vec{i}\cdot\vec{i}=1$, $\vec{i}\cdot\vec{j}=0, \vec{i}\cdot\vec{k}=0$; $\vec{j}\cdot\vec{i}=0, \vec{j}\cdot\vec{j}=1$, $\vec{j}\cdot\vec{k}=0$; $\vec{k}\cdot\vec{i}=0, \vec{k}\cdot\vec{j}=0, \vec{k}\cdot\vec{k}=1$, скалярний добуток обчислюють за формулою

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z,$$

тобто

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \tag{4.2}$$

Скалярний квадрат вектора дорівнює:

$$\vec{a}^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos(0)=|\vec{a}|^2,$$

а модуль вектора визначається за формулою

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}. \tag{4.3}$$

Геометричний зміст скалярного добутку − проекція вектора $\vec{a}$ на напрям вектора $\bar{b}$:

$$np_{\bar{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}. \tag{4.4}$$

Кут між векторами обчислюють за формулою:

$$\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \tag{4.5}$$

Умова перпендикулярності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ має вигляд:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.$$

Завдання для самоконтролю

1. Означити скалярний добуток двох векторів, сформулювати його основні властивості.

2. Отримати формулу обчислення скалярного добутку через координати векторів та записати її наслідки (модуль вектора, кут між векторами, проекція вектора).

3. Сформулювати геометричний та механічний зміст скалярного добутку.

4. Описати циліндричну та сферичну систему координат в просторі.

5. Довести формули поділу відрізка навпіл.

6. У трикутнику ABC проведено медіану AM. Доведіть, що

$$2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

7. Дано вектори $\vec{a} = -2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{k} - 2\vec{j}$. Знайти довжини векторів 1) $\vec{a} + 2\vec{b}$, 2) $3\vec{c} - \vec{a}$.

8. Точки $A(1;-2;-1)$, $B(3;4;2)$, $C(3;1;-2)$ є вершинами паралелограма, причому A і C – протилежні вершини. Знайдіть четверту вершину D, а також периметр паралелограму.

9. Дано: $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$, кути між віссю l дорівнюють 60^0 і 120^0. Обчислити $np_l\left(2\vec{b} - \vec{a}\right)$.

10. Відрізок AB задано координатами своїх кінців $A(3;-2;-5)$ і $B(7;6;-1)$. Знайти довжину вектора $\overrightarrow{CD}$, де C – середина відрізка AB, D – точка, яка ділить AB у відношенні $\lambda = \dfrac{1}{3}$.

Відповіді. **7.** 1) $\sqrt{65}$; 2) $\sqrt{22}$. 8. $D(1;-5;-5), p = 24$. 9. $np_{\bar{l}}\left(2\vec{b} - \vec{a}\right) = -5$. 10. $\sqrt{6}$.

Лекція 5. Векторний та мішаний добуток векторів. Лінійно залежна та незалежна система векторів

5.1. Векторний добуток, його основні властивості.

5.2. Мішаний добуток трьох векторів, компланарність векторів.

5.3. Лінійно залежна та незалежна система векторів.

5.1. Векторний добуток, його основні властивості

Означення. ***Векторним добутком двох векторів*** $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається третій вектор $\vec{c}$, який задовольняє умові:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$;

2) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;

3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють праву трійку векторів (рис. 5.1), тобто третій

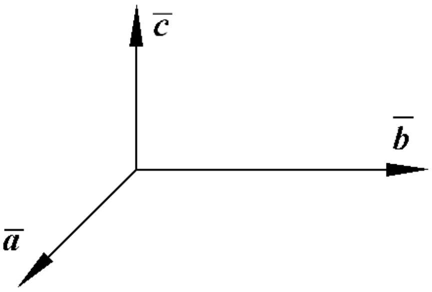


Рис. 5.1. Права трійка векторів

вектор має такий напрям, що при спостереженні з його кінця найближчий поворот від вектора $\vec{a}$ до $\vec{b}$ йде проти годинникової стрілки.

Векторний добуток позначається символом $\vec{a} \times \vec{b}$. Із означення випливає, що $\vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$.

Основні властивості

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$;

2) $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \sin\varphi$;

3) $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\,\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$;

4) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

Таблиця векторного множення для одиничних векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ − ортів декартової системи координат: $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}$, $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$, $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$, $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$.

Знайдемо вираз векторного добутку векторів через координати.

Нехай $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$. Виконавши відповідні перетворення, дістанемо:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right) \times \left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\right) =$$

$$= a_x b_y \vec{k} - a_x b_z \vec{j} + a_y b_z \vec{i} - a_y b_x \vec{k} + a_z b_x \vec{j} - a_z b_y \vec{i} =$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}.$$

Отже, координати вектора векторного добутку векторів, які задані координатами, обчислюються за формулою:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}. \qquad (5.1)$$

Умова колінеарності двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ має вигляд:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \quad \left(\text{або } \frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}\right). \qquad (5.2)$$

Теорема. *Вектори* $\vec{a}$ *та* $\vec{b}$ *колінеарні тоді і тільки тоді, коли* $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

Доведення. Необхідність. Нехай $\vec{a}\parallel\vec{b}$. Покажемо, що тоді $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$. Дійсно, якщо $\vec{a}\parallel\vec{b}$, то $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ або

$$x_2=\lambda x_1,\ y_2=\lambda y_1,\ z_2=\lambda z_1.$$

Отже, $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ \lambda x_1 & \lambda y_1 & \lambda z_1\end{vmatrix}=\vec{0}$.

Достатність. Нехай тепер $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$. Покажемо, що тоді $\vec{a}\parallel\vec{b}$. Дійсно, за умови $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$, маємо:

$$\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\vec{0}\Leftrightarrow \vec{i}\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}=\vec{0}.$$

Помножимо рівність скалярно по черзі на $\vec{i},\vec{j}$ та $\vec{k}$, врахувавши, що $\vec{i}\cdot\vec{i}=1$, $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$, $\vec{i}\cdot\vec{k}=0$, $\vec{j}\cdot\vec{j}=1$, $\vec{k}\cdot\vec{k}=1$, $\vec{j}\cdot\vec{k}=0$.

В результаті отримуємо

$$\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}=0.$$

Геометричний зміст векторного добутку − модуль вектора векторного добутку дорівнює площі паралелограма, побудованого на $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

$$S_{пар} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|. \qquad (5.3)$$

Площа трикутника обчислюється за формулою:

$$S_{тр} = \frac{1}{2} S_{пар} = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|. \qquad (5.4)$$

Приклад. Знайти площу трикутника з вершинами $A(1,1,0)$, $B(1,0,1)$ і $C(0,1,1)$.

Розв'язування. Площа S трикутника ABC дорівнює $1/2$ площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$. Координати векторів $\overrightarrow{AB} = (0,-1,1)$ і $\overrightarrow{AC} = (-1,0,1)$, звідси

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} - \underline{k}.$$

Отже,

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{1+1+1} = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Зауваження. Доведення деяких властивостей векторного добутку

З властивостей визначників випливають такі властивості векторного добутку:

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (антикомутативність).

Доведення.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

2. Для довільних векторів $\vec{a}_1(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{a}_2(x_2;y_2;z_2)$, $\vec{a}_3(x_3;y_3;z_3)$ і довільних чисел λ і μ справедливі рівності

$$(\lambda\vec{a}_1 + \mu\vec{a}_2) \times \vec{a}_3 = \lambda(\vec{a}_1 \times \vec{a}_3) + \mu(\vec{a}_2 \times \vec{a}_3),$$

$$\vec{a}_3 \times (\lambda\vec{a}_1 + \mu\vec{a}_2) = \lambda(\vec{a}_3 \times \vec{a}_1) + \mu(\vec{a}_3 \times \vec{a}_2).$$

Доведення.

$$\left(\lambda\vec{a}_1+\mu\vec{a}_2\right)\times\vec{a}_3=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \lambda x_1+\mu x_2 & \lambda y_1+\mu y_2 & \lambda z_1+\mu z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \lambda x_1 & \lambda y_1 & \lambda z_1\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \mu x_2 & \mu y_2 & \mu z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}+\mu\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}=$$

$$=\lambda\left(\vec{a}_1\times\vec{a}_3\right)+\mu\left(\vec{a}_2\times\vec{a}_3\right);$$

$$\vec{a}_3\times\left(\lambda\vec{a}_1+\mu\vec{a}_2\right)=-\left(\lambda\vec{a}_1+\mu\vec{a}_2\right)\times\vec{a}_3=-\left[\lambda\left(\vec{a}_1\times\vec{a}_3\right)+\mu\left(\vec{a}_2\times\vec{a}_3\right)\right]=$$

$$=\lambda\left(\vec{a}_3\times\vec{a}_1\right)+\mu\left(\vec{a}_3\times\vec{a}_2\right).$$

3. $\lambda\vec{a}\times\mu\vec{a}=\vec{0}$.

Доведення. Нехай $\vec{a}\left(x,y,z\right)$. Тоді

$$\lambda\vec{a}\times\mu\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \lambda x & \lambda y & \lambda z\\ \mu x & \mu y & \mu z\end{vmatrix}=\lambda\mu\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ x & y & z\end{vmatrix}=\vec{0}.$$

5.2. Мішаний добуток трьох векторів, компланарність векторів

Означення. ***Мішаним добутком трьох векторів*** називається векторно-скалярний добуток $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$.

Частіше мішаний добуток позначається $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Побудуємо паралелепіпед (рис. 5.2), ребрами якого є вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, що приведені до загальної вершини O. Нехай вектор $\vec{S}=\vec{a}\times\vec{b}$, тобто він перпендикулярний до площини, у якій лежать вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (напрям h). Нагадаємо, що $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=S$ – площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто площа основи паралелепіпеда. Висота цього паралелепіпеда H:

$$H=\pm np_h\ \vec{c}=\pm\left|\vec{c}\right|\cos\varphi.$$

Знак плюс відповідає гострому куту $\varphi = \angle(\vec{c}, \vec{h})$, знак мінус – тупому куту φ. У першому випадку вектори утворюють праву трійку, а у другому – ліву трійку.

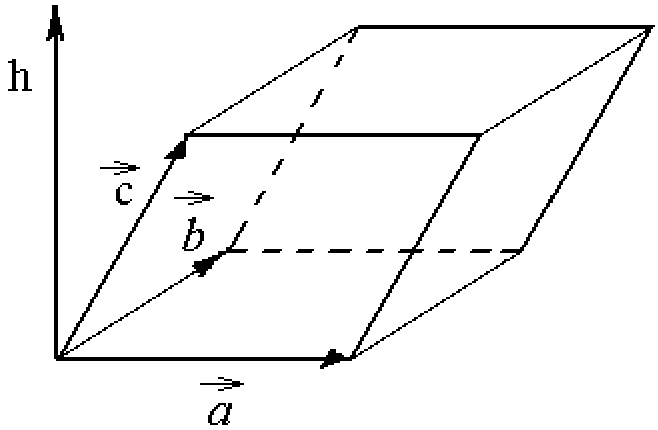


Рис. 5.2. Паралелепіпед (права трійка векторів)

На основі означення скалярного добутку маємо:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{S} \cdot \vec{c} = \left| \vec{S} \right| \times \text{пр}_h \vec{c} = \pm \left| \vec{S} \right| \cdot H = \pm V,$$

де V - об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Звідси

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \pm V,$$

тобто мішаний добуток трьох векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, який побудовано на цих векторах, і береться із знаком плюс, якщо ці вектори утворюють праву трійку, та зі знаком мінус, якщо вони утворюють ліву трійку.

Основні властивості мішаного добутку

1. Мішаний добуток не змінюється при циклічній перестановці цих співмножників, тобто

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b}.$$

Дійсно, у цьому випадку не змінюється об'єм паралелепіпеда та орієнтація його ребер.

2. При перестановці двох сусідніх співмножників мішаний добуток змінює свій знак на протилежний:

$$\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{a}\vec{b}\vec{c},$$

тобто при перестановці співмножників права трійка переходить у ліву, а ліва в праву.

3. Мішаний добуток є лінійним за кожним із множників, тобто для довільних чисел λ, μ та довільних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ справедливі рівності:

$$\left(\lambda\vec{a}+\mu\vec{d},\vec{b},\vec{c}\right)=\lambda\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)+\mu\left(\vec{d},\vec{b},\vec{c}\right),$$

$$\left(\vec{a},\lambda\vec{b}+\mu\vec{d},\vec{c}\right)=\lambda\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)+\mu\left(\vec{a},\vec{d},\vec{c}\right),$$

$$\left(\vec{a},\vec{b},\lambda\vec{c}+\mu\vec{d}\right)=\lambda\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)+\mu\left(\vec{a},\vec{b},\vec{d}\right).$$

За допомогою мішаного добутку одержимо необхідну та достатню умову компланарності трьох векторів $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$$

(паралелепіпеда немає).

Якщо вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ задано координатами

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k};$$
$$\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k};$$
$$\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k},$$

то, використовуючи вирази в координатах для векторного та скалярного добутків, одержимо:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Отже, якщо вектори задані своїми координатами, то мішаний добуток знаходять за формулою:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{5.5}$$

Геометричний зміст мішаного добутку – обчислення об'єму паралелепіпеда, який побудований на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, як на сторонах, рис. 5.2 (випадок правої трійки векторів):

$$V_{пар} = \left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|. \tag{5.6}$$

Для об'єму піраміди маємо наступну формулу:

$$V_{піраміди} = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|. \tag{5.7}$$

Фізичний зміст векторного добутку

Моментом сили $\vec{F}$ відносно точки O (центра) називається вектор, що дорівнює векторному добутку радіуса-вектора $\vec{r}$, проведеного з центра O в точку A прикладення сили на вектор сили $\vec{F}$ (рис. 5.3):

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}\right) = \vec{r} \times \vec{F}\,. \tag{5.8}$$

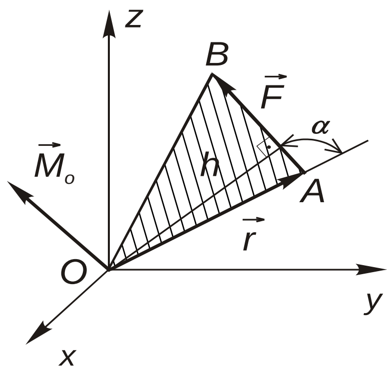


Рис. 5.3. Фізична інтерпретація векторного добутку

Модуль момента сили

$$\left|\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)\right| = \left|\vec{r}\right| \cdot \left|\vec{F}\right| \sin\left(\vec{r}, \widehat{\ \vec{F}}\right) = \left|\vec{r}\right| \cdot \left|\vec{F}\right| \sin\alpha.$$

Момент сили $\vec{F}$ відносно центра O чисельно дорівнює добутку сили на плече і направлений перпендикулярно площині, що проходить через точку O і лінію дії сили, в той бік, звідки «обертання» тіла під дією сили відносно точки O (або найкоротший поворот вектора $\vec{r}$ до суміщення з вектором $\vec{F}$) було б видно проти руху стрілки годинника.

З формули (5.8) можна знайти проекції вектора $\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)$ на осі декартової прямокутної системи координат, початок якої співпадає з центром момента O. Відомо, що векторний добуток $\vec{r}\times\vec{F}$ можна представити визначником

$$\vec{r}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix},$$

де $\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}$ – орти вибраної системи координат; x, y, z – проекції вектора $\vec{r}$ на координатні осі; $F_x\,,F_y\,,F_z$ – проекції вектора сили $\vec{F}$ на осі координат.

Необхідна та достатня умова компланарності трьох векторів

Теорема. *Для того щоб вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ були компланарними, необхідно і достатньо, щоб їх мішаний добуток дорівнював нулю.*

Доведення. Необхідність. Нехай вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – компланарні. Без будь-якої втрати загальності можна вважати, що вони мають спільний початок. Але тоді ці вектори лежать в одній площині і об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, дорівнює нулю: $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=0$.

Достатність. Нехай $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=0$. Тоді або один з векторів $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right),\vec{c}$ дорівнює нулю або вектори $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right),\vec{c}$ взаємно-перпендикулярні (це означає, вектор $\vec{c}$ лежить у площині векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$). В обох випадках вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ є компланарними.

Зауваження. Для того, щоб вектори $\vec{a}\left(a_x;a_y;a_z\right)$, $\vec{b}\left(b_x;b_y;b_z\right)$, $\vec{c}\left(c_x;c_y;c_z\right)$ були компланарними, необхідно і достатньо, щоб

$$\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=0.$$

5.3. Лінійно залежна та лінійно незалежна система векторів

Означення. Вектор $\vec{X}_m$ називають *лінійною комбінацією* векторів $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{m-1}$ векторного простору, якщо він дорівнює сумі добутків векторів на довільні дійсні числа:

$$\vec{X}_m = \lambda_1 \vec{X}_1 + \lambda_2 \vec{X}_2 + \ldots + \lambda_{m-1} \vec{X}_{m-1},$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1} \in \mathbb{R}$.

Вектори $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{m-1}, \vec{X}_m$ в сукупності можна розглядати як деяку систему векторів.

Означення. Систему векторів $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_m$ векторного простору називають *лінійно залежною,* якщо існують такі числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, які не дорівнюють одночасно нулю, що $\lambda_1 \vec{X}_1 + \lambda_2 \vec{X}_2 + \ldots + \lambda_m \vec{X}_m = 0$.

Означення. Систему векторів $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_m$ називають *лінійно незалежною,* якщо рівність

$$\lambda_1 \vec{X}_1 + \lambda_2 \vec{X}_2 + \ldots + \lambda_m \vec{X}_m = 0$$

має зміст тоді і тільки тоді, коли

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{m-1} = \lambda_m = 0.$$

Теорема 1. *Якщо система лінійно залежна, то хоча б один з векторів системи лінійно виражається через інші.*

Теорема 2. (*обернена). Якщо один з векторів системи виражається лінійно через інші вектори, то така система лінійно залежна*.

Означення. *Рангом* системи векторів називають максимальну кількість лінійно незалежних векторів системи.

Властивості системи векторів

1. Якщо серед системи векторів $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{m-1}, \vec{X}_m$ є нульовий вектор, то всі ці вектори лінійно залежні.

2. Якщо частина системи векторів $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{m-1}, \vec{X}_m$ лінійно залежна, то й уся система буде лінійно залежною.

Дійсно, якщо, наприклад, вектори $\vec{X}_2,\dots,\vec{X}_m$ лінійно залежні, то справджується рівність $\lambda_2\vec{X}_2+\ldots+\lambda_m\vec{X}_m=0$, в якій не всі числа дорівнюють нулеві.

Проте, тоді з тими самими числами та $\lambda_1=0$ буде справджуватися рівність

$$\lambda_1\vec{X}_1+\lambda_2\vec{X}_2+\ldots+\lambda_m\vec{X}_m=0,$$

у якій теж не всі $\lambda_i=0,\quad i=1,...,m.$

Алгоритм перевірки лінійної залежності (незалежності) системи векторів $\vec{X}_1,\vec{X}_2,\dots,\vec{X}_n$

1. Скласти лінійну комбінацію з векторів $\vec{X}_1,\vec{X}_2,\dots,\vec{X}_n$ та невідомих дійсних чисел $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$:

$$\lambda_1\vec{X}_1+\lambda_2\vec{X}_2+\ldots+\lambda_n\vec{X}_n=0.$$

В отриману рівність замість векторів $\vec{X}_1,\vec{X}_2,\dots,\vec{X}_n$ підставити їх координати.

2. Використовуючи властивості операції множення вектора на число та додавання векторів, з рівності отримати однорідну систему лінійних рівнянь щодо невідомих $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$.

3. Розв'язати систему лінійних однорідних рівнянь. Якщо визначник не дорівнює нулю, робимо висновок, що система лінійно незалежна, оскільки єдиним розв'язком системи є $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0.$

Якщо визначник дорівнює нулю, то робимо висновок, що система лінійно залежна, оскільки вона має безліч розв'язків, серед яких є ненульові.

Приклад. Чи будуть лінійно незалежними системи векторів:

а) $\vec{X}_1=(1;3;2),\quad \vec{X}_2=(-1;0;2)$;

б) $\vec{X}_1=(1;2),\quad \vec{X}_2=(3;-1),\quad \vec{X}_3=(1;0)$?

Розв'язування. а) Складемо векторну рівність $\lambda_1\vec{X}_1+\lambda_2\vec{X}_2$, яку запишемо через координати векторів:

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$\begin{cases}\lambda_1-\lambda_2=0,\\3\lambda_1=0,\\2\lambda_1+2\lambda_2=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0+0=0,\\\lambda_2=0,\\\lambda_1=0.\end{cases}$$

Отримали $\lambda_1=\lambda_2=0$, за означенням система векторів $\vec{X}_1,\vec{X}_2$ лінійно незалежна.

Відповідь: система лінійно незалежна.

б) Складемо векторну рівність $\lambda_1\vec{X}_1+\lambda_2\vec{X}_2+\lambda_3\vec{X}_3=0$ або

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

$$\begin{cases}\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3=0,\\2\lambda_1-\lambda_2=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_3=-7\lambda_1,\\\lambda_2=2\lambda_1.\end{cases}$$

Нехай $\lambda_1=1$, тоді $\lambda_2=2,\lambda_3=-7$, за означенням система $\vec{X}_1,\vec{X}_2,\vec{X}_3$ лінійно залежна.

Відповідь: система лінійно залежна.

Теорема. *Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – не колінеарні, то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ утворюють правий базис.*

Доведення. Достатньо показати, що визначник матриці переходу від базису $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ до базису $\left(\vec{a};\vec{b};\vec{a}\times\vec{b}\right)$ є додатним. Для зручності запишемо визначник, транспонований по відношенню до визначника матриці T, і розкладемо його за елементами останнього рядка:

$$\det T=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ \begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\right)^2+\left(\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\right)^2+\left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)^2>0,$$

оскільки $\vec{a}$ та $\vec{b}$ – не колінеарні.

Базис, розклад вектора за базисними

Означення. Лінійною комбінацією векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_k}$ з дійсними коефіцієнтами $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ називається довільний вектор $\alpha_1\overrightarrow{a_1}+\alpha_2\overrightarrow{a_2}+...+\alpha_k\overrightarrow{a_k}$.

Якщо вектор поданий у вигляді лінійної комбінації деяких векторів, то кажуть, що він розкладений за цими векторами.

Означення. Вектори $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_k}$ називаються *лінійно залежними*, якщо існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$, що $\alpha_1\overrightarrow{a_1}+\alpha_2\overrightarrow{a_2}+...+\alpha_k\overrightarrow{a_k}=\vec{0}$ за умови $\alpha_1^2+\alpha_2^2+...+\alpha_k^2\neq 0$.

Якщо рівність $\alpha_1\overrightarrow{a_1}+\alpha_2\overrightarrow{a_2}+...+\alpha_k\overrightarrow{a_k}=\vec{0}$ справджується лише при $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_k=0$, то вектори $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_k}$ називаються лінійно незалежними.

Два колінеарні вектори – лінійно залежні, а *два неколінеарні вектори – лінійно незалежні.*

Три компланарні вектори – лінійно залежні, а *три некомпланарні вектори – лінійно незалежн*і. Чотири вектори в тривимірному просторі завжди лінійно залежні.

Означення. Базисом $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ векторів на площині називається упорядкована пара лінійно незалежних (неколінеарних) векторів $\overrightarrow{e_1}$ і $\overrightarrow{e_2}$.

Всякий вектор $\vec{d}$ площини можна подати у вигляді лінійної комбінації базисних векторів: $\vec{d}=\alpha\overrightarrow{e_1}+\beta\overrightarrow{e_2}$. Числа α і β називають координатами вектора $\vec{d}$ у базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ і пишуть $\vec{d}=(\alpha;\beta)$, сума $\vec{d}=\alpha\overrightarrow{e_1}+\beta\overrightarrow{e_2}$ − розклад вектора за цим базисом.

Означення. Базисом $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ в просторі називається упорядкована трійка лінійно незалежних (некомпланарних) векторів.

Всякий вектор $\vec{d}$ простору можна розкласти за базисом $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$: $\vec{d} = \alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2} + \gamma\vec{e_3}$, α, β, γ називають координатами вектора $\vec{d}$ у цьому базисі пишуть $\vec{d} = (\alpha; \beta; \gamma)$.

Необхідна і достатня умова компланарно**сті** або лінійної залежності векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ виражається рівністю: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$.

Приклад 1. Знайдіть подання вектора $\vec{a} = 5\vec{i} + 4\vec{j}$ у базисі векторів $\vec{p} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\quad \vec{q} = -\vec{i} + 2\vec{j}$.

Розв'язування.

Переконуємось, що вектори $\vec{p}$ та $\vec{q}$ утворюють базис: $\frac{2}{-1} \neq \frac{3}{2}$. Записуємо розклад $\vec{a} = \alpha\vec{p} + \beta\vec{q}$, де коефіцієнти α, β підлягають визначенню:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Тоді система лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta = 5, \\ 3\alpha + 2\beta = 4, \end{cases}$$

має єдиний розв'язок: $\alpha = 2, \beta = -1$. Отже, $\vec{a} = 2\vec{p} - \vec{q}$.

Приклад 2. Дано: $\bar{a} = (1;0;2)$, $\bar{b} = (3;-1;1)$, $\bar{c} = (2;1;0)$. Перевірити чи утворюють дані вектори базис. Якщо так, то знайти координати вектора $\vec{d}(2;1;3)$ в цьому базисі.

Розв'язування. 1) Знайдемо мішаний добуток даних векторів:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 9 \neq 0,$$ значить, дані вектори

некомпланарні, тобто утворюють базис.

1) Виразимо вектор $\vec{d}$ через вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$: $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$:

$$\overrightarrow{(2;1;3)} = \alpha\overrightarrow{(1;0;2)} + \beta\overrightarrow{(3;-1;1)} + \gamma\overrightarrow{(2;1;0)}$$

Складаємо систему рівнянь $\begin{cases} \alpha + 3\beta + 2\gamma = 2, \\ 0\alpha - \beta + \gamma = 1, \\ 2\alpha + \beta + 0\gamma = 3. \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{5}; \; \beta = -\frac{1}{3}; \; \gamma = \frac{1}{3}$

Отже, $\vec{d} = \frac{3}{5}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$, $\vec{d} = \left(\frac{4}{15}; \frac{2}{3}; \frac{13}{15}\right)$.

Завдання для самоконтролю

1. Що називається векторним добутком двох векторів? Основні властивості векторного добутку.

2. Як обчислюється площа паралелограма, побудованого на двох векторах?

3. Сформулювати фізичний зміст векторного добутку, навести приклад.

4. Навести приклади двох векторів, заданих координатами. Обчислити скалярний, векторний добутки, кут між векторами, напрямні косинуси векторів.

5. Означити мішаний добуток трьох векторів, сформулювати основні властивості.

6. Як обчислюється об’єм паралелепіпеда?

7. У чому полягає умова компланарності трьох векторів?

8. Як обчислюється площа трикутника, якщо відомі координати його вершин?

9. Умови паралельності і перпендикулярності векторів.

10. Яка система векторів називається лінійно залежною, лінійно незалежною?

11. Знайдіть подання вектора $\vec{a} = 5\vec{i} - 8\vec{j}$ у базисі векторів $\vec{p} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{q} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$.

12. Дано вектори: $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = 6\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k}$. Довести: вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні; 2) вектори $\vec{a}$ і $\vec{c}$ колінеарні; 3) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні.

Відповідь. 11. $\vec{a} = -2\vec{p} + 3\vec{q}$. 12. 1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$; 2) $\vec{c} = 2\vec{a}$; 3) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$.

Тема 1.3. Елементи аналітичної геометрії на площині та в просторі

Лекція 6. Аналітична геометрія в просторі. Площина в просторі

6.1. Рівняння поверхні в просторі.

6.2. Рівняння лінії у просторі.

6.3. Загальне рівняння площини**.**

6.4. Площина в відрізках.

6.5. Взаємне розміщення двох площин.

6.6. Рівняння площини, що проходить через три задані точки.

6.1. Рівняння поверхні в просторі

У просторі трьох вимірів x, y, z поряд з одновимірними образами (лініями) доводиться розглядати ще й двовимірні образи (поверхні). Питання про рівняння поверхні багато в чому аналогічне питанню про рівняння плоскої лінії.

Розглянемо деяке рівняння з трьома змінними x, y, z:

$$F\left(x, y, z\right) = 0. \tag{6.1}$$

Введемо у просторі прямокутну декартову систему координат. Числа x, y, z будемо вважати координатами деякої точки $M\left(x; y; z\right)$ у цій системі. Для координат $\left(x; y; z\right)$ одних точок рівняння (6.1) задовольняється, а для координат інших точок – ні. Розглянемо множину s всіх точок простору, координати яких задовольняють рівнянню (6.1). Ця множина точок є, взагалі кажучи, деякою поверхнею у просторі. Дійсно, розглянемо спочатку випадок, коли рівняння (6.1) можна розв’язати відносно z, тобто виразити z як функцію від x і y:

$$z = f\left(x, y\right). \tag{6.2}$$

Покладемо $x = x_1$, $y = y_1$ і обчислимо значення $z_1 = f\left(x_1, y_1\right)$. Трійка чисел x_1, y_1, z_1 є розв’язком рівняння (6.2).

Означення. Сукупність всіх пар чисел x і y, для яких $z = f(x, y)$ приймає дійсне значення, називається областю визначення, заданою рівнянням (6. 2). Позначимо цю область через D.

Введемо прямокутну декартову систему координат (рис. 6.1) і розглянемо у площині xOy всі можливі точки $N(x; y; 0)$, координати x і y яких, як пари чисел, входять до області визначення D. Через кожну з цих точок проведемо перпендикуляр до площини xOy і відкладемо на ньому відрізок NM, що дорівнює (з врахуванням знака) відповідному значенню z, обчисленому з рівняння (6.2).

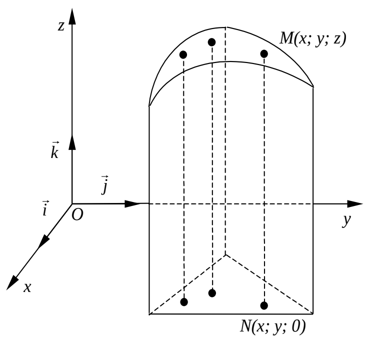


Рис. 6.1. Поверхня в просторі

Множина s всіх точок $M(x; y; f(x, y))$ утворює деяку поверхню.

Означення. Якщо задано рівняння (6.1), то *поверхнею*, що визначається цим рівнянням, називається множина S всіх точок простору, координати яких задовольняють даному рівнянню.

Означення. Якщо задано деяку поверхню s у просторі, то *рівнянням цієї поверхні* називається таке рівняння (6.1), яке визначає поверхню, що співпадає з поверхнею s.

Приклад. Знайти рівняння координатної площини xOy.

Розв'язування. Ця площина є геометричним місцем точок простору, для яких $z = 0$.

Будь-яка точка $M(x;\, y;\, z)$, яка задовольняє рівнянню $z=0$, лежить на площині xOy. Аналогічно, $x=0$ є рівнянням координатної площини yOz, а $y=0$ – координатної площини xOz.

Аналогічно поняттю алгебраїчної лінії на площині вводиться поняття алгебраїчної поверхні.

Означення. Поверхня називається *алгебраїчною*, якщо її рівняння (6.1) є алгебраїчним. Степінь рівняння алгебраїчної поверхні називається порядком цієї поверхні.

Так, сфера $x^2+y^2+z^2=R^2$ є поверхнею другого порядку, а площина $z=0$ поверхнею першого порядку.

Якщо поверхня визначається не алгебраїчним рівнянням, то її називають неалгебраїчною або трансцендентною.

6.2. Рівняння лінії у просторі

В аналітичній геометрії на площині одне рівняння з двома змінними x і y визначає множину точок площини, координати $(x;\, y)$ яких задовольняють цьому рівнянню, тобто геометричне місце точок, яке є лінією. Два сумісних рівняння з двома змінними визначають одну чи декілька точок площини.

У просторі ситуація дещо інша, оскільки розглядаються рівняння з трьома змінними. Одне рівняння з трьома змінними $x,\, y,\, z$ визначає множину точок простору, координати $(x;\, y;\, z)$ яких задовольняють цьому рівнянню, тобто геометричне місце точок, яке є поверхнею.

Якщо задано систему двох сумісних рівнянь

$$\begin{cases} F(x,\, y,\, z)=0, \\ \Phi(x,\, y,\, z)=0, \end{cases} \tag{6.3}$$

то у просторі існує геометричне місце точок, координати яких задовольняють обом рівнянням.

Такі точки лежать одночасно на обох поверхнях, тобто на лінії перетину цих поверхонь.

Отже, приходимо до такого означення.

Означення. *Рівнянням лінії* у просторі є система (6.3) двох рівнянь з трьома змінними, якій задовольняють координати всіх точок даної лінії і тільки цих точок, тобто координати точок, які не лежать на даній лінії, не задовольняють обом рівнянням системи (6.3) одночасно. Лінія, яка зображає пару рівнянь, є лінією перетину поверхонь, які зображають кожне з цих двох рівнянь окремо.

Приклад. Знайти рівняння координатних осей.

Розв'язування. У всіх точок осі Oz і тільки у них координати x і y дорівнюють нулю. Тому рівнянням осі Oz є система

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases} \tag{6.4}$$

Перше з рівнянь (6.4) є рівнянням площини yOz, а друге – площини xOz. Лінія перетину цих площин є віссю Oz.

Аналогічно, системи $\begin{cases} y = 0, \\ z = 0, \end{cases}$ та $\begin{cases} x = 0, \\ z = 0, \end{cases}$ є рівняннями відповідно координатних осей Ox та Oy.

6.3. Загальне рівняння площини

Означення. Лінійним рівнянням відносно змінних x, y та z називається рівняння вигляду

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{6.5}$$

де A, B, C – сталі, які не дорівнюють нулю одночасно, тобто $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Теорема 1. *Будь-яку площину у декартовій прямокутній системі координат можна задати лінійним рівнянням (6.5). Навпаки, будь-яке лінійне рівняння (6.5) відносно декартових координат є рівнянням площини.*

Доведення. Нехай у просторі задано декартову прямокутну систему координат і деяку площину α (рис. 6.2).

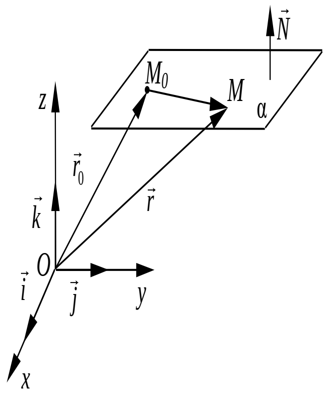


Рис. 6.2. Площина в просторі

Площина α однозначно визначається точкою M_0, через яку вона проходить, і ненульовим вектором $\vec{N}(A; B; C)$, перпендикулярним до цієї площини. Нехай $M(x, y, z)$ – змінна точка площини α. Введемо радіуси-вектори точок M_0 і M: $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$ та $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

Вектор $\overrightarrow{M_0M}$, який з'єднує задану точку M_0 площини α з довільною точкою $M(x, y, z)$ цієї площини, перпендикулярний вектору $\vec{N}$. Тому скалярний добуток цих векторів дорівнює нулю:

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{N} = 0 \Leftrightarrow (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{N} = 0. \qquad (6.6)$$

Якщо точка $M(x, y, z)$ не лежить на площині α, то умова перпендикулярності векторів $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{N}$ порушується, а тому рівність (6.6) не виконується. Отже, рівнянню (6.6) задовольняють радіуси-вектори $\vec{r}$ тільки тих точок, які лежать на площині α, тобто рівняння (6.6) є рівнянням цієї площини.

Якщо точки M_0 і M мають координати $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і $M(x; y; z)$, то в координатній формі рівняння (6.6) набуває вигляду

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (6.7)$$

де $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$.

У вигляді (6.6) або (6.7) можна подати рівняння будь-якої площини, оскільки будь-яка площина перпендикулярна деякому вектору $\vec{N}$ і проходить через деяку точку M_0.

Доведемо обернене: всі точки, координати яких задовольняють рівнянню (6.5) або (6.7), заповнюють площину, перпендикулярну вектору $\vec{N}(A; B; C)$. Для доведення знайдемо який-небудь частинний розв'язок рівняння (6.7). Щоб це зробити, достатньо в рівнянні (6.7) двом невідомим, наприклад, x та y надати довільних значень $x = x_0$, $y = y_0$, а третю невідому змінну z_0 знайти з цього рівняння. Отже, нехай x_0, y_0, z_0 – розв'язок рівняння (6.7), тобто

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \tag{6.8}$$

Віднявши від рівняння (6.7) тотожність (6.8), отримуємо рівняння, рівносильне (6.7):

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{6.9}$$

У рівнянні (6.9) x, y, z будемо розглядати як координати довільної точки M, тобто $\vec{r} = \overrightarrow{OM}(x; y; z)$, а частинний розв'язок x_0, y_0, z_0 – як координати фіксованої точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, тобто $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}(x_0; y_0; z_0)$, деякої поверхні S.

У векторній формі рівняння (6.9) має вигляд

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{N} = 0.$$

З останнього рівняння випливає, що всі точки, координати яких задовольняють цьому рівнянню, а отже і рівносильному йому рівнянню (6.5), заповнюють площину, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{N}(A; B; C)$.

Теорему 1 доведено.

Означення. Рівняння (6.5) називається *загальним рівнянням площини*, а вектор $\vec{N}(A; B; C)$ – *нормальним вектором площини*.

Зауваження 1. Вектор $\vec{a}(m;\ n;\ p)$ буде паралельним до площини (6.5) тоді і тільки тоді, коли він перпендикулярний до нормального вектора $\vec{N}(A;\ B;\ C)$ цієї площини, тобто

$$\vec{a}\cdot\vec{N}=0 \Leftrightarrow Am+Bn+Cp=0. \qquad (6.10)$$

Отже, рівність (6.10) є необхідною і достатньою умовою паралельності вектора $\vec{a}$ і площини (6.5).

Зауваження 2. Легко перевірити, що вектори $\vec{a}_1(B;\ -A;\ 0)$, $\vec{a}_2(C;\ 0;\ -A)$, $\vec{a}_3(0;\ C;\ -B)$ паралельні до площини (6.5).

Дійсно,

$$\vec{a}_1\cdot\vec{N}=AB-BA+0=0,\ \vec{a}_2\cdot\vec{N}=AC+0-CA=0,\ \vec{a}_3\cdot\vec{N}=0+BC-CB=0.$$

Окремі випадки загального рівняння площини

1. Нехай $D=0$. Тоді рівняння площини має вигляд $Ax+By+Cz=0$ і площина проходить через початок координат.

2. Нехай $C=0$. Тоді рівняння площини має вигляд $Ax+By+D=0$ і площина паралельна осі Oz. Аналогічно, для $A=0, B=0$ дістанемо площини $By+Cz+D=0$ і $Ax+Cz+D=0$, паралельні відповідно осям Ox і Oy.

3. Нехай $C=D=0$. Тоді рівняння площини має вигляд $Ax+By=0$ та площина проходить через початок координат і вісь Oz. Аналогічно, для $A=D=0$ та $B=D=0$ дістанемо площини $By+Cz=0$ та $Ax+Cz=0$, які проходять відповідно через осі Ox і Oy.

4. Нехай $B=C=0$. Тоді рівняння площини має вигляд $Ax+D=0$, площина паралельна осям Oy і Oz, перпендикулярна до осі Ox, тобто паралельна координатній площині Oyz. Аналогічно, для $A=B=0$ та $A=C=0$ дістанемо площини $Cz+D=0$ і $By+D=0$, які є паралельні відповідно до координатних площин Oxy та Oxz.

5. Нехай $B=C=D=0$. Тоді рівняння площини має вигляд $Ax=0$, площина збігається з площиною Oyz.

Аналогічно, для $A = B = D = 0$ та $A = C = D = 0$ дістанемо площини $Cz = 0$ і $By = 0$, які збігаються відповідно з координатними площинами Oxy та Oxz.

6.4. Площина в відрізках

Нехай рівняння (6.5) повне ($A, B, C, D \neq 0$), тоді маємо $Ax + By + Cz = -D$,

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1.$$

Якщо позначити $a = -\dfrac{D}{A}$, $b = -\dfrac{D}{B}$, $c = -\dfrac{D}{C}$, то маємо

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (6.11)$$

Рівняння (6.11) називають рівнянням *площини у відрізках* на осях.

Точки перетину площини з відповідними осями координат є такими: $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, модулі чисел a, b, c є довжинами відрізків, які відтинає площина на відповідних координатних осях.

Зауваження 3. Якщо один з коефіцієнтів A, B, C дорівнює нулю, наприклад, $C = 0$, то замість рівняння (6.11) отримуємо рівняння

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1, \qquad (6.12)$$

де p і q мають той же самий геометричний зміст, що і в рівнянні (6.11). Рівняння (6.12) визначає площину α, яка паралельна осі Oz і перетинає осі Ox та Oy відповідно у точках $M_1(p;\, 0;\, 0)$, $M_2(0;\, q;\, 0)$ (рис. 6.3).

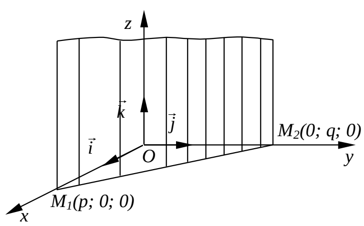


Рис. 6.3. Вигляд площини

Аналогічно записуються рівняння площини для випадків, коли $A = 0$ або $B = 0$.

Зауваження 4. Якщо площина проходить через початок координат, тобто $D = 0$, то всі три точки перетину її з осями координат співпадають з $O(0;\,0;\,0)$. Щоб побудувати таку площину, потрібно взяти ще які-небудь дві точки, що належать цій площині. Найпростіше взяти точки, які лежать на координатних площинах, і через ці дві точки і точку $O(0;\,0;\,0)$ побудувати ескіз площини.

6.5. Взаємне розміщення двох площин

Кут між двома площинами

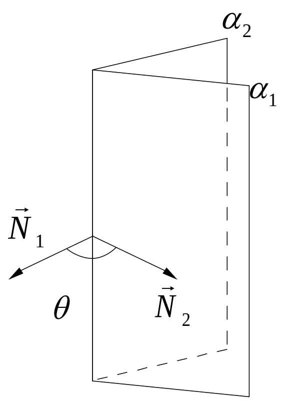


Рис. 6.4. Кут між площинами

Двогранний кут між двома площинами вимірюється лінійними кутами. Лінійний кут дорівнює куту між векторами $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$ двох заданих площин (теорема про рівність кутів із взаємно перпендикулярними сторонами).

Кут між двома площинами $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, які перетинаються, дорівнює куту між їх нормальними векторами $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ та $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ і обчислюється за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}\,. \qquad (6.13)$$

Якщо дві площини паралельні, то їх нормальні вектори $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$ повинні бути колінеарними, тобто

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

Площини перпендикулярні, їх нормальні вектори $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$ також повинні бути перпендикулярні, тобто

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

Задача про взаємне розміщення двох площин з алгебраїчної точки зору зводиться до дослідження системи двох рівнянь

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \tag{6.14}$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \tag{6.15}$$

з трьома невідомими $x,\ y,\ z$. Необхідною і достатньою умовою сумісності системи рівнянь (6.14), (6.15) є за теоремою Кронекера-Капеллі рівність

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}=\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix},$$

де символом $rang$ позначено ранг матриці.

Резюмуючи викладене вище, приходимо до справедливості наступних теорем.

Теорема 1. *Для того щоб площини (6.14) і (6.15) перетинались, необхідно і достатньо виконання будь-якої з наступних умов:*

1°. Хоча б один з визначників

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

відмінний від нуля.

2°. Нормальні вектори $\vec{N}_1(A_1;B_1;C_1)$ і $\vec{N}_2(A_2;B_2;C_2)$ даних площин неколінеарні.

3°. $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}=2$.

Теорема 2. *Необхідною і достатньою умовою паралельності площин (6.14) і (6.15) є виконання однієї з трьох умов:*

1°. $\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=0$,

але хоча б один з визначників $\begin{vmatrix} A_1 & D_1 \\ A_2 & D_2 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} B_1 & D_1 \\ B_2 & D_2 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} C_1 & D_1 \\ C_2 & D_2 \end{vmatrix}$ *не дорівнює нулю.*

2°. Нормальні вектори $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$ даних площин колінеарні, але

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}=\frac{C_2}{C_1}\neq\frac{D_2}{D_1}.$$

3°. $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}=1$, $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}=2$.

Теорема 3. *Для того щоб площини (6.14) і (6.15) співпадали, необхідно і достатньо виконання однієї з трьох умов:*

1°. $\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_1 & D_1 \\ A_2 & D_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} B_1 & D_1 \\ B_2 & D_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} C_1 & D_1 \\ C_2 & D_2 \end{vmatrix}=0$.

2°. Нормальні вектори $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$ площин колінеарні і $\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}=\frac{C_2}{C_1}=\frac{D_2}{D_1}$.

3°. $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}=\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}=1$.

6.6. Рівняння площини, що проходить через три задані точки

Нехай площина (α) задана в просторі своїми трьома точками $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$. Нехай точка $M(x;y;z)-$ довільна точка простору. Очевидно, $M\in(\alpha)\Leftrightarrow\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}-$компланарні Запишемо умову компланарності векторів (мішаний добуток дорівнює 0):

$$\overrightarrow{M_1M}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\overrightarrow{M_1M_3}=0.$$

Виразимо мішаний добуток трьох векторів через координати векторів, маємо:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \tag{6.16}$$

Отже, координати кожної точки, яка лежить у площині (α), задовольняють рівняння (6.16), відповідно, (6.16) називають *рівнянням площини, що проходить через три задані точки.*

Умову, що чотири точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$, $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$ лежать в одній площині, можна записати так:

$$\begin{vmatrix} x_0-x_1 & y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Зауваження 5. Введемо радіус-вектори точок M_1, M_2, M_3, M: $\vec{r}_1=\overrightarrow{OM_1}(x_1;\, y_1;\, z_1)$, $\vec{r}_2=\overrightarrow{OM_2}(x_2;\, y_2;\, z_2)$, $\vec{r}_3=\overrightarrow{OM_3}(x_3;\, y_3;\, z_3)$ та $\vec{r}=\overrightarrow{OM}(x;\, y;\, z)$. Умовою компланарності цих трьох векторів є рівність нулю їх мішаного добутку, тобто

$$\overrightarrow{M_1M}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\overrightarrow{M_1M_3}=0 \Leftrightarrow (\vec{r}-\vec{r}_1)\cdot(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\cdot(\vec{r}_3-\vec{r}_1)=0,$$

яке називається *векторним рівнянням площини*, що проходить через точки M_1, M_2, M_3.

Завдання для самоконтролю

1. Отримати загальне рівняння площини, записати координати нормального вектора.

2. Записати і пояснити неповні рівняння площини.

3. Яке рівняння називається рівнянням площини у відрізках на осях?

4. Визначити кут між двома площинами. Записати формулу для його обчислення.

5. Записати умови перпендикулярності та паралельності двох площин.

6. Складіть рівняння площини, яка проходить через точку $M(-2;3;1)$ та вісь Oz.

7. Складіть рівняння площини, яка проходить через точки $A(2;-1;2)$ і $B(3;0;4)$) та перпендикулярна до площини $x+2y-z=0$.

8. Обчисліть кут між площинами $2x-3y+5z-2=0$ і $x-y+z=0$.

9. За обраними трьома точками скласти рівняння площини, яка через них проходить.

Відповіді. 6. $3x+2y=0$. 7. $5x-3y-z-11=0$. 8. $\cos\varphi=\frac{10}{\sqrt{114}}=0,937;\ \varphi=20^\circ$.

Лекція 7. Площини в просторі. Нормальне рівняння площини

7.1. Нормальне рівняння площини. Відстань від точки до площини.

7.2. Пучок площин.

7.3. В’язка площин.

7.4. Взаємне розміщення трьох площин у просторі.

7.1. Нормальне рівняння площини. Відстань від точки до площини

Нехай в просторі задана площина (α):

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Через початок координат проведемо перпендикуляр до площини (α) і позначимо точку його перетину з площиною через P. Довжину відрізку OP позначимо через p. За додатній напрям нормалі до площини приймемо напрям від початку координат до точки P.

Кути, які утворює вектор нормалі з координатними осями Ox, Oy, Oz, позначимо відповідно через α, β, γ, отже, координати орта нормалі будуть $\vec{N} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Візьмемо точку $M(x, y, z)$ і спроектуємо її радіус-вектор $\vec{r}$ на нормаль:

$$np_{\vec{N}}\vec{r} = \vec{r} \cdot \vec{N} = x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma.$$

З другого боку, точка $M \in (\alpha) \Leftrightarrow np_{\vec{N}}\vec{r} = p.$

Таким чином, маємо

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma - p = 0. \qquad (7.1)$$

Рівняння (7.1) називають ***нормальним рівнянням площини.***

Загальне рівняння площини $Ax + By + Cz + D = 0$ зводять до нормального рівняння, помноживши його на нормуючий множник

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

знак якого треба брати протилежним знаку вільного члена.

Відстань d точки від площини обчислюють через нормальне рівняння площини.

Означення. ***Відхиленням*** точки M від площини називається число $\delta = d$, якщо точка M і початок координат лежать по різні сторони від площини, і число $\delta = -d$, якщо вони лежать по одну сторону від неї.

Нехай відома точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і площина задана нормальним рівнянням

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.$$

Тоді справедлива формула

$$d = \left|x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p\right| = |\delta|. \tag{7.2}$$

Якщо площина задана загальним рівнянням, то

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{7.3}$$

Таким чином, відхилення точки від площини дорівнює результату підстановки координат точки в ліву частину нормального рівняння площини.

Зауваження. Задача обчислення відстані від точки до площини. Нехай у декартовій прямокутній системі координат площину (α) задано загальним або рівнянням у векторній формі $\vec{r} \cdot \vec{N} + D = 0$, де $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ – радіус-вектор змінної точки $M(x;\, y;\, z)$ площини (α), а $\vec{N}(A;\, B;\, C)$ – нормальний вектор цієї площини. Знайдемо відстань від точки $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$ до площини (α) (рис. 7.1).

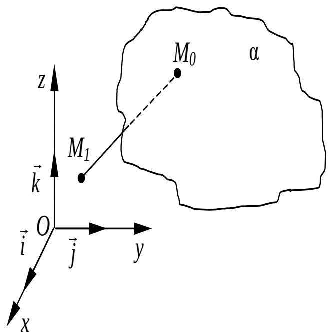


Рис. 7.1.
Обчислення відстані

Позначимо через M_0 основу перпендикуляра, опущеного з точки M_1 на площину (α). Шукана відстань d дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$. Якщо $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OM_1}$ – радіус-вектор точки M_1, то отримуємо векторну рівність

$$\overrightarrow{M_0M_1} = \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{N} + D}{\left|\vec{N}\right|^2}\vec{N},$$

звідки випливає, що $d = \left|\overrightarrow{M_0M_1}\right| = \frac{\left|\vec{r}_1 \cdot \vec{N} + D\right|}{\left|\vec{N}\right|^2}\left|\vec{N}\right| = \frac{\left|\vec{r}_1 \cdot \vec{N} + D\right|}{\left|\vec{N}\right|}$ або в координатній формі

$$d = \frac{\left|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

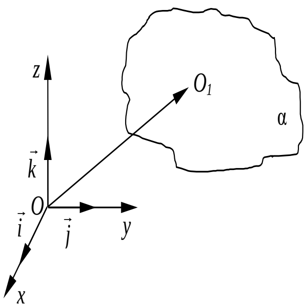


Рис. 7.2.
Частинний випадок формули

Розглянемо частинний випадок, коли точка M_1 співпадає з початком координат O (рис. 7.2). Ортогональну проекцію точки O на площину (α) позначимо через O_1. Тоді отримуємо

$$\overrightarrow{O_1O} = \frac{D}{\left|\vec{N}\right|^2}\vec{N}$$

і для відстані d_0 від початку координат до площини (α) можна записати

$$d_0 = \left|\overrightarrow{O_1O}\right| = \frac{|D|}{\left|\vec{N}\right|^2}\left|\vec{N}\right| = \frac{|D|}{\left|\vec{N}\right|} = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

що безпосередньо випливає із наведених вище формул.

7.2. Пучок площин

Розглянемо дві площини

$$\begin{aligned} (\alpha_1)&: \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ (\alpha_2)&: \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{aligned} \tag{7.4}$$

які перетинаються по прямій l.

Означення. Множину всіх площин, які проходять через пряму l, *називають пучком площин*. Пряму l називають *віссю пучка.*

Задача полягає у знаходженні загального рівняння, що визначає пучок площин з віссю l.

Теорема. *Якщо у декартовій прямокутній системі координат пучок площин* (w) *задано двома площинами (7.4), які перетинається, то рівняння*

$$\lambda\left(A_1x+B_1y+C_1z+D_1\right)+\mu\left(A_2x+B_2y+C_2z+D_2\right)=0, \qquad (7.5)$$

де λ *і* μ *можуть приймати довільні значення, не рівні одночасно нулю, визначає даний пучок* (w).

Доведення. Насамперед доведемо, що рівняння (7.5) є лінійним рівнянням щодо змінних x, y, z. Для цього запишемо його у вигляді

$$\left(\lambda A_1+\mu A_2\right)x+\left(\lambda B_1+\mu B_2\right)y+\left(\lambda C_1+\mu C_2\right)z+\lambda D_1+\mu D_2=0. \qquad (7.6)$$

Рівняння (7.6) рівносильне рівнянню (7.5). Коефіцієнти при x, y, z цього рівняння не можуть одночасно дорівнювати нулю. Дійсно, нехай

$$\lambda A_1+\mu A_2=0,\ \lambda B_1+\mu B_2=0,\ \lambda C_1+\mu C_2=0. \qquad (7.7)$$

Не порушуючи загальності міркувань, можна вважати, що $\mu\neq 0$, оскільки λ і μ одночасно не дорівнюють нулю. Тоді рівності (7.7) запишуться так:

$$A_2=-\frac{\lambda}{\mu}A_1,\ B_2=-\frac{\lambda}{\mu}B_1,\ C_2=-\frac{\lambda}{\mu}C_1. \qquad (7.8)$$

З рівностей (7.8) випливає, що площини паралельні. Але це суперечить умові їх перетину.

Отже, рівняння (7.6), а разом з ним і рівняння (7.5) є лінійним рівнянням відносно змінних x, y, z, а тому для довільних значень λ і μ, не рівних одночасно нулю, визначає площину.

Покажемо, що площина (7.5) проходить через пряму l – лінію перетину площин (7.4). Дійсно, нехай точка $M_0\left(x_0; y_0; z_0\right)$ є довільною точкою прямої l. Тоді її координати задовольняють обом рівнянням (7.4):

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1=0,\ A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2=0.$$

Але тоді координати точки M_0 будуть задовольняти і рівнянню (7.5), оскільки у цьому рівнянні вирази, що стоять у дужках, згідно з рівностями (7.7) перетворюються в нуль.

При $\mu = 0$ з рівняння (7.5) отримуємо рівняння площини (α_1), а при $\lambda = 0$ – рівняння площини (α_2).

Надаючи інші значення числам λ і μ, будемо отримувати інші площини, які проходять через пряму l. Таким чином отримують всі площини, що проходять через l.

Зауваження. Якщо поділити рівняння (7.5) на λ і покласти $\tau = \dfrac{\mu}{\lambda}$, то рівнянню пучка площин можна надати більш зручної форми, яка містить лише один параметр:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \tau(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0. \tag{7.9}$$

Проте слід пам’ятати, що з рівняння (7.9) не можна отримати рівняння площини (α_2), тобто другої з площин, які визначають пучок w, оскільки для цього потрібно покладати $\lambda = 0$.

Теорема. *Для того щоб три площини*

$$(\alpha_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$(\alpha_2): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$
$$(\alpha_3): A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

належали до одного і того ж пучка, необхідно і достатньо, щоб існували такі три числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, не рівні одночасно нулю, для яких відносно змінних x, y, z має місце тотожність

$$\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) +$$
$$+\lambda_3(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) \equiv 0. \tag{7. 10}$$

Доведення. Необхідність. Нехай площини $(\alpha_1), (\alpha_2), (\alpha_3)$ належать до одного пучка. Покажемо, що існують такі числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, не рівні нулю одночасно, для яких справедлива тотожність (7.10). Дійсно, у цьому випадку одна з площин $(\alpha_1), (\alpha_2), (\alpha_3)$, наприклад, (α_3) належить пучку, що визначається двома іншими площинами. Тому

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = \lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) +$$

$$+(-1)\left(A_3x+B_3y+C_3z+D_3\right)=0.$$

Отже, тотожність (7.10) виконується при $\lambda_1=\lambda$, $\lambda_2=\mu$, $\lambda_3=-1$ і необхідність доведено.

Достатність. Нехай існують такі числа $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, не рівні нулю одночасно, для яких справедлива тотожність (7.10). Покажемо, що площини $(\alpha_1),(\alpha_2),(\alpha_3)$ належать до одного і того ж пучка. Дійсно, якщо $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ – деяка трійка чисел, для яких справедлива тотожність (7.10), то два з них, наприклад, λ_2 і λ_3 не дорівнюють нулю одночасно, оскільки у противному разі мала б місце тотожність

$$\lambda_1\left(A_1x+B_1y+C_1z+D_1\right)=0$$

для $\lambda_1\neq 0$, що неможливо. Тому тотожність (7.10) можна переписати у вигляді

$$A_3x+B_3y+C_3z+D_3=\frac{\lambda_1}{-\lambda_3}\left(A_1x+B_1y+C_1z+D_1\right)+\frac{\lambda_2}{-\lambda_3}\left(A_2x+B_2y+C_2z+D_2\right)$$

звідки випливає, що площина (α_3) належить до пучка, який породжується першими двома площинами $(\alpha_1),(\alpha_2)$.

Теорему доведено.

7.3. В'язка площин

Означення. Множину всіх площин простору, які проходять через задану точку M_0, *називають в'язкою* площин. Точку M_0 називають центром в'язки.

Якщо у просторі вибрано декартову прямокутну систему координат, то в'язку площин можна задати або координатами центра, або трьома площинами, які перетинаються в одній єдиній точці – центрі в'язки. Розглянемо кожен з цих випадків.

Нехай задано точку $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$. Візьмемо яку-небудь площину

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

що проходить через цю точку. Тоді

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \Leftrightarrow D=-\left(Ax_0+By_0+Cz_0\right).$$

Підставимо D в загальне рівняння площини:

$$Ax + By + Cz - \left(Ax_0 + By_0 + Cz_0 \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$Ax + By + Cz - \left(Ax_0 + By_0 + Cz_0 \right) = 0 \Leftrightarrow$$

Надаючи параметрам A, B, C різних значень, будемо отримувати різні площини в'язки з центром у точці M_0. Позначимо $\lambda_1 = A$, $\lambda_2 = B$, $\lambda_3 = C$. Тоді рівняння в'язки запишеться у вигляді

$$\lambda_1 \left(x - x_0 \right) + \lambda_2 \left(y - y_0 \right) + \lambda_3 \left(z - z_0 \right) = 0 \qquad (7.11)$$

Теорема 1. *Якщо у декартовій прямокутній системі координат дано в'язку площин з центром* $\left(x_0;\, y_0;\, z_0 \right)$, *то рівняння (7.11), де* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *можуть приймати довільні значення, не рівні одночасно нулю, визначає цю в'язку.*

Доведення. Нехай $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – довільні числа, не рівні одночасно нулю. Тоді рівняння (7.11) є лінійним рівнянням, якому задовольняють числа $x = x_0$, $y = y_0$ і $z = z_0$. Тому воно визначає площину, що має нормальний вектор $\vec{N}_1 \left(\lambda_1;\, \lambda_2;\, \lambda_3 \right)$ і проходить через точку $M_0 \left(x_0;\, y_0;\, z_0 \right)$, тобто деяку площину в'язки.

Навпаки, нехай (α) – деяка площина в'язки, нормальний вектор $\vec{N}$ якої має координати $\left(\lambda_1;\, \lambda_2;\, \lambda_3 \right)$. Тоді, оскільки (α) проходять через точку $\left(x_0;\, y_0;\, z_0 \right)$, рівняння цієї площини запишеться у вигляді (7.11).

Теорему доведено.

Нехай тепер центр в'язки – точка $M_0 \left(x_0;\, y_0;\, z_0 \right)$ визначається як єдина точка перетину трьох площин

$$\begin{aligned} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 &= 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 &= 0, \\ A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3 &= 0. \end{aligned} \qquad (7.12)$$

Теорема 2. *Якщо у декартовій прямокутній системі координат в'язку площин задано трьома площинами (7.12), що перетинаються в одній єдиній точці, то рівняння*

$$\lambda_1 \left(A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 \right) + \lambda_2 \left(A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 \right) +$$
$$+ \lambda_3 \left(A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3 \right) = 0, \qquad (7.13)$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *приймають довільні значення, не рівні нулю одночасно, визначає дану в'язку.*

Доведення теореми аналогічне доведенню теореми 1.

У рівнянні (7.13) завжди можна перейти від трьох параметрів до двох. Дійсно, розділивши рівняння (7.13) на один з трьох параметрів (наприклад, на λ_3), який відмінний від нуля, отримаємо рівносильне йому рівняння

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(A_1x+B_1y+C_1z+D_1\right)+\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\left(A_2x+B_2y+C_2z+D_2\right)+\left(A_3x+B_3y+C_3z+D_3\right)=0.$$

Кожна з площин (7.12) належить до в'язки, заданої рівнянням (7.13).

Теорема 3. *Для того щоб чотири площини*

$$\begin{aligned} &A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ &A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\\ &A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0,\\ &A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0, \end{aligned} \qquad (7.14)$$

*три з яких перетинаються в одній точці, належали до однієї в'язки площин, необхідно і достатньо, щоб визначник 4-го порядку, складений з коефіцієнтів цих рівнянь, дорівнював нулю, то*бто

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1\\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2\\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3\\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}=0. \qquad (7.15)$$

Доведення. Необхідність. Покажемо, що для площин системи рівнянь (7.14), які належать до однієї в'язки, $\Delta=0$. Дійсно, нехай ці площини належать до однієї в'язки з центром $M_0\left(x_0;\, y_0;\, z_0\right)$. Тоді

$$\begin{aligned} &A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1=0 \Leftrightarrow D_1=A_1\left(-x_0\right)+B_1\left(-y_0\right)+C_1\left(-z_0\right),\\ &A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2=0 \Leftrightarrow D_2=A_2\left(-x_0\right)+B_2\left(-y_0\right)+C_2\left(-z_0\right),\\ &A_3x_0+B_3y_0+C_3z_0+D_3=0 \Leftrightarrow D_3=A_3\left(-x_0\right)+B_3\left(-y_0\right)+C_3\left(-z_0\right),\\ &A_4x_0+B_4y_0+C_4z_0+D_4=0 \Leftrightarrow D_4=A_4\left(-x_0\right)+B_4\left(-y_0\right)+C_4\left(-z_0\right). \end{aligned} \qquad (7.16)$$

З рівностей (7.16) випливає, що елементи 4 стовпця визначника Δ є лінійною комбінацією елементів перших трьох стовпців. Тому визначник Δ дорівнює нулю.

Достатність. Нехай тепер визначник $\Delta = 0$. Покажемо, що чотири площини, три з яких перетинаються в одній точці, належать до однієї в'язки. Не порушуючи загальності, можна вважати, що в одній точці перетинаються друга, третя та четверта площини. Необхідною і достатньою умовою цього є нерівність

$$\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Координати $(x_0; y_0; z_0)$ точки перетину цих площин визначаються за формулами

$$x_0 = \frac{-\begin{vmatrix} D_2 & B_2 & C_2 \\ D_3 & B_3 & C_3 \\ D_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix}}, \quad y_0 = \frac{-\begin{vmatrix} A_2 & D_2 & C_2 \\ A_3 & D_3 & C_3 \\ A_4 & D_4 & C_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix}}, \quad z_0 = \frac{-\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & D_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix}}.$$

Для того, щоб перша площина проходила через цю ж точку $(x_0; y_0; z_0)$, необхідно і достатньо, щоб

$$A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1 z_0 + D_1 = 0.$$

Підставивши в останню рівність замість $(x_0; y_0; z_0)$ їх значення, обчислені за правилами Крамера, отримуємо

$$A_1 \begin{vmatrix} D_2 & B_2 & C_2 \\ D_3 & B_3 & C_3 \\ D_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix} - B_1 \begin{vmatrix} A_2 & D_2 & C_2 \\ A_3 & D_3 & C_3 \\ A_4 & D_4 & C_4 \end{vmatrix} + C_1 \begin{vmatrix} A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & D_4 \end{vmatrix} - D_1 \begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0.$$

що доводить теорему.

7.4. Взаємне розміщення трьох площин у просторі

Нехай задано три площини $(\alpha_1),(\alpha_2),(\alpha_3)$ своїми загальними рівняннями

$$\begin{aligned}(\alpha_1)&: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ (\alpha_2)&: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\\ (\alpha_3)&: A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0.\end{aligned}$$

З алгебраїчної точки зору задача про взаємне розміщення трьох площин у просторі зводиться до дослідження розв'язків системи лінійних рівнянь. Згідно з критерієм сумісності системи лінійних рівнянь (теорема Кронекера-Капеллі) маємо: *система лінійних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці цієї системи.* Тому складемо основну матрицю A і розширену матрицю B з коефіцієнтів рівнянь системи (7.12):

$$\begin{aligned}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0.\end{aligned} \tag{7.12}$$

тобто $A=\begin{pmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}A_1 & B_1 & C_1 & D_1\\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2\\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3\end{pmatrix}.$

Позначимо ранги цих матриць відповідно $r(A)=r_1$ і $r(B)=r_2$.

Можливі наступні випадки:

1°. $r_1=3$. У цьому випадку $r_2=3$ і система рівнянь (7.12) згідно з правилами Крамера має єдиний розв'язок. Площини $(\alpha_1),(\alpha_2),(\alpha_3)$, які визначаються рівняннями (7.12), мають єдину спільну точку (рис. 7.3).

Рис. 7.3. Спільна точка

2°. $r_1=2,\ \ r_2=3$. Система рівнянь у цьому випадку є несумісною, а тому площини $(\alpha_1),(\alpha_2),(\alpha_3)$ не мають точок, які одночасно належать до кожної з них. У випадку **2°** можливі два розміщення площин.

а) Серед нормальних векторів $\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3$ площин $(\alpha_1), (\alpha_2), (\alpha_3)$ немає колінеарних, тобто не існує двох рядків матриці A, відповідні елементи яких пропорційні. Геометрично це означає, що кожні дві площини з площин $(\alpha_1), (\alpha_2), (\alpha_3)$ перетинаються по прямій і ці три прямі перетину паралельні, причому прямі перетину попарно різні. Площини $(\alpha_1), (\alpha_2), (\alpha_3)$ вирізають з простору нескінченну трикутну призму (рис. 7.4).

б) Серед нормальних векторів $\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3$ площин $(\alpha_1), (\alpha_2), (\alpha_3)$ є два колінеарних (всі вектори не можуть бути колінеарними, оскільки $r_1 = 2$). Це означає, що в матриці A існують два рядки, відповідні елементи яких пропорційні. З геометричної точки зору маємо дві паралельні площини, які перетинаються третьою площиною (рис. 7.5).

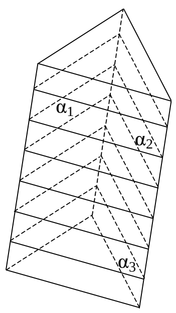


Рис. 7.4. Нескінченна призма

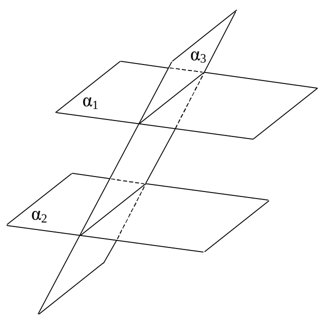


Рис. 7.5. Перетин паралельних площин третьою площиною

3°. $r_1 = 2$, $r_2 = 2$. У цьому випадку система сумісна і має нескінченну множину розв'язків. Серед рівнянь системи незалежних лише два, наприклад, перше і друге, а третє рівняння є їх наслідком. Це означає, що спільні розв'язки перших двох рівнянь (ці розв'язки залежать лише від одного параметра) є також і розв'язками третього рівняння. З геометричної точки зору маємо дві площини, які перетинаються по прямій, і третю площину, що проходить через цю пряму. У випадку **3°** також можливі два розміщення площин.

а) Серед нормальних векторів $\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3$ площин $(\alpha_1), (\alpha_2), (\alpha_3)$ немає колінеарних. Тоді у матриці B не існує двох рядків, відповідні елементи яких пропорційні. Це означає, що всі площини $(\alpha_1),(\alpha_2),(\alpha_3)$ – різні і проходять через одну і ту ж пряму (рис. 7.6).

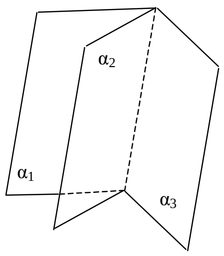


Рис. 7.6. Пучок площин

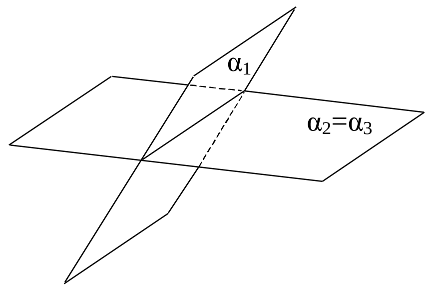


Рис. 7.7. Площина перетинає дві, які співпадають.

б) Серед нормальних векторів $\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3$ є два колінеарних. У матриці B у цьому випадку існує два рядки, відповідні елементи яких пропорційні. Це означає, що два з рівнянь визначають одну і ту ж площину, яку перетинає третя площина (рис. 7.7).

4°. $r_1 = 1$, $r_2 = 2$. Система несумісна (не має розв'язків). Можливі такі випадки.

а) У матриці B не існує двох рядків, відповідні елементи яких пропорційні. Це означає, що всі площини $(\alpha_1),(\alpha_2),(\alpha_3)$ паралельні (рис. 7.8).

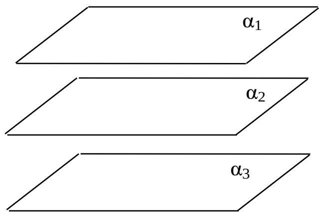


Рис. 7.8. Паралельність трьох площин

б) У матриці B є два рядки, всі відповідні елементи яких пропорційні. У цьому випадку два рівняння системи визначають одну і ту ж площину, яка паралельна третій площині (немає пропорційності всіх елементів з дописаними двома) (рис. 7.9).

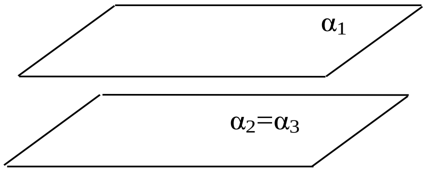


Рис. 7.9. З трьох паралельних площин дві співпадають

5°. $r_1 = 1,\ r_2 = 1$. У цьому випадку всі три рівняння (1) визначають одну і ту ж площину (рис. 7.10).

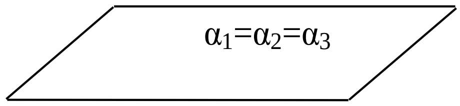


Рис. 7.10. Три паралельні площини співпадають

Випадок $r_1 = 1$, $r_2 = 3$ неможливий.

Завдання для самоконтролю

1. Вивести нормальне рівняння площини. Що таке нормуючий множник?

2. Отримати формулу обчислення відстані від точки до площини. Пояснити зміст відхилення точки від площини.

3. Пояснити на конкретному прикладі взаємне розміщення трьох площин в просторі.

4. Визначити, які із рівнянь площин є нормальними:

1) $\frac{6}{7}x - \frac{3}{7}y + \frac{2}{7}z + 5 = 0$; 2) $\vec{r} \cdot \left(\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{1}{3}\vec{k} \right) - 3 = 0$;

3) $\vec{r} \cdot \left(\frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{k} \right) - 3 = 0$; 4) $z - 4 = 0$; 5) $y + 3 = 0$.

5. Знайти відстань між паралельними площинами $2x - 3y + z - 4 = 0$ і $4x - 6y + 2z + 10 = 0$.

6. Довести, що площина $5x - 2y + z - 1 = 0$ не перетинає відрізка, який обмежується точками $A(1,4,-3)$, $B(2,5,0)$.

Відповідь: 5. $d = \frac{9}{\sqrt{14}}$.

Лекція 8. Пряма в просторі. Пряма і площина в просторі

8.1. Види рівнянь прямої в просторі.

8.2. Взаємне розміщення двох прямих в просторі.

8.3. Розміщення прямої відносно площини.

8.1. Види рівнянь прямої в просторі

– ***Векторне рівняння прямої просторі***

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{l}\ , \tag{8.1}$$

$t \in \mathbb{R},\ M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка, яка належить прямій, $\vec{l} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}$ – напрямний вектор прямої (вектор, $\|$ прямій). Рівняння цілком аналогічне векторному рівнянню прямої на площині.

– ***Параметричні рівнянні прямої***

Якщо в рівнянні (8.1) перейти до координатної форми, то будемо мати рівняння

$$x = x_0 + mt;\ \ y = y_0 + nt;\ \ z = z_0 + pt. \tag{8.2}$$

$t \in \mathbb{R}, t$ – параметр, $\vec{l} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}$ – напрямний вектор.

– ***Канонічні рівняння прямої***

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \tag{8.3}$$

де $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка, яка належить прямій, $\vec{l} = (m, n, p)$ – напрямний вектор. В рівнянні (8.3) деякі з чисел m, n, p можуть дорівнювати 0. Наприклад, очевидно, що коли $m = 0$, то пряма (8.3) перпендикулярна до осі Ox:

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}, \\ x - x_0 = 0. \end{cases}$$

– ***Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки***

Нехай точки $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ належать прямій L. Тоді, як і у випадку прямої на площині, маємо:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad (8.4)$$

– ***Загальні рівняння прямої***

Пряму в просторі можна задати рівняннями площин, які по ній перетинаються, тобто двох лінійних рівнянь

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \qquad (8.5)$$

Ці рівняння прямої в просторі дещо відрізняються від відповідних рівнянь прямої на площині.

Це і є загальні рівняння прямої. Оскільки ці рівняння не дуже зручні, то часто систему (8.5) зводять до канонічного виду. Для цього потрібно:

1) визначити координати однієї з точок прямої (покласти, наприклад, $z=0$ і знайти x та y).

2) визначити координати напрямного вектора $\vec{l}=(m,n,p)$.

Очевидно, що $\vec{l}\perp\vec{n}_1, \vec{l}\perp\vec{n}_2$, де $\vec{n}_1,\vec{n}_2$ – нормальні вектори площин, заданих рівняннями (8.5). Тоді можна обрати напрямний вектор, як вектор векторного добутку нормальних векторів площин або колінеарний йому:

$$\vec{l}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Задача. Пряму задано загальними рівняннями

$$\begin{cases} x-2y-z=0, \\ x+y+z-6=0. \end{cases}$$

Запишіть пряму в канонічному вигляді.

Розв'язування. Для того, щоб скласти канонічні рівняння прямої, потрібно знати точку, що належить прямій, та напрямний вектор прямої. Виберемо точку на прямій. Для цього покладемо, наприклад, $z = 0$. Якщо так виявиться незручним – зробимо інакше. При $z = 0$ система набуває вигляду:

$$\begin{cases} x-2y=0, \\ x+y=6. \end{cases}$$

Очевидно, що $x = 4$, $y = 2$ – розв'язки цієї системи. Отже, точка (4; 2; 0) належить даній прямій.

Як знайти напрямний вектор прямої? Векторами нормалей до площин, перетином яких є дана пряма, будуть вектори $\vec{n}_1 = (1;-2;-1)$ та $\vec{n}_2 = (1;1;1)$. Векторним добутком двох векторів є вектор, перпендикулярний до кожного з них. Знайдемо цей вектор:

$$\vec{l} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}.$$

Будь-який вектор, колінеарний до даного, також буде напрямним вектором прямої. Зручно взяти вектор $(1;2;-3)$. Складаємо канонічні рівняння прямої:

$$\frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-3}.$$

8.2. Взаємне розміщення двох прямих в просторі

Нехай дві прямі в просторі задані своїми канонічними рівняннями

$$L_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \text{ і } L_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$

Кут між прямими L_1 і L_2 співпадає з одним з вертикальних кутів між прямими, якщо прямі лежать в одній площині і перетинаються. Якщо прямі мимобіжні, то цей кут співпадає з кутом між прямою і проекцією іншої прямої на площину, в якій лежить перша пряма.

З означення скалярного добутку для напрямних векторів маємо $\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2 = |\vec{l}_1| \cdot |\vec{l}_2| \cos\varphi$. Оскільки $\vec{l}_1 = (m_1, n_1, p_1), \vec{l}_2 = (m_2, n_2, p_2)$, тоді

$$\cos\varphi = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \qquad (8.6)$$

Дві прямі в просторі можуть перетинатися, бути мимобіжними, паралельними і можуть суміщатися.

– ***Прямі*** L_1 **і** L_2 ***паралельні***, якщо $\vec{l}_1 \parallel \vec{l}_2$, із умови паралельності двох векторів, маємо

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}. \qquad (8.7)$$

(8.7) – умова паралельності двох прямих.

– ***Умова перпендикулярн****ості* двох прямих рівносильна умові перпендикулярності напрямних векторів, тобто $\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2 = 0,$ або у координатній формі

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0. \qquad (8.8)$$

– Умова, за якої ***дві прямі перетинаються*** (належать одній площині). Очевидно, що дві прямі в просторі перетинаються тоді, коли вектори $\overrightarrow{M_1 M_2}, \vec{l}_1, \vec{l}_2$ компланарні. З необхідної і достатньої умови компланарності маємо:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (8.9)$$

8.3. Розміщення прямої відносно площини

Пряма в просторі може перетинати задану площину, бути до неї паралельною або лежати на ній. Нехай пряма задана канонічними рівняннями (8.3):

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

а площина (α) – загальним рівнянням (8.10):

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (8.10)$$

а) ***Перетин прямої з площиною***

Якщо пряма перетинає площину, то система рівнянь

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ \dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p} \end{cases}$$

має єдиний розв'язок. Перейшовши в (8.2) до рівнянь в параметричній формі

$$x = x_0 + mt; \;\; y = y_0 + nt; \;\; z = z_0 + pt,$$

після підстановки в загальне рівняння площини, знаходять значення t, яке відповідає точці перетину.

б) ***Кут між прямою і площиною***

Означення. ***Кут між прямою і площиною в просторі*** визначають ***як кут між прямою та її проекцією*** на площину.

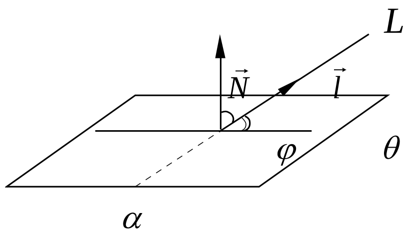


Рис. 8.1. Кут між прямою і площиною

Очевидно, що $\varphi = \dfrac{\pi}{2} - \theta$, кут φ як кут між двома векторами $\vec{n}$ і $\vec{l}$ можна визначити за формулою $\cos\varphi = \dfrac{\vec{n} \cdot \vec{l}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{l}|}$. Оскільки $\cos\varphi = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$, виражаючи скалярний добуток через координати, маємо

$$\sin\theta = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \qquad (8.11)$$

в) ***Умова паралельності прямої і площини***

Якщо пряма паралельна площині, то кут $\theta = 0.$ Отже, співвідношення

$$Am + Bn + Cp = 0 \qquad (8.12)$$

є умова паралельності прямої і площини.

г) ***Умова перпендикулярності прямої і площини***

Якщо пряма перпендикулярна площині, то вектори $\vec{n}$ і $\vec{l}$ − колінеарні:

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p} \qquad (8.13)$$

д) ***Пряма лежить на площині***

Пряма задана канонічними рівняннями лежить в площині, якщо виконується умова(8.12), точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in L$ теж належить площині:

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \\ Am + Bn + Cp = 0, \end{cases} \qquad (8.14)$$

е) ***Рівняння пучка площин,*** які проходять через пряму

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases},$$

має вигляд

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \qquad (8.15)$$

де λ – будь-яке дійсне число.

Задача. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z}{3}$ та площини $2x+3y+z+6=0$.

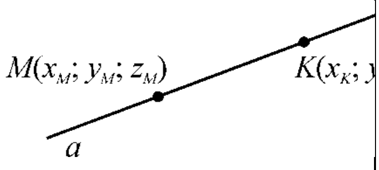
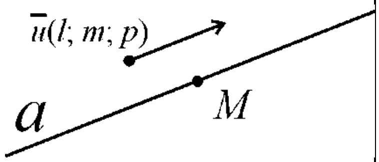
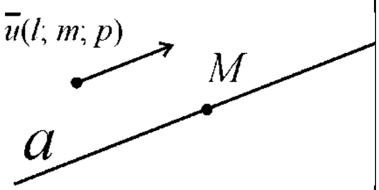
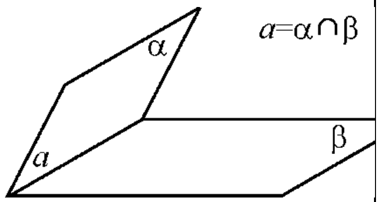
Розв'язування. Точка перетину прямої та площини належить і прямій, і площині. Запишемо рівняння прямої в параметричному вигляді :

$$\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = 2, \\ z = 3t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Пам'ятаємо, що при кожному значенні t маємо точку, що належить прямій. Потрібно знайти таке значення параметра t, щоб точка належала й площині, тобто координати цієї точки мають задовольняти рівняння $2x+3y+z+6=0$. Підставимо в це рівняння координати точки: $2(2t+1)+3\cdot 2+3t+6=0$. Звідси $t = -2$. Шукана точка (-3; 2; -6).

Зауваження. Положення прямої в просторі однозначно задається двома точками, точкою та напрямним вектором.

Види рівнянь прямої в просторі (табл.):

	Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки		$\frac{x-x_M}{x_K-x_M}=\frac{y-y_M}{y_K-y_M}=\frac{z-z_M}{z_K-z_M}$
	Канонічні рівняння прямої в просторі		$\frac{x-x_M}{l}=\frac{y-y_M}{m}=\frac{z-z_M}{n}$
	Параметричні рівняння прямої в просторі		$\begin{cases} x=x_M+lt, \\ y=y_M+mt, \\ z=z_M+nt, t\in R \end{cases}$
	Загальні рівняння прямої в просторі		$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$

Завдання для самоконтролю

1. Записати різні форми рівнянь прямої в просторі (векторне рівняння, параметричні, канонічні, загальні; рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки).

2. Пояснити на прикладі перехід від загальних рівнянь прямої в просторі до канонічних (параметричних) рівнянь.

3. Описати взаємне розміщення двох прямих в просторі: паралельність, перетин двох прямих (перпендикулярність), мимобіжність.

4. Що називають кутом між прямою та площиною в просторі? Записати формулу його обчислення.

5. Охарактеризувати взаємне розміщення прямої та площини в просторі. Записати умови паралельності, перпендикулярності прямої і площини; умову належності прямої площині.

6. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-1;4;-2)$ і паралельна до вектора $\vec{l}=(3;-2;5)$.

7. Обчисліть кут між прямими $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{-5}$, $\frac{x}{4}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{2}$.

8. Перевірте, що пряма $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z+1}{3}$ паралельна площині $3x-5y-3z-4=0$.

9. Обчисліть кут між прямою $\frac{x-2}{4}=\frac{y-5}{2}=\frac{z+1}{-3}$ і площиною $3x-2y+4z-2=0$.

10. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $\begin{cases} x-2y+3z-4=0, \\ 3x+2y-5z-4=0 \end{cases}$ і точку $M(2;-5;4)$.

Відповіді. 6. $\frac{x+1}{3}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z+2}{5}$. 7. $\cos\varphi=\frac{5}{\sqrt{798}}\approx 0{,}177;\ \varphi=79^{\circ}$.
9. $\sin\varphi=\frac{4}{29}\approx 0{,}138;\varphi\approx 8^{\circ}$. 10. $11x-2y-2z-24=0$.

Лекція 9. Пряма на площині

9.1. Загальне рівняння прямої.

9.2. Різновиди рівняння прямої.

- **9.2.1.** Пряма у відрізках.
- **9.2.2.** Векторне рівняння прямої.
- **9.2.3.** Канонічне та параметричні рівняння прямої.
- **9.2.4.** Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.
- **9.2.5.** Нормальне рівняння прямої.

9.3. Взаємне розміщення двох прямих на площині. Кут між прямими.

9.1. Загальне рівняння прямої

Теорема. *Кожну пряму на площині можна визначити лінійним рівнянням відносно декартової системи координат, і, навпаки, кожне лінійне рівняння визначає пряму в цій координатній системі.*

Доведення.

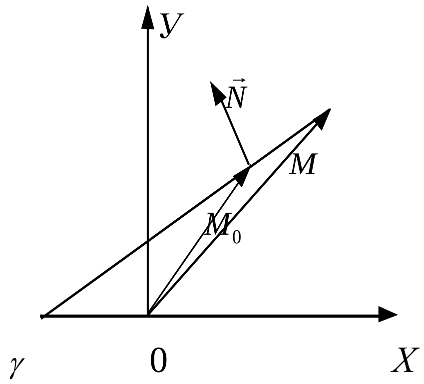


Рис. 9.1. Пряма на площині

Нехай на площині задана пряма γ. Складемо її рівняння відносно системи координат. Нехай задано точку $M_0(x_0;y_0)\in\gamma$, вектор $\vec{N}=(A,B)\perp\gamma$. Нехай $M(x;y)$ – довільна точка прямої γ. Тоді $M\in\gamma \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}\perp\vec{N} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{N}=0$, або в координатах

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \qquad (9.1)$$

Це рівняння прямої, яке є лінійним.

Першу частину теореми доведено.

Нехай задане лінійне рівняння

$$Ax+By+C=0. \qquad (9.2)$$

Підставляючи $M_0(x_0;y_0)$ в рівняння (9.2) і віднімаючи дві рівності, маємо рівняння $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$.

Позначимо через $M(x;y)$ довільну точку цієї лінії; вектор $\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0,y-y_0\}$. Розглянемо $\vec{N}=(A,B)$. Ліва частина останнього рівняння є скалярним добутком векторів $\overrightarrow{M_0M}$ та $\vec{N}$, який дорівнює нулеві.

Отже, для будь-якої точки *M*, яка належить лінії, $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{N},$ тому лінія є прямою.

Теорему доведено.

Отже, $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ – рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0;y_0),$ перпендикулярно до вектора $\vec{N}=\left(A,B\right)$; (9.2) – загальне рівняння прямої; вектор $\vec{N}=\left(A,B\right)$ – нормальний вектор прямої.

Неповні рівняння прямої **(**деякі його коефіцієнти дорівнюють нулю)

1) $C=0,$ початок координат О (0;0) належить прямій;

2) $B=0$, то пряма $Ax+C=0 \,||\, Oy, \quad \vec{N}=\left(A,0\right)\perp Ox;$

3) $A=0$, то пряма $By+C=0 \,||\, Ox, \quad \vec{N}=\left(0,B\right)\perp Oy;$

4) $B=C=0$, то пряма $Ax=0$ співпадає з віссю Oy;

5) $A=C=0$, то пряма $By=0$ є віссю Ox.

9.2. Різновиди рівняння прямої

9.2.1. Пряма у відрізка

Якщо $C\neq 0$, то з рівняння (9.2) маємо $\dfrac{x}{-\dfrac{C}{A}}+\dfrac{y}{-\dfrac{C}{B}}=1$. Якщо позначити

$a=-\dfrac{C}{A},\ b=-\dfrac{C}{B}$, тоді

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \tag{9.3}$$

(9.3) − рівняння прямої у відрізках, з якого легко визначити, що точки $A(a;0), B(0;b)\in$ прямій γ, модулі чисел a та b є довжинами відрізків, які відтинає пряма на координатних осях $Ox,\ Oy$ відповідно.

9.2.2. Векторне рівняння прямої

Задана точка $M_0(x_0;y_0)$ і напрямний вектор $\vec{l}\left(m,n\right)$ (вектор, паралельний до прямої, називають її напрямним вектором). Розглядається задача: записати рівняння прямої, яка проходить паралельно напрямному вектору через вказану точку M_0. Очевидно, що точка M_0 і вектор $\vec{l}$ цілком визначають пряму. Нехай $\vec{r}_0$ – радіус-вектор точки M_0, $\vec{r}$ – точки M. Точка $M(x;y)$ належить шуканій прямій $\gamma \Leftrightarrow$ вектори $\overrightarrow{M_0M}, \vec{l}$ – колінеарні, тобто $\vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{l}$, або

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{l}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{9.4}$$

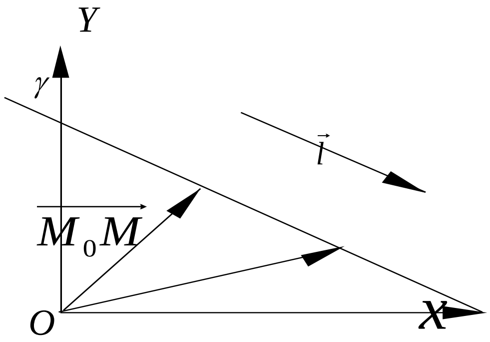


Рис. 9.2. Пряма з напрямним вектором

Задана точка $M_0(x_0;y_0)$ і напрямний вектор $\vec{l}\left(m,n\right)$ (вектор, паралельний до прямої, називають її напрямним вектором). Розглядається задача: записати рівняння прямої, яка проходить паралельно напрямному вектору через вказану точку M_0. Очевидно, що точка M_0 і вектор $\vec{l}$ цілком визначають пряму. Нехай $\vec{r}_0$ – радіус-вектор точки M_0, $\vec{r}$ – точки M. Точка $M(x;y)$ належить шуканій прямій $\gamma \Leftrightarrow$ вектори $\overrightarrow{M_0M}, \vec{l}$ – колінеарні, тобто $\vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{l}$, або

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{l}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{9.4}$$

9.2.3. Канонічне та параметричні рівняння прямої

Канонічне рівняння прямої

Якщо записати умову колінеарності векторів $\vec{r} - \vec{r}_0$ і $\vec{l}$, то будемо мати рівняння

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}, \tag{9.5}$$

яке називають ***канонічним рівнянням*** прямої.

Параметричні рівняння прямої

Якщо в рівнянні (9.4) перейти до координат, будемо мати

$$\begin{cases} x = x_0 + tm, \\ y = y_0 + tn, \end{cases} \tag{9.6}$$

t – параметр, $t \in \mathbb{R}$, $M_0(x_0; y_0) \in \gamma$, $\vec{l} = (m, n) \parallel \gamma$ – напрямний вектор (вектор, паралельний до прямої).

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Нехай точки $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2) \in \gamma$. Очевидно, точка $M(x; y) \in \gamma$, коли вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$ і $\overrightarrow{M_1M}$ колінеарні. Якщо записати умову колінеарності, то маємо рівняння

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \tag{9.7}$$

де напрямний вектор $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

9.2.4. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Нехай пряма γ задана точкою $M_0(x_0; y_0)$ та кутом φ між прямою і додатним напрямом осі Ox. Позначимо $\mathrm{tg}\varphi = k$.

Тангенс кута φ нахилу прямої γ до осі Ox називається ***кутовим коефіцієнтом*** прямої. Якщо напрямний вектор $\vec{l} = (m, n)$, то $k = \mathrm{tg}\varphi = \dfrac{n}{m}$.

Таким чином, із (9.5) маємо

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

або, розкривши дужки, $y = kx - kx_0 + y_0$, $y = kx + b$.

9.2.5. Нормальне рівняння прямої

Рівняння вигляду

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0 \tag{9.8}$$

де $\vec{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta\}$ – орт нормалі, p – відстань від точки $O(0;0)$ до прямої, називають ***нормальним рівнянням*** прямої.

Оскільки $\cos\beta = \sin\alpha$, то рівняння (9.8) має вигляд

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0.$$

Щоб звести загальне рівняння прямої (9.2) до нормального вигляду, треба помножити всі його частини на число − нормуючий множник $\mu = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, знак якого вибирають протилежним знакові числа *C*.

Означення. ***Відхиленням*** точки M від прямої γ називається число $\delta = d$, якщо точка M і початок координат лежать по різні боки від прямої, і число $\delta = -d$, якщо вони лежать по одну сторону від неї, де $d -$ відстань від точки до прямої.

Якщо пряма γ задана нормальним рівнянням, тоді відстань від точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямої обчислюють за формулою

$$d = \left|x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p\right| = |\delta|. \qquad (9.9)$$

Відхилення точки $M_0(x_0;y_0)$ від прямої дорівнює результату підставлення її координат в нормальне рівняння прямої (9.8).

9.3. Взаємне розміщення двох прямих на площині. Кут між прямими

Дві прямі на площині можуть перетинатися (зокрема, також перпендикулярними), бути паралельними і співпадати.

1) Нехай прямі задані своїми загальними рівняннями:

$\gamma_1:\ A_1x + B_1y + C_1 = 0,\ \vec{N}_1 = (A_1, B_1),$

$\gamma_2:\ A_2x + B_2y + C_2 = 0,\ \vec{N}_2 = (A_2, B_2).$

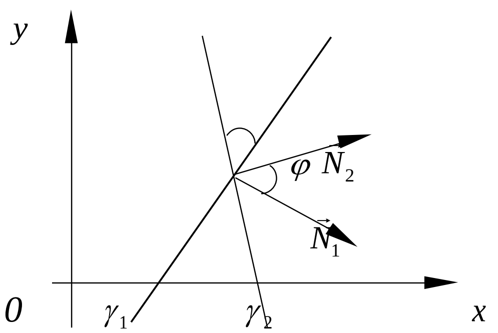


Рис. 9.3. Кут між прямими в загальних рівняннях

Кут між прямими є кутом між нормальними векторами прямих, тобто

$$\widehat{\vec{N}_1\vec{N}_2} = \angle\varphi,\ \vec{N}_1\cdot\vec{N}_2 = \left|\vec{N}_1\right|\cdot\left|\vec{N}_2\right|\cos\varphi;\ \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\vec{N}_1\cdot\vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right|\cdot\left|\vec{N}_2\right|}.$$

Отже,

$$\cos\varphi = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \tag{9.10}$$

знаки „+” або „–” у формулі (9.10) дають можливість визначити кожні з суміжних кутів, утворених перетином прямих.

Прямі γ_1 та γ_2:

• ***перпендикулярні*** $\Leftrightarrow \vec{N}_1 \perp \vec{N}_2 \Leftrightarrow \cos\varphi = 0: A_1A_2 + B_1B_2 = 0$;

• ***паралельні*** $\Leftrightarrow \vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$ колінеарні: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$.

2) Для прямих, заданих канонічними рівняннями, а саме, для прямої γ_1: $\dfrac{x-x_1}{m_1} = \dfrac{y-y_1}{n_1}$, $\vec{l}_1 = (m_1, n_1)$, $\vec{l}_1 \parallel \gamma_1$ – напрямний вектор та прямої γ_2: $\dfrac{x-x_2}{m_2} = \dfrac{y-y_2}{n_2}$, $\vec{l}_2 = (m_1, n_1)$, $\vec{l}_2 \parallel \gamma_2$, аналогічно п. 1) кут між прямими є кутом між відповідними напрямними векторами прямих:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2}{\left|\vec{l}_1\right|\cdot\left|\vec{l}_2\right|} = \pm\frac{m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2 + n_2^2}}.$$

3) Для прямих, записаних із кутовими коефіцієнтами, тобто для γ_1: $y = k_1x + b_1$; $\varphi_1 = \widehat{\gamma_1, Ox}$; $k_1 = \mathrm{tg}\varphi_1$ та прямої γ_2: $y = k_2x + b_2$; $\varphi_2 = \widehat{\gamma_2, Ox}$; $k_2 = \mathrm{tg}\varphi_2$. Із рис. 9.4 видно, що $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, відповідно,

$$\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\mathrm{tg}\varphi_2 - \mathrm{tg}\varphi_1}{1 + \mathrm{tg}\varphi_1\cdot\mathrm{tg}\varphi_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1\cdot k_2},$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1\cdot k_2}\right|. \tag{9.11}$$

Прямі γ_1 та γ_2:

• ***перпендикулярні***: $\gamma_1 \perp \gamma_2 \Leftrightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{2}$, $\mathrm{tg}\varphi$ не існує, $1 + k_1\cdot k_2 = 0, k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$;

• ***паралельні:*** $\gamma_1 \parallel \gamma_2 \Leftrightarrow \varphi = 0$, $\mathrm{tg}\varphi = 0 \Leftrightarrow k_1 = k_2$.

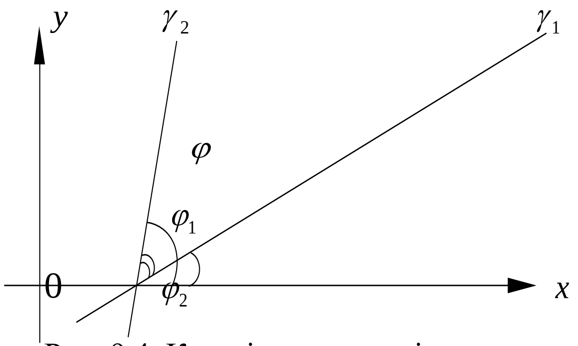


Рис. 9.4. Кут між прямими із кутовими коефіцієнтами

Основні задачі

- Складати рівняння прямої та записувати його в необхідному вигляді; розуміти зміст коефіцієнтів, що входять у рівняння.
- Встановлювати взаємне розміщення прямих на площині. Знаходити точку перетину прямих.
- Знаходити кут між прямими.
- Знаходити відстань від точки до прямої.

Приклад. Скласти рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M(2; 5)$, $N(6; -5)$. Зобразити пряму, записати рівняння в усіх можливих видах та вказати відповідні параметри.

Розв'язування. Оскільки відомо дві точки, що належать прямій, то пряму на площині задано. Застосуємо відповідне рівняння прямої:

$$\frac{x - x_M}{x_N - x_M} = \frac{y - y_M}{y_N - y_M}.$$

Підставляємо координати заданих точок і отримуємо: $\frac{x-2}{6-2} = \frac{y-5}{-5-5}$ – рівняння даної прямої у вигляді (рис. 9.5 а).

Після спрощення маємо канонічне рівняння заданої прямої:

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-5}{-10}.$$

Зазначимо, що вектор $\vec{u}=(4;-10)$ є одним з напрямних векторів прямої. Більш зручний вигляд канонічного рівняння $\frac{x-2}{-2}=\frac{y-5}{5}$, в якому вектор $\vec{l}=(-2;5)$, колінеарний вектору $\vec{u}$, також є напрямним вектором прямої (рис. 9.5 а). Користуючись канонічним рівнянням прямої, можна записати його в параметричному вигляді. Для цього введемо певний параметр $t \in R$ і запишемо наступну рівність: $\frac{x-2}{-2}=\frac{y-5}{5}=t,$ звідки отримаємо: $\begin{cases} x=-2t+2 \\ y=5t+5 \end{cases}$ – параметричне рівняння заданої прямої. Кожному значенню параметра $t \in \mathbb{R}$ відповідає точка на прямій. Наприклад, при $t=0$ маємо точку $M(2;\ 5)$, при $t=1$ – точку з координатами (0; 10), що є точкою перетину даної прямої з віссю ординат. Щоб встановити, якому значенню параметра t відповідає точка N(6; -5), підставимо в параметричне рівняння її координати $x=6, y=-5$. При $t=-2$ отримаємо точку N.

Зауваження. Параметричне рівняння прямої доцільно застосовувати, якщо в задачі буде потрібно вказати зручним способом точки, що належать прямій.

Канонічне рівняння прямої зручно застосувати, щоб записати її рівняння в загальному вигляді. Використаємо основну властивість пропорції і після певних перетворень отримаємо загальний вигляд даного рівняння:

$$5x+2y-20=0.$$

Тут вектор $\vec{n}=(5;2)$ є вектором нормалі до прямої. Запишемо також рівняння прямої у вигляді, що проходить через точку M(2; 5), перпендикулярно до даного вектора $\vec{n}=(5;2)$: $5(x-2)+2(y-5)=0$. Переконаємось в тому, що напрямний вектор та вектор нормалі до даної прямої перпендикулярні. Для цього знайдемо скалярний добуток векторів і покажемо, що він дорівнює нулю:

$$\vec{l}\cdot\vec{n}=-2\cdot 5+5\cdot 2=0.$$

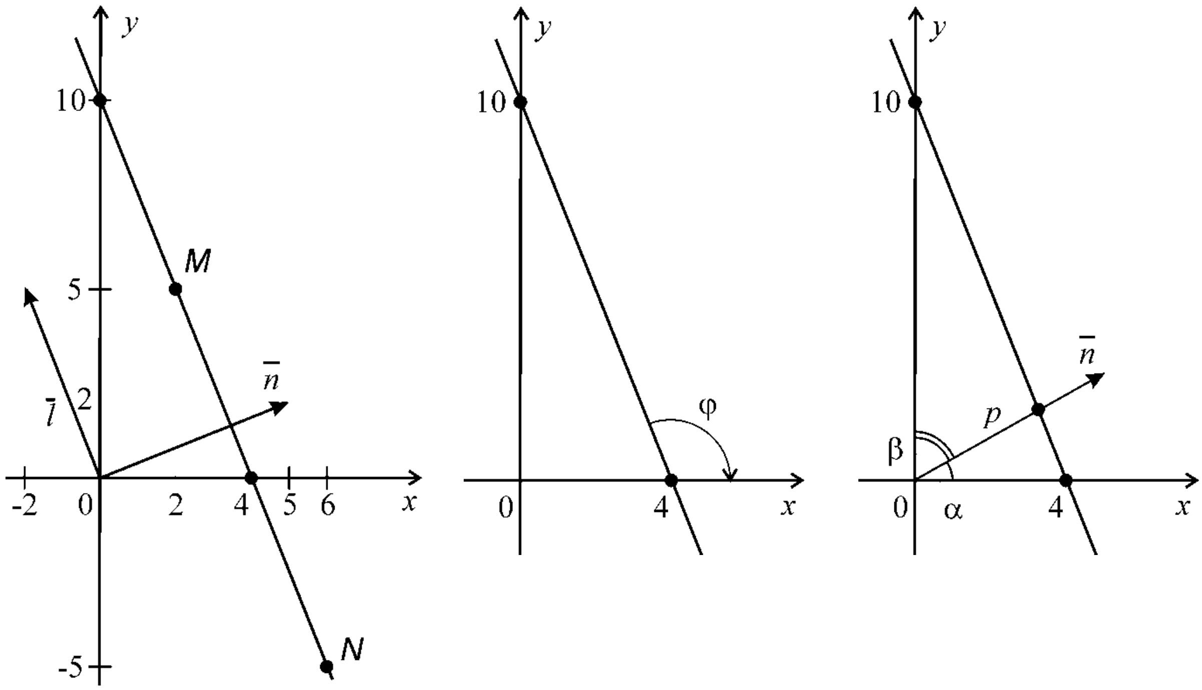
Пряма має проходити через задані точки M(2; 5) і N(6; -5), тобто координати цих точок мають задовольняти рівнянню.

Відповідь слід записувати саме в загальному вигляді, якщо в задачі не сказано інакше.

Запишемо рівняння даної прямої у вигляді:

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{10}=1,$$

як рівняння прямої у відрізках на осях. Параметри 4 і 10 показують, що на осі абсцис пряма відтинає 4 масштабні одиниці, а на осі ординат 10. (див. рис. 9.5 б).



а *б* *в*

Рис. 9.5. Пряма, різні форми задання

Для того щоб записати рівняння прямої у вигляді прямої з кутовим коефіцієнтом застосуємо загальне рівняння прямої:

$$5x+2y-20=0, \quad 2y=-5x+20;$$

$y=-\frac{5}{2}x+10-$ рівняння даної прямої з кутовим коефіцієнтом. Тут $k=-\frac{5}{2}-$ кутовий коефіцієнт прямої, що показує тангенс кута нахилу прямої (рис. 9.5 б) (кутом нахилу прямої називається кут між прямою та додатним напрямком осі абсцис у верхній півплощині).

Перейдемо до останнього виду і запишемо нормальне рівняння даної прямої. Розглянемо знову загальне рівняння прямої $5x+2y-20=0$. Введемо нормуючий множник $\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{5^2+2^2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{29}}$. Знак нормуючого множника вибирають протилежним до вільного члена: $\mu=\frac{1}{\sqrt{29}}$. Множимо обидві частини рівняння на нормуючий множник і отримуємо шукане рівняння:

$$\frac{5}{\sqrt{29}}x+\frac{2}{\sqrt{29}}y-\frac{20}{\sqrt{29}}=0.$$

Числа $\frac{5}{\sqrt{29}}$ та $\frac{2}{\sqrt{29}}$ – напрямні косинуси вектора нормалі, проведеного до даної прямої, тобто вектор $\left(\frac{5}{\sqrt{29}};\frac{2}{\sqrt{29}}\right)$ – орт вектора нормалі $\vec{n}=(5;2)$ (перевірте), а число $\frac{20}{\sqrt{29}}$ показує відстань початку координат до даної прямої (рис. 9.5 в).

Зауваження. Нормальне рівняння прямої доцільно застосовувати при знаходженні відхилень точки від прямої та при дослідженні розміщення точок відносно даної прямої.

Завдання для самоконтролю

1. Записати загальне рівняння прямої на площині, записати нормальний вектор прямої.

2. Отримати рівняння прямої у відрізках на осях, пояснити його назву.

3. Записати канонічне рівняння прямої, перейти до параметричних рівнянь.

4. Записати рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки, в канонічному та параметричному вигляді (на прикладі).

5. Записати та пояснити рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

6. Записати умови паралельності двох прямих на площині для прямих, заданих загальними, канонічними рівняннями, рівняннями з кутовим коефіцієнтом.

7. Трикутник задано вершинами $A(-3;-2)$, $B(1;6)$ і $C(2;-5)$. Знайдіть: кути $\hat{B}$ і $\hat{C}$; рівняння висоти, яка проведена з вершини C; довжину перпендикуляра до сторони AB, який проходить через вершину C.

8. Дві протилежні вершини квадрата лежать у точках $A(-1;1)$ і $C(5;3)$. Складіть рівняння сторін і діагоналей цього квадрата.

Відповіді. 7. $\cos B = \frac{21}{\sqrt{610}} = 0,850$; $\angle B = 31^\circ$; $\cos C = \frac{19}{\sqrt{1037}} = 0,590$; $\angle C = 53^\circ$; $x+2y+8=0$; $\frac{13\sqrt{5}}{5}$. 8. Рівняння сторін: $2x-y+3=0$; $2x-y-7=0$; $x+2y-1=0$; $x+2y-11=0$; рівняння діагоналей: $x-3y+4=0$; $3x+y-8=0$. *Вказівка:* Діагональ BD проходить через точку $F(2;\,2)-$ середина AC. Рівняння сторін − це рівняння прямих, які проходять через точки A та C під кутом $\frac{\pi}{4}$ (кутові коефіцієнти цих прямих $k_1 = 2,\ k_2 = -\frac{1}{2}$).

Лекція 10. Криві другого порядку на площині

10.1. Коло, еліпс.

10.2. Гіпербола, її побудова.

10.3. Парабола, її канонічні рівняння.

10.4. Лінії другого порядку в полярній системі координат.

10.1. Коло, еліпс

Означення. ***Колом*** називається множина всіх точок площини, рівновіддалених від даної точки цієї площини, яка називається центром.

Рівняння кола з центром у початку координат і радіусом R має вигляд:

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{10.1}$$

Рівняння кола з центом у точці $O_1(x_0; y_0)$ і радіусом R має вигляд:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2. \tag{10.1*}$$

Рівняння кола у загальному вигляді записують так:

$$Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0,$$

де A, B, C, D − сталі коефіцієнти; A, B (A, C також) одночасно не дорівнюють нулю.

Означення. ***Еліпсом*** називається множина точок площини, сума відстаней яких до двох даних точок, що називаються фокусами, є величина стала, більша за відстань між фокусами.

Побудова канонічного рівняння:

1. фокуси позначають F_1, F_2. Відстань між фокусами $F_1F_2 = 2c$ − відома.

2. сума відстаней від довільної точки еліпса $M(x, y)$ до фокусів дорівнює $2a$.

3. вісь OX проходить через фокуси F_1, F_2, причому центр системи координат розташований в середині відрізка $F_1F_2 = 2c$. Вісь OY − перпендикулярна ox і проходить через центр.

4. За означенням $F_1M + MF_2 = 2a$.

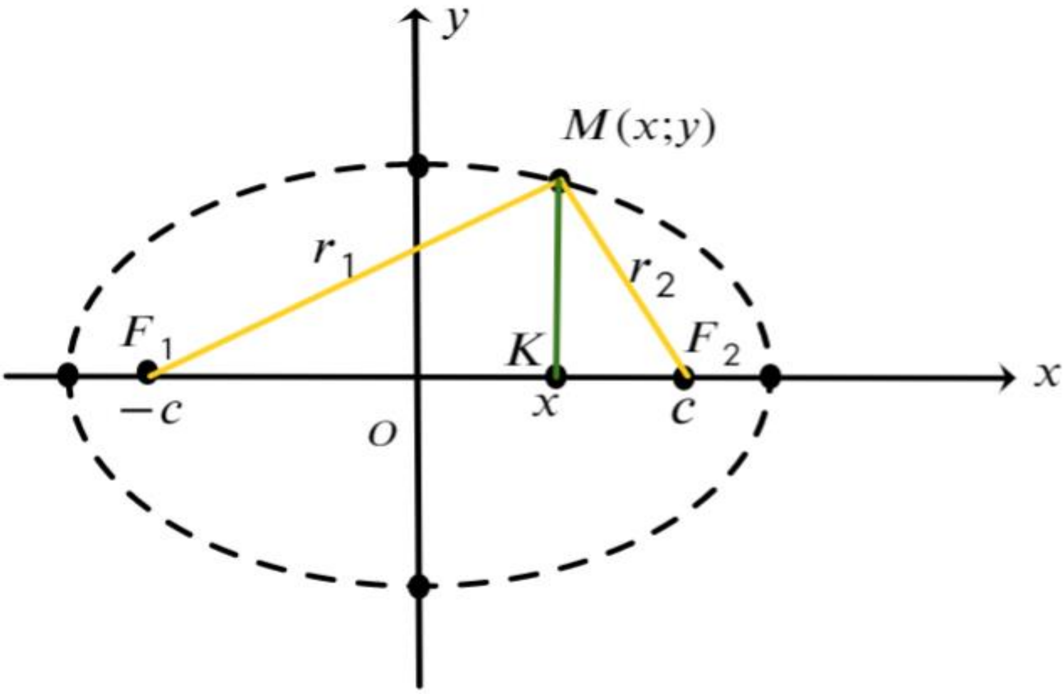


Рис. 10.1. Побудова канонічного рівняння еліпса

Зауваження. Вивести, користуючись означенням, рівняння еліпса.

Отже, потрібно розглянути два трикутники: ΔF_1KM –прямокутний (рис. 10.1), з якого за теоремою Піфагора $F_1M = \sqrt{y^2 + (c+x)^2}$ і ΔF_2KM –прямокутний, з якого теж за теоремою Піфагора $F_2M = \sqrt{y^2 + (c-x)^2}$. Підставити значення в умовну рівність $\sqrt{y^2 + (c+x)^2} + \sqrt{y^2 + (c-x)^2} = 2a$. Звідки $\sqrt{y^2 + (c+x)^2} = 2a - \sqrt{y^2 + (c-x)^2}$. Обидві частини піднести до квадрата

$$y^2 + c^2 + 2cx + x^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{y^2 + (c-x)^2} + y^2 + c^2 - 2cx + x^2.$$

$$4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{y^2 + (c-x)^2}, \text{ або } cx = a^2 - a\sqrt{y^2 + (c-x)^2}.$$

Ще раз вираз до квадрата:

$$a^2\left(y^2 + c^2 - 2cx + x^2\right) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2,$$

маємо $x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$. (*)

Так як сума довжин двох сторін трикутника більша ніж довжина третьої, значить $2a > 2c$, тобто $a > c$, тоді $a^2 - c^2 > 0$. Позначивши $a^2 - c^2 = b^2$, рівняння (*) записують $x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Обидві частини рівняння ділять на a^2b^2, та отримують

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$ – ***канонічне рівняння еліпса.***

Властивості

1. Еліпс симетричний відносно координатних осей і точки О.
2. Точки перетину з осями координат: з OX, ($y = 0$, тоді $x = \pm a$) дві $A_1(a,0)$ і $A_2(-a,0)$; з віссю OY ($x = 0$, тоді $y = \pm b$) також дві точки $B_1(0,-b)$ і $B_2(0,b)$.
3. Відрізок A_1A_2 – велика вісь, B_1B_2 – мала вісь, a – велика піввісь, b – мала піввісь.

4. *Ексцентриситетом* еліпса називається відношення фокусної відстані *2c* до великої осі *2a*:

$$e = \frac{c}{a} < 1.$$

Для еліпса $e < 1$.

5. **Означення.** *Директрисами* називаються прямі, паралельні малій осі (рис. 10.2) та відхилені від неї на відстань $d = \frac{a}{e}$.

Рівняння директрис $d_{1,2} = \pm \frac{a}{e}$.

Також директриси еліпса мають рівняння $x = \pm \frac{a^2}{c}$

Директоріальна властивість: в будь-якій точці еліпса відношення відстаней від цієї точки до найближчого фокуса до відстані від точки до найближчої директриси є величина постійна, дорівнює e: $\frac{MF_i}{Md_i} = e$.

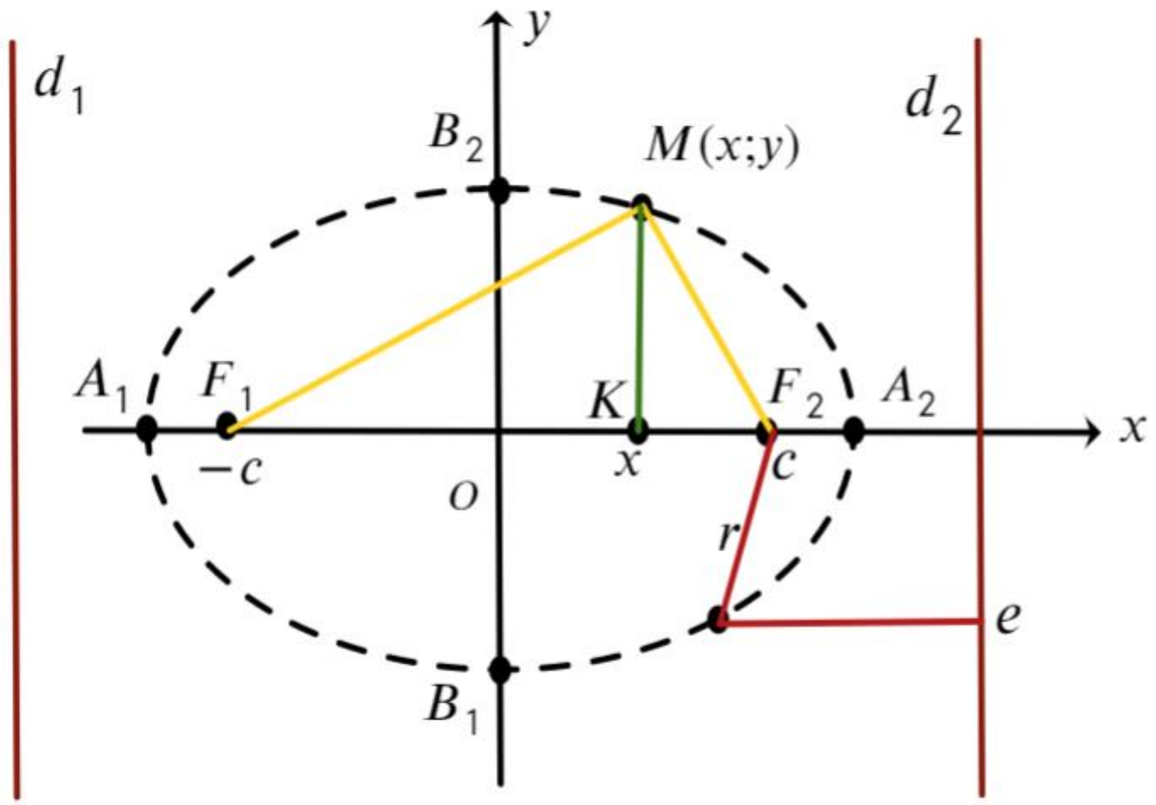


Рис. 10.2. Еліпс, його характеристики

6. Рівняння *дотичної* до еліпса в точці $M_0(x_0, y_0)$ має вид $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

7. Якщо центр еліпса зміщено в точку $A(x_a, y_a)$, то канонічне рівняння зміниться на $\frac{(x - x_a)^2}{a^2} + \frac{(y - y_a)^2}{b^2} = 1$.

Висновок. 1) Рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі OX, має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b), \qquad (10.2)$$

де a – довжина великої півосі; b – довжина малої півосі (рис. 10.2).

Залежність між параметрами a,b,c виражається співвідношенням:

$$a^2-b^2=c^2.$$

2) Рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі OY, має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (b>a), \qquad (10.2^*)$$

де b – довжина великої півосі; a – довжина малої півосі.

Залежність між параметрами a,b,c виражається співвідношенням: $b^2-a^2=c^2$.

Ексцентриситетом спряженого еліпса називається відношення фокусної відстані до великої осі: $e=\frac{c}{b}<1$.

Директриси еліпса мають рівняння $y=\pm\frac{b}{e},\left(y=\pm\frac{b^2}{c}\right)$.

10.2. Гіпербола, її побудова

Означення. ***Гіперболою*** називається множина точок площини, абсолютна величина різниці відстаней яких до двох даних точок, що називаються фокусами, є величина стала $(2a)$, менша за відстань між фокусами $(2c)$.

Побудова канонічного рівняння

1. Фокуси позначають F_1,F_2. Відстань між фокусами $F_1F_2=2c$ − відома.

2. Модуль різниці відстаней від довільної точки $M(x,y)$ до фокусів дорівнює $2a$.

3. Вісь OX проходить через фокуси F_1,F_2, причому центр системи координат розташований в середині відрізка $F_1F_2=2c$. Вісь OY − перпендикулярна OX і проходить через центр.

За означенням $|F_1M-MF_2|=2a$. Аналогічно, як і для еліпса, розглядають прямокутні трикутники і відповідні величини записують за теоремою Піфагора: ΔF_1KM: $F_1M=\sqrt{y^2+(c+x)^2}$ і ΔF_2KM: $F_2M=\sqrt{y^2+(c-x)^2}$. Підставимо значення в умовну рівність

$\left|\sqrt{y^2+(c+x)^2}-\sqrt{y^2+(c-x)^2}\right|=2a$ або $\sqrt{y^2+(c+x)^2}-\sqrt{y^2+(c-x)^2}=-2a$. Звідки $\sqrt{y^2+(c+x)^2}=-2a+\sqrt{y^2+(c-x)^2}$.

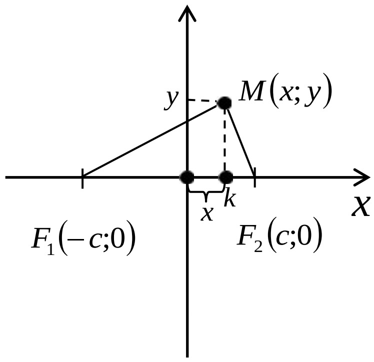


Рис. 10.3. Побудова канонічного рівняння гіперболи

Обидві частини піднесемо до квадрата

$$y^2+c^2+2cx+x^2=4a^2-4a\sqrt{y^2+(c-x)^2}+y^2+c^2-2cx+x^2.$$

$$-4cx+4a^2=4a\sqrt{y^2+(c-x)^2} \text{ або } -cx+a^2=a\sqrt{y^2+(c-x)^2}.$$

Ще раз вираз підносимо до квадрата:

$a^2\left(y^2+c^2-2cx+x^2\right)=a^4-2a^2cx+c^2x^2$, маємо $x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$. (*)

Так як $c>a$, а, значить, $c^2-a^2>0$. Позначимо $c^2-a^2=b^2$, тоді рівняння (*) запишемо $-x^2b^2+a^2y^2=-a^2b^2$. Обидві частини рівняння поділимо на $-a^2b^2$, та отримаємо

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \, -$$

канонічне рівняння гіперболи.

Властивості

1. Гіпербола симетрична відносно координатних осей і точки O.
2. Точки перетину з осями координат: з OX, ($y=0$, тоді $x=\pm a$) точки $A_1(-a,0)$ і $A_2(a,0)$, вісь OY не перетинає (рис. 10.4).
3. Точки $A_1(-a,0)$ і $A_2(a,0)$ називають вершинами гіперболи.
4. Відрізок A_1A_2 − дійсна вісь, B_1B_2 − уявна вісь, a − дійсна піввісь, b, відповідно, − уявна піввісь.

5. Величина $e=\frac{c}{a}$ – *ексцентриситет.* Для гіперболи $e>1$.

6. **Означення.** *Директрисами* називаються прямі, паралельні уявній осі і відхилені від неї на відстань $d=\frac{a}{e}$. Рівняння директрис $d_{1,2}=\pm\frac{a}{e}$.

7. Гіпербола – центральна лінія, центр прямокутної декартової системи координат – центр її симетрії.

8. В смузі $-a<x<a$ точок гіперболи немає. Прямокутник, обмежений лініями $x=\pm a$ та $y=\pm b$ називається *характеристичним (базовим)*.

9. Прямі $y=\pm\frac{b}{a}x$ – діагоналі характеристичного прямокутника, називаються *асимптотами гіперболи.*

10. Рівняння *дотичної* до гіперболи в точці $M_0(x_0,y_0)$ має вигляд:

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1.$$

Якщо центр гіперболи зміщено в точку $A(x_a,y_a)$, то канонічне рівняння зміниться на $\frac{(x-x_a)^2}{a^2}-\frac{(y-y_a)^2}{b^2}=1$.

Алгоритм побудови гіперболи

1. В прямокутній системі координат зобразити характеристичний прямокутник.
2. Позначити точки-вершини гілок гіперболи.
3. Побудувати асимптоти гіперболи – діагоналі прямокутника.
4. Побудувати праву гілку гіперболи і симетричну їй – ліву.

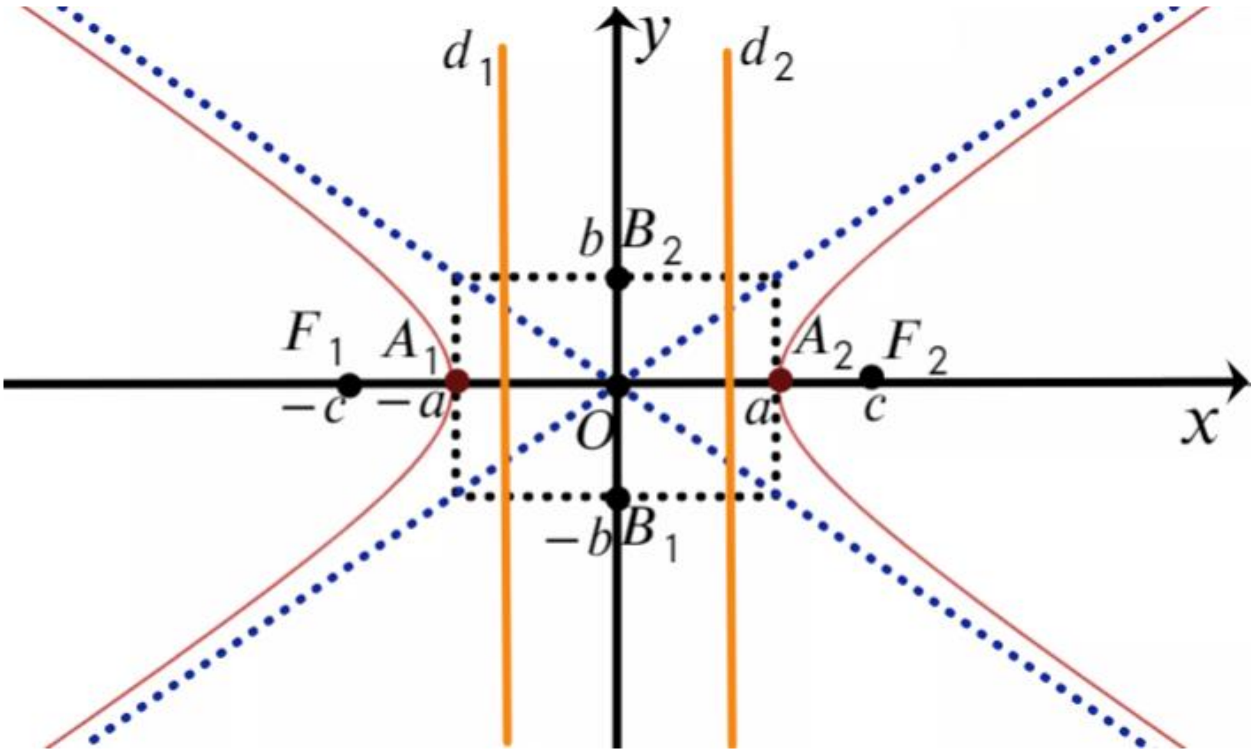


Рис. 10.4. Гіпербола, її характеристики

Висновки

Рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі OX, має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (10.3)$$

де a – довжина дійсної півосі; b – довжина уявної півосі (рис. 10.4).

Залежність між параметрами a, b, c виражається співвідношенням

$$b^2=c^2-a^2.$$

Ексцентриситетом гіперболи називається відношення півфокусної відстані до її дійсної півосі:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}>1.$$

Фокуси гіперболи знаходяться у точках $F_1\,(-c;0)$, $F_2\,(c;0)$.

Гіпербола має дві асимптоти, рівняння яких $y=\pm\frac{b}{a}x$, а також дві директриси, рівняння яких $x=\pm\frac{a}{e}$.

Якщо дійсна та уявна півосі рівні $(a=b)$, то гіпербола називається рівносторонньою. Рівняння рівносторонньої гіперболи має вигляд:

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

а рівняння її асимптот $y = \pm x$.

Якщо фокуси гіперболи лежать на осі OY в точках $F_1\ (0;-c)$, $F_2\ (0;c)$, то її рівняння має вигляд:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1. \qquad (10.4)$$

Рівняння асимптот такої гіперболи $y = \pm\frac{b}{a}x$, а рівняння директрис $y = \pm\frac{b}{e}$ (рис. 10.5).

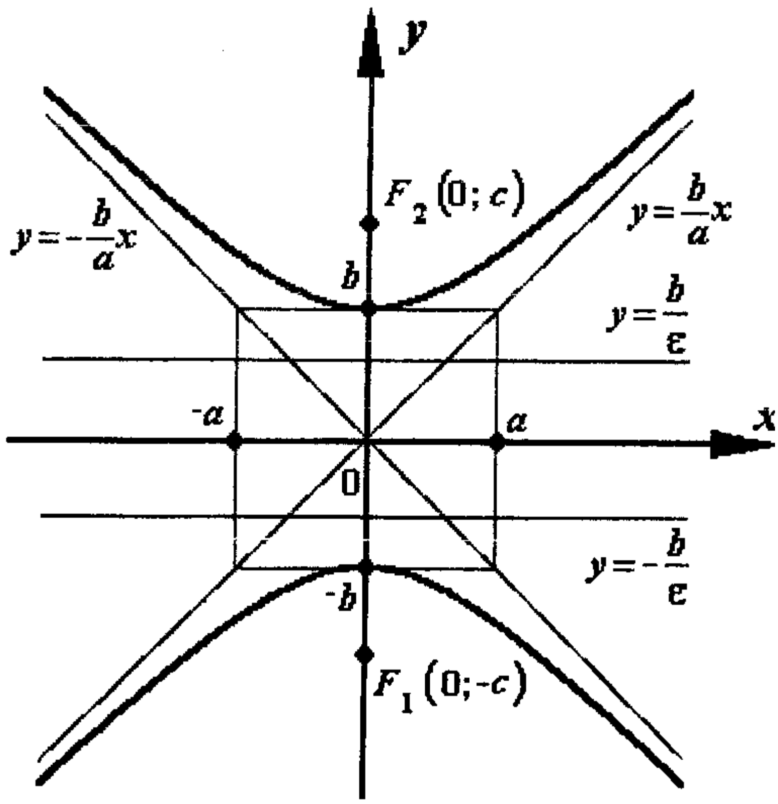


Рис. 10.5. Спряжена гіпербола

Гіперболи (10.3) і (10.4) називається спряженими. Рівняння *рівносторонньої гіперболи* з фокусами на осі OY має вигляд $y^2 - x^2 = a^2$.

Якщо центр симетрії гіперболи знаходиться в точці $C(x_0; y_0)$, а осі симетрії паралельні осям OX, OY, то рівняння гіперболи має вигляд:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1; \qquad (10.3^{*'})$$

$$\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}=1. \qquad (10.4^{*})$$

10.3. Парабола, її канонічні рівняння

Означення. ***Параболою*** називають множину точок на площині, рівновіддалених від даної точки, яка називається фокусом і від даної прямої, яка називається директрисою.

Число $p=\rho(F,d)$ називається *фокальним параметром*. Пряма, перпендикулярна директрисі і проходить через фокус, називається *віссю параболи*. Точка перетину параболи з її віссю називається *вершиною параболи*. Відстань від фокуса до точки на параболі – *фокальний радіус точки M:* $r=\rho(F,M)$. Для введення системи координат відмітимо точку O – середину відрізка Fd. Вісь OY паралельна директрисі. За означенням $\left|\overline{FM}\right|=\left|\overline{MK}\right|$. Видно, що

$$\sqrt{y^2+\left(x-\frac{p}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2},$$

тоді $y^2+\frac{p^2}{4}-px+x^2=\frac{p^2}{4}+px+x^2$, звідки випливає

$y^2=2px$ – ***канонічне рівняння параболи.***

Тоді $r=x+\frac{p}{2}$, а рівняння директриси $d=-\frac{p}{2}$, ексцентриситет $e=1$.

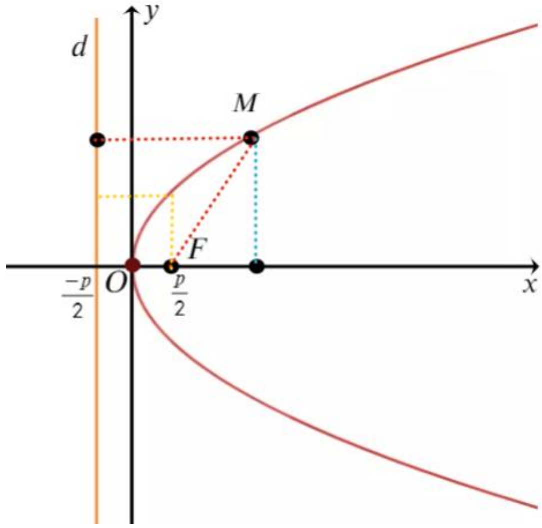


Рис. 10.6. Побудова канонічного рівняння параболи

Отже, рівняння параболи з вершиною в початку координат, віссю симетрії якої є вісь OX, має вигляд:

$$y^2 = 2px, \tag{10.6}$$

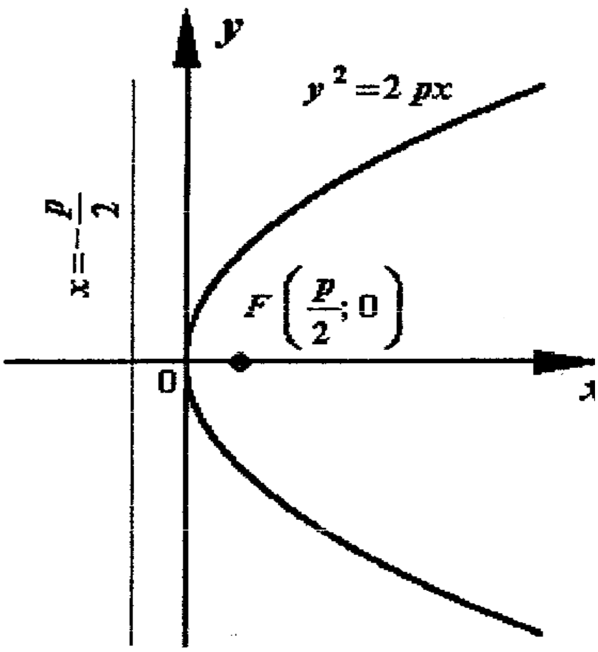


Рис. 10.7. Парабола $y^2 = 2px$

де p – параметр параболи.

Якщо $p>0$, то гілки параболи напрямлені вправо, якщо $p<0$, то гілки напрямлені вліво.

Фокус параболи знаходиться у точці $F\left(\frac{p}{2};0\right)$. Рівняння директриси

$$x=-\frac{p}{2}.$$

Рівняння параболи з вершиною в початку координат, віссю симетрії якої є вісь OY, має вигляд:

$$x^2=2py. \qquad (10.7)$$

Якщо $p>0$, то гілки направлені вгору, якщо $p<0$, то гілки направлені вниз (рис. 10.7). Фокус такої параболи є точка $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$, рівняння директриси $y=-\frac{p}{2}$.

Якщо вершина параболи – у точці $C(x_0;y_0)$, а вісь симетрії паралельна осі *Oy*, то рівняння має вигляд:

$$(x-x_0)^2=2p(y-y_0). \qquad (10.7^{*'})$$

Фокус цієї параболи $F\left(x_0;y_0+\frac{p}{2}\right)$, рівняння директриси $y=y_0-\frac{p}{2}$.

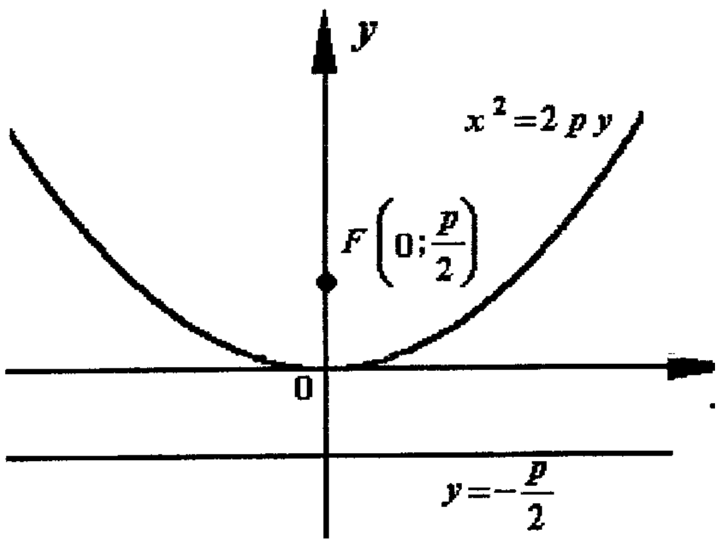


Рис. 10.8. Парабола $x^2=2py$

Якщо вершина параболи знаходиться у точці $C(x_0; y_0)$, а вісь симетрії паралельна осі *Ox*, то рівняння параболи має вигляд:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0). \qquad (10.6^{*'})$$

Фокус такої параболи $F\left(x_0 + \frac{p}{2}; y_0\right)$, рівняння директриси $x = x_0 - \frac{p}{2}$.

10.4. Лінії другого порядку в полярній системі координат

Нехай існує довільна крива. Розглянемо її довільний фокус та відповідну йому директрису. Полярну систему координат виберемо так, що полюс O збігається з фокусом, а полярна вісь направлена вздовж осі симетрії лінії в бік, протилежний директриси. Зафіксуємо на лінії точку $M(\rho,\varphi)$, з‘єднаємо її відрізком FM з фокусом і опустимо перпендикуляр MK на директрису.

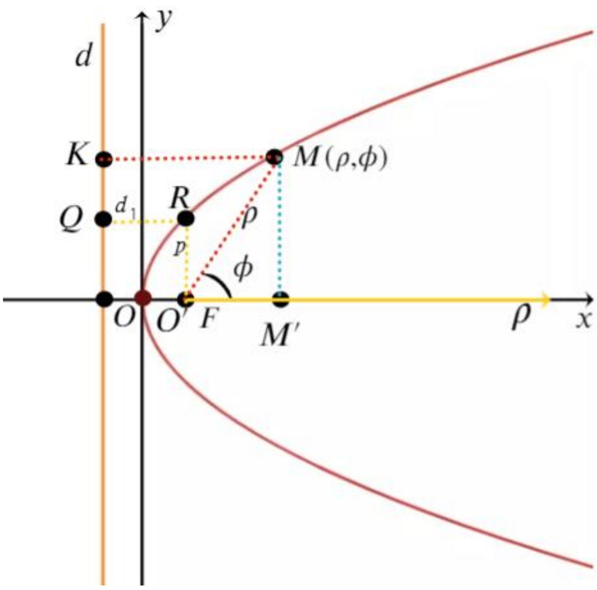


Рис. 10.9. Вигляд в полярній системі координат

Із точки F проведемо перпендикуляр FR від полярної осі до лінії точки R і на директрису d_1 − перпендикуляр RQ, очевидно, $FR = p$ − число, яке називається *фокальним параметром.* Із директоріальної властивості $\frac{FM}{Md_1} = \frac{FM}{MK} = e$. Відстань $FM = \rho$, $KM = DF + \rho\cos\varphi$, тоді $\frac{\rho}{DF + \rho\cos\varphi} = e$. Але

$\frac{FR}{RQ}=e$, $\frac{p}{DF}=e$, тобто $DF=\frac{p}{e}$. Отже, остаточно $\frac{\rho}{\frac{p}{e}+\rho\cos\varphi}=e$. Після перетворень, отримаємо

$$\rho=\frac{p}{1-e\cos\varphi}$$ − ***рівняння в полярній системі координат.***

При $e<1$ − еліпс, $e>1$ − гіпербола, $e=1$ − парабола, $e=0$ − коло. Фокальний параметр p для параболи визначається безпосередньо з рівняння $y^2=2px$. Для еліпса і гіперболи фокальний параметр являється ординатою точки кривої, абсциса якої дорівнює абсцисі відповідного фокуса в прямокутній системі координат. Тобто, точка $M(x,y)$ в рівнянні еліпса відповідає точці $M(-c,p)$, тоді маємо $\frac{c^2}{a^2}+\frac{p^2}{b^2}=1$, з якого $p=\frac{b^2}{a}$.

Наприклад, записати рівняння еліпса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{100}=1$ в полярних координатах. Для цього визначимо $a=2, b=10$, $p=\frac{100}{2}=50$. Для заданого еліпса $e=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{96}}{10}\approx 0.95$. Можна записати рівняння еліпса в полярних координатах:

$$\rho=\frac{50}{1-0.95\cos\varphi}.$$

Завдання для самоконтролю

1. Записати рівняння кола з центром в початку координат та в іншій довільній точці площини. Навести приклади.
2. Означити еліпс, записати його основні характеристики.
3. Дати означення гіперболи, сформулювати її основні характеристики.
4. Що таке спряжена гіпербола? Навести приклад побудови її.
5. Записати канонічне рівняння параболи, рівняння її директриси.
6. Навести приклади побудови параболи в залежності від виду її рівняння.

7. Складіть рівняння еліпса з фокусами на осі *Ox*, якщо відстань між фокусами дорівнює 12, ексцентриситет $e = \frac{2}{3}$.

8. Скласти рівняння еліпса з фокусами на осі *Ox*, симетричного відносно початку координат, якщо він проходить через точки $A(6; 4)$ і $B(8; 3)$.

9. Знайдіть відстань між центрами кіл $x^2 + y^2 - 10x + 16y + 80 = 0$ і $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 12 = 0$.

10. Знайдіть кут між прямими, які проходять через центр кола $x^2 + y^2 - 4x - 16y + 32 = 0$ і через фокуси еліпса $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$.

11. Складіть рівняння кола, яке проходить через точки $A(-8; 3)$ і $B(4; -9)$, якщо центр його лежить на прямій $x + 4y + 14 = 0$.

12. Скласти рівняння гіперболи з фокусами на осі *Ox*, якщо довжина її уявної осі дорівнює 12, і гіпербола проходить через точку (20; 8).

13. Побудувати гіперболу $4x^2 - y^2 - 16 = 0$. Знайти фокуси, ексцентриситет, рівняння асимптот та директрис.

14. Скласти рівняння гіперболи, якщо відстань між фокусами дорівнює 10, а рівняння асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$.

15. Скласти рівняння параболи з вершиною у початку координат, яка симетрична відносно осі *Ox* і проходить через точку (5;-3). Знайти координати фокуса, рівняння директриси.

16. Побудувати параболу $x^2 - 2x + y + 8 = 0$. Знайти координати фокуса та рівняння директриси.

Відповіді. 7. $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{45} = 1$. 8. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$. 9. $d = 10$. 10. $\cos\varphi = \frac{13}{5\sqrt{17}}$.

11. $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 72$. 12. $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{36} = 1$. 13. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$; $F_{1,2}\left(\pm 2\sqrt{5};\ 0\right)$; асимптоти $y = \pm 2x$; $\varepsilon = \sqrt{5}$; $D_{1,2} : x = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 14. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. 15. $y^2 = \frac{9}{5}x$; $F\left(\frac{9}{20};\ 0\right)$; $D : x = -\frac{9}{20}$.

16. Парабола $(x-1)^2=-(y+7)$ з віссю симетрії $x=1$ гілками вниз, вершина $C(1;\ -7)$; фокус $F(1;\ -7{,}5)$; D: $y=-6{,}5$.

Лекція 11. Поверхні другого порядку та їх канонічні рівняння

11.1. Поверхні обертання. Поверхні обертання другого порядку

У шкільному курсі геометрії вивчались такі поверхні, як циліндр, конус, сфера. Всіх їх об'єднує одна спільна властивість, а саме, всі ці поверхні можна отримати обертанням деякої лінії навколо осі.

Дамо означення поверхні обертання у загальному випадку. Нехай у просторі задано пряму l і точку M поза нею (рис. 11.1). Проведемо через точку M площину (α) перпендикулярно до прямої l. Точку перетину площини (α) і прямої l позначимо P. У площині (α) розглянемо коло w з центром у точці P і радіусом $R=PM$.

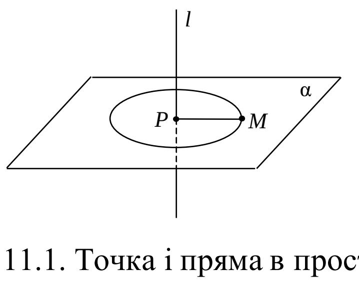


Рис. 11.1. Точка і пряма в просторі

Означення. Коло w називається колом обертання точки M навколо прямої l, а сама пряма l – віссю обертання.

Розглянемо деяку плоску лінію L, що лежить у одній площині з прямою l (рис. 11.2). Приймемо l за вісь обертання і розглянемо множину всіх кіл обертання для всіх можливих точок N лінії L (рис. 11.2).

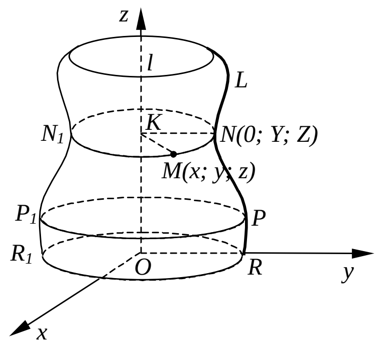


Рис. 11.2. Обертання навколо осі

Означення. Множина всіх кіл обертання точок лінії L навколо осі l називається поверхнею обертання. Ще кажуть, що поверхня обертання отримується обертанням плоскої лінії L навколо осі l, яка лежить у площині цієї лінії.

Знайдемо рівняння поверхні обертання. Для цього приймемо за вісь обертання вісь Oz, криву L розмістимо у тій півплощині yOz, де $y > 0$. Рівняння кривої L запишемо у вигляді

$$\begin{cases} f(y, z) = 0, \\ x = 0. \end{cases} \tag{11.1}$$

На рис. 11.2 крива L, обертаючись навколо осі Oz, утворює поверхню $NPRN_1P_1R_1$.

Візьмемо на кривій L довільну точку $N(O; Y; Z)$. Ця точка при обертанні навколо осі Oz описує коло NMN_1, що лежить у площині $z = Z$, перпендикулярній осі Oz. Радіус цього кола $R = Y\ (Y > 0)$, а центр знаходиться на осі Oz у точці K (рис. 11.2).

Ще раз звертаємо увагу на те, що координати точки N лінії L ми позначаємо великими буквами Y, Z, а координати точки M поверхні – малими буквами x, y, z.

Рівняннями кола, що проходить через точку $M\left(x; y; z\right)$ поверхні (рис. 11.2), є рівняння

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = Y^2, \\ z = Z. \end{cases} \tag{11.2}$$

Зі свого боку, координати точки N лінії L задовольняють рівнянню

$$f\left(Y, Z\right) = 0. \tag{11.3}$$

Якщо в рівняння (11.3) замість координат Y і Z точки N лінії L підставити згідно з (11.2) їх вирази через координати x, y, z змінної точки M поверхні обертання, то отримаємо рівняння

$$f\left(\sqrt{x^2 + y^2},\, z\right) = 0. \tag{11.4}$$

Це рівняння і буде шуканим рівнянням поверхні обертання, оскільки йому задовольняють координати будь-якої точки M цієї поверхні.

Отже, якщо точка лежить на поверхні обертання, то координати цієї точки задовольняють рівнянню (11.4).

Навпаки, нехай $M\left(x^*; y^*; z^*\right)$ – довільна точка простору, координати якої задовольняють рівнянню (11.4). Покажемо, що точка лежить на поверхні обертання. Для цього розглянемо коло з центром у точці K, яке описує точка M, обертаючись навколо осі Oz. Радіус цього кола дорівнює

$$R = \sqrt{\left(x^* - 0\right)^2 + \left(y^* - 0\right)^2 + \left(z^* - z^*\right)^2} = \sqrt{x^{*2} + y^{*2}}\ .$$

оскільки точка K має координати $K\left(0; 0; z^*\right)$. Нехай N – точка перетину цього кола з півплощиною yOz, якій відповідає додатна ордината. Ця точка має координати $\left(0; \sqrt{x^{*2} + y^{*2}}; z^*\right)$. З (11.4) випливає, що координати точки N задовольняють рівнянню (11.1). Тому ця точка лежить на кривій L, а, отже, точка M лежить на поверхні обертання.

Відмітимо, що зв'язок між рівняннями (11.1) лінії L і рівнянням (11.4) поверхні, що утворюється обертанням цієї лінії навколо осі Oz, дуже простий: щоб отримати рівняння поверхні обертання (11.4), потрібно в рівнянні лінії (11.1) координату z, тобто координату вздовж осі обертання, залишити без змін, а іншу координату (координату y) замінити на $\sqrt{x^2+y^2}$.

Це правило носить загальний характер. Так, якщо задано криву, що лежить у площині xOy, тобто має рівняння

$$\begin{cases} f(x,\, y)=0, \\ z=0, \end{cases} \tag{11.5}$$

і потрібно знайти рівняння поверхні, яка утворюється обертаннями цієї кривої навколо осі Oy, то у першому рівнянні (11.5) змінну x слід замінити на $\sqrt{x^2+z^2}$, а змінну y залишити без змін. Рівняння поверхні обертання у цьому випадку буде таким

$$f\left(\sqrt{x^2+z^2},\, y\right)=0.$$

З викладеного вище випливає наступна *ознака,* яка дозволяє відрізнити за рівнянням будь-яку поверхню обертання з віссю, що співпадає з однією із координатних осей: *дві з трьох координат входять до рівняння поверхні тільки у вигляді суми їх квадратів; віссю обертання є та вісь, координата якої входять до рівняння окремо*. Наприклад, рівняння $y^2+z^2=2x$ є рівнянням поверхні обертання, вісь якої співпадає з координатною віссю Ox.

Приклади рівняння поверхонь, що утворюються обертаннями кривих другого порядку навколо їх осей симетрії

Вісь обертання приймемо за вісь Oz; криві будемо розміщувати у площині yOz. Рівняння поверхонь знайдемо за рівнянням (11.4).

1°. ***Еліпсоїд обертання***. Розглянемо еліпс

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ x=0. \end{cases}$$

Обертаючи його навколо осі Oz, отримаємо поверхню обертання, рівняння якої

$$\frac{x^2+y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{11.6}$$

Означення. Поверхня, яка визначається рівнянням (11.6), називається *еліпсоїдом обертання.*

Якщо еліпс обертається навколо малої осі $\left(c<b\right)$, то еліпсоїд обертання називають стиснутим (рис. 11.3). Якщо ж віссю обертання є більша вісь $\left(c>b\right)$, то еліпсоїд обертання називають видовженим або витягнутим (рис. 11.4).

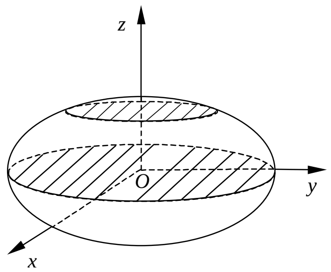


Рис. 11.3. Еліпсоїд обертання (стиснутий)

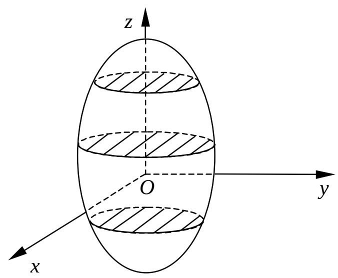


Рис. 11.4. Еліпсоїд обертання (витягнутий)

2°. ***Гіперболоїд обертання***. Розглянемо у площині yOz дві спряжені гіперболи

$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0,\end{cases} \qquad \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1,\\ x=0.\end{cases}$$

Обертаючи ці гіперболи навколо осі Oz, отримаємо дві наступні поверхні обертання:

$$\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{11.7}$$

$$\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \tag{11.8}$$

Означення. Поверхня, яку задано рівнянням (11.7), називається *однопорожнинним гіперболоїдом* обертання (рис. 11.5).

Означення. Поверхня, яку задано рівнянням (11.8), називається *двопорожнинним гіперболоїдом* обертання (рис. 11.6).

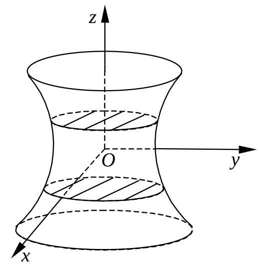


Рис. 11.5. Однопорожнинний гіперболоїд

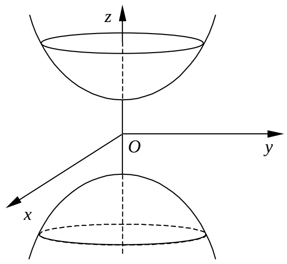


Рис. 11.6. Двопорожнинний гіперболоїд

Розглянемо рівняння асимптот гіперболи

$$y = \pm \frac{b}{c} z. \qquad (11.9)$$

Оскільки рівнянням пари асимптот є рівняння $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, то обертаючи навколо осі Oz ці асимптоти, отримаємо поверхню обертання з рівнянням

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \qquad (11.10)$$

Означення. Поверхня, яку задано рівнянням (11.10), називається *конусом обертання* (рис. 11.7). Оскільки прямі (11.9), які утворюють при обертанні конус, є асимптотами гіпербол, що у свою чергу при обертанні утворюють гіперболоїди, порожнини останніх, віддаляючись від площини xOy, необмежено наближаються до порожнин конуса, намагаючись з ними злитися.

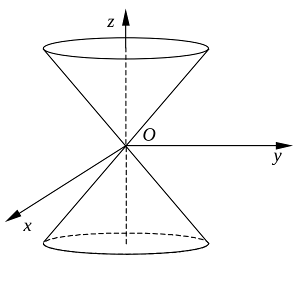


Рис. 11.7. Конус обертання

Означення. Конус (11.10) називається *асимптотичним конусом* гіперболоїдів (11.7) і (11.8).

3°. ***Параболоїд обертання***. Розглянемо рівняння параболи, яка лежить у площині yOz і віссю якої є вісь Oz: $y^2 = 2pz$.

Обертаючи цю параболу навколо осі Oz, отримаємо поверхню

$$x^2 + y^2 = 2pz. \tag{11.11}$$

Означення. Поверхня, яка визначається рівнянням (11.11), називається *параболоїдом обертання* (рис. 11.8).

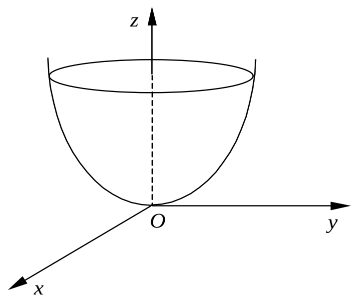


Рис. 11.8. Параболоїд обертання

11. 2. Поверхні другого порядку. Еліпсоїд

Означення. Поверхнею другого порядку називається множина всіх точок простору, координати яких у деякій декартовій прямокутній системі координат задовольняють рівнянню

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0, \tag{11.12}$$

де $A, B, \ldots, L$ – дійсні числа, причому хоча б один з коефіцієнтів A, B, C, D, E, F відмінний від нуля.

Не розглядаємо випадок циліндричних поверхонь другого порядку, тобто випадок, коли ліва частина рівняння (11.12) залежить лише від двох змінних, наприклад, залежить від x і y і не залежить від z. Для інших випадків рівняння поверхні (11.12) у відповідним чином вибраній системі координат зводиться до одного з двох типів

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + L = 0, \text{ де } A \neq 0, \ B \neq 0, \tag{11.13}$$

$$Ax^2 + By^2 + Kz = 0, \text{ де } A \neq 0, \; B \neq 0, \; K \neq 0. \qquad (11.14)$$

З поверхонь, що визначаються рівняннями типу (11.13), найбільш цікавими є *еліпсоїди і гіперболоїди*. Рівняння типу (11.14) описують параболоїди.

Означення. *Еліпсоїдом* називається множина всіх точок простору, координати яких у деякій прямокутній декартовій системі координат задовольняють рівнянню

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (11.15)$$

Означення. Система координат, в якій еліпсоїд задано рівнянням (11.15), називається канонічною системою, а саме рівняння – *канонічним рівнянням еліпсоїда*.

Змінна z входить до рівняння (11.15) з квадратом. Тому, якщо точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$ лежить на еліпсоїді, то на ньому буде лежати і точка $M_2(x_1; y_1; -z_1)$. Серединою відрізка M_1M_2 є точка $N_1(x_1; y_1; 0)$ (рис. 11.9). Це означає, що координатна площина xOy є площиною симетрії еліпсоїда. Аналогічні міркування справедливі для змінних x і y. Можна розглянути всі інші можливі комбінації знаків змінних, наприклад, якщо одна з точок $P(x_2; y_2; z_2)$ або $Q(-x_2; -y_2; -z_2)$ лежить на еліпсоїді, то на ньому буде лежати і друга точка. Отже, оскільки змінні x, y, z входять до рівняння (11.15) тільки з квадратом, то еліпсоїд симетричний відносно координатних площин, координатних осей і початку координат.

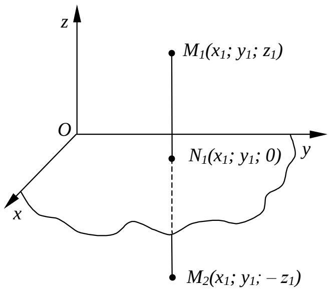


Рис. 11.9. Площина симетрії, вигляд

Центр симетрії еліпсоїда називається центром еліпсоїда. Будь-яка пряма, яка проходить через центр еліпсоїда, перетинає його у двох точках, симетричних відносно центра.

Визначимо межі змінювання координат точок еліпсоїда. З рівняння (11.15) маємо:

$$\frac{x^2}{a^2} \le 1 \Leftrightarrow x^2 \le a^2 \Leftrightarrow -a \le x \le a, \; \frac{y^2}{b^2} \le 1 \Leftrightarrow y^2 \le b^2 \Leftrightarrow -b \le y \le b,$$

$$\frac{z^2}{c^2} \le 1 \Leftrightarrow z^2 \le c^2 \Leftrightarrow -c \le z \le c.$$

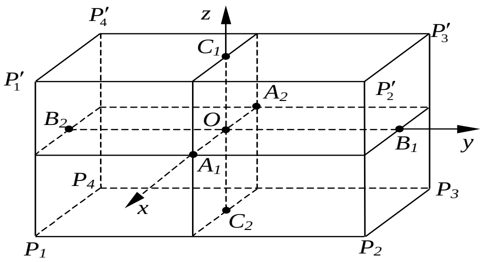


Рис. 11.10. Базовий паралелепіпед

Звідси випливає, що точки еліпсоїда розміщуються всередині паралелепіпеда $P_1P_2P_3P_4P_1'P_2'P_3'P_4'$, зображеного на рис. 11.10.

Знайдемо точки перетину еліпсоїда (11.15) з осями координат. Проте зручніше отримати координати точок перетину, наприклад, з віссю Ox, розв'язавши спільно рівняння еліпсоїда і осі Ox:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \; y = 0, \; z = 0.$$

В результаті отримуємо точки перетину $A_1(a; 0; 0)$ і $A_2(-a; 0; 0)$. Аналогічно, приходимо до точок перетину еліпсоїда з віссю Oy: $B_1(0; b; 0)$, $B_2(0; -b; 0)$ і віссю Oz: $C_1(0; 0; c)$, $C_2(0; 0; -c)$ (рис. 11.10).

Отже, еліпсоїд з кожною віссю координат перетинається у двох точках, які симетричні відносно його центра.

Означення. Точки $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ називаються вершинами еліпсоїда, а відрізки A_1A_2, B_1B_2 і C_1C_2 – його осями. Числа a, b, c називаються півосями еліпсоїда. Якщо всі ці числа попарно різні, то еліпсоїд називається тривісним. Якщо дві півосі дорівнюють одна одній, то еліпсоїд називається двовісним або еліпсоїдом обертання.

Нижче будемо досліджувати форму еліпсоїда ***методом перерізів***. Перетнемо еліпсоїд площиною, паралельною площині xOy. У перерізі отримуємо криву, рівняннями якої є

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ z = h, \end{cases} \qquad (11.16)$$

оскільки для всіх точок площини, паралельної площині xOy, координата z має постійне значення. Це значення ми позначили через h.

Перетворимо рівняння (11.16) до вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2}, \\ z=h. \end{cases} \qquad (11.17)$$

Можливі три випадки:

1°. $|h|<c \Leftrightarrow -c<h<c$. У цьому випадку у перерізах маємо еліпси, центри яких лежать на осі Oz. Дійсно, рівняння (11.17) можна звести до вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(1-\dfrac{h^2}{c^2}\right)}+\dfrac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{h^2}{c^2}\right)}=1, \\ z=h. \end{cases} \qquad (11.18)$$

Оскільки $1-\dfrac{h^2}{c^2}>0$, то рівняння (11.18) у площині $z=h$ визначають еліпс з півосями

$$\lambda=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}},\ \mu=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$$

і центром у точці $(0;\,0;\,h)$. Осі симетрії цього еліпса паралельні осям Ox і Oy.

Зі зменшенням $|h|$ півосі еліпса зростають і при $h=0$ отримуємо $\lambda=a$, $\mu=b$. Отже, найбільший еліпс маємо у перерізі еліпсоїда (11.15) площиною xOy.

Рівняннями цього еліпса є $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0. \end{cases}$

2°. $|h|=c \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} h=c \\ h=-c. \end{array}\right.$ У цьому випадку рівняння (11.17) набувають вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0, \\ z=\pm c. \end{cases} \qquad (11.19)$$

Рівнянням (11.19) задовольняють дві дійсні точки $C_1(0;\,0;\,c)$ і $C_2(0;\,0;\,-c)$.

Отже, площини $z = \pm c$ перетинають еліпсоїд у його вершинах відповідно $C_1(0;\,0;\,c)$ і $C_2(0;\,0;\,-c)$.

3°. $|h| > c \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} h < -c \\ h > c. \end{array}\right.$ З рівнянь (11.17) випливає, що

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} < 0, \\ z = h. \end{cases} \tag{11.20}$$

Першій умові (11.20) не задовольняє жодна дійсна точка. Тому площини, які паралельні площині xOy і для яких $|z| > c$, не перетинають еліпсоїд.

Всі еліпси, які отримуються у перерізах еліпсоїда площинами, паралельними площині xOy, подібні між собою. Дійсно, з формул випливає, що $\dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{a}{b}$, тобто відношення півосей не залежить від h.

Аналогічно, перетинаючи еліпсоїд площинами, паралельними площині yOz, будемо також отримувати еліпси, подібні між собою Найбільший еліпс лежить у перерізі еліпсоїда площиною yOz:

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

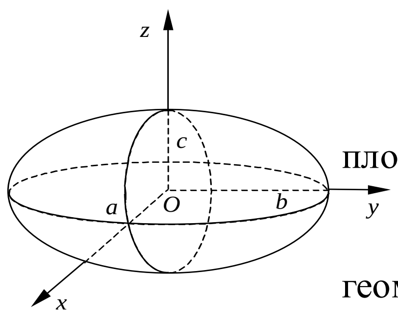


Рис. 11.11. Еліпсоїд

Те ж саме відноситься і до перерізів еліпсоїда площинами, паралельними площині xOz.

Проведені дослідження дають повну уяву про геометричну форму еліпсоїда (рис. 11.11).

11.3. Конус другого порядку

Означення. *Конусом другого порядку* називається множина всіх точок простору, координати яких у деякій декартовій прямокутній системі координат задовольняють рівнянню

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \qquad (11.21)$$

Означення. Система координат, відносно якої конус другого порядку має рівняння (11.21), називається канонічною системою координат, а саме рівняння (11.21) – *канонічним рівнянням конуса* другого порядку.

Змінні x, y і z входять до рівняння (11.21) з квадратом. Тому, якщо точка $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$ належить конусу другого порядку, то йому буде належати і точка $M_2(\pm x_1;\, \pm y_1;\, \pm z_1)$. Геометрично це означає, що початок координат є центром симетрії, осі координат – осями симетрії, а координатні площини – площинами симетрії конуса другого порядку.

Покажемо, що рівняння (11.21) визначає конічну поверхню з вершиною у початку координат, тобто поверхню, яка складається з прямих, що проходять через початок координат. Нехай $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ – довільна, відмінна від початку координат, точка, координати якої задовольняють рівнянню (11.21), тобто

$$\frac{{x_0}^2}{a^2}+\frac{{y_0}^2}{b^2}-\frac{{z_0}^2}{c^2}=0.$$

Тоді точка $M(tx_0;\, ty_0;\, tz_0)$, де t – довільне число, також задовольняє рівнянню (11.21):

$$\frac{(tx_0)^2}{a^2}+\frac{(ty_0)^2}{b^2}-\frac{(tz_0)^2}{c^2}=t^2\left(\frac{{x_0}^2}{a^2}+\frac{{y_0}^2}{b^2}-\frac{{z_0}^2}{c^2}\right)=t^2\cdot 0=0.$$

Точки $M(tx_0;\, ty_0;\, tz_0)$ повністю заповнюють пряму і ця пряма належить конусу.

Зі сказаного випливає, що для уявлення про вигляд поверхні (11.21) достатньо розглянути її переріз якою-небудь площиною $z=h$, паралельною площині xOy. Таким перерізом є еліпс з рівнянням

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2},\\ z=h,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{ah}{c}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{bh}{c}\right)^2}=1,\\ z=h.\end{cases} \qquad (11.22)$$

Центр цього еліпса лежить на осі Oz у точці $(0;\,0;\,h)$, а півосі дорівнюють

$$\lambda = \frac{a|h|}{c},\ \mu = \frac{b|h|}{c}.$$

Якщо $h = 0$, то рівнянням $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0, \\ z = 0, \end{cases}$ задовольняє лише точка $O(0;\,0;\,0)$.

Саме у цій єдиній точці конус (11.21) перетинається з площиною xOy.

Означення. Точка $O(0;\,0;\,0)$ називається вершиною конуса (11.21), а вісь Oz – його віссю. Пряма, всі точки якої лежать на поверхні другого порядку, називається твірною цієї поверхні.

Отже, конус (11.21) можна розглядати як множину всіх його твірних, що проходять через вершину $O(0;\,0;\,0)$ і точки еліпса (11.22).

Якщо $a = b$, то рівняння (11.21) визначає конус обертання.

Всі еліпси, які отримуються у перерізах конуса (11.21) площинами, паралельними площині xOy, подібні між собою, оскільки з формул (11.22) випливає, що $\dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{a}{b}$, тобто відношення півосей не залежить від h.

Загальний вигляд конуса другого порядку (за канонічним рівнянням (11.21) відносно осі Oz) зображено на рис. 11.12. Конус складається з двох порожнин, розміщених по обидва боки від вершини, і необмежено простягається вздовж осі Oz.

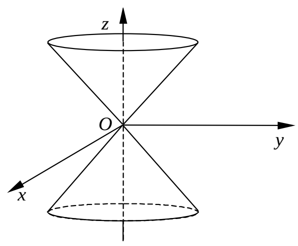


Рис. 11.12. Конус відносно осі Oz

Рівняння конуса другого порядку досліджено нами для випадку, коли від'ємним у правій частині цього рівняння є член, що містить координату z

(рівняння (11.21)). Якщо від'ємним буде який-небудь інший член цього рівняння, то це призведе лише до зміни розміщення конуса відносно координатних осей.

Розміщення конусів другого порядку, які описуються рівняннями $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$, $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ показано відповідно на рис. 11.13, 11.14.

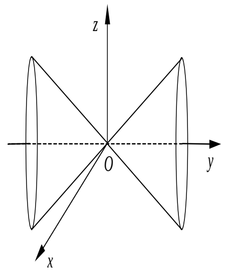


Рис. 11.13. Конус відносно осі Oy

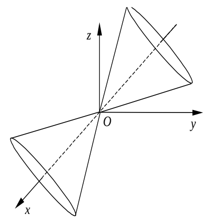


Рис. 11.14. Конус відносно осі Ox

11.4. Однопорожнинний гіперболоїд

Означення. *Однопорожнинним гіперболоїдом* називається множина всіх точок простору, координати яких у деякій декартовій прямокутній системі координат задовольняють рівнянню

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{11.23}$$

Означення. Система координат, в якій однопорожнинний гіперболоїд має рівняння (11.23), називається канонічною системою координат, а саме рівняння (11.23) – *канонічним рівнянням однопорожнинного гіперболоїда*.

Отримати уявлення про форму поверхні (11.23) можна за тією ж схемою, що й у випадку еліпсоїда. При цьому ряд властивостей однопорожнинного гіперболоїда залишаються аналогічними до відповідних властивостей еліпсоїда.

Як і у випадку еліпсоїда, змінні x, y, z входять до рівняння (11.23) з квадратом. Тому однопорожнинний гіперболоїд симетричний відносно всіх координатних площин, координатних осей і початку координат.

Аналогічно еліпсоїду знаходяться точки перетину однопорожнинного гіперболоїда з осями Ox і Oy. З віссю Ox однопорожнинний гіперболоїд перетинається у точках $A_1(a;0;0)$ і $A_2(-a;0;0)$, а з віссю Oy – у точках $B_1(0;b;0)$

і $B_2(0;-b;0)$. Щоб знайти точки перетину однопорожнинного гіперболоїда з віссю Oz, потрібно розв'язати систему

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ x=0, \\ y=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ x=0, \\ y=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\pm ci, \\ x=0, \\ y=0. \end{cases} \tag{11.24}$$

Тут i – уявна одиниця, тобто $i^2=-1$. Отже, з віссю Oz однопорожнинний гіперболоїд не перетинається в жодній точці простору.

Точки A_1, A_2, B_1, B_2 називаються вершинами, відрізки A_1A_2 і B_1B_2 – дійсними осями, а вісь Oz – уявною віссю однопорожнинного гіперболоїда. Числа a, b, c називаються його півосями.

Дослідимо перетин однопорожнинного гіперболоїда і прямої, що проходить через початок координат. Нехай через початок координат $O(0;\,0;\,0)$ проведено пряму l паралельно вектору $\vec{a}(m;n;p)$. Довільна точка на цій прямій має координати

$$x=mt,\ y=nt,\ z=pt, \tag{11.25}$$

де t – відповідне дійсне число. Для знаходження точок перетину прямої (11.25) з поверхнею (11.23) підставимо співвідношення (11.25) у формулу (11.23):

$$\frac{m^2t^2}{a^2}+\frac{n^2t^2}{b^2}-\frac{p^2t^2}{c^2}=1 \Leftrightarrow \left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}-\frac{p^2}{c^2}\right)t^2=1 \Leftrightarrow Qt^2-1=0, \tag{11.26}$$

де $Q=\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}-\dfrac{p^2}{c^2}$.

Можливі три випадки:

1°. $Q=\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}-\dfrac{p^2}{c^2}>0$. У цьому випадку квадратне рівняння (11.26) відносно t має два дійсних корені $t_1=\dfrac{1}{\sqrt{Q}}$ і $t_2=-\dfrac{1}{\sqrt{Q}}$, а тому пряма l перетинає однопорожнинний гіперболоїд у двох точках $M_1\left(\frac{m}{\sqrt{Q}};\frac{n}{\sqrt{Q}};\frac{p}{\sqrt{Q}}\right)$, $M_2\left(-\frac{m}{\sqrt{Q}};-\frac{n}{\sqrt{Q}};-\frac{p}{\sqrt{Q}}\right)$, симетричних відносно початку координат.

2º. $Q=0$. У цьому випадку пряма l не перетинає однопорожнинний гіперболоїд.

3º. $Q<0$. Розв'язками рівняння (11.26) у цьому випадку є комплексно-спряжені числа $t=\pm\sqrt{\frac{1}{|Q|}}i$. Тому дійсних точок перетину прямої l і однопорожнинного гіперболоїда не існує.

Вияснимо геометричний зміст отриманих результатів. Для цього складемо рівняння конуса другого порядку

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (11.27)$$

з тими ж величинами a,b,c, що й в (11.23).

Нехай для прямої l з напрямним вектором $\vec{a}_0(m_0;n_0;p_0)$ виконується умова

$$Q=0 \Leftrightarrow \frac{m_0{}^2}{a^2}+\frac{n_0{}^2}{b^2}-\frac{p_0{}^2}{c^2}=0.$$

Тоді точка $M_0\left(m_0;n_0;p_0\right)$ є точкою конуса (6) і цьому конусу належить вся пряма $x=m_0t,\ y=n_0t,\ z=p_0t$.

Отже, пряма, яка проходить через початок координат паралельно вектору $\vec{a}_0(m_0;n_0;p_0)$, за умови **2º** є твірною конуса (11.27).

Означення. Конус другого порядку (11.27) називається *асимптотичним конусом однопорожнинного гіперб*олоїда (11.23). Твірні цього конуса називаються асимптотами однопорожнинного гіперболоїда.

Якщо ж пряма l проходить зовні асимптотичного конуса, то $Q>0$ і ми маємо випадок **1°**, тобто пряма l перетинає поверхню в двох точках M_1 і M_2, симетричних відносно початку координат (рис. 11.15).

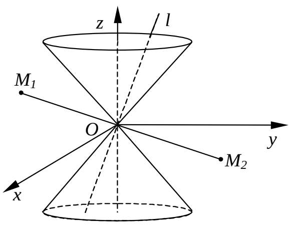


Рис. 11.15. Вигляд асимптотичного конуса

Якщо пряма l, яка проходить через початок координат, знаходиться всередині асимптотичного конуса (рис. 11.15), то для неї $Q<0$ і згідно з пунктом **3°** вона не має з поверхнею однопорожнинного гіперболоїда спільних дійсних точок.

У випадку **2°** пряма l є твірною асимптотичного конуса і не перетинає однопорожнинний гіперболоїд.

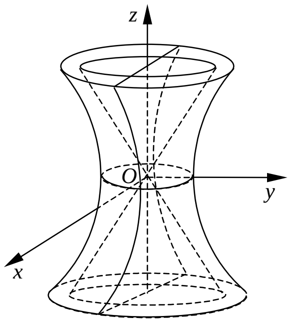


Рис. 11.16. Однопорожнинний гіперболоїд і асимптотичний конус

Всередині однопорожнинного гіперболоїда на рис. 11.16 зображено його асимптотичний конус.

Ряд важливих властивостей однопорожнинного гіперболоїда (11.23) можна виявити шляхом дослідження його перерізів площинами, паралельними координатним площинам yOz та xOz.

Наприклад, у перерізі поверхні (11.23) площиною $x=h$ отримуємо криву

$$\begin{cases} \dfrac{h^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ x=h, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y^2}{\dfrac{b^2(a^2-h^2)}{a^2}}-\dfrac{z^2}{\dfrac{c^2(a^2-h^2)}{a^2}}=1, \\ x=h, \end{cases} \qquad (11.28)$$

рівняння якої визначають гіперболу (в залежності від h дійсна та уявна осі).

Знак обох членів першого рівняння системи (11.28) залежить від величини h. Нехай

$$a^2-h^2>0 \Leftrightarrow |h|<a \Leftrightarrow -a<h<a.$$

Тоді у першому рівнянні (11.28) перший доданок додатний, а другий від'ємний. Маємо гіперболу, у якої дійсна вісь паралельна осі Oy, а уявна – осі Oz (рис. 11.17).

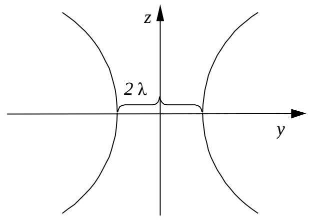


Рис. 11.17. Проєкція на площину zOy

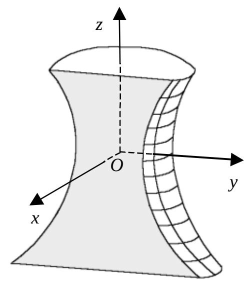


Рис. 11.18 . Переріз площиною $x = h$

На рис. 11.18 зображено переріз поверхні (11.23) площиною $x = h$, де $0 < h < a$. Дійсна піввісь гіперболи (11.28) дорівнює $\lambda = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - h^2}$, а відстань між вершинами цієї гіперболи – 2λ. Вершини гіперболи мають координати $\left(h; \pm\frac{b\sqrt{a^2 - h^2}}{a}; 0\right)$.

Дослідимо, як змінюється переріз гіперболоїда площиною $x = h$ при віддаленні цієї площини від площини yOz, тобто при збільшенні $|h|$. Дійсна вісь гіперболи буде зменшуватись, прямуючи до нуля, тобто вершини гіперболи будуть стягуватись до однієї точки. Це відбуватиметься до тих пір, поки h не досягне величини a. При $h = a$ переріз перестає бути гіперболою, оскільки вершини співпадають. Рівняння перерізу не можна записати у вигляді (11.28), оскільки при $h = a$ не можна ділити на $a^2 - h^2$. Тому слід повернутись до рівняння (11.23), яке при $x = a$ дає нам

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \\ x = a, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) = 0, \\ x = a. \end{cases}$$

Отже, площина $x = a$ перетинає поверхню (11.23) по парі прямих, що мають рівняння $\begin{cases} \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 0, \\ x = a, \end{cases}$ та $\begin{cases} \dfrac{y}{b} - \dfrac{z}{c} = 0, \\ x = a. \end{cases}$

Ці прямі зображено на рис. 11.19, а переріз однопорожнинного гіперболоїда площиною $x = a$ – на рис. 11.20.

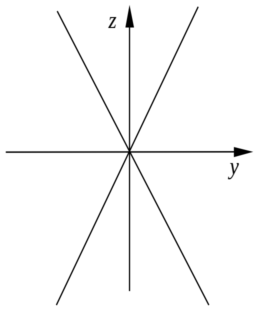


Рис. 11.19. Пара прямих

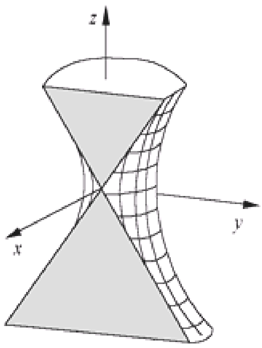


Рис. 11.20. Переріз площиною $x = a$

Таким чином, виявляється, що існують прямі лінії, які повністю лежать на однопорожнинному гіперболоїді, тобто є його твірними, причому через точку однопорожнинного гіперболоїда проходять дві різні прямі, що лежать на ньому.

Нехай тепер $a^2 - h^2 < 0 \Leftrightarrow h^2 > a^2 \Leftrightarrow |h| > a.$

Тоді у першому рівнянні системи (11.28) перший доданок від'ємний, а другий додатний, рівняння є рівняннями гіперболи, дійсна вісь якої паралельна осі Oz, а уявна – осі Oy (рис. 11.21). Дійсна піввісь цієї гіперболи дорівнює $\mu = \dfrac{c}{a}\sqrt{h^2 - a^2}$, а відстань між вершинами гіперболи – 2μ.

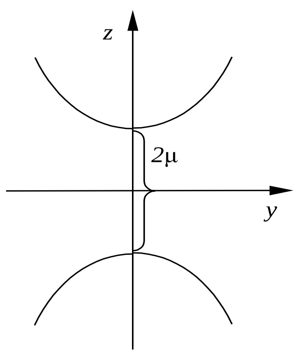


Рис. 11.21. Вигляд гіперболи в перерізі

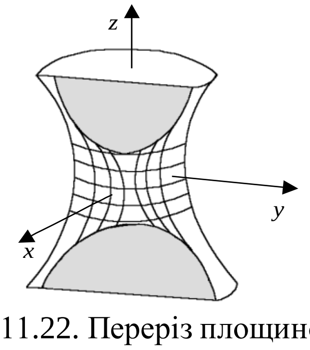


Рис. 11.22. Переріз площиною $x = h$

На рис. 11.22 зображено переріз однопорожнинного гіперболоїда (11.23) площиною $x = h$, де $h > a$.

Аналогічні дослідження можна провести щодо перерізів однопорожнинного гіперболоїда (11.23) площинами, паралельними координатній площині xOz.

Зауваження. Рівняння однопорожнинного гіперболоїда досліджено для випадку, коли від'ємним у правій частині цього рівняння є доданок, що містить координату z. Якщо від'ємним є який-небудь інший доданок цього рівняння, то це призведе лише до зміни розміщення однопорожнинного гіперболоїда відносно координатних осей.

Однопорожнинний гіперболоїд з канонічним рівнянням

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (11.29)$$

зображено на рис. 11.23, а однопорожнинний гіперболоїд з канонічним рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (11.30)$$

на рис. 11.24.

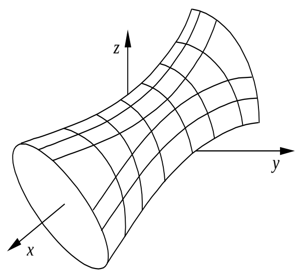


Рис. 11.23. $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

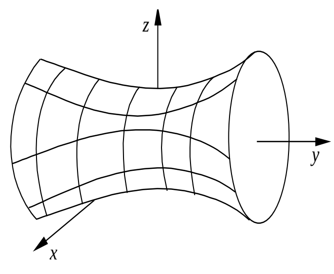


Рис. 11.24. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

Якщо у рівнянні (11.23) $a = b$, то отримаємо однопорожнинний гіперболоїд обертання.

11.5. Двопорожнинний гіперболоїд

Означення. *Двопорожнинним гіперболоїдом* називається множина всіх точок простору, координати яких у деякій декартовій прямокутній системі координат задовольняють рівнянню

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \tag{11.31}$$

Означення. Система координат, в якій рівняння двопорожнинного гіперболоїда має вигляд (11.31), називається канонічною, а саме рівняння (11.31) – *канонічним рівнянням двопорожнинного гіперболоїда*.

Метод дослідження форми та геометричних властивостей поверхні (11.31) нічим не відрізняється від методу дослідження форми та властивостей однопорожнинного гіперболоїда. Двопорожнинний гіперболоїд симетричний відносно всіх координатних площин, координатних осей і початку координат.

Вісь Oz перетинає двопорожнинний гіперболоїд у двох точках $C_1(0;0;c)$ і $C_2(0;0;-c)$, а осі Ox та Oy не перетинають його у дійсних точках.

Точки $C_1(0;0;c)$ і $C_2(0;0;-c)$ називаються вершинами двопорожнинного гіперболоїда, відрізок C_1C_2 – його дійсною віссю, а числа a,b,c – півосями двопорожнинного гіперболоїда.

Якщо коефіцієнти у канонічних рівняннях однопорожнинного (11.23) та двопорожнинного (11.31) гіперболоїдів одні і ті ж, то ці рівняння визначають один і той же асимптотичний конус

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \tag{11.32}$$

В обох випадках поняття асимптотичного конуса дозволяє з'ясувати геометричний зміст питання про перетин прямої l, що проходить через початок координат, з поверхнею гіперболоїда.

Нехай пряма l проходить через початок координат і має параметричні рівняння

$$x=mt,\ y=nt,\ z=pt, \tag{11.33}$$

де $\vec{a}(m;n;p)$ – напрямний вектор цієї прямої. Тоді значення параметра t, які визначають точки перетину поверхні (11.31) з прямою (11.33), знаходяться з рівняння

$$Qt^2 = -1, \tag{11.34}$$

де

$$Q = \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} - \frac{p^2}{c^2}. \tag{11.35}$$

Можливі три випадки:

1°. $Q < 0$. У цьому випадку квадратне рівняння (11.34) має два розв'язки $t_1 = \frac{1}{\sqrt{|Q|}}$, $t_2 = -\frac{1}{\sqrt{|Q|}}$. Звідси випливає, що пряма (11.33) перетинає двопорожнинний гіперболоїд у двох точках

$$M_1\left(\frac{m}{\sqrt{|Q|}};\frac{n}{\sqrt{|Q|}};\frac{p}{\sqrt{|Q|}}\right) \text{ і } M_2\left(-\frac{m}{\sqrt{|Q|}};-\frac{n}{\sqrt{|Q|}};-\frac{p}{\sqrt{|Q|}}\right),$$

симетричних відносно початку координат.

2°. $Q = 0$. У цьому випадку пряма (11.33) не перетинає поверхню (11.31). Вона є асимптотою цієї поверхні.

3°. $Q > 0$. Рівняння (11.34) має лише комплексно-спряжені корені. Тому дійсних точок перетину прямої (11.33) з поверхнею (11.33) не існує.

Порівнюючи проведені дослідження з відповідними дослідженнями для однопорожнинного гіперболоїда, бачимо, що випадки **1°** та **3°** помінялися місцями. Це дозволяє перенести отримані раніше результати для однопорожнинного гіперболоїда на випадок двопорожнинного гіперболоїда: прямі, які проходять через початок координат і знаходяться всередині асимптотичного конуса (11.32), перетинають поверхню (1.31) у двох точках, симетричних відносно початку координат, а прямі, розміщені поза конусом (11.32), не мають з поверхнею (11.31) спільних дійсних точок. Твірні конуса (11.32) не перетинають поверхню (11.31). Вони є асимптотами цієї поверхні. Визначимо область розміщення точок двопорожнинного гіперболоїда відносно канонічної системи координат.

З рівняння (11.31) випливає

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \Leftrightarrow \frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \frac{z^2}{c^2}\geq 1 \Leftrightarrow |z|\geq c \Leftrightarrow \Leftrightarrow z\geq c \text{ і } z\leq -c. \quad (11.36)$$

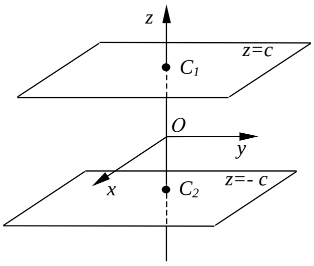


Рис. 11.25. Крайні положення, як точки на площинах

Геометрично це означає, що всі точки двопорожнинного гіперболоїда лежать зовні смуги, обмеженої двома паралельними площинами $z=c$ та $z=-c$ (рис. 11.25).

Досліджують форму поверхні (11.31) методом перерізів, які дозволяють скласти уявлення про вигляд двопорожнинного гіперболоїда (11.31), його зображено на рис. 11.26.

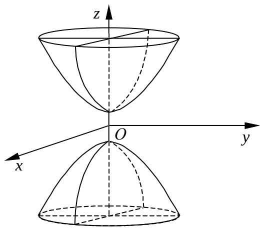


Рис. 11.26. Двопорожнинний гіперболоїд $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

При $a=b$ отримуємо двопорожнинний гіперболоїд обертання. Рівняння $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ визначає двопорожнинний гіперболоїд, зображений на рис. 11.27, а рівняння $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$– двопорожнинний гіперболоїд, зображений на рис.11.28.

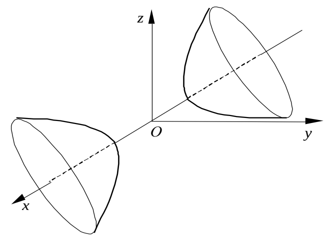


Рис. 11.27. Двопорожнинний гіперболоїд $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$

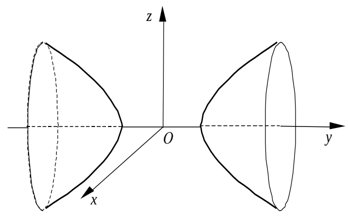


Рис. 11.28. Двопорожнинний гіперболоїд $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$

Зауваження. Досліджуючи рівняння (11.13), ми розглянули наступні комбінації знаків лівої частини цього рівняння

1. Всі три доданки додатні (еліпсоїд).
2. Один доданок від’ємний (однопорожнинний гіперболоїд).
3. Два доданки від’ємні (двопорожнинний гіперболоїд). Дійсно,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

і ми маємо два від’ємні доданки.

4. Якщо всі три доданки у рівнянні від’ємні, то у просторі немає жодної точки, координати якої задовольняють цьому рівнянню. Кажуть, що рівняння

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

визначає уявний еліпсоїд.

Означення. Два гіперболоїди, рівняння яких відповідно

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

називаються *спряженими.*

Спряжені гіперболоїди мають однаковий асимптотичний конус

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

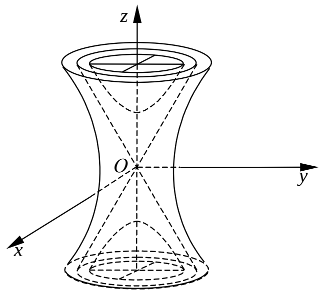


Рис. 11.29. Розміщення відносно асимптотичного конуса

Відносно цього конуса гіперболоїди розміщуються так: однопорожнинний гіперболоїд знаходиться зовні асимптотичного конуса, а двопорожнинний гіперболоїд – всередині цього конуса (рис. 11.29).

11.6. Еліптичний параболоїд

Означення. *Еліптичним параболоїдом* називається множина всіх точок простору, координати яких у деякій декартовій прямокутній системі координат задовольняють рівнянню

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \quad (p>0,\, q>0). \tag{11.37}$$

Означення. Система координат, у якій еліптичний параболоїд має рівняння (11.37), називається канонічною, а саме рівняння (11.37) – *канонічним рівнянням еліптичного параболоїда*. Додатні числа p і q називаються параметрами еліптичного параболоїда.

Оскільки змінні x та y входять до рівняння (11.37) з квадратом, то еліптичний параболоїд симетричний відносно координатних площин yOz та xOz, а тому і відносно лінії їх перетину – осі Oz. Разом з тим, поверхня (11.37) не є симетричною відносно координатних осей Ox та Oy.

Означення. Точка перетину еліптичного параболоїда з його віссю симетрії називається *вершиною еліптичного параболоїда*.

Розглянемо пряму l, яка проходить через початок канонічної системи координат, не лежить у площині xOy і не співпадає з віссю Oz. Нехай $\vec{a}(a_1;\, a_2;\, a_3)$ – напрямний вектор цієї прямої. Тоді за умовою $a_3 \neq 0,\ a_1^2+a_2^2 \neq 0$.

Параметричні рівняння прямої l мають вигляд

$$x = a_1 t,\ y = a_2 t,\ z = a_3 t. \qquad (11.38)$$

Параметри точок перетину прямої (11.38) і поверхні (11.37) знаходимо з рівняння

$$\frac{a_1^2 t^2}{p} + \frac{a_2^2 t^2}{q} = 2a_3 t \Leftrightarrow t\left(\left(\frac{a_1^2}{p} + \frac{a_2^2}{q}\right)t - 2a_3\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 0 \\ t_2 = \dfrac{2a_3}{\dfrac{a_1^2}{p} + \dfrac{a_2^2}{q}} \neq 0. \end{array}\right.$$

Отже, пряма l перетинає поверхню (11.37) у двох точках: точці $O(0;\,0;\,0)$ та точці $M_2(a_1 t_2;\, a_2 t_2;\, a_3 t_2)$.

Зауваження. Якщо пряма l лежить у площині xOy, то можна говорити, що вона перетинає поверхню (11.37) у двох точках, які співпадають з точкою $O(0;\,0;\,0)$. Якщо пряма l співпадає з віссю Oz, то вона перетинає поверхню (11.37) лише в одній точці $O(0;\,0;\,0)$.

Визначимо область розміщення точок еліптичного параболоїда відносно канонічної системи координат. З рівняння (11.37) випливає, що для всіх точок поверхні $z \geq 0$ і що рівність $z = 0$ виконується тоді і тільки тоді, коли одночасно $x = 0$ і $y = 0$. Геометрично це означає, що всі точки еліптичного параболоїда, за виключенням початку координат, знаходяться з одного і того ж боку від координатної площини xOy.

Дослідимо форму еліптичного параболоїда методом перерізів і почнемо з перерізів площинами $z = h$, тобто площинами, паралельними площині xOy.

З попереднього дослідження випливає, що є сенс розглядати лише перерізи, для яких $h > 0$. Для довільного $h > 0$ у перерізі отримуємо еліпс

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2hp} + \dfrac{y^2}{2hq} = 1, \\ z = h, \end{cases} \qquad (11.39)$$

з півосями $\lambda = \sqrt{2hp},\ \mu = \sqrt{2hq}$ і з вершиною у точці $(0;\,0;\,h)$.

Якщо $h = 0$, то рівнянню (11.37) задовольняє тільки одна точка $O(0;\,0;\,0)$ площини xOy. У цій точці площина xOy дотикається до поверхні.

Якщо h збільшується від нуля до нескінченності, то розміри еліпса (11.39) необмежено зростають. Всі еліпси подібні, оскільки відношення $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$ не залежить від h.

Якщо h прямує до нуля, то еліпси зменшуються в розмірах, прагнучи стиснутись в точку $O(0; 0; 0)$, яка є вершиною еліптичного параболоїда.

Перерізами еліптичного параболоїда (11.37) площинами $y = 0$ і $x = 0$ є відповідно параболи $\begin{cases} x^2 = 2pz, \\ y = 0, \end{cases}$ та $\begin{cases} x^2 = 2pz, \\ y = 0, \end{cases}$ з віссю симетрії Oz. Гілки цих парабол напрямлені «доверху» відносно осі Oz.

Вся поверхня еліптичного параболоїда (11.37) має вигляд чаши, що лежить у півпросторі $z \geq 0$, дотикається у точці O площини $z = 0$ і сягає нескінченності (рис. 11.30).

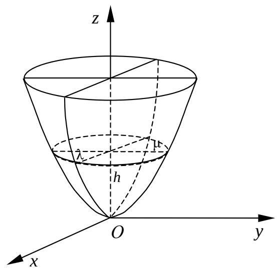


Рис. 11.30. Еліптичний параболоїд
$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \quad (p > 0,\ q > 0)$$

На рис. 11.31 і рис. 11.32 зображено еліптичні параболоїди, рівняннями яких є відповідно рівняння

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2y \quad \text{і} \quad \frac{x^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x, \quad (p > 0,\ q > 0).$$

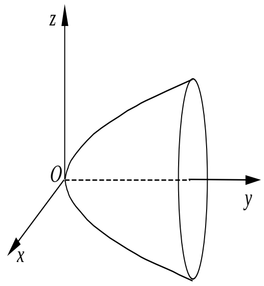


Рис. 11.31. Еліптичний параболоїд відносно осі Oy

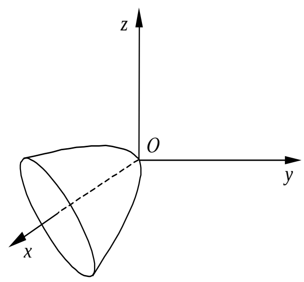


Рис. 11.32. Еліптичний параболоїд відносно осі Ox

Випадок, коли у лівій частині рівняння (11.37) обидва члени від'ємні

$$-\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z, \quad p>0, q>0 \tag{11.40}$$

не виражає собою нічого нового. Рівняння (11.40) також визначає еліптичний параболоїд, але розміщений так, як показано на рис. 11.33.

Якщо в рівнянні (11.37) $p=q$, то еліптичний параболоїд є параболоїдом обертання.

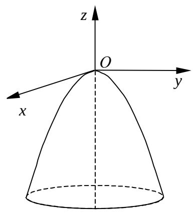


Рис. 11.33. Еліптичний параболоїд $-\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z, \quad p>0, q>0$

11.7. Гіперболічний параболоїд

Означення. *Гіперболічним параболоїдом* називається множина всіх точок простору, координати яких у деякій декартовій прямокутній системі координат задовольняють рівнянню

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z, \ (p>0,\ q>0). \tag{11.41}$$

Означення. Система координат, відносно якої гіперболічний параболоїд має рівняння (11.41), називається канонічною, а саме рівняння – *канонічним* *рівнянням гіперболічного параболоїда*. Додатні числа p і q називаються параметрами гіперболічного параболоїда.

Аналогічно випадку еліптичного параболоїда, з'ясовується, що гіперболічний параболоїд симетричний відносно координатних площин xOz, yOz і осі Oz, але не симетричний відносно координатної площини xOy і осей Ox і Oy. Гіперболічний параболоїд перетинається з осями канонічної системи координат в єдиній точці – початку координат.

Точка перетину гіперболічного параболоїда з його віссю симетрії називається вершиною гіперболічного параболоїда.

Дослідимо перетин поверхні (11.41) з прямими, що проходять через початок координат.

Нехай пряму l задано параметричними рівняннями

$$x = a_1 t,\ \ y = a_2 t,\ \ z = a_3 t, \tag{11.42}$$

де $\vec{a}(a_1;\, a_2;\, a_3)$ – напрямний вектор цієї прямої. Параметр t точок перетину поверхні (11.41) з прямою (11.42) знайдемо з рівняння

$$\left(\frac{a_1^2}{p} - \frac{a_2^2}{q}\right)t^2 - 2a_3 t = 0. \tag{11.43}$$

Розглянемо такі випадки:

1°. $\dfrac{a_1^2}{p} - \dfrac{a_2^2}{q} \neq 0,\ \ a_3 \neq 0$. У цьому випадку рівняння (11.43) має два розв'язки $t_1 = 0,\quad t_2 = \dfrac{2a_3}{\dfrac{a_1^2}{p} - \dfrac{a_2^2}{q}} \neq 0$ і пряма l перетинає поверхню у двох точках $O(0;\, 0;\, 0)$ та $M_2(a_1 t_2;\, a_2 t_2;\, a_3 t_2)$.

2°. $\dfrac{a_1^2}{p} - \dfrac{a_2^2}{q} \neq 0,\ \ a_3 = 0$. Рівняння (11.43) має два корені, що співпадають: $t_1 = t_2 = 0$. Пряма l дотикається до поверхні у її вершині $O(0;\, 0;\, 0)$.

3°. $\dfrac{a_1^2}{p} - \dfrac{a_2^2}{q} = 0,\ \ a_3 \neq 0$. У цьому випадку рівняння (11.43) має єдиний розв'язок $t = 0$. Пряма l перетинає поверхню лише у точці $O(0;\, 0;\, 0)$, але на відміну від випадку 2, не дотикається до неї. Про таку пряму кажуть, що вона має асимптотичний напрямок.

4°. $\frac{a_1^2}{p} - \frac{a_2^2}{q} = 0, \quad a_3 = 0$. У цьому випадку всі точки прямої l лежать на поверхні, тобто пряма l є прямолінійною твірною гіперболічного параболоїда. Кажуть, що ця пряма також має асимптотичний напрямок.

З'ясуємо геометричний зміст розглянутих випадків. З цією метою запишемо рівняння

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0 \tag{11.44}$$

Легко перевірити, що у випадках **3°**, **4°** рівнянню (11.44) задовольняють всі точки прямої (11.42).

Рівняння (11.44) називається рівнянням *асимптотичного конуса* гіперболічного параболоїда (11.41), воно визначає пару площин,

$$\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0, \tag{11.45}$$

$$\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0, \tag{11.46}$$

які перетинаються по осі Oz. Отже, асимптотичний конус – це пара площин, що перетинаються. Позначимо площини (11.45) і (11.46) відповідно через (α_1) та (α_2) (рис. 11.34). Тоді розглянуті вище випадки **1°** – **4°** мають наступний геометричний зміст:

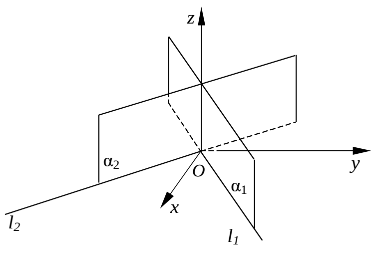


Рис. 11.34. Пара площин, як асимптотичний конус

1°. Всі прямі, що проходять через початок координат і не лежать у площинах $(\alpha_1),(\alpha_2)$ та в площині xOy, перетинають поверхню (11.41) у двох точках, однією з яких є вершина цієї поверхні – точка $O(0; 0; 0)$.

Позначимо через l_1 пряму перетину площини (α_1) (11.45) з площиною

xOy (рис. 11.34)

$$l_1:\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{p}}-\dfrac{y}{\sqrt{q}}=0,\\ z=0,\end{cases} \tag{11.47}$$

а через l_2 – пряму перетину площини (α_2) (11.46) з площиною xOy

$$l_2:\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{p}}+\dfrac{y}{\sqrt{q}}=0,\\ z=0.\end{cases} \tag{11.48}$$

2°. Всі прямі, що проходять через початок координат і лежать у площині xOy, крім прямих l_1 і l_2, дотикаються до поверхні (11.41) у точці O.

3°. Всі прямі, що проходять через початок координат o і лежать у площинах (α_1) або (α_2), крім прямих l_1 і l_2, перетинають поверхню лише у точці O, але не дотикаються до цієї поверхні.

4°. Прямі l_1 і l_2 є прямолінійними твірними поверхні.

Отже, площина xOy дотикається до поверхні у її вершині $O(0;\,0;\,0)$.

Уявити собі область розміщення точок поверхні (11.41) відносно канонічної системи координат, а також форму цієї поверхні безпосередньо за рівнянням (11.41) досить складно. Найпростіше зробити це методом перерізів.

Площина xOy перетинає поверхню (11.41) по лінії

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{p}-\dfrac{y^2}{q}=0\\ z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}}-\dfrac{y}{\sqrt{q}}\right)\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}}+\dfrac{y}{\sqrt{q}}\right)=0,\\ z=0.\end{cases} \tag{11.49}$$

Рівняння (11.49) визначають пару прямих (11.47) і (11.48), які перетинаються в точці $O(0;\,0;\,0)$ і є прямолінійними твірними l_1 і l_2 поверхні (11.41).

Паралельна до площини xOy площина $z=h$ при $h>0$ перетинає гіперболічний параболоїд (11.41) по лінії

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2h, \\ z = h, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{2hp} - \dfrac{y^2}{2hq} = 1, \\ z = h \end{cases} \quad (p > 0,\ q > 0,\ h > 0). \qquad (11.50)$$

Рівняння (11.50) визначають гіперболу, яка лежить у площині $z = h$ і центр якої знаходиться у точці $(0;\ 0;\ h)$. Дійсна вісь цієї гіперболи паралельна осі Ox, а уявна – осі Oy. Рівняння асимптот гіперболи (11.50) мають вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2hp} - \dfrac{y^2}{2hq} = 0, \\ z = h, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 0, \\ z = h. \end{cases} \qquad (11.51)$$

Перше з рівнянь (11.51) співпадає з рівнянням асимптотичного конуса (11.44). Це означає, що прямі (11.51) належать асимптотичному конусу (11.44). Отже, асимптоти гіперболи (11.50) є прямими перетину площин (α_1) та (α_2) (рис. 11.34) з площиною $z = h$.

Півосі гіперболи (11.50) дорівнюють $\lambda = \sqrt{2hp}$, $\mu = \sqrt{2hq}$.

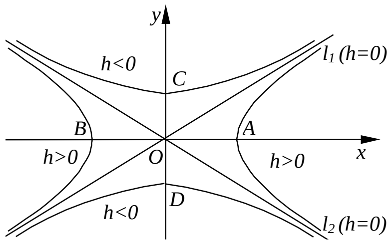


Рис. 11.35. Вигляд гіпербол в перерізі

Зі збільшенням h ці півосі, а також відстань $2\lambda = 2\sqrt{2hp}$ між вершинами гіперболи (11.50) необмежено зростають, тобто вітки гіперболи необмежено розширюються. При зменшенні h відстань між вершинами гіперболи (11.50) прямує до нуля і в граничному випадку ці вершини співпадають.

Рівняння гіперболи (11.50) перетворюються у рівняння (11.49), а сама гіпербола – у пару прямих (11.47) і (11.48) на площині xOy (рис. 11.35).

Тепер проведемо площину $z = h,\ h < 0$.

У перерізі з поверхнею (11.41) ця площина визначає лінію

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2hp} - \dfrac{y^2}{2hq} = 1, \\ z = h, \end{cases} \quad (p > 0,\ q > 0,\ h < 0). \qquad (11.52)$$

Рівняння (11.52) є рівняннями гіперболи, що лежить у площині $z = h$. Центр цієї гіперболи знаходиться в точці $(0; 0; h)$, а дійсна вісь паралельна осі Oy, оскільки $h < 0$ і другий член першого рівняння додатний. Уявна вісь гіперболи паралельна осі Ox. Гіпербола (11.52) є спряженою до гіперболи (11.50) (рис. 11.35), якщо значення $|h|$ одне і те ж.

Асимптоти всіх гіпербол (11.50) і (11.52), що отримуються при перетині гіперболічного параболоїда площинами $z = h$ (при $h > 0$ та $h < 0$), паралельні прямим (11.47) і (11.48), по яких цей параболоїд перетинається площиною $z = 0$.

Перерізами гіперболічного параболоїда (11.41) координатними площинами $y = 0$ і $x = 0$ є параболи відповідно

$$\begin{cases} x^2 = 2pz, \\ y = 0, \end{cases} \tag{11.53}$$

$$\begin{cases} y^2 = -2qz, \\ x = 0. \end{cases} \tag{11.54}$$

Підставимо координати вершин $A\left(\sqrt{2ph}; 0; h\right)$ і $B\left(-\sqrt{2ph}; 0; h\right)$ гіперболи (11.50) у рівняння (11.53). В обох випадках отримуємо тотожність $2ph = 2ph$.

Отже, вершини A і B гіперболи (11.50) лежать на параболі (11.53). Аналогічно вершини $C\left(0; \sqrt{2q|h|}; h\right)$ і $D\left(0; -\sqrt{2q|h|}; h\right)$ гіперболи (11.52) лежать на параболі (11.54).

На рис. 11.36 у системі просторових координат одночасно зображено параболу (11.53) і гіперболу (11.50). Вершини гіперболи (точки A і B) лежать на параболі. Коли січна площина $z = h$ піднімається доверху (h зростає), вершини гіперболи (11.50) «розбігаються», рухаючись по параболі (11.53).

На рис 11.37 зображено параболу (11.54) і гіперболу (11.52) у системі просторових координат. При опусканні січної площини $z = h$ ($h < 0$) вершини гіперболи (11.52) «розбігаються», рухаючись по параболі (11.54).

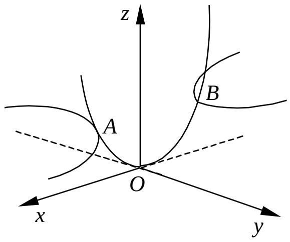


Рис. 11.36. Парабола і гіпербола, h зростає

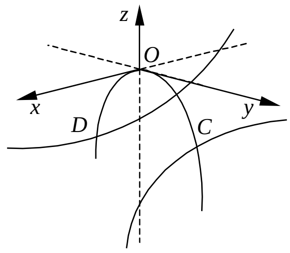


Рис. 11.37. Парабола і гіпербола, опускання січної площини

Проведені дослідження дозволяють зобразити гіперболічний параболоїд. Для цього, насамперед, нанесемо на рисунок дві параболи (рис. 11.36 і рис. 11.37). Потім накреслимо ряд гіпербол таких, як на рис. 11.36. Їх вершини лежать на верхній параболі. Далі креслимо ряд гіпербол таких, як на рис. 11.37. Вершини цих гіпербол лежать на нижній параболі. Накреслені перерізи дають уявлення про загальний вигляд гіперболічного параболоїда (рис. 11.38). Гіперболічний параболоїд схожий на сідло, що простягається до нескінченності. На рис. 11.38 зображено лише частину гіперболічного параболоїда.

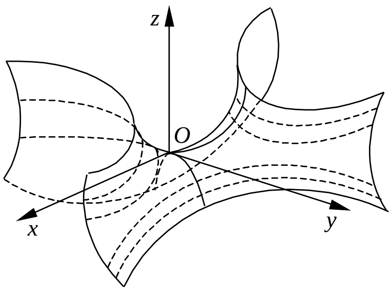


Рис. 11.38. Побудова частини гіперболічного параболоїда

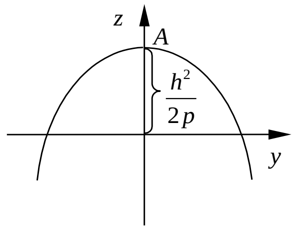


Рис. 11.39. Вигляд парабол

Наведемо ще один спосіб, який дозволяє накреслити гіперболічний параболоїд і який ґрунтується на дослідженні перерізів площинами, паралельними площині yOz, тобто площинами $x = h$.

Рівняння лінії перерізу мають вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{h^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z, \\ x = h, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = -2q\left(z - \dfrac{h^2}{2p}\right), \\ x = h, \end{cases} \quad (p > 0, q > 0) \ . \qquad (11.55)$$

Ці рівняння визначають параболу (рис. 11.39) з вершиною у точці $A\left(h;0;\dfrac{h^2}{2p}\right)$, вісь якої має рівняння

$$\begin{cases} x = h, \\ y = 0. \end{cases} \tag{11.56}$$

Якщо h змінюється, тобто січна площина $x = h$ рухається, розміри параболи (11.55) не змінюються, оскільки ці розміри визначаються величиною коефіцієнта q в рівнянні (11.55). Отже, розміри параболи точно такі ж, як і розміри параболи (11.54). Вершина A параболи (11.55) лежить на параболі (11.53). Дійсно, підставляючи координати точки $A\left(h;0;\dfrac{h^2}{2p}\right)$ в рівняння (11.53), отримуємо тотожність $h^2 = 2p\dfrac{h^2}{2p} \Leftrightarrow h^2 = h^2$.

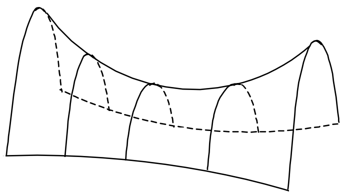


Рис. 11.40. Гіперболічний параболоїд

Звідси випливає така побудова. Креслимо параболу (11.53). Потім креслимо ряд однакових парабол (11.55), вершини яких лежать на параболі (11.53) і площини яких перпендикулярні площині цієї параболи. Параболи (11.55) «розкриваються» у протилежну сторону по відношенню до параболи (11.53). Можна говорити про сім'ю парабол, які навішені на одну і ту ж параболу (рис. 11.40).

Гіперболічний параболоїд не є поверхнею обертання, оскільки всі його перерізи є незамкненими лініями і тому не можуть бути колами. Якщо $p = q$, то рівняння (11.41) набуває вигляду $x^2 - y^2 = 2pz$.

Завдання для самоконтролю

1. Напишіть канонічне рівняння еліпсоїда.

2. Напишіть канонічні рівняння гіперболоїдів. В чому відмінність однопорожнинного та двопорожнинного гіперболоїдів? Покажіть їх вигляд на рисунку.

3. Напишіть канонічні рівняння параболоїдів.

4. Що називається циліндричною поверхнею? Що називається твірною й напрямною циліндричної поверхні?

5. Напишіть рівняння гіперболічного циліндра, еліптичного циліндра. Наведіть приклади та відповідні рисунки.

6. Яка поверхня називається поверхнею обертання? Запишіть рівняння поверхні, утвореної обертанням кривої навколо осі Oz.

7. Яка поверхня називається конусом? Що називається твірною й напрямною конуса? Для обраного прикладу зробити креслення конуса.

8. Напишіть канонічне рівняння конуса.

9. Для обраної поверхні (на конкретному прикладі) поясніть її дослідження методом паралельних перерізів.

Розділ 2. Вступ до математичного аналізу

Тема 2.1. Множини чисел. Числові послідовності, границі.

Лекція 12. Вступ до математичного аналізу. Множини чисел. Числові послідовності

12.1. Числові множини

Числа виникають, коли ми починаємо рахувати. Множину чисел, які ми використовуємо для рахування $\mathbb{N}$, $n \geq 1$ математики називають *натуральними* числами. Вона є нескінченною, оскільки як багато об'єктів ми би собі не уявили, завжди можна помислити кількість принаймні на один більше. Відповідно, можна сказати, що після кожного натурального числа є якесь наступне число, а за ним ще одне і так далі.

Однак рахунок — це не єдиний спосіб визначити кількість. Ми можемо визначати одні кількості через інші і так приходимо до поняття *арифметичних операцій.* Результат їх виконання теж означає кількість, отже, поняття про числа має його враховувати. Почнемо з додавання. Коли ми додаємо два будь-яких натуральних числа, то результат теж є натуральним числом. Так само і з множенням. Це називається повнотою множини натуральних чисел відносно додавання та множення.

Коли ми введемо також обернені операції — віднімання та ділення, усе ускладнюється. Якщо від більшого числа віднімемо менше, то результат буде натуральним числом. Результат віднімання числа самого від себе — це *нуль*, число, що означає відсутність кількості. Найменшим натуральним числом є 1, 0 не належить множині натуральних чисел, найбільшого числа не існує. Згодом із збільшенням потреб людства виникли від'ємні числа. Тому натуральні числа, протилежні їм і число 0 стали утворювати множину *цілих чисел*, яку позначають буквою $\mathbb{Z}$. Отже, множина натуральних чисел є підмножиною цілих чисел, тобто $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Слід зауважити, що множина цілих чисел є *злі́ченною*. Так у математиці називаються множини, для перерахування елементів котрих «вистачить» натуральних чисел. Ми можемо «порахувати» цілі числа виставивши їх, наприклад, у такому порядку: $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Отже, хоча здається, що цілих чисел «удвічі більше» ніж натуральних через наявність від'ємних чисел, однак ці дві множини є «однаково нескінченними».

Не всі цілі числа діляться на інші цілі числа без остачі. Появилися дроби і разом з ними поняття раціональних чисел. Отже, *раціональні числа* – це цілі і дробові (додатні і від'ємні). Їх позначають буквою $\mathbb{Q}$. З означення раціональних чисел випливає, що $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Раціональні числа записують у вигляді $\frac{m}{n}$, де m – ціле число, n – натуральне. Наприклад,

$$7 = \frac{7}{1}; -9 = \frac{-9}{1}; 0,2 = \frac{1}{5}; 8,4 = 8\frac{2}{5}.$$

Але, раціональне число можна подати у вигляді скінченого десяткового дробу, як наприклад $\frac{3}{4} = 0{,}75$; або нескінченого періодичного десяткового дробу, як $\frac{1}{3} = 0{,}3333... = 0{,}(3)$, Цифра 3, яка повторюється є періодом дробу.

Отже, кожне раціональне число можна подати у вигляді нескінченного десяткового періодичного дробу. Кожен нескінчений періодичний дріб є записом деякого раціонального числа. Числа, які зображуються нескінченними неперіодичними десятковими дробами, називають ***ірраціональними.***

Раціональні та ірраціональні числа утворюють ***множину дійсних чисел***, їх позначають $\mathbb{R}$.

Уся множина чисел, які тепер доступні нам для представлення, називається *ді́йсними чи́слами*. Їх настільки багато, що вони є *незліченною* множиною. Щоб проілюструвати це, скористаємося *числово́ю прямо́ю* — це геометричне представлення множини всіх дійсних чисел, де кожному числу відповідає якась точка на прямій. І які би ми не обрали дві точки-числа на цій прямій, як би вони не були близько одна до одної, між ними знаходиться нескінченно багато точок-чисел. Нескінченні множини, що мають таку потужність, називають *континуум*. Як дивує те, що множини цілих і раціональних чисел є зліченними, так само дивує, що в будь-якому інтервалі, наприклад від 0 до 1, міститься настільки ж «багато» чисел, як і на всій числовій прямій. Такі дивні властивості мають нескінченні множини.

Уявна одиниця. Комплексні числа. Розширення множини всіх чисел до континууму вирішило багато проблем. Дійсні числа придатні для точного опису різного роду явищ і їхній зв'язок з реальністю очевидний для багатьох. Однак в цієї множини чисел є одна проблема щодо повноти відносно піднесення до степенів. Найпростіший приклад − це відсутність квадратних коренів у від'ємних чисел. Вводять таке число i, якого немає на числовій прямій та квадрат якого дорівнює -1, воно називається *уявною одиницею:* $\sqrt{-1} = \pm i, \quad i^2 = -1$. Квадратні корені інших від'ємних дійсних чисел становитимуть інші *уявні числа*, що виражаються через i (згадаймо властивості піднесення до степенів). Наприклад: $\sqrt{-100} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{-1} = \pm 10i$.

Упроваджуючи можливість додавати і віднімати дійсні та уявні числа, ми розширюємо наше «поле діяльності» до множини *комплексних чисел* (позначають як $\mathbb{C}$), яку можна представити на координатній площині: $\mathbb{C} = R(i) = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$.

12.2. Поняття числової послідовності, її границя

12.2.1. Поняття послідовності. Якщо задана закономірність, згідно з якою кожному натуральному числу 1, 2, 3,…, відповідає деяке дійсне число, то говорять, що задана послідовність.

Послідовність можна розглядати як функцію, областю визначення якої є множина натуральних чисел. Послідовність визначається формулою, тобто законом, згідно з яким установлюється спосіб відповідності заданих чисел послідовним натуральним числам. Послідовність із загальним членом a_n позначається $\{a_n, n \geq 1\}$.

Приклади числових послідовностей

1; 2; 3; 4; 5; ... — послідовність натуральних чисел; 2; 4; 6; 8; 10; ... — послідовність парних чисел; 0,3; 0,33; 0,333; ... — послідовність десяткових наближень дробу $\frac{1}{3}$;19; 38; 57; 76; 95 — послідовність двоцифрових чисел, кратних 19;–1; –2; –3; –4; –5; ... — послідовність від'ємних цілих чисел.

Наведені вище приклади показують, що послідовності бувають ***скінченними і нескінченними***. Наприклад, послідовність парних натуральних чисел — це нескінченна послідовність, а послідовність двоцифрових чисел, кратних 19, — це скінченна послідовність.

Послідовність вважають заданою, якщо кожний її член можна визначити за його номером.

Основні способи задання послідовності

1. Розглянемо послідовність, у якої перший член дорівнює 1, а кожний наступний член на 3 більше за попередній. Такий спосіб задання послідовності називають *описовим*. Його можна проілюструвати за допомогою запису з трьома крапками, виписавши кілька перших членів послідовності у порядку зростання номерів:

1; 4; 7; 10; 13; 16; 19; ... .

Цей запис доцільно застосовувати тоді, коли зрозуміло, які числа мають бути записані замість трьох крапок.

Наприклад, із послідовності, яку ми розглядаємо, зрозуміло, що після числа 19 має бути записано число 22.

2. Якщо послідовність є скінченною, то її можна задати *за допомогою таблиці*. Наприклад, наведена таблиця задає послідовність кубів одноцифрових натуральних чисел:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n	1	8	27	64	125	216	343	512	729

3. Послідовності можна задавати *за допомогою формул*. Наприклад, рівність $x_n = 2^n$, де змінна n набуває всіх натуральних значень, задає послідовність натуральних степенів числа 2: 2; 4; 8; 16; 32; ... . У таких випадках кажуть, що послідовність задано за *допомогою формули n-го члена послідовності*.

Приклади задання числових послідовностей

- Формула $a_n = 2n - 1$ задає послідовність натуральних непарних чисел:

$$1; 3; 5; 7; 9; \dots .$$

- Формула $y_n = (-1)^n$ задає послідовність, у якій всі члени з непарними номерами дорівнюють –1, а з парними номерами дорівнюють 1:

$$-1; 1; -1; 1; -1; \dots .$$

- Формула $c_n = 7$ задає послідовність, усі члени якої дорівнюють числу 7:

$$7; 7; 7; 7; 7; \dots .$$

Наведені способи задання послідовностей допомагають простежити зв’язок між поняттями *«функція»* і *«послідовність»*.

Розглянемо функцію $y = f(x)$, областю визначення якої є множина натуральних чисел або множина n перших натуральних чисел. Тоді функція f задає нескінченну послідовність $f(1); f(2); \dots ; f(n); \dots$ або скінченну послідовність $f(1); f(2); \dots ; f(n)$.

Наприклад, якщо функція f, областю визначення якої є множина всіх натуральних чисел, задана формулою $f(x)=x^2$, то ця функція задає послідовність квадратів натуральних чисел:

$$1;\ 4;\ 9;\ 16;\ 25;\ \ldots\ .$$

4. *Рекурентний спосіб задання послідовності*

Розглянемо послідовність $\{a_n, n \geq 1\}$, перший член якої дорівнює 1, а кожний наступний член послідовності у 3 рази більший за попередній. Маємо:

$$1;\ 3;\ 9;\ 27;\ 81;\ \ldots\ .$$

Цю послідовність, задану описом, також визначають такі умови:

$$a_1=1,\ a_{n+1}=3a_n.$$

Ці рівності вказують перший член послідовності і правило, користуючись яким, за кожним членом послідовності можна знайти наступний член:

$$a_1 = 1,$$

$$a_2 = 3a_1 = 3,$$

$$a_3 = 3a_2 = 9,$$

$$a_4 = 3a_3 = 27, \text{ і т.д.}$$

Формулу, яка виражає член послідовності через один або кілька попередніх членів, називають *рекурентною формулою* (від латин. *recurro* — повертатися). У наведеному прикладі це формула $a_{n+1} = 3a_n$.

Означення. Послідовність $\{a_n, n \geq 1\}$ називається *монотонно зростаючою (спадною),* якщо $a_{n+1} > a_n (a_{n+1} < a_n), \forall n.$

Означення. Послідовність $\{a_n, n \geq 1\}$ називається *монотонно неспадною (незростаючою),* якщо $a_{n+1} \geq a_n (a_{n+1} \leq a_n), \forall n.$

Послідовність $\{a_n, n \geq 1\}$ називається *обмеженою зверху*, якщо існує число m, таке, що для всіх $n \geq 1$ виконується нерівність $a_n \leq m$.

Послідовність $\{a_n, n \geq 1\}$ називається *обмеженою знизу,* якщо існує число m, таке, що для всіх $n \geq 1$ виконується нерівність $a_n \geq m$.

Послідовність $\{a_n, n \geq 1\}$ не обмежена зверху та знизу, називається необмеженою.

12.2.2. Границя послідовності

Означення. Число a називається *границею послідовності* $\{a_n, n \geq 1\}$, якщо для кожного як завгодно малого додатного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке натуральне число N, що при всіх $n > N$ виконується нерівність: $|a_n - a| < \varepsilon$.

Той факт, що число a є границею послідовності $\{a_n, n \geq 1\}$ записується у вигляді:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ , або } a_n \to a \text{, якщо } n \to \infty.$$

Зауважимо, що нерівність $|a_n - a| < \varepsilon$ рівносильна нерівностям:

$$-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \text{, або } a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon .$$

Це означає, що число a_n належить інтервалу $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$. Такий інтервал називається ε-околом точки a.

Означення границі послідовності можна перефразувати наступним чином, надавши йому геометричну наочність: *число а називається границею послідовності* $\{a_n, n \geq 1\}$, якщо в будь-який ε-окіл числа a попадуть всі члени послідовності, починаючи з деякого номера, яким би вузьким цей окіл не був. Поза ε-околом може бути скінченне число членів даної послідовності.

Дійсно, якщо $a_n \to a$ при $n \to \infty$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число *N*, що всі члени послідовності з номерами $n > N$ знаходиться в ε-околі числа *a*, поза цим околом можуть знаходитись тільки перших N членів послідовності.

Означення. Послідовність, що має границю, називається *збіжною,* а яка не має границі, називається *розбіжною*.

Отже, послідовність $\{a_n, n \geq 1\}$ має своєю границею число a, тобто збіжна, причому $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, якщо $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon)$, що для $\forall n > N$ виконується нерівність:

$$|a_n - a| < \varepsilon .$$

Означення. Величина ξ називається *частковою границею* (граничною точкою) послідовності, якщо існує її підпослідовність $a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_n}, \dots (1 \le k_1 < k_2 < \dots)$ така, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = \xi.$

Найменша з часткових границь послідовності $\{a_n, n \ge 1\}$ називається нижньою границею і позначається $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$, а найбільша з її часткових границь називається верхньою границею і позначається $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$. Необхідною і достатньою умовою існування границі послідовності є рівність:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Точною нижньою межею послідовності $\{a_n, n \ge 1\}$ називається величина m (позначається $m = \inf\limits_{n\ge 1} a_n$), для якої виконуються умови:

1) $m \le a_n, \quad \forall n \ge 1;$

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists a_n -$ елемент послідовності такий, що $a_n < m + \varepsilon$.

Аналогічно, точною верхньою межею послідовності $\{a_n, n \ge 1\}$ називається величина M (позначається $M = \sup\limits_{n\ge 1} a_n$), для якої виконуються умови:

1) $M \ge a_n, \quad \forall n \ge 1;$

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists a_n -$ елемент послідовності такий, що $a_n < M - \varepsilon$.

Якщо послідовність $\{a_n, n \ge 1\}$ необмежена знизу (зверху), то вважають, що $\inf\limits_{n\ge 1} a_n = -\infty$ ($\sup\limits_{n\ge 1} a_n = +\infty$).

Властивості збіжних послідовностей

1. Границя сталої дорівнює цій сталій.

2. Якщо послідовність $\{a_n, n \ge 1\}$ має границю, то ця границя єдина.

3. Послідовність, яка має границю, є обмеженою.

4. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a < b$. Тоді існує число *N*, таке, що при будь-якому $n > N$ справджуватиметься нерівність $a_n < b$.

5. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Якщо для всіх елементів послідовності $\{a_n, n \geq 1\}$ $a_n \leq b$, то $a \leq b$.

6. Про три послідовності (або теорема «про двох поліцейських»).

Нехай виконується нерівність $x_n \leq u_n \leq y_n$. Якщо послідовності $\{x_n, n \geq 1\}$ і $\{y_n, n \geq 1\}$ збіжні, причому $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, то послідовність $\{u_n, n \geq 1\}$ також буде збіжною, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$.

7. Будь-яка монотонна обмежена послідовність має границю (теорема Больцано-Вейєрштрасса).

8. Основні теореми про границі послідовності. *Якщо послідовності* $\{x_n, n \geq 1\}$ *і* $\{y_n, n \geq 1\}$ *збіжні, причому* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, *то:*

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \pm b$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} cx_n = c\lim\limits_{n\to\infty} x_n = ca$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \cdot b$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \dfrac{a}{b}$, якщо $b \neq 0$.

12.3. Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності

Означення. Послідовність $\{a_n, n \geq 1\}$ називається *нескінченно малою,* якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Зауваження. Для того, щоб послідовність $\{a_n, n \geq 1\}$ мала границю *a*, необхідно і достатньо, щоб $a_n = a + \alpha_n$, де $\{\alpha_n, n \geq 1\}$ – нескінченно мала послідовність.

Означення. Послідовність $\{a_n, n \geq 1\}$ називається *нескінченно великою,* якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Запис $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ означає, що $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon)$, такий що $|a_n| > \varepsilon$ при $\forall n > N$.

Властивості нескінченно малих (великих) послідовностей

1. Сума скінченого числа нескінченно малих послідовностей є нескінченно мала послідовність.

2. Добуток нескінченно малої послідовності і обмеженої є нескінченно мала послідовність.

3. Якщо $\{a_n, n \geq 1\}$ – нескінченно мала послідовність і $a_n \neq 0$, то послідовність $\left\{b_n = \dfrac{1}{a_n}, n \geq 1\right\}$ є нескінченно великою. Якщо $\{b_n, n \geq 1\}$ нескінченно велика послідовність, то послідовність $\left\{a_n = \dfrac{1}{b_n}, n \geq 1\right\}$ є нескінченно малою послідовністю.

Доведення 1-го твердження для випадку суми двох нескінченно малих послідовностей $\{x_n, n \geq 1\}$ та Маємо:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0, \text{ якщо } \forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 \quad \exists N_1 = N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \text{ що для } \forall n > N_1 : |x_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0, \text{ якщо } \forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 \quad \exists N_2 = N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \text{ що для } \forall n > N_2 : |y_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Розглянемо $N(\varepsilon) = \max(N_1, N_2)$, оцінимо $|x_n + y_n|$.

$$|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отже,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \quad \forall n > N : |x_n + y_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = 0.$$

Доведення деяких границь числових послідовностей

Приклад 1. Довести, що послідовність $0, \dfrac{3}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{5}{4}, \ldots, \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right), \ldots$ має $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Розв'язування. Нехай, наприклад, $\varepsilon = 0{,}1$. Тоді нерівність $|a_n - 1| < 0{,}1$ або $\left|(1 + \frac{(-1)^n}{n}) - 1\right| < \varepsilon$. Тобто $\frac{1}{n} < \varepsilon$ виконується при $n > 10$. Аналогічно для $\varepsilon = 0{,}01$, $|a_n - 1| < 0{,}01$ при $n > 100$.

Для кожного $\varepsilon > 0$ нерівність $|a_n - 1| < \varepsilon$ або $\frac{1}{n} < \varepsilon$ виконується при $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Отже, при будь-якому $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N = \frac{1}{\varepsilon}$ (або рівний цілій частині $\frac{1}{\varepsilon}$), що для всіх $n > N$ (при $\varepsilon = 0{,}1$ для $n > 10$, при $\varepsilon = 0{,}01$ для $n > 100$ і т. д.) виконується нерівність $|a_n - 1| < \varepsilon$, а це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Приклад 2. Довести, що послідовність з загальним членом $x_n = \frac{4n}{2n+1}$ має границю, рівну 2.

Розв'язування. Виберемо довільно додатне число ε і покажемо, що для нього можна підібрати таке число *N*, що для всіх значень номера *n* більшого цього числа *N*, буде виконуватися нерівність:

$$\left|\frac{4n}{2n+1} - 2\right| < \varepsilon .$$

Перетворимо вираз

$$\left|\frac{4n}{2n+1} - 2\right| = \left|\frac{4n - 4n - 2}{2n+1}\right| = \left|\frac{-2}{2n+1}\right| = \frac{2}{2n+1} .$$

Одержуємо $\frac{2}{2n+1} < \varepsilon$. Звідси слідує, що

$$\frac{2n+1}{2} > \frac{1}{\varepsilon},\ n > \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2} .$$

Таким чином, якщо номер *n* більше, ніж $\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}$, то нерівність

$$\left|\frac{4n}{2n+1} - 2\right| < \varepsilon .$$

Нехай $\varepsilon = 0{,}005$, $n > \dfrac{1}{0{,}005} - \dfrac{1}{2} = 200 - \dfrac{1}{2} \cdot N = 199$.

Отже, для всіх номерів більших, ніж 199 при $\varepsilon = 0{,}005$, буде виконуватися нерівність $\left|\dfrac{4n}{2n+1} - 2\right| < \varepsilon$. Починаючи з 200 члену всі члени послідовності будуть знаходитись в інтервалі (1,995;2,005).

Таким чином, в загальному випадку, знаходимо $N = N(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{\varepsilon} - \dfrac{1}{2}\right] + 1$ (в квадратних дужках означено цілу частину числа), що для всіх $n > N(\varepsilon)$ виконується нерівність: $\left|\dfrac{4n}{2n+1} - 2\right| < \varepsilon$.

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n}{2n+1} = 2$.

Завдання для самоконтролю

1. Множини чисел, навести приклади чисел, які належать до вказаних множин.

2. Означити числову послідовність, навести приклади її задання.

3. Поняття монотонно неспадної (незростаючої) послідовності, монотонно спадної (зростаючої) послідовності.

4. Обмежені та необмежені числові послідовності.

5. Означити границю числової послідовності, пояснити її.

6. Користуючись означенням границі послідовності, довести, що:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n}{2n+1} = \dfrac{5}{2}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n - 1}{2^n} = 1$.

7. Основні властивості збіжних послідовностей.

8. Поняття нескінченно малої та нескінченно великої послідовності, властивості.

9. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+5}{3n^2+2n+4}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3+n^2}{3n^2-5n+1}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5+n-3n^2}{4-n+2n^2}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+5n}-n\right)$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+4+7+\ldots+(3n-2)}{2+3+4+\ldots+(n+1)}$.

Відповіді. 9. 1) 0; 2) ∞; 3) $-\dfrac{3}{2}$; 4) $\dfrac{5}{2}$; 5) 3.

Тема 2.2. Функція однієї змінної. Границі та неперервність функції однієї змінної

Лекція 13. Функція. Границя функції в точці

13.1. Функція. Основні поняття і означення. Основні елементарні функції.

13.2. Границя функції в точці.

13.3. Нескінченно малі та нескінченно великі функції. Важливі границі

13.1. Функція. Основні поняття і означення

Означення. Функцією $y = f(x)$ називається така відповідність між множинами D і E, за якої кожному значенню змінної $x \in D$ відповідає одне й тільки одне значення змінної $y \in E$.

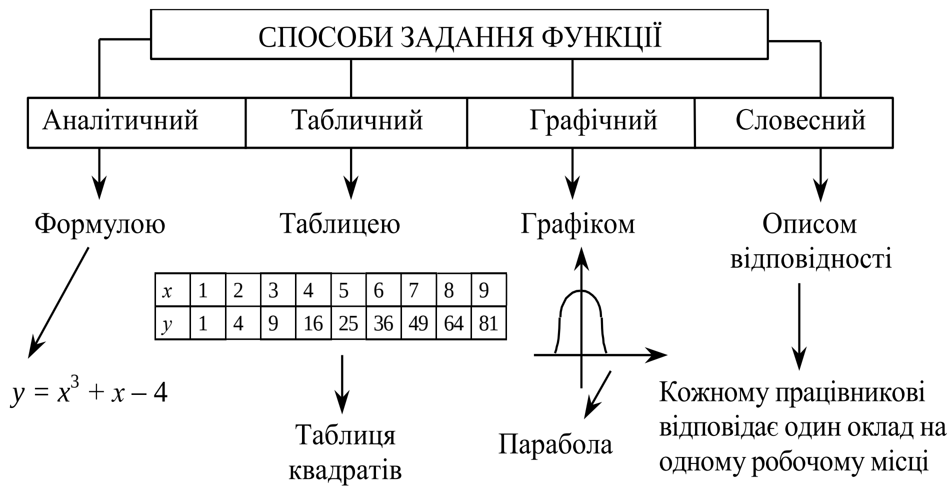
При цьому вважають, що x — незалежна змінна, або аргумент; y — залежна змінна, або функція; f — символ закону відповідності; D — область визначення функції; E — множина значень функції.

Означення. Областю визначення функції $y = f(x)$ називається множина значень, які набуває незалежна змінна x. Позначається $D(f)$.

Означення. Областю значень функції $y = f(x)$ називається множина значень, яких набуває залежна змінна y при всіх значеннях x з області визначення функції. Позначається $E(f)$.

Означення. Графіком функції $y = f(x)$ називається множина точок $M(x, f(x))$ координатної площини, абсциси яких належать області визначення функції, а ординати є відповідними значеннями цієї функції.

Отже, поняття функції означується за допомогою трьох понять: «область визначення», «область значень» і закономірність, згідно з якою кожному елементу з множини X відповідає єдине значення з множини Y, $f: X \to Y$.



Класифікація функцій за їхніми властивостями

1. Обмежені та необмежені функції

Означення. Функція $y = f(x)$, визначена на множині X, називається *обмежено зверху (знизу)* на цій множині, якщо множина її значень обмежена зверху (знизу). Іншими словами:

$\exists M \in R$, що $\forall x \in X$ виконується нерівність $f(x) \leq M$ $(f(x) \geq M)$.

Означення. Функція $y = f(x)$, обмежена зверху і знизу на множині D, називається *обмеженою* на цій множині.

Функція $y = f(x)$, визначена на множині D, і така, що не є обмеженою зверху (знизу) на цій множині, називається *необмеженою* зверху (знизу) на цій множині.

Приклад. Функція $y = \sin x$ обмежена на R, функція $y = x^2$ обмежена знизу на R і необмежена зверху на R, функція $y = x^3$ – необмежена на R.

2. Парні та непарні функції

Означення. Функція $y = f(x)$, називається *парною (непарною)*, якщо її область визначення симетрична відносно нуля :

$y(-x) = y(x)$ − функція парна;

$y(-x) = -y(x)$ − функція непарна.

Графік парної функції симетричний відносно осі ординат ($y = x^2$), а графік непарної функції симетричний відносно початку координат ($y = x^3$).

3. Монотонні функції

Означення. Функція $y = f(x)$, визначена на множині D, називається:

– *зростаючою (спадною)* – якщо на цій множині більшому значенню аргументу відповідає більше (менше) значення функції:

$$\forall x \in D: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad \left(f(x_1) > f(x_2)\right).$$

– *незростаючою (неспадною)* – якщо на цій множині меншому значенню аргументу відповідає не менше (не більше) значення функції:

$$\forall x \in D: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \quad \left(f(x_1) \leq f(x_2)\right).$$

Зростаюча, спадна, незростаюча, неспадна функції називаються ***монотонними***.

4. Періодичні функції

Означення. Функція $y = f(x)$, визначена на множині D, називається ***періодичною***, якщо $\exists T > 0: f(x+T) = f(x), \forall x \in D.$

Приклад. Періодичними є тригонометричні функції $y = \sin x, y = \cos x, T = 2\pi$, також $y = \mathrm{tg} x, y = \mathrm{ctg} x, T = \pi.$ Відповідно, для функцій $y = \sin 5x \Rightarrow T = \dfrac{2\pi}{5}; y = \cos 7x \Rightarrow T = \dfrac{2\pi}{7}.$

Складена функція, обернена, неявно і параметрично задані функції

Означення. Функція $y = F(u), u = v(x)$ називається *складеною функцією*, або *суперпозицією* функцій $F(u)$ та $v(x)$, і позначається $y = F(v(x))$.

Приклад. Функція $y = 3\cos(2x+1)$ – складена, вона є суперпозицією функцій: $y = 3(u(v(x))), \quad u = \cos v, \quad v = 2x+1.$

Означення. Нехай функція $y = f(x)$ встановлює відповідність між множинами D та E. Якщо обернена відповідність між множинами E та D буде функцією, то вона називається *оберненою* до даної $y = f(x)$, її позначають $y = f^{-1}(x)$.

Приклад. Функції $y = x^3$ та $y = \sqrt[3]{x}$ взаємно обернені.

Графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x.$

Отже, функція $x=\varphi(y)$ є оберненою до $y=f(x)$, якщо:

1) область визначення функції φ є множиною значень функції f;

2) множина значень функції φ є областю визначення функції f;

3) кожному значенню змінної $y\in E$ відповідає єдине значення змінної $x\in D$.

Останній пункт дає визначення оберненої функції тільки для строго монотонних функцій. При цьому, якщо пряма функція строго зростає (спадає), то обернена їй функція також строго зростає (спадає).

Означення. Функція називається *неявно заданою*, якщо її задано рівнянням $F(x,y)=0$, яке не розв'язане відносно змінної *y*.

Довільну явно задану функцію можна записати як неявно задану відповідним рівнянням, але не навпаки.

Означення. Система рівнянь $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), t\in T \end{cases}$ виражає змінну *x* та її функцію $y=f(x)$ як функції від параметру *t* є *параметричним заданням* функції.

Приклад. Система рівнянь $\begin{cases} x=R\cos t, \\ y=R\sin t, t\in[0,2\pi] \end{cases}$ визначає коло радіуса R з центром у початку прямокутної декартової системи координат.

Основні елементарні функції, їх властивості та графіки

Означення. *Основними елементарними функціями* називають такі функції:

1. *Степенева функція* $y=x^{\alpha}, \alpha\in\mathbb{R}$. Область визначення і графік цієї функції залежать від значення α.

2. *Показникова* функція $y=a^x, a>0, a\neq 1$.

3. *Логарифмічна* функція $y=\log_a x, a>0, a\neq 1$.

4. *Тригонометричні* функції: $y=\sin x, y=\cos x, y=\mathrm{tg}x, y=\mathrm{ctg}x$.

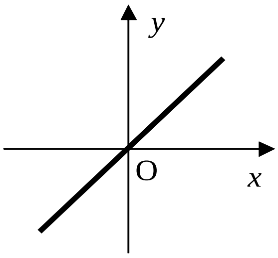
5. *Обернені тригонометричні* функції:
$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\mathrm{arctg}x, y=\mathrm{arcctg}x$.

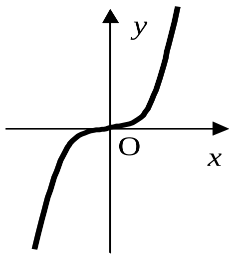
Означення. Функції, отримані з основних елементарних функцій за допомогою скінченого числа алгебраїчних дій (додавання, віднімання, множення, ділення) та скінченого числа утворень складеної функції, називають *елементарними.*

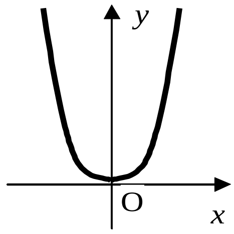
Елементарні функції поділяються на алгебраїчні й неалгебраїчні (трансцендентні), причому до *алгебраїчних* функцій належать: цілі раціональні, дробово-раціональні, ірраціональні; до *неалгебраїчних* належать: показникові, логарифмічні, тригонометричні, обернені тригонометричні.

Графіки основних елементарних функцій

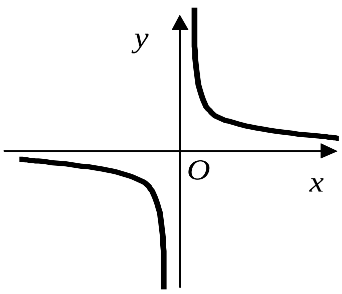
Алгебраїчні функції

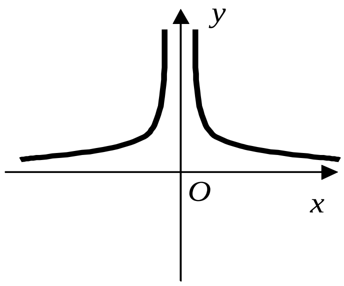




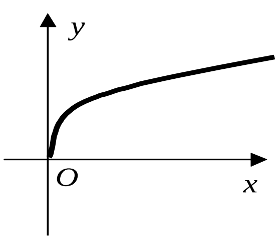


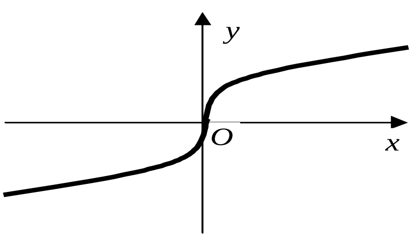
$y = x$ $\qquad$ $y = x^3, \quad y = x^{2n+1}$ $\qquad$ $y = x^2, \quad y = x^{2n}$

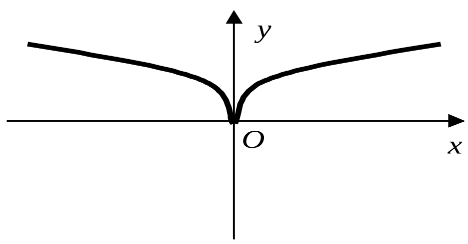




$y = \dfrac{1}{x}\ , \quad y = \dfrac{1}{x^{2n+1}}$ $\qquad$ $y = \dfrac{1}{x^2}\ , \quad y = \dfrac{1}{x^{2n}}$



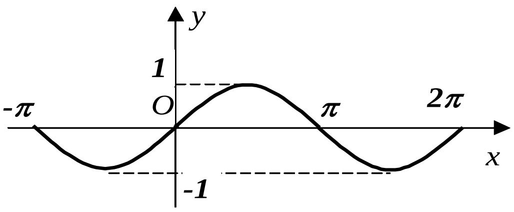




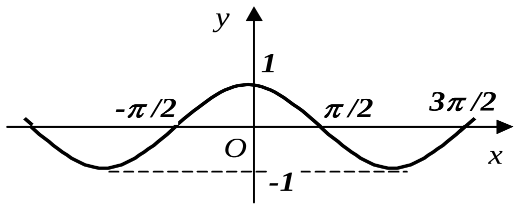
$y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt[2n]{x}$ $y=\sqrt[3]{x}$, $y=\sqrt[2n+1]{x}$ $y^3=x^2$, $y^{2n+1}=x^{2m}$

$\left(2n+1>2m\right)$

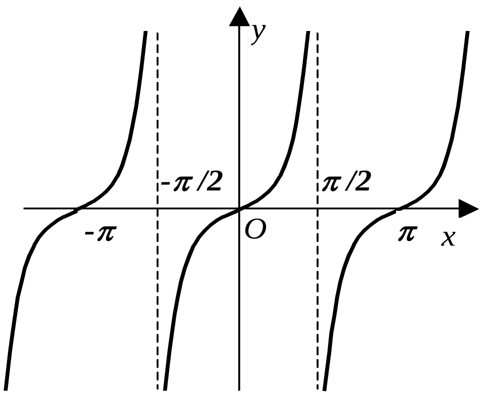
Трансцендентні функції



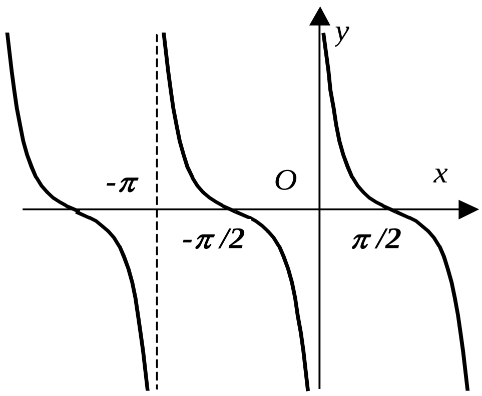
$y=\sin x$



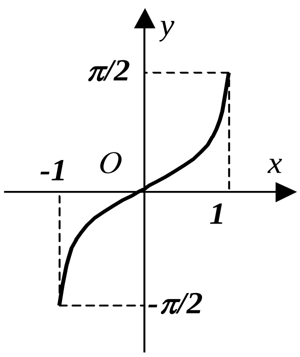
$y=\cos x$



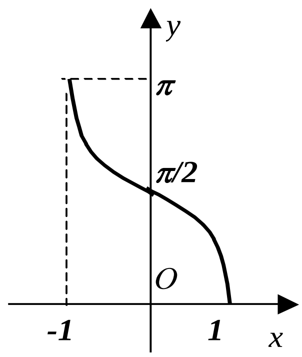
$y=\mathrm{tg}\,x$



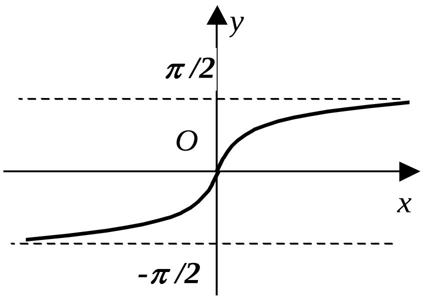
$y=\mathrm{ctg}\,x$



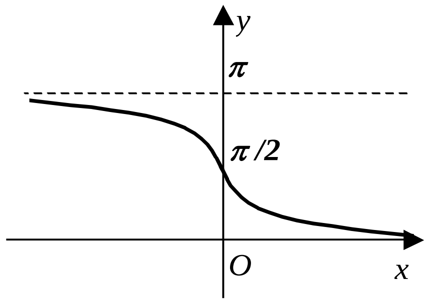
$y=\arcsin x$



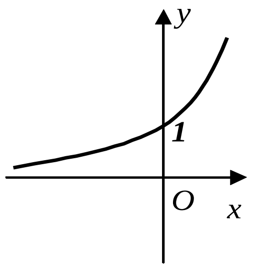
$y=\arccos x$

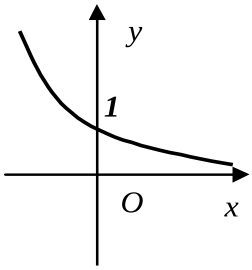


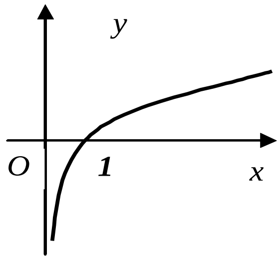
$y = \operatorname{arctg} x$

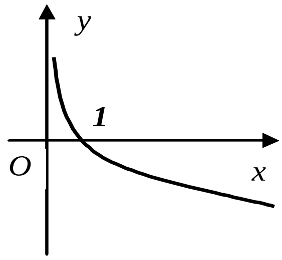


$y = \operatorname{arcctg} x$









$y = a^x,\ a > 1$ $\quad y = a^x, 0 < a < 1$ $\quad y = \log_a x, a > 1$

$y = \log_a x, 0 < a < 1$

Елементарні функції поділяють на:

1. Цілі алгебраїчні многочлени: $y = A_1 x^n + A_2 x^{n-1} + \ldots + A_{n+1}$.

2. Дробово-раціональні вирази

$$y = \frac{Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots + Cx + D}{A_1 x^m + B_1 x^{m-1} + \ldots + C_1 x + D_1}.$$

Зауваження. Сукупність многочленів та раціональних дробів утворює клас *раціональних* функцій.

3. Функція, утворена за допомогою скінченного числа суперпозицій та арифметичних операцій над раціональними функціями і над степеневими функціями з дробовими показниками і яка не є раціональною, називається *ірраціональною* функцією.

4. Елементарна функція, яка не є раціональною або ірраціональною, називається *трансцендентною* функцією.

13.2. Границя функції в точці

Розглянемо функцію $y = f(x)$. Нехай $x \in (a,b)$ і функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі (a,b), також визначена у деякому околі точки $x = x_0$, за винятком хіба що самої точки x_0.

Означення. Число A називають ***границею функції*** $y = f(x)$ при $x \to x_0$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число δ>0, що для всіх x із δ-околу точки x_0, тобто таких, які задовольняють нерівність $0 < |x - x_0| < \delta$ виконується нерівність:

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) \quad \forall x: \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Розглянемо геометричний зміст границі функції в точці.

Число A є границею функції $y = f(x)$ при $x \to x_0$, якщо для довільного ε>0 знайдеться такий δ-окіл точки x_0, що для всіх $x \neq x_0$ із δ-околу точки x_0 відповідні ординати графіка функції $y = f(x)$ лежать у смузі $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$, хай би якою вузькою вона була.

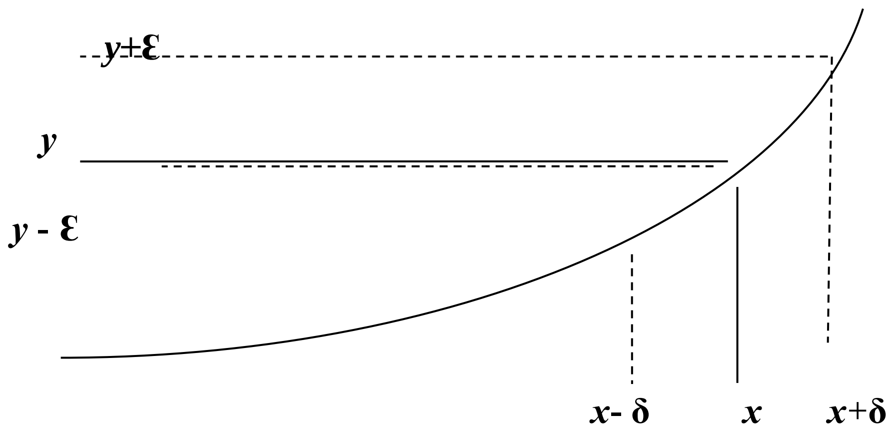


Рис. 13.1. Геометрична інтерпретація поняття границі функції в точці

Означення. Число A називають *правою (лівою) границею функції* $y = f(x)$ в т. x_0, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для всіх x, таких, що $x_0 < x < x_0 + \delta \quad (x_0 - \delta < x < x_0)$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Записують: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A \quad \left(\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A\right).$

Теорема. *Функція $y = f(x)$ має границю в точці x_0 тоді й лише тоді, коли в цій точці існують права й ліва границі і вони рівні між собою*

$$A = \lim_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = A.$$

13.3. Нескінченно малі та нескінченно великі функції

Означення. Функцію $y = \alpha(x)$ називають *нескінченно малою* при $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0.$

Означення. Функцію $y = g(x)$ називають *нескінченно великою* при $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty.$

Теорема. *Якщо при $x \to x_0$ функція $y = \alpha(x)$ нескінченно мала, то функція $y = \dfrac{1}{\alpha(x)} = g(x)$ при $x \to x_0$ нескінченно велика, і навпаки, якщо при $x \to x_0$ функція $y = g(x)$ нескінченно велика, то функція $y = \alpha(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ при $x \to x_0$ нескінченно мала.*

Теорема. *Для функції $y = f(x)$ існує скінчена границя $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ тоді й лише тоді, коли цю функцію можна подати у вигляді суми*

$$f(x) = A + \alpha(x), \text{ де } \lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0.$$

Властивості нескінченно малих функцій

– Алгебраїчна сума скінченого числа нескінченно малих функцій є нескінченно малою функцією.

– Добуток нескінченно малої функції на обмежену функцію є нескінченно малою функцією.

– Добуток нескінченно малої функції на константу є нескінченно малою функцією.

– Добуток скінченого числа нескінченно малих функцій є нескінченно малою функцією.

– Частка від ділення нескінченно малої функції на функцію, границя якої не дорівнює нулю, є нескінченно малою функцією.

Означення. Нехай $y=\varphi(x)$ та $y=g(x)$– нескінченно малі функції при $x\to x_0$. Тоді справедливі твердження порівняння нескінченно малих функцій.

- якщо існує $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\varphi(x)}{g(x)}=A$, де $A\neq 0,\quad A=\text{const}$, то функції $y=\varphi(x)$ та $y=g(x)$ називають нескінченно малими *одного порядку*;

- якщо існує $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\varphi(x)}{g(x)}=1$, то функції $y=\varphi(x)$ та $y=g(x)$ називають *еквівалентними* нескінченно малими: $\varphi(x)\sim g(x),\quad x\to x_0$;

- якщо існує $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\varphi(x)}{g(x)}=0$, то функцію $y=\varphi(x)$ називають *нескінченно малою вищого порядку* порівняно з функцією $y=g(x)$.

Основні теореми про границі

Теорема (єдиність границі). *Якщо функція* $y=f(x)$ *має границю A при* $x\to x_0$*, то ця границя єдина.*

Теорема. *Якщо функції* $y=f(x)$ *та* $y=g(x)$ *мають границі в точці* $x=x_0$*, тобто* $A=\lim\limits_{x\to x_0}f(x),\quad B=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$*, тоді*

1. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B;$

2. $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\cdot B;$

3. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{A}{B},\quad B\neq 0.$

Доведення. За умовою теореми $A=\lim\limits_{x\to x_0}f(x),\quad B=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$, тоді

$f(x) = A + \alpha(x), \quad g(x) = B + \beta(x),$ де $\alpha(x) \to 0, \beta(x) \to 0$, якщо $x \to x_0$. Звідси отримуємо:

$$f(x) \pm g(x) = A \pm B + \left(\alpha(x) \pm \beta(x)\right);$$

$$f(x)g(x) = AB + \left(A\beta(x) + B\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x)\right);$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} + \left(\frac{B\alpha(x) - A\beta(x)}{B^2 + B\beta(x)}\right).$$

Вирази в дужках є нескінченно малими при $x \to x_0$, тому теорему доведено.

Наслідки теореми

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(Cf(x)\right) = C\lim\limits_{x\to x_0} f(x);$

2. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^m = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^m;$

3. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{g(x)} = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)};$

4. $\lim\limits_{x\to x_0} a^{f(x)} = a^{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}.$

Теорема (*про границю проміжної функції*). *Якщо в деякому околі точки $x = x_0$, крім, можливо самої точки, виконується нерівність для заданих функцій* $y = \varphi(x), \quad y = f(x), \quad y = g(x)$:

$$\varphi(x) \le f(x) \le g(x),$$

причому $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$, *то* $\exists\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A.$

Доведення.

З рівностей границь випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$ існують околи точки x_0, в одному з яких виконуються нерівності $-\varepsilon < \varphi(x) - A < \varepsilon,$ а в другому: $-\varepsilon < g(x) - A < \varepsilon.$ Із нерівності умови теореми випливає, що $\varphi(x) - A < f(x) - A < g(x) - A,$ тому в меншому з околів виконуються нерівності

$$-\varepsilon \le \varphi(x) - A \le f(x) - A \le g(x) - A < \varepsilon.$$

Теорема доведена.

Завдання для самоконтролю

1. Функція однієї змінної, основні поняття.

2. Основні елементарні функції, їх задання та опис.

3. Навести приклади параметричного задання функції.

4. Означення границі функції в точці, пояснення.

5. Основні теореми про границі функції.

6. Навести приклади нескінченно малої та нескінченно великої функції в точці. Дати загальне означення.

Лекція 14. Важливі границі. Неперервність функції

14.1. Границя функції при $x \to \infty$.

14.2. Важливі границі.

14.2.1. Перша важлива границя.

14.2.2. Друга важлива границя.

14.3. Порівняння нескінченно малих функцій.

14.4. Неперервність функції у точці. Точки розриву.

14.5. Основні теореми про неперервні функції.

14.1. Границя функції при $x \to \infty$

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на всій числовій прямій.

Означення. Число A називають *границею функції* $y = f(x)$ при $x \to \infty$, якщо $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists M(\varepsilon) > 0 \colon \; |x| > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$. Використовують позначення $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

З геометричної точки зору рівність $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ означає, що для довільного додатного ε існує додатне число M, таке, що при $x \in (-\infty; M) \cup (M; +\infty)$ точки графіка функції $y = f(x)$ знаходяться у смузі з шириною 2ε: $A - \varepsilon < y < A + \varepsilon$.

Приклад. Довести, що $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$.

Розв'язування. Покажемо, що $\forall \varepsilon > 0 \ \exists M(\varepsilon) > 0: \ |x| > M \Rightarrow \left| \frac{1}{x^2} - 0 \right| < \varepsilon$. З нерівності $\frac{1}{x^2} < \varepsilon$ випливає, що $x^2 > \frac{1}{\varepsilon}$, звідки $|x| > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Вибравши $M(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, отримуємо, що при $|x| > M(\varepsilon)$ $\left|\frac{1}{x^2}\right| < \varepsilon$, тобто, згідно з означенням, маємо, що $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

Означення. Число A_1 називають *границею функції* $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, якщо $\forall \varepsilon > 0 \ \exists M_1(\varepsilon) > 0: \ x > M_1 \Rightarrow |f(x) - A_1| < \varepsilon$.

Означення. Число A_2 називають *границею функції* $y = f(x)$ при_$x \to -\infty$, якщо $\forall \varepsilon > 0 \ \exists M_2(\varepsilon) < 0: \ x < M_2 \Rightarrow |f(x) - A_2| < \varepsilon$.

Наприклад, $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$.

14.2. Важливі границі

14.2.1. Перша важлива границя

При обчисленні границь, що містять тригонометричні функції та зводяться до невизначеності виду $\left(\frac{0}{0}\right)$, часто використовують ***першу важливу границю***:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{14.1}$$

Нехай $x \to 0$ і при цьому $x < 0$. Тоді $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x}$, $-x > 0$. У цьому випадку маємо:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{-x\to 0} \frac{\sin(-x)}{-x} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

При обчисленні цієї границі ми використали заміну Доведемо рівність (14.1).

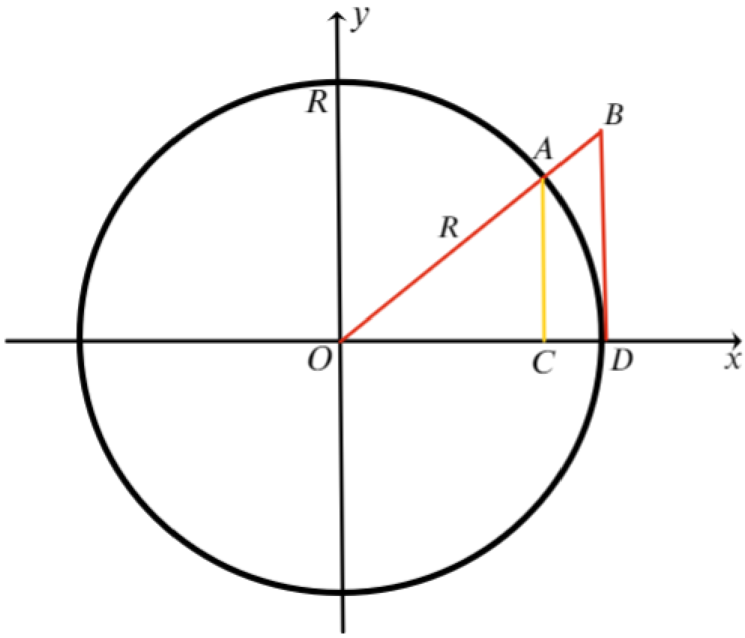


Рис. 14.1. Доведення важливої границі

Для цього використаємо відому подвійну нерівність $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, що виконується при $x \in \left(0; \pi/2\right)$.

Зауваження. Переконатись в справедливості подвійної нерівності за умови $R = 1$ (рис. 14.1) із трикутників OAC, OBD виразити катети AC, BD та обчислити довжину дуги AD.

Поділимо всі частини цієї подвійної нерівності на $\sin x > 0$. Отримаємо нерівність:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Звідси маємо: $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. Перейдемо у цій нерівності до границі при $x \to 0$. Отримуємо:

$$\lim_{x\to 0}\cos x \le \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \le \lim_{x\to 0} 1.$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$, то, за теоремою про границю проміжної функції, отримуємо, що $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Нехай $-x=t$, для $x\to 0$ також $t\to 0$.

Таким чином, і у цьому випадку має місце рівність.

Приклад. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}$, $k\neq 0$.

Розв'язування. Помножимо чисельник та знаменник дробу під знаком границі на число $k\neq 0$. Отримаємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{k\sin kx}{kx}=k\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx}.$$

Зробимо заміну змінної $t=kx$. При $x\to 0$ $t\to 0$. Тому, з врахуванням формули, отримуємо: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=k\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=k\cdot 1=k$.

Таким чином, отримано формулу:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=k. \tag{14.2}$$

14.2.2. Друга важлива границя

Доведемо формулу:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e. \tag{14.3}$$

Формулу (14.3) називають ***другою важливою границею***.

Для доведення формули розглянемо два випадки.

1. Нехай $x\to+\infty$. Кожне значення змінної x знаходиться між двома послідовними натуральними числами: $n\leq x<n+1$, де $n=[x]$, $n\in\mathbb{N}$. Тоді виконується нерівність $\frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}\leq\frac{1}{n}$, звідки $1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{x}\leq 1+\frac{1}{n}$. З цієї нерівності отримаємо:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

При $x\to+\infty$ $n\to\infty$, тому, перейшовши у останній подвійній нерівності до границі при $n\to\infty$, маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}\leq\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\leq\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \tag{14.4}$$

Далі використаємо формулу, згідно з якою $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, $n\in\mathbb{N}$. Знайдемо границі послідовностей у лівій та правій частинах нерівності.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e.$$

Таким чином, $e \le \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le e$, звідки випливає формула (14.3).

2. Нехай $x\to-\infty$. Зробимо заміну змінної $-x=t$. Тоді знаходимо:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t-1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^t = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\cdot\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right) = e\cdot 1 = e.$$

Таким чином, формула (14.3) виконується при $x\to\pm\infty$.

Виконавши у границі $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ заміну змінної $\frac{1}{x}=t$, отримаємо, що при $x\to\infty$ $t\to 0$. Маємо $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$.

Другу важливу границю використовують, коли при обчисленні границі мають справу з невизначеністю виду $\left(1^\infty\right)$. При обчисленні границь, пов'язаних з другою важливою границею, часто застосовують наступне твердження: якщо існують границі $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ та $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$, причому $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$, то існує також границя $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)}$, яка обчислюється за формулою:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)} = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}. \qquad (14.5)$$

Приклад. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x$.

Розв'язування. Оскільки при $x\to\infty$ $\frac{k}{x}\to 0$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=\left(1^\infty\right)$, тому для обчислення заданої границі використаємо другу важливу границю. Маємо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x/k}\right)^{\frac{x}{k}\cdot k}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x/k}\right)^{\frac{x}{k}}\right)^k=e^k.$$

Деякі важливі границі

Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$.

Розв'язування. Запишемо вираз під знаком границі у вигляді $\frac{\ln(1+x)}{x}=\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$. За основною логарифмічною тотожністю, $(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}$.

Використовуючи формулу (14.4), маємо:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e=\lim_{x\to 0}e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}=e^1.$$

Звідси отримуємо, що $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$. Таким чином, ми отримали важливу формулу:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1. \tag{14.6}$$

У формулі (14.6) виконаємо заміну $\ln(1+x)=t$. При $x\to 0$ $t\to 0$. Тоді $x=e^t-1$. Вираз набуває вигляду:

$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{e^t-1}=1=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{e^t-1}{t}}=\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}}.$$

Звідси знаходимо формулу, що часто використовується при обчисленні границь від виразів, що містять показникові функції:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1. \qquad (14.7)$$

Використовуючи (14.6), знайдемо границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$. Для цього у виразі під знаком границі перейдемо до натурального логарифму $\left(\log_a b=\frac{\ln b}{\ln a}\right)$.

Отримаємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\ln a\cdot x}=\frac{1}{\ln a}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}\cdot 1=\frac{1}{\ln a}.$$

Отже, доведено формулу:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}. \qquad (14.8)$$

Застосування границі (14.8) дозволяє обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x}=\ln a\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}.$$

У останній границі виконаємо заміну $x\ln a=t$. Якщо $x\to 0$, то $t\to 0$. Отримуємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\cdot\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=\ln a\cdot 1=\ln a.$$

Таким чином, маємо формулу:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a. \qquad (14.9)$$

14.3. Порівняння нескінченно малих функцій

Дві нескінченно малі функції порівнюють між собою за допомогою дослідження їх відношення. Нехай $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ – нескінченно малі функції при $x\to x_0$, тобто виконуються рівності:

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=\lim_{x\to x_0}\beta(x)=0.$$

Означення. Функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ називають *нескінченно малими одного порядку* при $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0, \quad C \in \mathbb{R}$.

Означення. Функцію $\alpha(x)$ називають *нескінченно малою вищого порядку*, ніж $\beta(x)$ при $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$.

Означення. Функцію $\alpha(x)$ називають *нескінченно малою нижчого порядку*, ніж $\beta(x)$ при $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$.

Означення. Функцію $\alpha(x)$ називають *нескінченно малою* k*-го порядку* відносно $\beta(x)$ при $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = C \neq 0, \quad C \in \mathbb{R}$.

Означення. Нескінченно малі функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ називають *непорівняними* при $x \to x_0$, якщо у точці x_0 не існує границі їх відношення.

Зауваження. У означеннях замість $x \to x_0$ може розглядатися $x \to \pm\infty$.

Розглянемо приклади порівняння нескінченно малих функцій.

Прикладом нескінченно малих функцій одного порядку при $x \to 0$ є функції $\alpha(x) = \sin 2x$ та $\beta(x) = 4x$, оскільки $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{4x} = \frac{1}{4} \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Функція $\alpha(x) = x$ та $\beta(x) = x \sin \frac{1}{x}$ є непорівнянними між собою при $x \to 0$, оскільки $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ не існує.

Нехай $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ є нескінченно малими при $x \to x_0$. Якщо у околі точки x_0 виконується нерівність $|\alpha(x)| \leq C \cdot |\beta(x)|$, де $C-$додатна стала величина, то пишуть: $\alpha(x) = O(\beta(x))$ (читається: $\alpha(x)$ є «O велике» від $\beta(x)$). $\alpha(x)$ та $\beta(x)$

є нескінченно малими одного порядку, якщо при $x \to x_0$ $\alpha(x) = O(\beta(x))$ і $\beta(x) = O(\alpha(x))$.

Якщо при $x \to x_0$ $\alpha(x)$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж $\beta(x)$, тобто $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то використовують запис $\alpha(x) = o(\beta(x))$ (читається: $\alpha(x)$ є «о мале» від $\beta(x)$).

Символи «O» та «o» називають *символами Ландау*.

Серед нескінченно малих функцій одного порядку важливе значення для практичних застосувань мають еквівалентні нескінченно малі.

Означення. Функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$, що є нескінченно малими при $x \to x_0$, називають *еквівалентними нескінченно малими*, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

Використовують позначення $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Розглянемо основні властивості еквівалентних нескінченно малих функцій.

Теорема. *Нескінченно малі $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ еквівалентні при $x \to x_0$ тоді і лише тоді, коли їх різниця $\alpha(x) - \beta(x)$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж кожна з функцій $\alpha(x)$ та $\beta(x)$.*

Доведення. Нехай $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to x_0$, тобто

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1.$$

Звідси випливає, що $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \left(1 - \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right) = 1 - \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$.

Отже, за означенням, $\alpha(x) - \beta(x)$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж $\alpha(x)$. Аналогічно доводиться те, що $\alpha(x) - \beta(x)$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж $\beta(x)$.

Нехай тепер, навпаки, відомо, що різниця $\alpha(x)-\beta(x)$ при $x\to x_0$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж $\alpha(x)$ та $\beta(x)$, тобто виконуються рівності:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\beta(x)}=0.$$

Якщо $\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)}=0$, то $\lim_{x\to x_0}\left(1-\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right)=0$, звідки $\lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1$. Остання рівність означає, що $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to x_0$.

Якщо $\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\beta(x)}=0$, то $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}-1\right)=0$. З цього випливає, що $\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, тобто $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to x_0$. Теорему доведено.

Теорема. *Нехай $\alpha_1(x)\sim\alpha_2(x)$, $\beta_1(x)\sim\beta_2(x)$ при $x\to x_0$. Тоді, якщо існує границя $\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$, то існує і границя $\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}$, причому ці границі рівні між собою.*

Доведення. Нехай при $x\to x_0$ $\alpha_1(x)\sim\alpha_2(x)$, $\beta_1(x)\sim\beta_2(x)$. Тоді маємо:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}\cdot\frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}\cdot\frac{\beta_2(x)}{\beta_1(x)}\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\beta_2(x)}{\beta_1(x)}=$$

$$=1\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}\cdot 1=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}.$$

Теорему доведено.

Доведена теорема дає змогу при знаходженні границі відношення двох заданих нескінченно малих функцій замінювати нескінченно малу функцію на еквівалентну їй нескінченно малу. При цьому часто використовуються наступні еквівалентні нескінченно малі величини.

1. $\sin\alpha \sim \alpha$, $\alpha \to 0$	6. $e^{\alpha} - 1 \sim \alpha$, $\alpha \to 0$
2. $\mathrm{tg}\alpha \sim \alpha$, $\alpha \to 0$	7. $a^{\alpha} - 1 \sim \alpha \ln a$, $\alpha \to 0$
3. $\arcsin\alpha \sim \alpha$, $\alpha \to 0$	8. $\ln(1+\alpha) \sim \alpha$, $\alpha \to 0$
4. $\mathrm{arctg}\alpha \sim \alpha$, $\alpha \to 0$	9. $\log_a(1+\alpha) \sim \dfrac{\alpha}{\ln a}$, $\alpha \to 0$
5. $1-\cos\alpha \sim \dfrac{\alpha^2}{2}$, $\alpha \to 0$	10. $(1+\alpha)^k - 1 \sim k\alpha$, $\alpha \to 0$

Ці формули досить легко отримати, використовуючи правило Лопіталя, яке буде розглянуте при вивченні диференціального числення функцій однієї змінної.

Висновок.

1. Наслідки першої важливої границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{x}=1;$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}x}{x}=1;$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arsin}x}{x}=1.$

2. Друга важлива границя $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$ *та її наслідки:*

а) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e;$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a;$ г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha.$

Наведемо ще кілька важливих границь:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0;$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^m}{a^x}=0, m\in Z, a>1$.

14.4. Неперервність функції у точці. Точки розриву

Нехай функція $y = f(x)$ визначена у точці x_0 і у деякому околі цієї точки.

Означення. Функцію $y = f(x)$ називають *неперервною у точці* x_0, якщо границя функції $f(x)$ у цій точці дорівнює значенню функції у ній:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (14.10)$$

З означення випливає, що для неперервності функції у точці x_0 необхідним та достатнім є виконання наступних умов:

1) $f(x)$ визначена у точці x_0, тобто $\exists f(x_0)$;

2) $\exists \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$;

3) $\exists \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$;

4) $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$.

Запишемо рівність у вигляді: $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x) - f(x_0)\right) = 0$. Позначимо $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$. Величину Δx називають *приростом аргумента* в точці x_0, Δy – *приростом функції* у цій точці. Умова $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ є рівносильною умові $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$. З цієї рівності випливає інше означення неперервності функції у точці.

Означення. Функцію $y = f(x)$ називають *неперервною у точці* x_0, якщо нескінченно малому приросту аргументу $\Delta x = x - x_0$ у цій точці відповідає нескінченно малий приріст функції $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, тобто

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0. \qquad (14.11)$$

Приклад 1. Дослідити на неперервність функцію $y = \sin x$.

Розв'язування. Функція $y = \sin x$ визначена $\forall x \in \mathbb{R}$. Нехай x_0 – довільна точка числової прямої. Покажемо, що у цій точці нескінченно малому приросту аргументу $\Delta x = x - x_0$ відповідає нескінченно малий приріст функції Δy. Оскільки $x = x_0 + \Delta x$, то цей приріст

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 =$$
$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Тут для перетворення виразу для приросту функції застосовано відому формулу різниці синусів: $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$.

Знайдемо $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left(2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\right)=2\lim_{\Delta x\to 0}\left(\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\right)=$$
$$=2\cdot 0\cdot\cos x_0=0.$$

Отже, нескінченно малому приросту функції $y=\sin x$ у довільній точці числової прямої $x=x_0$ відповідає нескінченно малий приріст аргументу Δy, тобто, за означенням, дана функція є неперервною на всій числовій прямій.

Зауваження. Можна довести, що всі основні елементарні функції є неперервними у своїх областях визначення.

Для функції $y=f(x)$, неперервної в точці x_0, виконується рівність $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. Запишемо цю рівність у вигляді:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)=f\left(\lim_{x\to x_0}x\right). \tag{14.12}$$

З рівності (14.12) випливає, що при знаходженні границі неперервної функції $f(x)$ можна перейти до границі під знаком функції, тобто у функції $f(x)$ замість аргументу x можна підставити його граничне значення.

Приклад 2. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^x-1}{x}\right)$.

Розв'язування. Оскільки функція $y=\sin x$ є неперервною у кожній точці числової прямої, то $\lim\limits_{x\to x_0}\sin(g(x))=\sin\left(\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\right)$, тому отримуємо:

$$\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^x-1}{x}\right)=\sin\left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^x-1}{x}\right)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\cdot\frac{e^x-1}{x}\right)\right)=$$
$$=\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1.$$

Розглянемо поняття односторонньої неперервності функції у точці (неперервності зліва або справа).

Означення. Функцію $f(x)$ називають *неперервною у точці* x_0 *зліва*, якщо вона визначена на проміжку $(x_0-\varepsilon; x_0]$, де $\varepsilon>0$, і $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$. Якщо ця функція визначена на проміжку $[x_0; x_0+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, і $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$, то функцію $f(x)$ називають *неперервною у цій точці справа*.

Якщо функція є неперервною у деякій точці, то вона неперервна у цій точці і зліва, і справа.

Означення. Точки, у яких порушується неперервність функції, називають *точками розриву* цієї функції.

Якщо $x=x_0$ – точка розриву функції $y=f(x)$, то в ній не виконується хоча б одна з умов 1) – 4), що випливають з *означення неперервності* функції у точці. В залежності від того, яка з цих умов не виконується, розрізняють наступні типи точок розриву.

1. Якщо $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A=const$, проте $A\neq f(x_0)$, або функція $f(x)$ не визначена у точці x_0, то точку x_0 називають *точкою усувного розриву*. У цьому випадку досить довизначити функцію у цій точці, поклавши $f(x_0)=f(x_0\pm 0)$, щоб отримати функцію, неперервну у точці x_0.

2. $\exists \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A_1=\text{const}$, $\exists \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A_2=\text{const}$, проте $A_1\neq A_2$. У цьому випадку точку x_0 називають *точкою розриву першого роду* або *точкою розриву типу стрибка*. При цьому величину $\delta=|A_2-A_1|$ називають *стрибком функції* $f(x)$ *у точці* x_0.

3. Хоча б одна з границь: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ або $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ не існує, або дорівнює ∞. Точка x_0 у цьому випадку називається *точкою розриву другого роду*.

Приклад 3. Знайти точки розриву вказаних функцій та визначити їх тип:

$$1)\ f(x)=\begin{cases}2x-1, & x<2;\\ x^2+3, & x\geq 2.\end{cases}\quad 2)\ f(x)=\frac{1}{x^2-4}.$$

Розв'язування.

1) Функції визначені на вказаних областях, тому треба дослідити точку зміни її аналітичності. Знайдемо ліву та праву границі функції $f(x)$ у точці $x=2$.

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0}(2x-1)=3, \ \lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2}\left(x^2+3\right)=7.$$

Односторонні границі функції $f(x)$ у точці $x=2$ існують, вони скінченні, але не співпадають, тому $x=2$ – точка розриву першого роду (типу стрибка). При цьому стрибок функції у цій точці $\delta=7-3=4$.

2) При $x=\pm 2$ функція $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$ не визначена. При цьому односторонні границі функції у цій точці є нескінченними. Точки $x=\pm 2$ є точками розриву другого роду.

14.5. Основні теореми про неперервні функції

Теореми про властивості функцій, неперервних у точці, безпосередньо випливають з відповідних теорем про границі функцій.

Теорема. *Сума, різниця, частка та добуток неперервних функцій є неперервними функціями (для частки за виключенням значень аргументу, для яких дільник дорівнює нулю).*

Доведення. Оскільки неперервні у точці x_0 функції $f(x)$ та $g(x)$ мають у цій точці границі, що відповідно дорівнюють $f(x_0)$ та $g(x_0)$, то за теоремами для границь функцій маємо існування границь $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, які, відповідно, дорівнюють $f(x_0)\pm g(x_0)$, $f(x_0)\cdot g(x_0)$ та $\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$. Але ці величини і дорівнюють значенням суми, різниці, добутку та частки у точці x_0. Отже, за означенням неперервної функції в точці, функції $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ є неперервними у цій точці.

Теорема. *Якщо функція* $u=\varphi(x)$ *неперервна у точці* x_0, *а функція* $y=f(u)$ *є неперервною у точці* $u_0=\varphi(x_0)$, *то складена функція* $y=f(\varphi(x))$ *є неперервною у точці* x_0.

Доведення. Для доведення теореми потрібно показати, що $\lim\limits_{x\to x_0} f(\varphi(x))=f(\varphi(x_0))$. Оскільки функція $u=\varphi(x)$ за умовою неперервна у точці x_0, то $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)=u_0$, тобто при $x\to x_0$ $u\to u_0$. Тому внаслідок неперервності функції $f(u)$ маємо:

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x))=\lim_{u\to u_0} f(u)=f(u_0)=f(\varphi(x_0)).$$

Теорему доведено.

Зауваження.

1. Многочлен є функція, неперервна на всій числовій прямій.

2. Будь-яка дробово-раціональна функція неперервна в кожній точці своєї області визначення.

Означення. Якщо функція неперервна у кожній точці інтервалу $(a;b)$, то її називають *неперервною на цьому інтервалі*.

Означення. Функцію називають *неперервною на відрізку* $[a;b]$, якщо вона є неперервною на інтервалі $(a;b)$, неперервною справа в точці $x=a$ та неперервною зліва в точці $x=b$.

Неперервні на відрізку функції мають ряд важливих властивостей. Сформулюємо деякі з них без доведення.

Теорема 1 ***(Перша теорема Больцано-Коші)***. *Якщо функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$ *і на його кінцях набирає значень різних знаків, то всередині цього відрізка знайдеться хоча б одна точка* $x=c$, *в якій* $f(x)$ *дорівнює нулю.*

Геометричний зміст цієї теореми полягає у тому, що неперервна крива при переході з однієї півплощини в другу, межею між якими є вісь Ox, перетинає цю вісь.

Теорема 2 ***(Друга теорема Больцано-Коші).*** *Нехай функція* $f(x)$ *є неперервною на відрізку* $[a;b]$ *і на його кінцях набуває різних значень* $f(a)=A$, $f(b)=B$, $A\neq B$. *Тоді для довільного числа* $C\in(A;B)$ *знайдеться точка* $x=c\in(a;b)$, *що* $f(c)=C$.

Дана теорема стверджує, що при переході від одного значення до іншого неперервна функція набуває всіх проміжних значень.

Теорема ***(Теорема Вейєрштрасса)***. *Якщо функція* $f(x)$ *є неперервною на відрізку* $[a;b]$, *то серед її значень на цьому відрізку існує найбільше і найменше значення, тобто функція* $f(x)\in C[a,b]$ *обмежена на* $[a;b]$

Теорема стверджує, що неперервна на $[a;b]$ функція досягає на цьому відрізку найбільшого значення $M=\max\limits_{[a;b]} f(x)$ та найменшого значення $m=\min\limits_{[a;b]} f(x)$.

Наслідок. Нехай $y=f(x)$ строго монотонна та неперервна на деякому проміжку $[a;b]$ і нехай $Y=[m;M]-$ множина її значень. Тоді на множині Y обернена функція $x=f^{-1}(y)$ однозначна, строго монотонна та неперервна.

Завдання для самоконтролю

1. Перша важлива границя, її наслідки. Навести приклади використання
2. Друга важлива границя та її наслідки.
3. Порівняння нескінченно малих функцій.
4. Основні еквівалентні величини, їх використання при обчисленні границь.
5. Означення неперервної функції в точці, на відрізку.
6. Класифікувати точки розриву функції, навести приклади.
7. Сформулювати основні теореми для неперервних функцій на замкненому відрізку.

Розділ 3. Диференціальне числення функції однієї змінної

Тема 3.1. Похідна функції, диференціал. Похідні та диференціали вищих порядків, їх застосування

Лекція 15. Диференціальне числення функцій однієї змінної. Похідна функції однієї змінної

Диференціальне числення – це розділ математичного аналізу, у якому розглядається дослідження функцій за допомогою похідних та диференціалів. Загальні методи диференціального числення розроблено І. Ньютоном та Г. Лейбніцом наприкінці сімнадцятого століття, але лише у дев'ятнадцятому столітті О. Коші обґрунтував ці методи на основі теорії границь. Центральне поняття диференціального числення – похідна – широко використовується при розв'язуванні багатьох задач математики, фізики та, зокрема, економіки.

15.1. Поняття похідної. Геометричний зміст похідної.

15.2. Неперервність та диференційованість функції.

15.3. Правила диференціювання. Похідні від основних елементарних функцій.

15.4. Диференціювання складеної функції.

15.5. Похідна оберненої функції. Диференціювання обернених тригонометричних функцій.

15.6. Таблиця похідних. Приклади застосування основних формул диференціювання.

15.7. Диференціювання функцій, заданих у параметричній та неявній формах.

15.8. Логарифмічне диференціювання. Похідна показниково-степеневої функції.

15.1. Поняття похідної. Геометричний зміст похідної

Нехай на деякому проміжку $(a;b)$ задано функцію $y=f(x)$. Візьмемо будь-яку точку $x\in(a;b)$ і надамо x приросту Δx так, щоб точка $x+\Delta x$ також належала проміжку $(a;b)$. Приріст функції при переході від точки x до точки $x+\Delta x$ має вигляд: $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$.

Означення 1. *Похідною* функції $y=f(x)$ у точці x називають границю відношення приросту функції Δy у цій точці до приросту аргументу Δx, коли приріст аргументу прямує до нуля.

Похідна функції $y=f(x)$ у точці x позначається одним з символів: y', $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$, y'_x, $f'(x)$.

Таким чином, за означенням похідної маємо:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \tag{15.1}$$

Якщо у деякій точці x границя (15.1) дорівнює ∞, то похідну у цій точці називають *нескінченною*. Якщо границя (15.1) у деякій точці x не існує, то у цій точці не існує і похідної $f'(x)$. Далі під похідною будемо розуміти скінченну похідну.

Значення похідної функції $y=f(x)$ у точці $x=x_0$ позначається одним з символів: $f'(x_0)$, $f'(x)\big|_{x=x_0}$, $y'\big|_{x=x_0}$, $y'(x_0)$, $\frac{df(x_0)}{dx}$.

З означення похідної випливає наступний спосіб її знаходження. Щоб знайти похідну функції $y=f(x)$ у деякій точці x, треба:

1) надати значенню x довільного приросту Δx і знайти відповідний приріст функції $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$;

2) знайти відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$;

3) знайти границю цього відношення

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Якщо ця границя існує, то вона дорівнює шуканій похідній $f'(x)$.

Означення 2. Операцію знаходження похідної від функції $f(x)$ називають *диференціюванням* цієї функції.

Приклад 1. Знайти похідну функції $y=x^3$ у довільній точці $x\in\mathbb{R}$ та в точці $x=2$.

Розв'язування. Надамо значенню x приріст Δx і знайдемо відповідний приріст функції $y=x^3$:

$$\Delta y=(x+\Delta x)^3-x^3=x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3=$$
$$=3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3.$$

Знайдемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}=3x^2+3x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2.$$

Знаходимо похідну $y'=\left(x^3\right)'$:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(3x^2+3x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2\right)=3x^2.$$

Підставивши у отриманий загальний вираз для похідної $y'(x)=3x^2$ значення $x=2$, отримаємо $y'(2)=3\cdot 2^2=12$.

Розглянемо поняття односторонньої похідної. Односторонні похідні визначаються за допомогою односторонніх границь.

Означення 3. Нехай функція $f(x)$ визначена у околі точки x. Границю відношення приросту функції $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ до приросту аргументу Δx, якщо $\Delta x \to 0$ і при цьому $\Delta x > 0$, називають *правою похідною* від функції $f(x)$ у точці x і позначають $f'_+(x)$:

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (15.2)$$

Означення 4. Нехай функція $f(x)$ визначена у околі точки x. Границю відношення приросту функції $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ до приросту аргументу Δx, якщо $\Delta x \to 0$ і при цьому $\Delta x < 0$, називають *лівою похідною* від функції $f(x)$ у точці x і позначають $f'_-(x)$:

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (15.3)$$

Якщо функція $f(x)$ задана на відрізку $[a,b]$, то під похідною у точці $x = a$ розуміють праву похідну, а у точці $x = b$ – ліву.

З означення похідної випливає, що похідна $f'(x)$ у точці $x = x_0$ існує тоді і тільки тоді, коли у цій точці існують ліва та права похідні і вони рівні між собою: $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0)$. Якщо ж $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$, то похідна у цій точці не існує. Не існує похідної і у точках розриву функції $f(x)$.

Приклад 2. Довести, що функція $y = |x|$ не має похідної у точці $x = 0$.

Розв'язування. Приріст функції $y = |x|$ у точці $x = 0$, що відповідає приросту аргументу Δx, $\Delta y = |0 + \Delta x| - |0| = |\Delta x|$. Складемо відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$. Це відношення дорівнює -1 при $\Delta x < 0$ і дорівнює 1 при $\Delta x > 0$. Тому границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ залежить від знаку Δx: вона дорівнює 1 при $\Delta x > 0$ і -1 при $\Delta x < 0$.

Таким чином, у точці $x = 0$ існують односторонні похідні $f'_-(0) = -1$ та $f'_+(0) = 1$, але $f'_-(0) \neq f'_+(0)$. Це означає, що у точці $x = 0$ похідна функції $y = |x|$ не існує.

Геометричний зміст похідної

Розглянемо задачу про побудову дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0. Спочатку визначимо поняття дотичної.

Нехай P_0 – точка графіка з координатами $(x_0;\ f(x_0))$, а P – точка цього ж графіка з координатами $(x_0 + \Delta x;\ f(x_0 + \Delta x))$. Пряму, проведену через точки P_0 та P, називають *січною* графіка функції $y = f(x)$.

Означення 5. Якщо при довільному наближенні точки P за графіком функції $y = f(x)$ до точки P_0 січна P_0P наближається до певного граничного положення, то це граничне положення січної називають *дотичною* до графіка функції $y = f(x)$ у точці P_0.

Нехай дотична до графіка $y = f(x)$ у точці P_0 існує. Позначимо $\alpha(P)$ кут, який утворює січна з додатним напрямом осі Ox, α_0 – кут, що утворений дотичною до графіка у точці P_0 з додатним напрямом Ox. Тоді

$$\operatorname{tg}\,(\alpha(P)) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Якщо $\alpha(P) \neq \pm\dfrac{\pi}{2}$, то з неперервності функції $\operatorname{tg} x$ і припущення про існування дотичної у точці P_0 випливає, що $\exists \lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\,(\alpha(P)) = \operatorname{tg}\,\alpha_0$, тобто тангенс нахилу кута дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці P_0 визначається за формулою:

$$\operatorname{tg}\,\alpha_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Таким чином, *геометричний зміст похідної* функції $y = f(x)$ у точці $x = x_0$ полягає у тому, що значення $f'(x_0)$ дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка цієї функції, проведеної у точці з абсцисою $x = x_0$, до додатного напряму осі Ox, тобто кутовому коефіцієнту цієї дотичної. При цьому рівняння дотичної до графіка $y = f(x)$ у точці $P_0\,(x_0;\ f(x_0))$ має вигляд:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \tag{15.4}$$

Якщо похідна $f'(x_0)$ додатна, то дотична до графіка функції утворює гострий кут з додатним напрямом осі Ox, якщо ж $f'(x_0) < 0$, то цей кут – тупий. Якщо у точці x_0 похідна $f'(x_0)$ є нескінченною, то дотична до графіка $y = f(x)$ у цій точці паралельна осі Oy. У цьому випадку рівняння дотичної має вигляд: $x = x_0$.

Означення 6. *Нормаллю* до кривої називають пряму, що проходить перпендикулярно дотичній через точку дотику.

Оскільки добуток кутових коефіцієнтів двох перпендикулярних прямих дорівнює –1, то кутовий коефіцієнт нормалі до графіка функції $y = f(x)$, проведеної у точці $P_0\left(x_0; f(x_0)\right)$ дорівнює $\dfrac{-1}{f'(x_0)}$, а відповідно рівняння цієї нормалі має вигляд:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \tag{15.5}$$

Приклад 3. Записати рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = x^3$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$.

Розв'язування. Значення $f'(x_0)$ при $x_0 = 2$ знайдено у прикладі 1: $f'(2) = 12$, $f(2) = 2^3 = 8$. Підставивши ці значення у рівняння дотичної (15.4), отримаємо: $y - 8 = 12(x - 2)$, або $y = 12x - 16$. Використовуючи (15.5), отримуємо рівняння нормалі: $y - 8 = -\dfrac{1}{12}(x - 2)$, або $y = -\dfrac{1}{12}x + \dfrac{49}{6}$.

15.2. Неперервність та диференційованість функції

Означення 7. Функцію $y = f(x)$ називають *диференційованою* у точці x_0, якщо у цій точці вона має похідну $f'(x_0)$.

Означення 8. Функцію $y = f(x)$ називають *диференційованою* на проміжку, якщо вона диференційована у кожній точці цього проміжку.

Зв'язок між неперервністю функції у точці та її диференційованістю у цій точці встановлює наступна теорема.

Теорема 1. *Якщо функція* $y=f(x)$ *є диференційованою у точці* x_0*, то вона є неперервною у цій точці.*

Доведення. Якщо функція $y=f(x)$ є диференційованою у точці x_0, то у цій точці існує похідна $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, тому відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ можна представити у вигляді суми сталої та нескінченно малої функції:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha,$$

де α – нескінченно мала при $\Delta x\to 0$. Тоді $\Delta y=\left(f'(x_0)+\alpha\right)\cdot\Delta x\to 0$ при $\Delta x\to 0$. Отримали, що у точці x_0 нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції, тобто функція $y=f(x)$ є неперервною у точці x_0. Теорему доведено.

Твердження, обернене теоремі 1, невірне: з неперервності функції у точці не випливає її диференційованість у цій точці. Неперервність функції у точці є лише необхідною умовою її диференційованості у цій точці. Так, функція $y=|x|$, розглянута у прикладі 2, є неперервною у точці $x=0$, але не є диференційованою у цій точці.

15.3. Правила диференціювання. Похідні від основних елементарних функцій

Теорема 2. *Якщо функції* $u=u(x)$, $v=v(x)$ *диференційовані у точці* x*, то їх сума, різниця, добуток та частка (частка за умови, що дільник* $v(x)\neq 0$*) також диференційовані у цій точці, причому виконуються рівності:*

$$(u\pm v)'=u'\pm v',\tag{15.6}$$

$$(uv)'=u'v+uv',\tag{15.7}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \qquad (15.8)$$

Доведення. Для доведення формул використаємо означення похідної. Згідно з цим означенням маємо:

$$(u \pm v)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[u(x+\Delta x) \pm v(x+\Delta x)\right] - \left[u(x) \pm v(x)\right]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} \pm \frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right] = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} \pm$$

$$\pm \lim_{\Delta x \to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \pm v'.$$

Для похідної добутку (15.7) отримуємо:

$$(uv)' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{(u+\Delta u)(v+\Delta v)-uv}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{u\cdot\Delta v}{\Delta x} + \frac{v\cdot\Delta u}{\Delta x} + \Delta v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right] = u\cdot\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\cdot\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0}\Delta v\cdot\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} =$$

$$= uv' + u'v.$$

Отримаємо формулу (15.8) для похідної частки:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\dfrac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \dfrac{u}{v}}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{(u+\Delta u)v - u(v+\Delta v)}{\Delta x\cdot v\cdot(v+\Delta v)}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta u\cdot v - u\cdot\Delta v}{\Delta x}\right)\cdot\lim_{\Delta x \to 0}\frac{1}{v(v+\Delta v)} = \left(v\cdot\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\cdot\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)\cdot\frac{1}{v^2} = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

При доведенні цих формул ми використали теорему 1 про зв’язок диференційованості та неперервності функції у точці: оскільки функції $u(x)$ та $v(x)$ є диференційованими у точці x, то вони у цій точці неперервні, тому при $\Delta x \to 0$ $\Delta u \to 0$ і $\Delta v \to 0$.

Теорема 3. *Якщо* $y = f(x) = C$, *де* C *– стале число, то*

$$f'(x) = (C)' = 0. \qquad (15.9)$$

Доведення. Доведемо, що похідна від константи дорівнює нулю. Дійсно, для довільних x та $\Delta x \neq 0$ отримуємо: $f(x) = C = f(x+\Delta x)$, тому $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \equiv 0$. Звідси $f'(x) = (C)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0$.

Теорема 4. *Сталий множник можна виносити за знак похідної, тобто*

$$\left(C \cdot u(x)\right)' = C \cdot u'(x). \tag{15.10}$$

Доведення. Для доведення використаємо формулу (15.7) похідної добутку та теорему 4. Маємо:

$$\left(C \cdot u(x)\right)' = (C)' \cdot u(x) + C \cdot u'(x) = 0 \cdot u(x) + C \cdot u'(x) = C \cdot u'(x).$$

Деякі формули таблиці похідних, їх доведення

Отримаємо формулу для похідної степеневої функції $y = x^k$, $k \in \mathbb{R}$. Для цього використаємо означення похідної (15.1):

$$y' = \left(x^k\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^k - x^k}{\Delta x} = x^k \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^k - 1}{\Delta x} = x^k \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k \cdot \frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} =$$
$$= k \cdot \frac{x^k}{x} = k \cdot x^{k-1}.$$

Тут ми використали еквівалентність нескінченно малих: при $\alpha \to 0$ $(1+\alpha)^k - 1 \sim k \cdot \alpha$. Таким чином, маємо формулу:

$$\left(x^k\right)' = k \cdot x^{k-1}. \tag{15.11}$$

Аналогічним чином отримаємо формули для похідних тригонометричних функцій.

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$
$$= 2\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos x = \cos x.$$

$$(\cos x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= -2\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin x = -\sin x.$$

Отже, ми отримали формули:

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (15.12)$$

$$(\cos x)' = -\sin x\,. \qquad (15.13)$$

При знаходженні цих похідних ми використали формулу, що є наслідком з першої важливої границі: $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\sin k\alpha}{\alpha} = k$.

Знайдемо похідні від функцій $y = \operatorname{tg} x$ та $y = \operatorname{ctg} x$. Для цього використаємо формулу (15.8) похідної частки функцій.

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Таким чином, справедливими є формули:

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (15.14)$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \qquad (15.15)$$

Знайдемо похідну показникової функції $y = e^x$:

$$\left(e^x\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \cdot 1 = e^x.$$

Маємо формулу:

$$\left(e^x\right)' = e^x\,. \qquad (15.16)$$

Для отримання формули (15.16), ми використали отриману при вивченні другої важливої границі формули $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{e^{\alpha}-1}{\alpha}=1$. Отриманий результат свідчить, що функція $y=e^{x}$ при диференціюванні не змінюється.

Похідну показникової функції загального вигляду $y=a^{x}$ знайдемо аналогічно формулі (15.16), для чого використаємо рівність $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{a^{\alpha}-1}{\alpha}=\ln a$.

$$\left(a^{x}\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^{x}}{\Delta x}=a^{x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^{x}\cdot\ln a.$$

Таким чином, вірною є рівність:

$$\left(a^{x}\right)'=a^{x}\cdot\ln a. \tag{15.17}$$

Знайдемо похідну логарифмічних функцій $y=\ln x$ та $y=\log_{a}x$.

$$\left(\ln x\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(x+\Delta x\right)-\ln x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x/x}{\Delta x}=\frac{1}{x}.$$

Тут ми використали еквівалентність нескінченно малих: при $\alpha\to 0$ $\ln\left(1+k\alpha\right)\sim k\alpha$.

Для отримання похідної від функції $y=\log_{a}x$ перейдемо у ній до натуральних логарифмів: $y=\log_{a}x=\frac{\ln x}{\ln a}$. Тоді за теоремою, виносячи сталий множник $\frac{1}{\ln a}$ за знак похідної, отримуємо:

$$\left(\log_{a}x\right)'=\frac{1}{x\ln a} \tag{15.18}$$

15.4. Диференціювання складеної функції

Знайдемо похідну від складеної функції $y=f\left(\varphi\left(x\right)\right)$.

Теорема 5 ***(про похідну складеної функції)***. *Якщо функція $u=\varphi\left(x\right)$ має похідну u'_{x} у точці x, а функція $y=f\left(u\right)$ має похідну y'_{u} у відповідній точці u,* *то складена функція* $y=f\left(\varphi(x)\right)$ *має похідну* y'_x *у точці* x *і при цьому виконується рівність*

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x . \qquad (15.19)$$

Доведення. Оскільки функція $y=f(u)$ є диференційованою у точці u, то $\exists \lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta u}=y'_u$, тому відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta u}$ можна записати у вигляді $\dfrac{\Delta y}{\Delta u}=y'_u+\alpha$, де $\alpha\to 0$ при $\Delta u\to 0$. Звідси $\Delta y = y'_u\cdot\Delta u+\alpha\cdot\Delta u$.

Функція $u=\varphi(x)$ має похідну u'_x у точці x, тому приріст Δu можна представити у вигляді: $\Delta u = u'_x\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta x$, де $\beta\to 0$ при $\Delta x\to 0$. Підставивши вираз для Δu у вираз для Δy, отримаємо:

$$\Delta y = y'_u\cdot u'_x\cdot\Delta x + y'_u\cdot\beta\cdot\Delta x + u'_x\cdot\alpha\cdot\Delta x+\alpha\cdot\beta\cdot\Delta x .$$

Якщо цю рівність ділити на Δx і перейти до границі при $\Delta x\to 0$, то отримаємо формулу (15.19).

Згідно з формулою (15.19) маємо таке правило диференціювання складеної функції: *похідна складеної функції дорівнює добутку похідної цієї функції по проміжному аргументу на похідну від проміжного аргументу по кінцевому аргументу*. Це правило залишається справедливим, коли складена функція має кілька проміжних аргументів. Наприклад, якщо $y=f(u)$, $u=\varphi(v)$, $v=\psi(x)$, то $y'_x = y'_u\cdot u'_v\cdot v'_x$.

При диференціюванні складених функцій потрібно знати, яка з дій, що призводить до значення складеної функції є останньою. Та величина, над якою виконується остання дія, приймається за проміжний аргумент.

Зауваження. В різноманітних науково-технічних дослідженнях часто використовують так звані ***гіперболічні функції.***

Означення. *Гіперболічним синусом* $\operatorname{sh}x$, *гіперболічним косинусом* $\operatorname{ch}x$, *гіперболічним тангенсом* $\operatorname{th}x$ та *гіперболічним котангенсом* $\operatorname{cth}x$ називають функції, що визначаються за такими формулами:

$$\operatorname{sh} x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2},\ \operatorname{ch} x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2},\ \operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}},\ \operatorname{cth} x=\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}=\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}.$$

Функції $y=\operatorname{sh} x$, $y=\operatorname{ch} x$, $y=\operatorname{th} x$ визначені на всій числовій прямій, а функція $y=\operatorname{cth} x$ визначена для всіх дійсних $x \neq 0$.

Похідні гіперболічних функцій можна визначити, використовуючи їх означення, а також основні формули диференціювання:

$$(\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x,\ (\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x,\ (\operatorname{th} x)'=\frac{1}{\operatorname{ch}^{2} x},\ (\operatorname{cth} x)'=-\frac{1}{\operatorname{sh}^{2} x}. \qquad (15.20)$$

15.5. Похідна оберненої функції. Диференціювання обернених тригонометричних функцій

Нехай $y=f(x)$ та $x=\varphi(y)$ – пара взаємно обернених функцій. Сформулюємо теорему про зв'язок між похідними цих функцій.

Теорема 6 ***(про похідну оберненої функції)***. *Якщо функція* $y=f(x)$ *є строго монотонною на проміжку* $(a;b)$ *і має у довільній точці* x *цього проміжку відмінну від нуля похідну* $f'(x)$, *то обернена їй функція* $x=\varphi(y)$ *також має похідну у відповідній точці, при цьому похідна оберненої функції*

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}. \qquad (15.21)$$

Доведення. Розглянемо обернену функцію $x=\varphi(y)$. Відношення $\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$, причому в силу строгої монотонності функції $y=f(x)$ величина $\Delta x \neq 0$, якщо $\Delta y \neq 0$. Функція $y=f(x)$ є диференційованою у точці x, тому вона є неперервною у цій точці, а обернена функція $x=\varphi(y)$ є неперервною у відповідній точці y. Отже, при $\Delta y \to 0$ також $\Delta x \to 0$ у околі цієї точки. Звідси випливає, що $\varphi'(y)=\lim\limits_{\Delta y \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f'(x)}$. Теорему доведено.

Теорема 6 дає можливість отримати похідні обернених тригонометричних функцій.

Отримаємо формулу для похідної функції $y = \arcsin x$. Ця функція, визначена на відрізку $\left[-1;1\right]$, є оберненою до функції $x = \sin y$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Оскільки на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ функція $x = \sin y$ монотонно зростає і її похідна $x'_y = \left(\sin y\right)'_y = \cos y > 0 \quad \forall y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то всі умови теореми 6 виконуються і можна скористатися формулою (15.21):

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Для отримання похідної функції $y = \arccos x$ використаємо тотожність:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Диференціюючи цю тотожність, маємо: $\left(\arcsin x + \arccos x\right)' = 0$. Звідси випливає, що $\left(\arccos x\right)' = -\left(\arcsin x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Функція $y = \operatorname{arctg} x$ є оберненою для функції $x = \operatorname{tg} y$, де $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. На цьому проміжку $x = \operatorname{tg} y$ монотонно зростає і $x'_y = \frac{1}{\cos^2 y} > 0$, тобто умови теореми 6 виконані. Застосуємо цю теорему:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Похідну функції $y = \operatorname{arcctg} x$ знайдемо, використовуючи тотожність

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Знайдемо похідні від її обох частин. Маємо $\left(\operatorname{arctg} x\right)' + \left(\operatorname{arcctg} x\right)' = 0$. Звідси знаходимо, що $\left(\operatorname{arcctg} x\right)' = -\left(\operatorname{arctg} x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Таким чином, ми отримали формули для похідних обернених тригонометричних функцій:

$$\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{15.22}$$

$$\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{15.23}$$

$$\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \frac{1}{1+x^2}, \tag{15.24}$$

$$\left(\operatorname{arcctg} x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}. \tag{15.25}$$

15.6. Таблиця похідних. Приклади застосування основних формул диференціювання

У попередніх пунктах ми отримали формули, які дають змогу обчислювати похідні, не користуючись означенням похідної, тобто диференціювати довільні елементарні функції без застосування теорії границь. Для цього досить використання формул для похідних суми, різниці, добутку та частки функцій, формул диференціювання складеної та оберненої функцій, а також похідних основних елементарних функцій. Наведемо таблицю цих похідних. Тут вважатимемо, що функції, які диференціюються, є складеними, тобто їх аргумент u є проміжним: $u = u(x)$.

Таблиця похідних основних елементарних функцій

1. $C' = 0,\ C = \text{const}$.

2. $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$.

3. $\left(u^k\right)' = k \cdot u^{k-1} \cdot u', \quad k \in \mathbb{R}$.

4. $\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$, $a > 0, a \neq 1.$

5. $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$.

6. $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'$, $a > 0, a \neq 1.$

7. $\left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$.

8. $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$.

9. $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$.

10. $\left(\operatorname{tg} u\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$.

11. $\left(\operatorname{ctg} u\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$.

12. $\left(\operatorname{sh} u\right)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$.

13. $\left(\operatorname{ch} u\right)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$.

14. $\left(\operatorname{th} u\right)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'$.

15. $\left(\operatorname{cth} u\right)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'$.

16. $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.

17. $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.

18. $\left(\operatorname{arctg} u\right)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

19. $\left(\operatorname{arcctg} u\right)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

Навести приклади обчислення похідних.

15.7. Диференціювання функцій, заданих у параметричній та неявній формах

Диференціювання параметрично заданої функції

Отримаємо формулу для знаходження похідної функції $y = y(x)$, заданої у параметричній формі, тобто у вигляді рівнянь $x = x(t)$, $y = y(t)$ при заданому проміжку зміни допоміжної змінної (параметра) t: $\alpha \le t \le \beta$. Будемо вважати, що функції $x(t)$ та $y(t)$ мають похідні x'_t та y'_t, причому функція $x(t)$ має обернену функцію $t = \varphi(x)$. За правилом диференціювання оберненої функції $t'_x = \dfrac{1}{x'_t}$.

Функцію $y = y(x)$, задану параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, розглянемо як складену функцію $y = y(t)$, де $t = \varphi(x)$. Тоді, за правилом диференціювання складеної функції, отримаємо: $y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \dfrac{1}{x'_t}$.

Таким чином, ми отримали формулу диференціювання функції, заданої у параметричній формі:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{15.26}$$

Формула (15.26) дозволяє знаходити похідну y'_x, функції, заданої у параметричній формі, без безпосереднього знаходження залежності $y = y(x)$.

Диференціювання неявно заданої функції

Нехай функція $y = y(x)$ задана у неявній формі, тобто у вигляді рівняння $F(x, y) = 0$. Для знаходження похідної y'_x немає необхідності виражати з цього рівняння змінну y через x в явному вигляді $y = f(x)$. Достатньо продиференціювати рівняння $F(x, y) = 0$ за змінною x, вважаючи при цьому змінну y функцією x, і з отриманого рівняння знайти y'_x. При цьому похідна y'_x буде виражатись через змінні x та y.

15.8. Логарифмічне диференціювання. Похідна показниково-степеневої функції

У багатьох випадках для знаходження похідної задану функцію доцільно спочатку прологарифмувати, а потім продиференціювати отриманий результат. Таку операцію називають *логарифмічним диференціюванням.*

Якщо $y = f(x)$, то $\ln y = \ln\left(f(x)\right)$. Тоді $(\ln y)' = \left(\ln\left(f(x)\right)\right)'$, тобто маємо:

$\frac{y'}{y} = \left(\ln\left(f(x)\right)\right)'$, звідки

$$y' = \left(\ln\left(f(x)\right)\right)' \cdot y = \left(\ln\left(f(x)\right)\right)' \cdot f(x).$$

Вираз $\frac{y'}{y}$ називають логарифмічною похідною функції $y(x)$.

Приклад 4. Знайти похідну функції $y = \frac{\left(x^2+2\right)\cdot\sqrt[4]{(x-1)^3}\cdot e^x}{(x+5)^3}$.

Розв'язування. Знаходити похідну y' за формулою похідної частки тут недоцільно із-за складності аналітичного виразу для $y(x)$. Знайдемо спочатку логарифмічну похідну функції $y(x)$. Для цього прологарифмуємо задану функцію:

$$\ln y = \ln\left(x^2+2\right) + \frac{3}{4}\ln(x-1) + x - 3\ln(x+5).$$

Диференціюючи за змінною x обидві частини цієї рівності, маємо:

$$\frac{y'}{y} = \frac{2x}{x^2+2} + \frac{3}{4(x-1)} + 1 - \frac{3}{x+5}.$$

Звідси знаходимо похідну y':

$$y' = \left(\frac{2x}{x^2+2} + \frac{3}{4(x-1)} + 1 - \frac{3}{x+5}\right)\cdot y = \left(\frac{2x}{x^2+2} + \frac{3}{4(x-1)} + 1 - \frac{3}{x+5}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\left(x^2+2\right)\cdot\sqrt[4]{(x-1)^3}\cdot e^x}{(x+5)^3}\right).$$

Означення 9. Функцію $y=\left(u\left(x\right)\right)^{v\left(x\right)}$ називають *показниково-степеневою* функцією.

Для знаходження похідної цієї функції використовують логарифмічне диференціювання. Маємо:

$$\ln y=v\left(x\right)\cdot\ln\left(u\left(x\right)\right),\left(\ln y\right)'=\left(v\left(x\right)\cdot\ln\left(u\left(x\right)\right)\right)',\ \frac{y'}{y}=v'\ln u+\frac{v\cdot u'}{u}.$$

Звідси $y'=\left(v'\ln u+\dfrac{v\cdot u'}{u}\right)\cdot y=\left(v'\ln u+\dfrac{v\cdot u'}{u}\right)\cdot u^{v}$. Останню формулу запишемо у вигляді:

$$y'=v'\cdot\ln u\cdot u^{v}+v\cdot u^{v-1}\cdot u'. \qquad (15.27)$$

З формули (15.27) випливає, що похідна показниково-степеневої функції дорівнює сумі її похідної як показникової та степеневої функцій.

Приклад 5. Знайти похідну функції $y=\left(\sin x\right)^{x^{3}-2}$.

Розв'язування. Для знаходження похідної y' використаємо логарифмічне диференціювання: $\ln y=\left(x^{3}-2\right)\ln\sin x$.

Диференціюючи цю рівність, отримуємо:

$$\frac{y'}{y}=3x^{2}\cdot\ln\sin x+\left(x^{3}-2\right)\cdot\frac{\cos x}{\sin x},$$

$$y'=\left(3x^{2}\cdot\ln\sin x+\left(x^{3}-2\right)\cdot\operatorname{ctg}x\right)\cdot y=$$

$$=\left(3x^{2}\cdot\ln\sin x+\left(x^{3}-2\right)\cdot\operatorname{ctg}x\right)\cdot\left(\sin x\right)^{x^{3}-2}.$$

Завдання для самоконтролю

1. Означити похідну функції, пояснити обчислення її за означенням на прикладі.
2. Диференційованість та неперервність функції в точці.
3. Основні правила обчислення похідної, навести приклади.
4. Диференціювання параметрично заданої функції.

5. Пояснити на прикладі застосування теореми про похідну для оберненої функції.

6. Навести приклади обчислення похідної складеної та неявно заданої функції.

7. Отримати за відповідною методикою основні формули таблиці похідних.

8. Геометричний та механічний зміст похідної.

9. Знайти похідні функцій:

1) $y=\sin^2 3x\cdot\sin 3x^2$; 2) $y=\ln\operatorname{arctg}\sqrt{8x+1}$; 3) $y=\dfrac{\operatorname{tg}^4 5x}{7^{\sqrt{x}}-4}$.

10. Знайти похідні параметрично і неявно заданих функцій:

1) $\begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=\ln\left(1+t^2\right), \\ y=t-\operatorname{arctg}t; \end{cases}$

3) $y=\operatorname{tg}(x+y)$; 4) $x\sin y-\cos y+\cos 2y=0$.

11. Скласти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції:

1) $y=x\ln x$ у точці з абсцисою $x_0=e$;

2) $x=\sin t,\quad y=\cos 2t,\quad t_0=\dfrac{\pi}{6}$;

3) $e^y+xy=e$ в точці $M(0;1)$.

12. Навести приклад логарифмічного диференціювання функції.

Відповіді. 9. 1) $y'=3\sin 6x\sin 3x^2+6\sin^2 3x\cos 3x^2$;

2) $y'=2\left((4x+1)\sqrt{8x+1}\,arctg\sqrt{8x+1}\right)^{-1}$;

3) $y' = \dfrac{40\sqrt{x}\cdot\left(7^{\sqrt{x}}-4\right)\mathrm{tg}^3 5x - \mathrm{tg}^4 5x\cdot\cos^2 5x\cdot 7^{\sqrt{x}}\ln 7}{2\sqrt{x}\left(7^{\sqrt{x}}-4\right)^2\cos^2 5x}$.

10. 1) $\begin{cases} y'_x = \dfrac{t\left(2-t^3\right)}{1-2t^3}, \\ x = \dfrac{3at}{1+t^3}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y'_x = \dfrac{1}{2}t, \\ x = \ln\left(1+t^2\right); \end{cases}$ 3) $y' = -\dfrac{1}{\sin^2(x+y)}$;

4) $y' = \dfrac{\sin y}{2\sin 2y - \sin y - x\cos y}$.

11. 1) $y = 2x - e$, $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}e$; 2) $y = -2x + \dfrac{3}{2}$; $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}$; 3) $y = -\dfrac{1}{e}x + 1$; $y = ex + 1$.

Лекція 16. Похідна та диференціал функції

16.1. Похідні вищих порядків.

16.2. Диференціал функції та його властивості.

16.3. Диференціали вищих порядків.

16.1. Похідні вищих порядків

Похідна n-го порядку функції $y = f(x)$

Розглянемо диференційовану функцію $y = f(x)$. Похідна цієї функції, тобто $y' = f'(x)$, теж є функцією змінної x, тому можна розглядати задачу знаходження похідної цієї функції. Якщо функція $y' = f'(x)$ є диференційованою, то її похідну називають *похідною другого порядку* функції $y = f(x)$ і позначають $y''(x)$ або $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. Отже, $y''(x) = \left(y'(x)\right)'$. Похідну від похідної другого порядку функції $y = f(x)$ називають її третьою похідною або *похідною третього порядку* та позначають $y'''(x)$. Таким чином, $y'''(x) = \left(y''(x)\right)'$. Аналогічно можна визначити похідну довільного n-го порядку як похідну від похідної $(n-1)$-го порядку. Для похідної n-го порядку використовують позначення $y^{(n)}(x)$ або $\dfrac{d^n y}{dx^n}$.

Означення. *Похідною* n*-го порядку* або n-ою похідною функції $y=f(x)$ називають похідну від похідної $(n-1)$-го порядку цієї функції, тобто

$$y^{(n)}(x)=\left(y^{(n-1)}(x)\right)'. \tag{16.1}$$

Похідні порядків, вищих, ніж перший, називають *похідними вищих порядків.*

Доведемо, що похідна n-го порядку функції $y=\sin x$ має вигляд $y^{(n)}=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$.

Скористаємось методом математичної індукції. Перевіримо істинність формули при $n=1$: $y'=(\sin x)'=\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$. Нехай формула є істинною при $n=k$: $y^{(k)}=\sin\left(x+\dfrac{k\pi}{2}\right)$. Доведемо, що звідси випливає її істинність при $n=k+1$, тобто $y^{(k+1)}=\sin\left(x+\dfrac{(k+1)\pi}{2}\right)$. Дійсно,

$$y^{(k+1)}=\left(y^{(k)}\right)'=\left(\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)\right)'=\cos\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=$$
$$=\sin\left(x+\frac{(k+1)\pi}{2}\right).$$

Отже, згідно з методом математичної індукції, $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$.

Наведемо формули для похідних n-го порядку деяких елементарних функцій.

1. $\left(x^m\right)^{(n)}=m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)x^{m-n}$. (16.2)

2. $\left(a^x\right)^{(n)}=a^x\cdot\ln^n a$. (16.3)

3. $\left(e^x\right)^{(n)} = e^x$. (16.4)

4. $\left(\sin x\right)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$. (16.5)

5. $\left(\cos x\right)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$. (16.6)

6. $\left(\ln x\right)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{x^n}$. (16.7)

Для знаходження похідної n-го порядку добутку функцій $u(x)$ та $v(x)$ використовують формулу Лейбніца:

$$\begin{aligned}(u\cdot v)^{(n)} &= u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \ldots \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \ldots + uv^{(n)}.\end{aligned} \tag{16.8}$$

Приклад. Знайти похідну $y^{(25)}$ функції $y = x^2 \sin x$.

Розв'язування. Застосуємо формулу Лейбніца (16.8). Для цього виберемо $u = \sin x$, $v = x^2$. $v' = 2x$, $v'' = 2$. При $k > 2$ $v^{(k)} = 0$. Тому маємо: $(uv)^{(25)} = u^{(25)}v + 25u^{(24)}v' + \frac{25\cdot 24}{2!}u^{(23)}v''$.

Враховуючи, що похідні $(\sin x)^{(23)} = \sin\left(x + \frac{23\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos x$ (за формулою (16.5)), $(\sin x)^{(24)} = (-\cos x)' = \sin x$, $(\sin x)^{(25)} = (\sin x)' = \cos x$, отримаємо:

$$y^{(25)} = \cos x \cdot x^2 + 50 \sin x \cdot x - 600 \cos x.$$

Похідні вищих порядків для неявно заданої функції

Нехай функція $y = y(x)$ задана у неявній формі у вигляді рівняння $F(x, y) = 0$. Диференціюючи це рівняння за змінною x, знаходимо з отриманої рівності першу похідну $y'(x)$. Щоб знайти другу похідну, потрібно продиференціювати за x першу похідну і в отримане співвідношення підставити знайдене перед цим значення $y'(x)$. Продовжуючи диференціювання, можна послідовно знайти похідні будь-якого порядку. Всі вони будуть виражені через незалежну змінну x та функцію y.

Обчислення похідної вищого порядку для параметрично заданої функції

Нехай функція $y(x)$ задана у параметричній формі рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, де параметр $t \in [\alpha; \beta]$. Якщо функції $x(t)$ та $y(t)$ мають перші похідні, причому $x'(t) \neq 0, t \in [\alpha; \beta]$, а $x(t)$ – строго монотонна функція, то першу похідну y'_x знаходять за формулою $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Якщо функції $x(t)$ та $y(t)$ мають похідні другого порядку, то можна знайти другу похідну від y по x:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{tt}}{\left(x'_t\right)^3}.$$

Аналогічно можна знайти похідну будь-якого порядку n, $n > 2$:

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)'_t \cdot \frac{1}{x'_t}. \qquad (16.9)$$

16.2. Диференціал функції та його властивості

Нехай функція $y = f(x)$ у точці x має відмінну від нуля похідну:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \neq 0.$$

Тоді у деякому околі точки x відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, де $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Тому приріст функції $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$. При цьому величина $\alpha \cdot \Delta x$ є нескінченно малою більш високого порядку, ніж $f'(x) \cdot \Delta x$ і нескінченно мала $\Delta y \sim f'(x) \cdot \Delta x$, тому величину $f'(x) \cdot \Delta x$ називають *головною частиною* приросту функції Δy.

Означення. *Диференціалом* dy функції $y = f(x)$ у точці x називають головну, лінійну відносно Δx, частину її приросту Δy, що дорівнює добутку похідної функції в цій точці на приріст аргументу:

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x . \tag{16.10}$$

Диференціал dy називають також *диференціалом першого порядку*.

Знайдемо диференціал незалежної змінної x, тобто диференціал функції $y = x$. Оскільки $y' = 1$, то $dy = dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$, тобто диференціал незалежної змінної дорівнює її приросту: $dx = \Delta x$, тобто формулу (16.10) можна записати у вигляді:

$$dy = f'(x) dx . \tag{16.11}$$

Таким чином, *диференціал функції дорівнює добутку її похідної на диференціал незалежної змінної*.

З формули (16.11) випливає, що $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$, тобто позначення похідної $\dfrac{dy}{dx}$ можна розглядати як відношення диференціалів dy та dx.

З геометричної точки зору диференціал функції $y = f(x)$ у точці x дорівнює приросту ординати дотичної до графіка функції у цій точці, коли змінна x отримує приріст Δx.

Основні формули, пов’язані з диференціалами, можна отримати, використовуючи зв’язок між диференціалом функції та її похідною $dy = y'(x) dx$ та відповідні формули для похідних.

Нехай $u(x)$ та $v(x)$ – диференційовані функції. Тоді виконуються наступні рівності:

1. $d(u + v) = du + dv$.

2. $d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du$.

3. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$.

Теорема. *Диференціал складеної функції дорівнює добутку похідної цієї функції по проміжному аргументу на диференціал цього проміжного аргументу.*

Доведення.

Нехай $y = f(u)$ і $u = \varphi(x)$ – диференційовані функції, що утворюють складену функцію $y = f(\varphi(x))$. Тоді $y'(x) = f'_u \cdot u'_x$, диференціал $dy = f'(x)dx = f'_u \cdot u'_x dx = f'_u \cdot du$.

Таким чином, $dy = f'_x dx = f'_u du$, тобто перший диференціал функції $y(x)$ визначається однією й тією ж формулою незалежно від того, чи є її аргумент незалежною змінною, чи функцією іншого аргументу. Цю властивість диференціала першого порядку називають *інваріантністю (незмінністю) форми першого диференціала*.

Застосування диференціала до наближених обчислень

Як вже зазначалося, приріст Δy функції $y = f(x)$ у точці x можна наближено замінити диференціалом dy у цій точці: $\Delta y \approx dy$. Підставивши сюди значення Δy і dy, отримаємо наближену формулу:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \qquad (16.12)$$

Абсолютна похибка величини $\Delta y - dy$ при $\Delta x \to 0$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж Δx, тому, що при $f'(x) \neq 0$ величини Δy і dy є еквівалентними нескінченно малими:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x)\Delta x + \alpha \cdot \Delta x}{f'(x)\Delta x} = 1.$$

Тут $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Можна довести, що абсолютна похибка формули (19.12) не перевищує величини $M \cdot (\Delta x)^2$, де M – максимальне значення $|f''(x)|$ при $x \in [x; x + \Delta x]$.

Приклад. Обчислити наближено $\operatorname{arctg} 1,01$.

Розв'язування. Маємо: $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $f'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$. При $x = 1$ і $\Delta x = 0,01$ за формулою (16.12) отримаємо

$$\operatorname{arctg}(1 + 0,01) \approx \operatorname{arctg} 1 + \frac{1}{1 + 1^2} \cdot 0,01 = \frac{\pi}{4} + 0,005 \approx 0,79.$$

16.3. Диференціали вищих порядків

Нехай $y = f(x)$ – диференційована функція незалежної змінної x. Тоді її диференціал $dy = f'(x)dx$ теж є функцією аргументу x і можна знайти диференціал цієї функції. Диференціал диференціала функції $y = f(x)$ називають її *другим диференціалом*, або *диференціалом другого порядку*. Його позначають d^2y або $d^2f(x)$.

Знайдемо вираз для d^2y.

$$d^2y = d(dy) = d\left(f'(x)dx\right) = \left(f'(x)dx\right)'dx = f''(x)dx^2.$$

Таким чином, отримали формулу:

$$d^2y = f''(x)dx^2. \qquad (16.13)$$

Аналогічно можна визначити диференціал третього поряду як диференціал диференціала другого порядку:

$$d^3y = d\left(d^2y\right) = d\left(f''(x)dx^2\right) = \left(f''(x)dx^2\right)'dx = f'''(x)dx^3.$$

Означення. *Диференціалом n-го порядку* називають диференціал диференціала $(n-1)$-го порядку:

$$d^ny = d\left(d^{n-1}y\right) = f^{(n)}(x)dx^n. \qquad (16.14)$$

З формули (16.14) випливає, що n-у похідну функції $y = f(x)$ можна записати у вигляді відношення її диференціала n-го порядку до n-го степеня диференціала незалежної змінної: $y^{(n)}(x) = \dfrac{d^ny}{dx^n}$.

Наведені вище формули для диференціалів вищих порядків є вірними, якщо x є незалежною змінною. Якщо ж змінна x є функцією незалежної змінної t, тобто $x = x(t)$, то

$$d^2y = d\left(f'(x)dx\right) = d\left(f'(x)\right)dx + f'(x)d(dx) = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x.$$

Таким чином, якщо у функції $y = f(x)$ змінна x є залежною змінною, тобто $x = x(t)$), то $d^2y \neq f''(x)dx^2$. Ми бачимо, що диференціали вищих порядків не мають властивості інваріантності форми.

Приклад. Знайти диференціал третього порядку функції $y = e^{5x}$, де x – незалежна змінна.

Розв'язування. Оскільки потрібно знайти диференціал третього порядку функції незалежної змінної, то можна використати формулу (16.14) при $n = 3$, тобто маємо: $d^3y = f'''(x)dx^3$. $f'''(x) = \left(e^{5x}\right)''' = 125e^{5x}$. Звідси випливає, що $d^3y = 125e^{5x}dx^3$.

Завдання для самоконтролю

1. Означити похідну n-ого порядку для функції $y = f(x)$.

2. Отримати формули n-ої похідної для однієї тригонометричної функції та функції $y = e^{kx}$.

3. Обчислення похідних вищих порядків для неявно та параметрично заданої функцій. Навести приклади.

4. Поняття диференціала функції, його обчислення та властивості.

5. Обчислення наближених значень функції із застосуванням диференціала.

6. Диференціали вищих порядків для різних способів задання функцій.

Лекція 17. Основні теореми диференціального числення

17.1. Диференціальні теореми про середні значення.

17.2. Правило Лопіталя.

17.3. Формула Тейлора.

17.1. Диференціальні теореми про середні значення

Теорема (теорема Ферма). *Нехай функція* $y = f(x)$ *є неперервною на інтервалі* $(a;b)$ *і набуває свого найбільшого або найменшого значення у деякій точці* $x = c \in (a;b)$. *Тоді, якщо у цій точці існує похідна* $f'(c)$, *то* $f'(c) = 0$.

Доведення. Для визначеності будемо вважати, що у точці $x = c$ функція $f(x)$ набуває свого найбільшого значення, тобто $f(x) \le f(c)$ $\forall x \in (a;b)$. Оскільки точка c є внутрішньою точкою інтервалу $(a;b)$, то приріст аргументу Δx може бути як від'ємним, так і додатним, а відповідний приріст функції у цій точці $\Delta y = f(c+\Delta x) - f(c)$ не може бути додатним. Оскільки $f(c+\Delta x) \le f(c)$, то $\Delta y \le 0$. При $\Delta x > 0$ отримуємо: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \le 0$, тому $f'_+(c) = \lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \le 0$.

Аналогічно, якщо $\Delta x < 0$, то $f'_-(c) = \lim\limits_{\Delta x \to 0-0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \ge 0$. За умовою, у точці c існує похідна $f'(c)$, тобто $f'_+(c) = f'_-(c) = f'(c)$.

Маємо: $f'(c) \le 0 \wedge f'(c) \ge 0 \Rightarrow f'(c) = 0$. Теорему доведено.

Геометричний зміст теореми Ферма полягає у тому, що у точці $x = c \in (a;b)$, де функція $y = f(x)$ набуває найбільшого чи найменшого значення на $(a;b)$, дотична до графіка цієї функції паралельна осі абсцис.

Теорема (теорема Ролля). *Якщо функція* $y = f(x)$ *є неперервною на відрізку* $[a;b]$, *диференційованою на проміжку* $(a;b)$ *і на кінцях відрізка набуває* *однакових значень* $f(a) = f(b)$, *то знайдеться хоча б одна точка* $c \in (a; b)$, *у якій* $f'(c) = 0$.

Доведення. Оскільки функція $f(x)$ є неперервною на $[a; b]$, то вона досягає на цьому відрізку свого найменшого значення m та найбільшого значення M. Якщо $m = M$, то на $[a; b]$ $f(x) = \text{const}$ і $f'(x) = 0$ у довільній точці цього проміжку.

Нехай $m \neq M$. Тоді хоча б одне із значень m чи M досягається функцією у внутрішній точці відкритого інтервалу $(a; b)$, тому що $f(a) = f(b)$. За теоремою Ферма похідна у цій точці дорівнюватиме нулю. Теорему доведено.

Отже, теорема Ролля стверджує, що на графіку функції, яка задовольняє умовам цієї теореми, знайдеться хоча б одна точка, дотична у якій паралельна осі Ox.

Якщо $f(a) = f(b) = 0$, то теорему Ролля можна сформулювати наступним чином: між двома коренями функції знаходиться хоча б один корінь її похідної.

Приклад. Довести, що рівняння $3x^3 + 15x - 8 = 0$ має лише один дійсний корінь.

Розв'язування. Оскільки задане рівняння – це рівняння третього степеня (непарного), то воно має хоча б один дійсний корінь. Доведемо, що дійсний корінь цього рівняння лише один. Допустимо, що існують два таких корені – x_1 та x_2, де $x_1 < x_2$. Тоді на відрізку $[x_1; x_2]$ функція $f(x) = 3x^3 + 15x - 8$ задовольняє всім умовам теореми Ролля: вона неперервна на цьому відрізку, диференційована у кожній його внутрішній точці та приймає на кінцях цього відрізка однакові значення (дорівнює нулю). Отже, у деякій точці $x_1 < c < x_2$ $f'(c) = 0$. Проте $f'(c) = 9x^2 + 15 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Отримане протиріччя доводить, що задане рівняння має єдиний дійсний корінь.

Теорема (теорема Коші). *Якщо функції* $f(x)$ *і* $\varphi(x)$ *неперервні на* $[a; b]$, *диференційовані у інтервалі* $(a; b)$, *причому* $\varphi'(x) \neq 0 \ \forall x \in [a; b]$, *то існує така точка* $c \in (a; b)$, *що*

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \qquad (17.1)$$

Доведення. Введемо допоміжну функцію

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\left[\varphi(x)-\varphi(a)\right].$$

Введена таким чином функція визначена у всіх точках $[a;b]$, оскільки $\varphi(b)\neq\varphi(a)$. У противному разі за теоремою Ролля знайшлася б така точка $c\in(a;b)$, у якій $\varphi'(c)=0$, що суперечить умові теореми.

Функція $F(x)$ задовольняє всі умови теореми Ролля: вона неперервна на $[a;b]$, диференційована у $(a;b)$ і $F(a)=F(b)$. Тому знайдеться така точка $c\in(a;b)$, що $F'(c)=0$ або

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(c)=0.$$

Звідси випливає рівність (17.1). Теорему доведено.

Теорема (теорема Лагранжа). *Якщо функція $f(x)$ є неперервною на $[a;b]$, диференційованою у $(a;b)$, то всередині цього інтервалу знайдеться хоча б одна точка $c\in(a;b)$, у якій виконується рівність:*

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a). \qquad (17.2)$$

Доведення. Теорему Лагранжа можна розглядати як окремий випадок теореми Коші. Дійсно, формулу (17.2) отримаємо, поклавши у формулі (17.1) $\varphi(x)=x$. Теорему доведено.

Формулу (17.2) називають формулою Лагранжа, або формулою скінченних приростів, оскільки вона виражає точне значення приросту функції $\Delta y=f(b)-f(a)$ через похідну у деякій проміжній точці $c\in(a;b)$ та скінченне значення приросту аргументу $\Delta x=b-a$. Відповідно, формулу (17.2) можна записати у вигляді: $\Delta y=f'(c)\cdot\Delta x$.

Розглянемо геометричний зміст теореми Лагранжа. Запишемо формулу (17.2) у вигляді:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

Ця рівність свідчить, що на графіку функції, яка задовольняє умовам теореми Лагранжа, знайдеться хоча б одна точка з абсцисою c, у якій дотична до графіка паралельна хорді, що сполучає точки $(a;\ f(a))$ та $(b;\ f(b))$.

Теорема Лагранжа має також механічну інтерпретацію. Якщо $s=s(t)$, $t\in[t_1;t_2]$ – закон руху матеріальної точки, то відношення $\dfrac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$ – це середня швидкість руху за проміжок часу $[t_1;t_2]$. Теорема Лагранжа стверджує, що в деякий момент часу $c\in(t_1;t_2)$ миттєва швидкість матеріальної точки неодмінно співпаде з її середньою швидкістю: $\dfrac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}=s'(c)$.

З теореми Лагранжа випливають наступні наслідки.

Наслідок 1. Якщо похідна функції дорівнює нулю на деякому проміжку, то ця функція є сталою на даному проміжку.

Наслідок 2. Якщо похідні двох функцій співпадають на деякому проміжку, то ці функції відрізняються між собою на сталу величину.

Теорему Лагранжа та її наслідки можна застосовувати при доведенні тотожностей та нерівностей.

Приклад. Довести, що $\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=2\operatorname{arctg}x$, $x\geq 0$.

Розв'язування. Розглянемо функцію $f(x)=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}-2\operatorname{arctg}x$. Ця функція визначена на всій числовій прямій, оскільки $\left|\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right|\leq 1$. Вона є також диференційовною у кожній точці своєї області визначення. Знайдемо похідну $f'(x)$:

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{-4x}{\left(1+x^2\right)^2} - \frac{2}{1+x^2} = \frac{4x}{2x\left(1+x^2\right)} - \frac{2}{1+x^2} = 0.$$

Отже, $f'(x) = 0,\ \forall x \geq 0$. Тому, за наслідком 1 з теореми Лагранжа, функція $f(x)$ є сталою при $x \geq 0$.

Знайдемо $f(1)$: $f(1) = \arccos 0 - 2\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{2} - 2 \cdot \frac{\pi}{4} = 0$.

Таким чином, $f(x) = 0$, тому $\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2} = 2\operatorname{arctg} x$.

Приклад. Довести нерівність $\operatorname{arctg}\beta - \operatorname{arctg}\alpha < \beta - \alpha,\ \beta > \alpha$.

Розв'язування. Функція $f(x) = \operatorname{arctg} x$ є визначеною та диференційованою на всій числовій прямій, у тому числі на довільному проміжку $(\alpha; \beta)$, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Застосуємо до неї теорему Лагранжа. Згідно з цією теоремою, існує така точка $c \in (\alpha; \beta)$, що

$$\operatorname{arctg}\beta - \operatorname{arctg}\alpha = \frac{1}{1+c^2}(\beta - \alpha).$$

Оскільки $0 < \frac{1}{1+c^2} < 1$ і $\beta - \alpha > 0$, то $\frac{1}{1+c^2}(\beta - \alpha) < \beta - \alpha$, тому виконується нерівність:

$$\operatorname{arctg}\beta - \operatorname{arctg}\alpha < \beta - \alpha.$$

17.2. Правило Лопіталя (розкриття невизначеностей)

Розглянемо спосіб обчислення границь, які потребують розкриття невизначеностей виду $\left(\frac{0}{0}\right)$ або $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, пов'язаний з застосуванням похідних.

Теорема (правило Лопіталя розкриття невизначеностей виду $\left(\frac{0}{0}\right)$). *Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$ є неперервними та диференційованими у околі* *точки* $x = x_0$ *і при цьому* $f(x_0) = g(x_0) = 0$, *а* $g'(x) \neq 0$ *у околі цієї точки. Якщо існує границя* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, *то існує* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, *причому*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l. \qquad (17.3)$$

Доведення. Застосуємо до функцій $f(x)$ та $g(x)$ теорему Коші для відрізка $[x_0; x]$, що належить околу точки x_0. Тоді $\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$, де точка $c \in (x_0; x)$. Оскільки $f(x_0) = g(x_0) = 0$, то $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$. При $x \to x_0$ $c \to c_0$, тому

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c \to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

Отже, отримали формулу (17.3). Теорему доведено.

Таким чином, ми довели, що границя відношення двох нескінченно малих дорівнює границі відношення їх похідних, якщо ця границя існує.

Зауважимо, що теорема справедлива і у тому випадку, коли функції $f(x)$ та $g(x)$ невизначені при $x = x_0$, але $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$. Ця теорема має зміст також при $x \to \infty$.

Приклад. Обчислити $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x - 1}{x \ln x}$.

Розв'язування. При підстановці у чисельник та знаменник дробу під знаком границі значення $x = 1$ отримуємо невизначеність виду $\left(\frac{0}{0}\right)$. Застосуємо до розкриття даної невизначеності правило Лопіталя:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x \ln x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)'}{(x \ln x)'} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\ln x + 1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Наведемо без доведення формулювання правила Лопіталя знаходження границь, що зводяться до розкриття невизначеності виду $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Теорема (правило Лопіталя розкриття невизначеностей виду $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$**.**
Нехай функції $f(x)$ *та* $g(x)$ *є неперервними та диференційованими у околі точки* x_0 *(можливо, окрім самої цієї точки), і у цьому околі* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$*, причому* $g'(x) \neq 0$*. Тоді, якщо існує границя* $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$*, то існує і границя* $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$*, причому*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l. \qquad (17.4)$$

Приклад. Обчислити $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\text{tg } 3x}{\text{tg } 5x}$.

Розв'язування. Оскільки $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}\pm 0} \text{tg } 3x = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}\pm 0} \text{tg } 5x = \mp\infty$, то дана границя зводиться до невизначеності виду $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, тому застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\text{tg } 3x}{\text{tg } 5x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\text{tg } 3x)'}{(\text{tg } 5x)'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{3/\cos^2 3x}{5/\cos^2 5x} = \frac{3}{5}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 5x}{\cos^2 3x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \frac{3}{5}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 10x}{1+\cos 6x} = \frac{3}{5}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\cos 10x)'}{(1+\cos 6x)'} = \frac{3}{5}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-10\sin 10x}{-6\sin 6x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{10\cos 10x}{6\cos 6x} = \frac{5}{3}.$$

До невизначеностей виду $\left(\frac{0}{0}\right)$ або $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, для розкриття яких можна застосувати правило Лопіталя, зводяться невизначеності видів $(0\cdot\infty)$, $(\infty-\infty)$, (1^∞), (∞^0), (0^0). Для цього застосовують тотожні перетворення та логарифмування.

17.3. Формула Тейлора

Нехай функція $y = f(x)$ у деякому околі точки $x = a$ має всі похідні до $(n+1)$-го порядку включно. Знайдемо многочлен $P_n(x)$, степінь якого не перевищує n, значення якого у точці $x = a$ дорівнює значенню функції $f(x)$ у цій точці, а значення його похідних до n-го порядку у точці $x = a$ дорівнюють відповідним значенням похідних у цій точці:

$$P_n(a) = f(a),\ P_n'(a) = f'(a),\ P_n''(a) = f''(a), \ldots,\ P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a). \quad (17.5)$$

Будемо шукати цей многочлен у вигляді многочлена за степенями $(x-a)$ з невизначеними коефіцієнтами:

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k. \quad (17.6)$$

Невизначені коефіцієнти c_0, c_1, c_2, …, c_n знайдемо так, щоб виконувались умови (17.5). Для цього, диференціюючи (17.6), знайдемо похідні від $P_n(x)$. Отримуємо:

$$P_n'(x) = c_1 + 2\cdot c_2\cdot(x-a) + 3\cdot c_3\cdot(x-a)^2 \ldots + n\cdot c_n\cdot(x-a)^{n-1};$$

$$P_n''(x) = 2\cdot c_2 + 3\cdot 2\cdot c_3\cdot(x-a) \ldots + n\cdot(n-1)\cdot c_n\cdot(x-a)^{n-2};$$

……………………………………………………………….

$$P_n^{(n)}(x) = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot \ldots \cdot 2\cdot 1\cdot c_n.$$

Підставивши у ліві та праві частини останніх рівностей та рівності (17.6) замість x значення a та прирівнявши їх згідно з (17.5) до значень $f(a)$, $f'(a)$, …, $f^{(n)}(a)$, отримаємо рівності: $f(a) = c_0$, $f'(a) = c_1$, $f''(a) = 2\cdot 1\cdot c_2$, $f'''(a) = 3\cdot 2\cdot 1\cdot c_3$, …., $f^{(n)}(a) = n!\cdot c_n$. Звідси знаходимо коефіцієнти шуканого многочлена:

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n. \quad (17.7)$$

Тут похідною нульового порядку вважають саму функцію.

Таким чином, шуканий многочлен (17.5) має вигляд:

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \qquad (17.8)$$

Нехай $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$. Звідси маємо

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+R_n(x). \qquad (17.9)$$

Формулу (17.9) називають *формулою Тейлора* для функції $f(x)$ у околі точки $x=a$, а многочлен $P_n(x)$, коефіцієнти якого визначаються за формулою (17.7) – *многочленом Тейлора*. Вираз $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$ називають *залишковим членом формули Тейлора.* Для значень x, при яких залишковий член є достатньо малим, многочлен $P_n(x)$ є наближенням функції $f(x)$. Таким чином, формула (17.9) дає можливість замінити функцію $f(x)$ многочленом Тейлора $P_n(x)$ з точністю, що дорівнює значенню залишкового члена $R_n(x)$.

Доведемо, що залишковий член формули Тейлора $R_n(x)$ можна представити у вигляді:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad (17.10)$$

де точка ξ знаходиться між точками x та a. Зафіксуємо довільне значення $x>a$ з околу точки a, де функція $f(x)$ диференційована $n+1$ разів. Позначимо через t величину, що змінюється на відрізку $[x_0;x]$, тобто $x_0\le t\le x$. Розглянемо функцію

$$F(t)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k-\frac{(x-t)^{n+1}R_n(x)}{(x-a)^{n+1}}. \qquad (17.11)$$

Ця функція задовольняє всі умови теореми Ролля, тому знайдеться точка $\xi\in(a;x)$, для якої $F'(\xi)=0$.

Диференціюючи (17.11) за змінною t, отримаємо:

$$F'(t)=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n+\frac{(n+1)(x-t)^n R_n(x)}{(x-a)^{n+1}}. \qquad (17.12)$$

Прийнявши у рівності (17.12) $t=\xi$, з рівності $F'(\xi)=0$ отримуємо:

$$-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n+\frac{(n+1)(x-\xi)^n R_n(x)}{(x-a)^{n+1}}=0.$$

Розв'язавши це рівняння відносно $R_n(x)$, отримаємо формулу (17.10). Формулу (17.10) для залишкового члена формули Тейлора називають *залишковим членом у формі Лагранжа*.

При $x\to a$ $R_n(x)$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж $(x-a)^n$, тому, використовуючи символи Ландау, ми можемо записати, що $R_n(x)=o\left((x-a)^n\right)$. Такий запис залишкового члена формули Тейлора називають *залишковим членом у формі Пеано*.

Величина $R_n(x)$ дорівнює величині похибки при заміні функції $f(x)$ її многочленом Тейлора. Формулу (17.10) можна використати для того, щоб оцінити величину такої похибки при фіксованих значеннях x, а також при $n\to\infty$. Многочлени Тейлора дають найкраще наближення функції $f(x)$ по відношенню до всіх многочленів заданого степеня у околі точки a, тобто використання для наближення функції многочлена Тейлора дає найменшу абсолютну похибку $|R_n(x)|$.

Формулу Тейлора (17.9) при $a=0$ називають *формулою Маклорена*. Таким чином, формула Маклорена для функції $f(x)$ має вигляд:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+R_n(x), \tag{17.13}$$

де $R_n(x)$ визначається за формулою:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}. \tag{17.14}$$

У формулі (17.14) точка ξ знаходиться між точками 0 та x, тобто $\xi=\theta x$, де $0<\theta<1$.

Формула (17.14) визначає залишковий член формули Маклорена у формі Лагранжа, цей залишковий член можна записати у формі Пеано:

$$R_n(x) = o(x^n). \qquad (17.15)$$

Формула (17.15) означає, що при заміні функції $f(x)$ многочленом Тейлора у околі точки $x=0$ похибка є нескінченно малою величиною більш високого порядку, ніж $|x^n|$.

Наведемо формулу Маклорена для наближення деяких основних елементарних функцій.

1. $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n). \qquad (17.16)$$

2. $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o(x^{2n}). \qquad (17.17)$$

3. $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}). \qquad (17.18)$$

4. $$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n +$$
$$+ o(x^n) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n). \qquad (17.19)$$

5. $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + o(x^n) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n). \qquad (17.20)$$

Приклад. Записати наближення функції $f(x) = \sqrt{1+x^2}\cos x$ за формулою Маклорена, обмежившись членами до x^4.

Розв'язування. Використаємо формули (17.19) та (17.18). Запишемо функцію $\sqrt{1+x^2}$, поклавши $\alpha = \frac{1}{2}$ та замінивши у формулі x на x^2:

$$\sqrt{1+x^2}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}x^4+o\left(x^4\right).$$

Замінивши $\cos x$ за відповідною формулою (20.18), отримуємо:

$$\sqrt{1+x^2}\cdot\cos x=\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}x^4+o\left(x^4\right)\right)\cdot\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^5\right)\right)=$$

$$=1-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{24}x^4+o\left(x^4\right)=1-\frac{1}{3}x^4+o\left(x^4\right).$$

Формулу Тейлора можна застосовувати для обчислення границь.

Приклад. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$.

Розв'язування. Замінимо у виразі під знаком границі e^x та e^{-x} за формулою (17.16) (вираз для e^{-x} отримуємо, замінивши у (17.16) x на $-x$). Маємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)+1-x+\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)-2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=1.$$

При обчисленні цієї границі ми використали те, що сума нескінченно малих вищого порядку, ніж нескінченно мала $\alpha(x)$ теж є нескінченно малою вищого порядку, ніж $\alpha(x)$, тобто $o\left(x^2\right)+o\left(x^2\right)=o\left(x^2\right)$. Крім того, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{o\left(x^2\right)}{x^2}=0$ за означенням $o\left(x^2\right)$.

Розглянемо приклад оцінки похибки при наближенні функції за допомогою многочлена Тейлора.

Приклад. Скільки потрібно взяти членів у формулі Маклорена для функції $f(x)=e^x$, щоб отримати многочлен, який наближує цю функцію на $[-1;1]$ з точністю до 0,001?

Розв'язування. Запишемо для даної функції залишковий член формули Маклорена у формі Лагранжа за формулою (17.14), де $\xi=\theta x$, $0<\theta<1$:

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(\theta x) \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = e^{\theta x} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Оскільки на $[-1;1]$ $e^{\theta x} \le e^1$, $|x| \le 1$, то отримуємо нерівність

$$|R_n(x)| = e^{\theta x} \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \le \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Виберемо n так, щоб $\frac{3}{(n+1)!} < 0{,}001$. Звідси $(n+1)! > 3000$, і $n > 6$. Отже, достатньо взяти 7 доданків у формулі Маклорена, щоб досягти заданої точності наближення.

Завдання для самоконтролю

1. Сформулювати основні теореми про середні значення.

2. Записати формулу скінченних приростів (теорема Лагранжа), пояснити її геометричний та механічний зміст.

3. Показати на прикладах застосування правила Лопіталя.

4. Записати формулу Тейлора та Маклорена в загальному вигляді.

5. Отримати формулу Маклорена для декількох елементарних функцій (на вибір).

Тема 3.2. Застосування диференціального числення для дослідження функцій і побудови їх графіків

Лекція 18. Застосування диференціального числення до дослідження функції

18.1. Застосування похідної до дослідження функцій на монотонність.

18.2. Знаходження екстремумів функцій.

18.3. Найбільше та найменше значення функції на відрізку.

18.4. Опуклість графіка функції. Точки перегину.

18.5. Знаходження асимптот графіка функції.

18.6. Загальна схема дослідження функції.

18.1. Застосування похідної до дослідження функцій на монотонність

Встановимо необхідні та достатні умови зростання та спадання функції.

Теорема (Необхідні умови монотонності функції). *Якщо диференційована на* $(a;b)$ *функція* $f(x)$ *зростає (спадає) на цьому проміжку, то* $f'(x) \geq 0$ *(* $f'(x) \leq 0$ *)* $\forall x \in (a;b)$.

Доведення. Нехай $f(x)$ зростає на $(a;b)$. Виберемо на цьому інтервалі довільним чином точки x та $x+\Delta x$. Тоді $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. При $\Delta x > 0$ маємо, що $x + \Delta x > x$, $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) > 0$. Тому $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} > 0$. При $\Delta x < 0$ для зростаючої функції $f(x+\Delta x) < f(x)$, $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) < 0$. І у цьому випадку відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} > 0$. Оскільки функція $f(x)$ має похідну у кожній точці $x \in (a;b)$, то $\exists \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \geq 0$, оскільки це границя додатної величини.

Аналогічно розглядається випадок, коли $f(x)$ спадає на $(a;b)$. У цьому випадку отримуємо, що $f'(x) \le 0$. Теорему доведено.

З геометричної точки зору теорема означає, що дотичні до графіка зростаючої диференційованої функції утворюють гострий кут з додатним напрямом осі Ox або ж у деяких точках вони паралельні цій осі. Для спадної функції цей кут є тупим, або дотична паралельна Ox.

Теорема (Достатні умови монотонності функції). *Якщо функція* $f(x)$ *диференційована на проміжку* $(a;b)$ *і* $f'(x) > 0$ *(* $f'(x) < 0$ *)* $\forall x \in (a;b)$*, то ця функція зростає (спадає) на* $(a;b)$.

Доведення. Нехай $f'(x) > 0$ на $(a;b)$. Виберемо точки x_1 та x_2 з $(a;b)$ так, що $x_1 < x_2$. Застосуємо до відрізка $[x_1; x_2]$ теорему Лагранжа:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

За умовою, $f'(c) > 0$, $x_2 - x_1 > 0$, тому $f(x_2) - f(x_1) > 0$ і $f(x)$ зростає. Теорему доведено.

Аналогічно можна довести, що у випадку, коли $f'(x) < 0$ $\forall x \in (a;b)$, то функція $f(x)$ спадає на цьому проміжку.

Означення. Точки, у яких похідна функції дорівнює нулю, називають її *стаціонарними точками*. Точки, у яких похідна функції дорівнює нулю, або не існує, називають її *критичними точками*.

Розглянуті теореми дозволяють досліджувати функції на монотонність. З них випливає, що інтервали монотонності можуть відділятися один від одного критичними точками.

Щоб знайти інтервали монотонності функції $f(x)$, треба:

1) знайти область визначення функції;
2) знайти похідну даної функції;
3) з рівняння $f'(x) = 0$ та з умови, що $f'(x)$ не існує, знайти критичні точки функції;

4) розділити критичними точками область визначення на інтервали, і у кожному з них визначити знак похідної, на інтервалах, де похідна додатна, функція зростає, а де від'ємна – спадає.

Приклад 1. Дослідити на монотонність функцію $f(x) = x^3 - 3x - 4$.

Розв'язування. Задана функція є визначеною та диференційованою на всій числовій прямій. Для визначення проміжків її зростання та спадання знайдемо $f'(x)$: $f'(x) = 3x^2 - 3$. Ми бачимо, що похідна існує в усіх точках числової прямої. Критичні точки функції, якщо вони існують – це її стаціонарні точки. Для їх визначення знайдемо корені рівняння $f'(x) = 0$, тобто $3x^2 - 3 = 0$. Це значення ± 1, вони є критичними точками даної функції. Позначимо їх на числовій осі. Отримуємо інтервали $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ та $(1; +\infty)$. Визначимо знак $f'(x)$ на цих інтервалах. Безпосередньою підстановкою чисел, взятих з цих інтервалів впевнюємося, що на $(-\infty; -1)$ та $(1; +\infty)$ $f'(x) > 0$, тому тут функція зростає. На $(-1; 1)$ $f'(x) < 0$, на цьому проміжку $f(x)$ є спадною.

Приклад 2. Знайти інтервали монотонності функції $y = x\ln x + 3x$.

Розв'язування. Задана функція визначена на проміжку $(0; +\infty)$. Знаходимо її похідну: $y' = \ln x + 4$. Знаходимо критичні точки даної функції: $\ln x + 4 = 0 \Rightarrow \ln x = -4 \Rightarrow x = e^{-4}$. Інших критичних точок функція не має, оскільки її похідна існує на всій області її визначення. Розбиваємо область визначення функції – промінь $(0; +\infty)$ точкою $x = e^{-4}$ на інтервали $(0; e^{-4})$ та $(e^{-4}; +\infty)$. Встановлюємо знак похідної на кожному з цих інтервалів, для чого визначаємо знак похідної у довільній внутрішній точці кожного інтервалу. Отримуємо, що $\forall x \in (0; e^{-4})$: $f'(x) < 0$, отже, тут функція спадає. На проміжку $(e^{-4}; +\infty)$: $f'(x) > 0$, тобто $(e^{-4}; +\infty)$ – проміжок зростання функції.

Приклад 3. Знайти інтервали монотонності функції $f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} - x^2$.

Розв'язування. Задана функція визначена та неперервна на всій числовій осі. Знайдемо її похідну: $f'(x)=2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-x\right)$. Стаціонарні точки функції знаходимо з рівняння $f'(x)=0$. Отримуємо корені цього рівняння $x_{1,2}=\pm 1$. Крім того, у точці $x=0$ похідна є нескінченною (знаменник дробу дорівнює нулю). Отже, маємо три критичні точки: $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$. Наносимо їх на числову пряму та отримуємо 4 інтервали: $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$, $(0;1)$, $(1;+\infty)$. Похідна $f'(x)>0$ на $(-\infty;-1)$ та $(0;1)$, тут функція монотонно зростає. На інтервалах $(-1;0)$ та $(1;+\infty)$ $f'(x)<0$ і, відповідно, функція $f(x)$ спадає на цих проміжках.

18.2. Знаходження екстремумів функцій

Означення. Точку x_0 називають *точкою локального максимуму (мінімуму)* функції $f(x)$, якщо існує такий окіл $0<|x-x_0|<\delta$ точки x_0, який належить області визначення функції $f(x)$, що для всіх значень x з цього околу виконана нерівність $f(x)<f(x_0)$ ($f(x)>f(x_0)$).

Означення. Точки локального максимуму та локального мінімуму називають *точками локального екстремуму*. Значення функції $f(x)$ у цих точках називають *локальними екстремумами* цієї функції (локальними мінімумами чи локальними максимумами).

Означення. Найбільше значення функції у її області визначення називають *абсолютним або глобальним максимумом*, найменше значення – відповідно *абсолютним або глобальним мінімумом*.

Якщо функція $f(x)$ визначена на відрізку, то локальних екстремумів вона може досягати лише у внутрішніх точках цього відрізка, а абсолютний мінімум чи максимум може досягатися також на кінцях цього відрізка.

Розглянемо умови існування локального мінімуму.

Теорема (Необхідна умова локального екстремуму). *Якщо функція* $f(x)$ *має у точці* x_0 *локальний екстремум та диференційована у цій точці, то* $f'(x_0)=0$.

Доведення. Оскільки за умовою точка x_0 є точкою локального екстремуму, то існує проміжок $(x_0-\delta; x_0+\delta)$, у якому значення $f(x_0)$ є найбільшим або найменшим. Тоді за теоремою Ферма $f'(x_0)=0$. Теорему доведено.

Умова $f'(x_0)=0$ є необхідною, проте недостатньою для того, щоб диференційована у точці x_0 функція мала у цій точці екстремум. Наприклад, для функції $f(x)=x^3$ похідна у точці $x=0$ $f'(0)=3\cdot 0^2=0$, проте при $x=0$ екстремум відсутній. Крім того, існують функції, що не мають похідної у точках екстремуму. Наприклад, функція $f(x)=|x|$ має мінімум у точці $x=0$, проте не має похідної у цій точці. При цьому, не кожна точка, у якій функція не має похідної, є її точкою екстремуму.

Можливими точками екстремуму є її критичні точки. Розглянемо критерії, що дають змогу з множини критичних точок вибрати точки максимуму та мінімуму.

Теорема (Перша достатня умова локального екстремуму). *Нехай* x_0 *– критична точка функції* $f(x)$*, неперервної у цій точці, і нехай існує окіл* $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ *точки* x_0*, у якому функція має похідну* $f'(x)$*, можливо, крім самої точки* x_0*, тоді:*

1) якщо у інтервалі $(x_0-\delta; x_0)$ *похідна* $f'(x)>0$*, а у інтервалі* $(x_0; x_0+\delta)$ $f'(x)<0$*, то* x_0 *є точкою локального максимуму функції* $f(x)$*;*

2) якщо у інтервалі $(x_0-\delta; x_0)$ *похідна* $f'(x)<0$*, а у інтервалі* $(x_0; x_0+\delta)$ $f'(x)>0$*, то* x_0 *є точкою локального мінімуму функції* $f(x)$*;*

3) *якщо у обох інтервалах* $(x_0-\delta; x_0)$ *і* $(x_0; x_0+\delta)$ *похідна* $f'(x)$ *має той самий знак, то* x_0 *не є точкою екстремуму функції* $f(x)$.

Доведення. Нехай для деякого $\delta > 0$ виконуються умови: $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0)$ $f'(x) > 0$, а $\forall x \in (x_0; x_0 + \delta)$ $f'(x) < 0$. Тоді на інтервалі $(x_0 - \delta; x_0)$ функція $f(x)$ зростає і $f(x) < f(x_0)$ для всіх x з цього інтервалу, а на $(x_0; x_0 + \delta)$ функція спадає і $f(x) < f(x_0)$ при $x \in (x_0; x_0 + \delta)$. Отже, існує окіл $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки x_0, такий, що для довільного $x \neq x_0$ з цього околу виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$, тобто x_0 – точка локального максимуму функції $f(x)$. Випадки 2) та 3) доводяться аналогічно.

З теорем випливає наступне правило дослідження функції на екстремум. Щоб знайти локальні екстремуми функції $f(x)$, треба:

1) Знайти область допустимих значень функції;

2) знайти критичні точки функції $f(x)$;

3) відзначити їх у області визначення функції;

4) дослідити знак похідної на кожному з інтервалів, на які розбивається область визначення критичними точками;

5) за зміною знаку $f'(x)$ при переході через критичні точки зліва направо визначити точки максимумів та мінімумів і обчислити значення функції у цих точках. Результати дослідження доцільно звести у таблицю.

Приклад 4. Дослідити на екстремум функцію $f(x) = \dfrac{3}{4}x^4 - x^3 - 9x^2 + 7$.

Розв'язування. Задана функція визначена та диференційована на всій числовій прямій, тому її критичними точками є лише стаціонарні точки – корені похідної $f'(x) = 3x^3 - 3x^2 - 18x$. З рівняння $f'(x) = 3x^3 - 3x^2 - 18x = 0$ або $3x\left(x^2 - x - 6\right) = 0$ знаходимо ці точки: $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$. Нанесемо їх на числову пряму. Отримуємо інтервали $(-\infty; -2)$, $(-2; 0)$, $(0; 3)$ та $(3; +\infty)$. Визначимо знак похідної на кожному з цих інтервалів. Для цього виберемо всередині кожного з них довільним чином внутрішню точку і підставимо її у вираз для похідної. $f'(-3) = 3(-3)^3 - 3(-3)^2 - 18 \cdot (-3) < 0$, отже на інтервалі $(-\infty; -2)$ $f'(x) < 0$. $f'(-1) = 3(-1)^3 - 3(-1)^2 - 18 \cdot (-1) > 0$, на $(-2; 0)$ $f'(x) > 0$.

При $x=1$ $f'(1)=3\cdot 1^3-3\cdot 1^2-18\cdot 1<0$, на $(0;3)$ $f'(x)<0$. Якщо $x=4$, то похідна $f'(4)=3\cdot 4^3-3\cdot 4^2-18\cdot 4>0$, на $(3;+\infty)$ $f'(x)>0$.

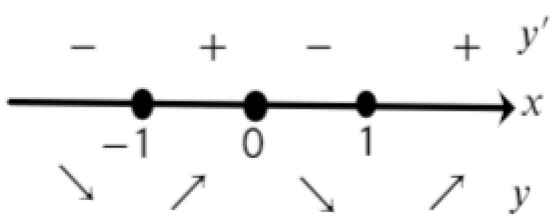
При переході через критичну точку $x_1=-2$ похідна змінює свій знак з мінуса на плюс, тому це точка локального мінімуму, $f(-2)=-9$. Знак похідної змінюється з плюса на мінус при переході через точку $x_2=0$, це точка локального максимуму і $f(0)=7$. Точка $x=3$ – це точка локального мінімуму, оскільки при переході через неї похідна змінює знак з мінуса на плюс, мінімум функції у цій точці $f(3)=-\dfrac{161}{4}$.

Приклад 5. Знайти екстремуми функції $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)^2}$.

Розв'язування. Задана функція визначена на всій числовій прямій. Знайдемо похідну $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}.$$

У точках $x=\pm 1$ похідна не існує. Коренем рівняння $f'(x)=0$ є $x=0$. Отже, критичними точками функції $f(x)$ є $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$. Подальше дослідження дає, що задана функція має точки локального мінімуму $x=\pm 1$, $f(\pm 1)=\sqrt[3]{4}$. У цих точках похідна функції не існує. Стаціонарна точка $x=0$ є точкою локального максимуму, $f(0)=2$ (рис. 18.1)



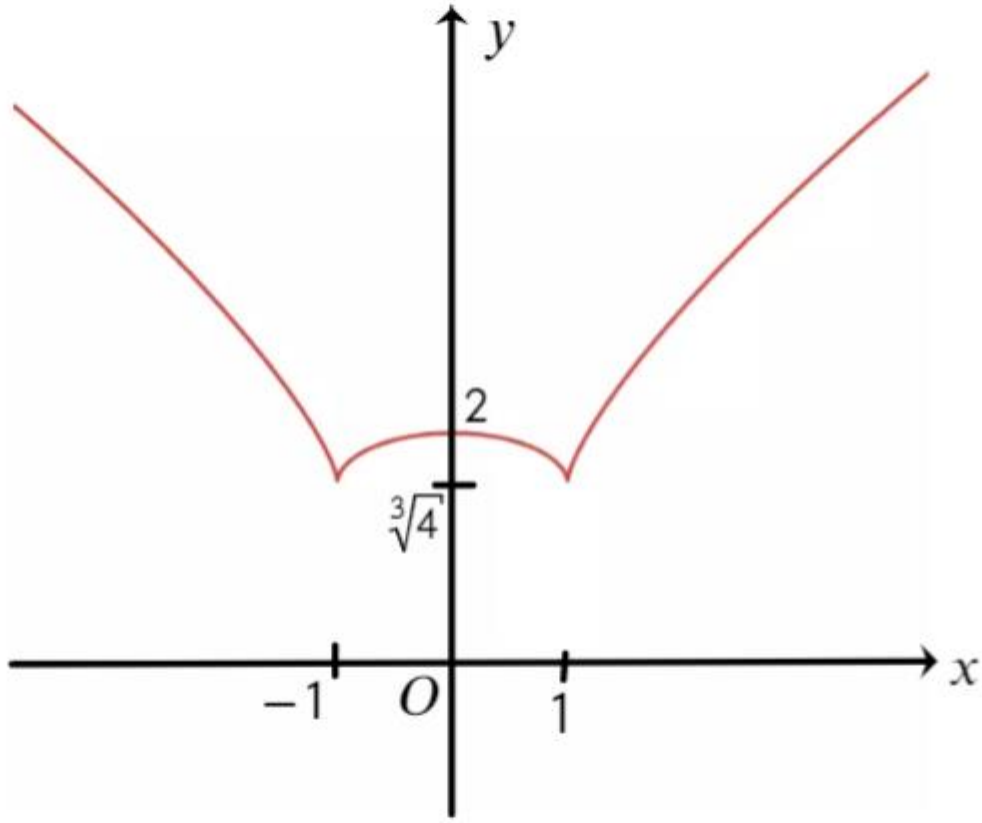


Рис. 18.1. Вигляд функції та її екстремума

Приклад 6. Дослідити на екстремум функцію $f\left(x\right)=x+\frac{1}{x}$.

Розв'язування. Функція визначене при всіх дійсних $x \neq 0$. Її похідна має вигляд: $f'\left(x\right)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$. Вона визначена на всій області визначення функції, множині $\left(-\infty;0\right)\cup\left(0;+\infty\right)$. Знайдемо стаціонарні точки:

$$f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1.$$

Нанесемо знайдені у стаціонарні точки на область визначення функції. Отримаємо проміжки $\left(-\infty;-1\right)$, $\left(-1;0\right)$, $\left(0;1\right)$ та $\left(1;+\infty\right)$. Результати подальшого дослідження представимо у наступній таблиці.

x	$\left(-\infty;-1\right)$	-1	$\left(-1;0\right)$	0	$\left(0;1\right)$	1	$\left(1;+\infty\right)$
$f'\left(x\right)$	+	0	–	-	–	0	+
$f\left(x\right)$	$\nearrow$	-2 max	$\searrow$	-	$\searrow$	2 min	$\nearrow$

Отже, точка $x=-1$ є точкою локального максимуму, $f(-1)=-2$, у точці $x=1$ маємо локальний мінімум, $f(1)=2$. Графік функції зображено на рис. 18.2.

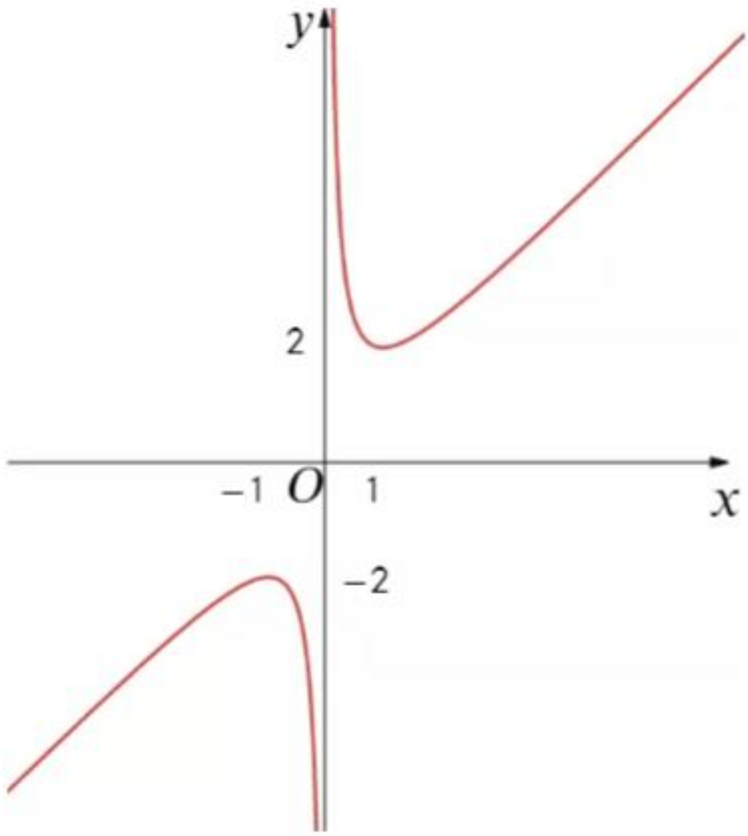


Рис. 18.2. Графік функції

У випадках, коли обчислення другої похідної функції є простішим, ніж дослідження знаків її першої похідної, для дослідження функції на екстремум доцільно використовувати другу достатню умову.

Теорема (Друга достатня умова локального екстремуму). *Нехай* x_0 *є стаціонарною точкою функції* $f(x)$, *тобто* $f'(x_0)=0$, *і у околі цієї точки існує неперервна друга похідна* $f''(x)$, *причому* $f''(x_0)\neq 0$. *Якщо при цьому* $f''(x_0)>0$, *то точка* x_0 *є точкою локального мінімуму, якщо* $f''(x_0)<0$, *то* x_0 *– точка локального максимуму.*

Розглянемо приклад застосування цієї теореми.

Приклад 7. Знайти точки екстремуму функції $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3}{2}x^2+2x-3$.

Розв'язування. Областю визначення даної функції є вся числова пряма. Похідна $f'(x)=x^2-3x+2$ має корені $x_1=1$ та $x_2=2$. Знайдемо другу похідну заданої функції: $f''(x)=2x-3$. У точці $x_1=1$ $f''(1)=2\cdot1-3<0$, тому $x=1$ – точка локального максимуму, оскільки $f''(2)=2\cdot2-3>0$, то точка $x=2$ – точка локального мінімуму.

Приклад 8. Дослідити на екстремум функцію $f(x)=2\sin x+\cos 2x$.

Розв'язування. Функція $f(x)$ визначена на всій числовій прямій та періодична з періодом 2π, тому при дослідженні обмежимось відрізком довжиною у період, наприклад, $[0;2\pi]$. Знайдемо першу похідну:

$$f'(x)=2\cos x-2\sin 2x.$$

Знайдемо стаціонарні точки, що належать проміжку $[0;2\pi]$.

$$2\cos x-2\sin 2x=0\Leftrightarrow 2\cos x\cdot(1-2\sin x)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0;\\ \sin x=\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+n\pi\vee x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi, n\in Z, k\in Z.$$

Коренями цього рівняння, що належать відрізку $[0;2\pi]$, є значення $x_1=\dfrac{\pi}{6}$, $x_2=\dfrac{\pi}{2}$, $x_3=\dfrac{5\pi}{6}$, $x_4=\dfrac{3\pi}{2}$. З'ясуємо характер знайдених стаціонарних точок. Для цього знайдемо $f''(x)$: $f''(x)=-2\sin x-4\cos 2x$. Значення другої похідної $f''(x)$ у стаціонарних точках дорівнюють:

$$f''\left(\frac{\pi}{6}\right)=-2\sin\frac{\pi}{6}-4\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{6}\right)=-1-2<0,$$

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2\sin\frac{\pi}{2}-4\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=-2+4>0,$$

$$f''\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-2\sin\frac{5\pi}{6}-4\cos\left(2\cdot\frac{5\pi}{6}\right)=-1-2<0,$$

$$f''\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-2\sin\frac{3\pi}{2}-4\cos\left(2\cdot\frac{3\pi}{2}\right)=2+4>0.$$

Таким чином, на відрізку $\left[0; 2\pi\right]$ точками локального екстремуму є $x_1 = \frac{\pi}{6}$ та $x_3 = \frac{5\pi}{6}$ – точки локального максимуму, $x_2 = \frac{\pi}{2}$ та $x_4 = \frac{3\pi}{2}$ – точки локального мінімуму. Отже, точками екстремуму функції $f\left(x\right)$ на числовій прямій з врахуванням періодичності функції є точки $x_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in Z$ – точки локального мінімуму, а точки $x_k = \left(-1\right)^k \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in Z$, є точками локального максимуму.

Загалом дослідження функції на екстремум за другою достатньою умовою є простішим, ніж за першою, проте її не можна застосовувати у випадках, коли у критичних точках друга похідна не існує, або дорівнює нулю. Узагальненням теореми є третя достатня умова локального екстремуму, яку використовують для стаціонарних точок, у яких $f''\left(x\right) = 0$.

Теорема (Третя достатня умова локального екстремуму). *Нехай у околі стаціонарної точки x_0 існує неперервна похідна $f^{(n)}\left(x\right)$, причому $f^{(n)}\left(x_0\right) \neq 0$, а всі похідні до $\left(n-1\right)$-го порядку включно дорівнюють нулю. Тоді:*

1) *якщо n – парне і $f^{(n)}\left(x_0\right) < 0$, то $f\left(x\right)$ має у точці x_0 локальний максимум;*

2) *якщо n – парне і $f^{(n)}\left(x_0\right) > 0$, то $f\left(x\right)$ має у точці x_0 локальний мінімум;*

3) *якщо n – непарне, то $f\left(x\right)$ у точці x_0 екстремуму не має.*

Доведення. Використаємо формулу Тейлора для функції $f\left(x\right)$ у околі точки x_0. Оскільки всі похідні до $\left(n-1\right)$-го порядку включно у цій точці дорівнюють нулю, отримуємо, що $f\left(x\right) - f\left(x_0\right) = \frac{f^{(n)}\left(\xi\right)}{n!}\left(x - x_0\right)^n$, де точка ξ знаходиться між x та x_0. Оскільки похідна $f^{(n)}\left(x\right)$ є неперервною, то існує деякий δ-окіл точки x_0, у якому числа $f^{(n)}\left(x_0\right)$ та $f^{(n)}\left(\xi\right)$ мають однакові знаки.

Тому залишковий член $\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$ матиме знак $f^{(n)}(x_0)$, як при $x<x_0$, так і при $x>x_0$, якщо число n – парне, і набуватиме значень, протилежних за знаком, якщо n – непарне.

Таким чином, при парному n з нерівності $f^{(n)}(x_0)<0$ випливає нерівність $f(x)-f(x_0)<0$ для довільного x з δ-околу точки x_0, тобто x_0 – точка локального максимуму, аналогічно для парного n з нерівності $f^{(n)}(x_0)>0$ випливає, що x_0 – точка локального мінімуму функції $f(x)$. При непарному n різниця $f(x)-f(x_0)$ має різні знаки на проміжках $(x_0-\delta;x_0)$ та $(x_0;x_0+\delta)$, тому x_0 у цьому випадку не є точкою екстремуму. Теорему доведено.

Теорема є окремим випадком попередньої теореми при $n=2$.

Приклад 9. Дослідити на екстремум у точці $x_0=0$ функцію $f(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x$.

Розв'язування. Точка $x_0=0$ є стаціонарною точкою заданої функції, оскільки $f'(x)=e^x-e^{-x}-2\sin x$, $f'(0)=0$. Знайдемо похідні вищих порядків функції $f(x)$ у точці $x_0=0$:

$$f''(x)=e^x+e^{-x}-2\cos x,\ f''(0)=0,$$

$$f'''(x)=e^x-e^{-x}+2\sin x,\ f'''(0)=0,$$

$$f^{(4)}(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x,\ f^{(4)}(0)=4>0.$$

Оскільки $n=4$ – парне і $f^{(4)}(0)>0$, то точка $x_0=0$ є точкою локального мінімуму і при цьому локальний мінімум функції $f(x)$ у цій точці $f(0)=4$.

18.3. Найбільше та найменше значення функції на відрізку

Нехай функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a;b]$. Тоді вона повинна досягати на цьому відрізку своїх найбільшого та найменшого значень, тобто абсолютних екстремумів $f(x)$ на цьому відрізку. Будемо позначати їх відповідно $M=\max\limits_{[a;\,b]} f(x)$ та $m=\min\limits_{[a;\,b]} f(x)$.

Точки, у яких досягається найбільше та найменше значення функції на відрізку можуть бути кінцями цього відрізка, або його внутрішніми точками. Якщо точка x_0, у якій досягається абсолютний екстремум, належить $(a;b)$, то таку точку потрібно шукати серед критичних точок даної функції.

Отже, щоб знайти найбільше та найменше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$, потрібно:

1) знайти критичні точки цієї функції, що належать інтервалу $(a;b)$;
2) обчислити значення функції у знайдених критичних точках та на кінцях відрізка – точках $x=a$ та $x=b$;
3) вибрати серед них найбільше та найменше значення.

Якщо функція неперервна у інтервалі $(a;b)$, то вона може й не мати абсолютних екстремумів у цьому інтервалі. Про їх наявність роблять висновок на основі дослідження поведінки функції на кінцях інтервалу (знаходження границь $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ та $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$) та значень функції у критичних точках, що належать $(a;b)$.

Приклад 10. Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x)=x^4-8x^2$ на відрізку $[-1;3]$.

Розв'язування. Знайдемо критичні точки даної функції. Її похідна $f'(x)=4x^3-16x=4x\left(x^2-4\right)$ має корені $x_1=-2$, $x_2=0$ та $x_3=2$. На інтервалі $(-1;3)$ знаходяться критичні точки $x=0$ та $x=2$. Обчислимо значення функції у цих точках: $f(2)=-16$, $f(0)=0$. На кінцях відрізка $[-1;3]$ маємо $f(-1)=-7$, $f(3)=9$. Вибравши серед знайдених значень функції найбільше та найменше, остаточно визначаємо, що $M=\max\limits_{[-1;\,3]} f(x)=f(3)=9$, $m=\min\limits_{[-1;\,3]} f(x)=f(2)=-16$.

18.4. Опуклість графіка функції. Точки перегину

Означення. Графік диференційованої на $(a;b)$ функції $y=f(x)$ називають *опуклим вниз* на цьому інтервалі, якщо він розташований вище будь-якої дотичної до цього графіка на $(a;b)$.

Означення. Графік диференційованої на $(a;b)$ функції $y=f(x)$ називають *опуклим вгору* на цьому інтервалі, якщо він розташований нижче будь-якої дотичної до цього графіка на $(a;b)$.

Означення. Точку на графіку функції $y=f(x)$, що відокремлює його частини з різною опуклістю, називають *точкою перегину*.

Інтервали, на яких графік функції опуклий вгору та опуклий вниз знаходять з допомогою наступної теореми.

Теорема. *Якщо для функції $y=f(x)$ у всіх точках інтервалу $(a;b)$ друга похідна $f''(x)<0$, то графік функції на цьому інтервалі випуклий вгору. Якщо ж $f''(x)>0$ на $(a;b)$, то графік функції опуклий вниз.*

Доведення. Нехай $\forall x\in(a;b)\ f''(x)<0$. Виберемо на графіку функції $y=f(x)$ довільну точку M з абсцисою $x_0\in(a;b)$ і проведемо через цю точку дотичну. Рівняння цієї дотичної матиме вигляд: $\tilde{y}-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$, де $\tilde{y}-$ значення y на дотичній. Звідси $\tilde{y}=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. Тоді отримуємо:

$$y-\tilde{y}=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0). \qquad (18.1)$$

За теоремою Лагранжа $f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0)$, де точка c знаходиться між x та x_0. Тому рівність (18.1) можна записати у вигляді:

$$y-\tilde{y}=f'(c)(x-x_0)-f'(x_0)(x-x_0)=\left(f'(c)-f'(x_0)\right)(x-x_0). \qquad (18.2)$$

До різниці $f'(c)-f'(x_0)$ у правій частині рівності (18.2) знову застосуємо теорему Лагранжа. Отримаємо: $f'(c)-f'(x_0)=f''(c_1)(x-x_0)$, де точка c_1 розташована між x_0 та c. Отже, маємо:

$$y-\tilde{y}=f''(c_1)(c-x_0)(x-x_0). \qquad (18.3)$$

Розглянемо можливі випадки розташування точок x_0, x, c_1, c. Можливі два таких випадки.

Нехай $x_0 < c_1 < c < x$. Тоді $c - x_0 > 0$, $x - x_0 > 0$. При $f''(c_1) < 0$ отримуємо, що $y - \tilde{y} < 0$. При $x < c < c_1 < x_0$ маємо $x - x_0 < 0$, $c - x_0 < 0$. Якщо $f''(c_1) < 0$, то знову отримуємо $y - \tilde{y} < 0$.

Отже, у обох випадках значення y на графіку функції менше, ніж відповідне значення $\tilde{y}$ на дотичній, тобто графік функції $y = f(x)$ $\forall x \in (a; b)$ розташований нижче дотичної до графіка цієї функції, тобто цей графік опуклий вгору. Аналогічно можна довести, що при $f''(x) > 0$ графік функції опуклий вниз. Теорему доведено.

Для знаходження точок перегину графіка функції використовують наступну теорему.

Теорема (Достатня умова існування точок перегину). *Нехай* x_0 *– точка, у якій* $f''(x)$ *дорівнює нулю, або не існує. Якщо при переході через цю точку* $f''(x)$ *змінює свій знак, то точка графіка функції* $y = f(x)$ *з абсцисою* x_0 *є точкою перегину.*

Доведення. Нехай $f''(x) < 0$ при $x < x_0$ і $f''(x) > 0$ при $x > x_0$. Це означає, що зліва від точки з абсцисою x_0 графік функції опуклий вгору, а справа від неї – опуклий вниз, тобто точка $(x_0; f(x_0))$ графіка функції є точкою перегину. Аналогічно установлюємо, що коли $f''(x) > 0$ при $x < x_0$ та $f''(x) < 0$ при $x > x_0$, то $(x_0; f(x_0))$ – точка перегину графіка функції. Теорему доведено.

Приклад 11. Дослідити на опуклість та визначити точки перегину графіка функції $y = x^5 - x + 2$.

Розв'язування. Задана функція визначена на всій числовій прямій. Знайдемо її другу похідну. $y'(x) = 5x^4 - 1$, $y''(x) = 20x^3$. Друга похідна існує у всіх точках числової прямої. З рівняння $y'' = 0$ знаходимо $x = 0$. При $x < 0$ маємо

$y''<0$, графік функції опуклий вгору. Для $x>0$ $y''>0$, тому при $x>0$ графік опуклий вниз. Точка з абсцисою $x=0$ є точкою перегину, її ордината $y(0)=2$.

18.5. Знаходження асимптот графіка функції

Означення. *Асимптотою* кривої називають пряму, відстань від якої від точки, що лежить на кривій, прямує до нуля при необмеженому віддаленні цієї точки по кривій від початку координат.

Асимптоти можуть бути вертикальними, горизонтальними та похилими.

Пряма $x=a$ є *вертикальною асимптотою* графіка функції $y=f(x)$, якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$ або $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$. Для відшукання вертикальних асимптот потрібно знайти такі значення x, поблизу яких $|f(x)|$ необмежено зростає. Звичайно це точки розриву другого роду функції $y=f(x)$. Наприклад, крива $y=\dfrac{4}{x-3}$ має вертикальну асимптоту – пряму $x=3$, оскільки $\lim\limits_{x\to 3-0}\dfrac{4}{x-3}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 3+0}\dfrac{4}{x-3}=+\infty$.

Рівняння *похилої асимптоти* будемо шукати у вигляді $y=kx+b$. Нехай $M(x,y)$ – довільна точка кривої $y=f(x)$. За формулою відстані від точки до прямої отримаємо відстань точки M до прямої $kx+b-y=0$:

$$d=\frac{|kx+b-y|}{\sqrt{k^2+1}}.$$

При $x\to\infty$ точка M необмежено віддаляється від початку координат, при цьому $d\to 0$, якщо $\lim\limits_{x\to\infty}(kx+b-y)=0$. Тоді $y=kx+b+\alpha(x)$, де $\alpha(x)\to 0$ при $x\to\infty$. Тоді границя відношення $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(k+\dfrac{b}{x}+\dfrac{\alpha(x)}{x}\right)=k$. Оскільки для точки M $y=f(x)$, то отримали формулу для знаходження кутового коефіцієнта k похилої асимптоти у вигляді:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}. \tag{18.4}$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to\infty}(kx+b-y)=0$, то $b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-kx)$, або

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right). \tag{18.5}$$

Таким чином, якщо графік функції $y=f(x)$ має похилу асимптоту $y=kx+b$, то її коефіцієнти k та b знаходять за формулами (18.4) та (18.5).

Приклад 12. Знайти похилі асимптоти графіка функції $y=\dfrac{x^3+2x+3}{x^2+1}$.

Розв'язування.

Функція визначена на всій числовій осі, тому вертикальних асимптот немає.

За формулами(18.4) та (18.5) знаходимо коефіцієнти k та b. Маємо: $f(x)=\dfrac{x^3+2x+3}{x^2+1}$, $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x+3}{x\left(x^2+1\right)}=1$.

Знайдемо коефіцієнт b:

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+2x+3}{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{x^2+1}=0.$$

Таким чином, похила асимптота графіка функції $y=\dfrac{x^3+2x+3}{x^2+1}$ – це пряма $y=x$.

Якщо хоча б одна з границь (18.4) або (18.5) не існує або є нескінченною, то крива $y=f(x)$ похилих асимптот не має. Якщо у рівнянні похилої асимптоти $k=0$, то воно набуває вигляду $y=b$, У цьому випадку графік функції $y=f(x)$ може мати *горизонтальну асимптоту* $y=b$.

Таким чином, рівняння горизонтальної асимптоти має вигляд $y=b$, де сталу b знаходять за формулою

$$b=\lim_{x\to\infty}f(x). \tag{18.6}$$

Наприклад, графік функції $y=\frac{x^2+x-1}{2x^2+4}$ має горизонтальну асимптоту $y=\frac{1}{2}$, оскільки $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x-1}{2x^2+4}=\frac{1}{2}$.

Якщо $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ або не існує, то горизонтальні асимптоти відсутні.

Асимптоти графіка функції $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ та $x\to-\infty$ можуть бути різними, тому при використанні формул (18.4) – (18.6) потрібно окремо розглядати випадки, коли $x\to+\infty$ та $x\to-\infty$.

Приклад 13. Знайти асимптоти графіка функції $y=xe^x$.

Розв'язування. Оскільки задана функція є неперервною на своїй області визначення – всій числовій прямій, то її графік вертикальних асимптот не має. Для виявлення похилих асимптот використаємо формули (18.4) та (18.5):

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{xe^x}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}e^x.$$

Остання границя дорівнює $+\infty$ при $x\to+\infty$ та нулю при $x\to-\infty$. Отже, при $x\to+\infty$ похилі асимптоти графіка даної функції відсутні, при $x\to-\infty$ можлива наявність горизонтальної асимптоти. Для визначення рівняння цієї асимптоти використаємо формулу (18.6), тобто знайдемо границю $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty} xe^x.$$

При $x\to+\infty$ маємо нескінченну границю, при $x\to-\infty$ маємо:

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x=\left\|x=-t\right\|=-\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=-\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{e^t}=\left(\frac{1}{\infty}\right)=0.$$

Отже, за формулою (18.6) отримуємо значення $b=0$, тобто при $x\to-\infty$ графік функції $y=xe^x$ має горизонтальну асимптоту – вісь Ox ($y=0$).

18.6. Загальна схема дослідження функції

Розглянемо загальну схему дослідження функції $y=f(x)$ та побудови її графіка. Вона складається з наступних етапів.

1. Знайти область визначення функції.

2. Якщо функція має точки розриву, то з'ясувати їх характер, а також дослідити поведінку функції на межах області визначення (скінченних чи нескінченних). Знайти асимптоти функції (вертикальні, горизонтальні, похилі).

3. Дослідити функцію на парність. Якщо функція є парною або непарною, то подальше дослідження доцільно виконувати лише для невід'ємних значень аргументу. Побудувавши графік для цих значень аргументу, потім добудувати його для від'ємних значень аргументу симетрично осі Oy для парної функції і симетрично відносно початку координат – для непарної функції.

4. Дослідити функцію на періодичність. Якщо функція є періодичною, то достатньо провести її дослідження на будь-якому відрізку, довжина якого дорівнює періоду функції і, побудувавши графік на цьому відрізку, продовжити його на всю область визначення функції.

5. Знайти нулі функції (корені рівняння $f(x)=0$) та інтервали знакосталості функції (інтервали, на яких функція зберігає знак: є додатною, або від'ємною). Область визначення розбивається на інтервали знакосталості нулями та точками розриву функції.

6. Знайти локальні екстремуми та проміжки зростання та спадання функції.

7. Знайти проміжки, на яких графік функції зберігає напрям опуклості, а також точки перегину графіка.

За результатами виконаного дослідження побудувати графік.

Завдання для самоконтролю

1. Сформулювати необхідні та достатні умови монотонності функції однієї змінної.

2. Дати означення точок екстремуму функції, сформулювати необхідні та достатні умови.

3. Які точки функції називають критичними? Чим вони відрізняються від точок екстремуму?

4. Дати означення опуклості графіка функції вгору, вниз.

5. Які точки називають точками перегину графіка функції, сформулювати необхідні та достатні умови існування точок перегину.

6. Навести загальну схему дослідження функції для побудови її графіка.

7. Провести повне дослідження функції $y = \dfrac{x}{4 - x^2}$ і побудувати її графік.

Вказівка. Для даної функції врахувати: екстремумів немає; функція зростає при $x \in (-\infty; -2) \cup (-2;\ 2) \cup (2; \infty)$; $x = 0, y = 0 -$ точка перегину; функція опукла вниз при $x \in (-\infty; -2) \cup (0;\ 2)$; опукла вгору при $x \in (-2;\ 0) \cup (2; \infty)$; асимптоти $x = \pm 2$; $y = 0$.

Список основної літератури

1. Герасимчук В. С. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах: У 3 ч.: Навч. посіб. / В. С. Герасимчук, Г. С. Васильченко, В. І. Кравцов. − К: Книги України ЛТД, 2009. – Ч. 1. −578 с.

2. Герасимчук В. С. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах: У 3 ч.: Навч. посіб. / В. С. Герасимчук, Г. С. Васильченко, В. І. Кравцов. − К: Книги України ЛТД, 2010. – Ч. 2. −470 с.

3. Дубовик В. П. Вища математика: навч. посіб. / Дубовик В. П., Юрик І. І. – К.: А.С.К., 2015. – 648 с.

4. Дубовик В. П. Вища математика. Збірник задач: навч. посіб. / Дубовик В. П., Юрик І. І. – К.: А.С.К., 2015. – 480 с.

5. Кушлик-Дивульська О. І. Елементи лінійної, векторної алгебри. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу [Електронний ресурс] : навчальний посібник [для студентів Видавничо-поліграфічного інституту спеціальності 186 «Видавництво та поліграфія»] / О. І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Поліщук ; відп. ред. С. Д. Івасишен; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 3,15 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. – 141 с. – Назва з екрана. – Доступ: http://ela.kpi.ua/handle/123456789/19572.

6. Лінійна алгебра в задачах та прикладах [Електронний ресурс] / Т. В. Авдєєва, В. М. Шраменко. – Київ: НТУУ «КПІ», 2016. – 205 с. Назва з екрана. – Доступ: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/16845/1/Лінійна%20алгебра_збірник%20задач.pdf

7. Вища математика. Частина 1. Аналітична геометрія та диференціальне числення: Курс лекцій [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 133 «Галузеве машинобудування» (за освітньою програмою «Комп'ютеризовані технології поліграфічних систем») / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: О. І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Поліщук. – Електронні текстові дані (1 файл: 3,51Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. – 193 с. Назва з екрана. – Доступ: https://ela.kpi.ua/handle/123456789/51983.

8. Авдєєва Т. В. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функції однієї змінної. Навчально-методичний посібник [Електронний

ресурс] / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: Т. В. Авдєєва, О. В. Борисенко, О. Ю. Дюженкова, В. В. Листопадова. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 84 с. – Назва з екрана. – Доступ: https://ela.kpi.ua/handle/123456789/46065

9. Авдєєва Т. В., Листопадова В. В., Шраменко В. М. Вища математика: Ліінійна алгебра. Аналітична геометрія: Розрахункова робота [Електронне навчальне видання] / Київ, «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2019. – 120 с. – Назва з екрана. – Доступ: https://kmf.kpi.ua

Список рекомендованої літератури

1. Вища математика: Збірник задач у 2-х частинах. Ч. 1. Лінійна і векторна алгебра, аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення. За ред. П. П. Овчинникова. – Київ, Техніка, 2004. – 279с.

2. Дюженкова Л. І. Вища математика: приклади і задачі: навч. посіб./ Л. І. Дюженкова, О. Ю. Дюженкова, Г. О. Міхалін. – Київ, Академія, 2002. – 624с.

3. Коваленко І. П. Вища математика: навч. посіб. для студентів ВНЗ.– Київ, Вища школа, 2006. – 343с.

4. Кушлик-Дивульська О. І. Елементи лінійної, векторної алгебри. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу [Електронний ресурс]: збірник типових завдань кредитного модуля «Вища математика-1» для студентів видавничо-поліграфічного інституту / НТУУ «КПІ» ; уклад. О. І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Поліщук, Н. П. Селезньова. – Електронні текстові дані (1 файл: 3,67 Мбайт). – Київ : НТУУ «КПІ», 2015. – 149 с.
Назва з екрана. – Доступ : http://ela.kpi.ua/handle/123456789/10429.

5. Лавренчук В. П. Вища математика. Загальний курс. Ч. 1. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. / В. П. Лавренчук, О. Р. Мартинюк, О. С. Кондур. – Чернівці, Книга – XXI , 2010. – 319с.

6. Математика в технічному університеті. Том 1 / І. В. Алексєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 496 с.
Назва з екрана. – Доступ :https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/24338/1/MTU1.pdf

7. Шкіль М. І. Вища математика: підручник у 3-х книгах. Кн.1. Аналітична геометрія з елементами алгебри. / М. І. Шкіль, Т. В. Колесник, В. М. Котлова. – Київ, Либідь, 1994. – 280с.

8. Шкіль М. І. Вища математика: підручник у 3-х книгах. Кн.2. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. / М. І. Шкіль, Т. В. Колесник, В. М. Котлова. – Київ, Либідь, 1994. – 352с.

9. Вища математика. Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Елементи векторної алгебри. Конспект лекцій. [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» / О.В. Кузьма, О. В. Суліма, Т. О. Рудик, Н. П. Селезньова; Н. В. Назаренко; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,50 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 127 с. – Назва з екрана. – Доступ: https://ela.kpi.ua/handle/123456789/42310

Додаток
Довідник деяких тем дисципліни «Вища математика»

Додаток 1. Лінійна алгебра

Визначники: другого порядку $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$;

третього порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

або $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

Правила Крамера для системи лінійних алгебраїчних рівнянь з двома змінними $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$ мають вигляд:

$x_1 = \dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_{x_2}}{\Delta}$, де $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{vmatrix}$, за умови, що $\Delta \neq 0$

для системи трьох лінійних рівнянь з трьома змінними $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$

записують у вигляді: $x_1 = \dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_{x_2}}{\Delta}$, $x_3 = \dfrac{\Delta_{x_3}}{\Delta}$.

Матричний спосіб (для системи 3-го порядку) $X = A^{-1}B$, або

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Модуль вектора: $\vec{a}=(x_0,\, y_0,\, z_0)$, $|\vec{a}|=\sqrt{x_0^{\,2}+\,y_0^{\,2}+z_0^{\,2}}$.

Координати вектора $\overrightarrow{AB}$, $A(x_0,\, y_0,\, z_0)$, $B(x_1,\, y_1,\, z_1)$, $\overrightarrow{AB}=(x_1-x_0,\, y_1-y_0,\, z_1-z_0)$.

Умова колінеарності векторів: $\vec{a}=(x_0,\, y_0,\, z_0)$, $\vec{b}=(x_1,\, y_1,\, z_1)$, $\dfrac{x_0}{x_1}=\dfrac{y_0}{y_1}=\dfrac{z_0}{z_1}$.

Скалярний добуток:

$$\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi,\quad \vec{a}\vec{b}=x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1,\quad \cos\varphi=\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}\cdot\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}.$$

Умова перпендикулярності векторів: $\vec{a}\vec{b}=0$, $x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1=0$.

Проекція вектора $\vec{a}$ на напрям вектора $\vec{b}$: $np_{\bar{b}}\bar{a}=\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|}$.

Векторний добуток: $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_0 & y_0 & z_0\\ x_1 & y_1 & z_1\end{vmatrix}=(y_0\,z_1-y_1\,z_0\,)\vec{i}-(x_0\,z_1-x_1\,z_0\,)\vec{j}+(x_0\,y_1-x_1\,y_0\,)\vec{k}$.

Площа паралелограма, трикутника, побудованих на векторах $\vec{a},\, \vec{b}$: $S_{пар}=|\vec{a}\times\vec{b}|$, $S_{тр}=\dfrac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$.

Мішаний добуток: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix}x_0 & y_0 & z_0\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$.

Об’єм паралелепіпеда ат піраміди: $V_{пар}=|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}|$, $V_{пір}=\dfrac{1}{6}|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}|$.

Пряма на площині

Рівняння прямої через точку $M_0(x_0, y_0) \perp$ до вектора $\vec{N}(A, B)$:
$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

Загальне рівняння прямої: $Ax + By + C = 0$.

Кут φ між двома прямими, які задані загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0 : \cos\varphi = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$.

Рівняння прямої через точку $M_0(x_0, y_0)$, паралельно вектору $\vec{l}(m, n)$:
$\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n}$.

Рівняння прямої через дві точки $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$: $\dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{y - y_0}{y_1 - y_0}$.

Параметричні рівняння прямої: $\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt. \end{cases}$

Рівняння прямої через точку $M_0(x_0, y_0)$ з кутовим коефіцієнтом k:
$y - y_0 = k(x - x_0)$ (прямі перпендикулярні: $k_1 \cdot k_2 = -1$).

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k: $y = kx + b$.

Для прямих $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$ тангенс кута між ними через їх кутові коефіцієнти обчислюють за формулою: $\mathrm{tg}\alpha = \left|\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|$.

Відстань від точки $M(x_0, \ y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0 : d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Криві 2-го порядку

Рівняння кола з центром в точці $M_0(x_0, y_0)$ радіуса R: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

Рівняння еліпса з центром в точці $O(0,0)$, $M_0(x_0, y_0)$:
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$.

Рівняння гіперболи з центром в точці $O(0,0)$, $M_0(x_0, y_0)$:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1, \quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\pm 1.$$

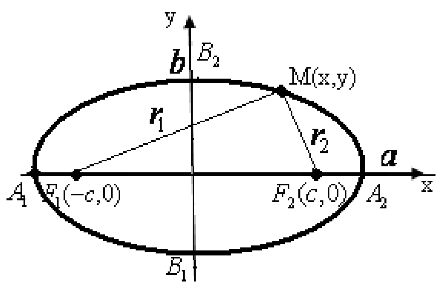
Рівняння параболи з вершиною $O(0,0)$, $M_0(x_0, y_0)$:

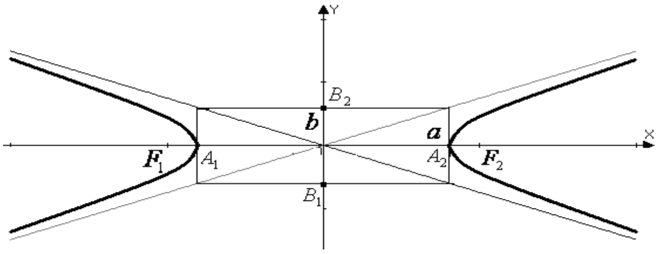
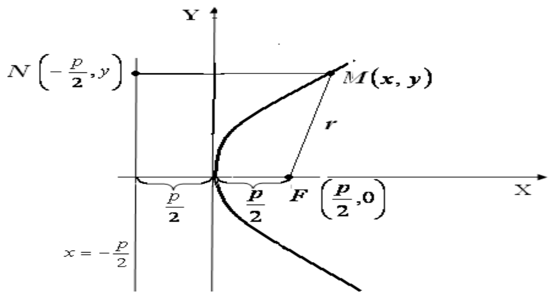
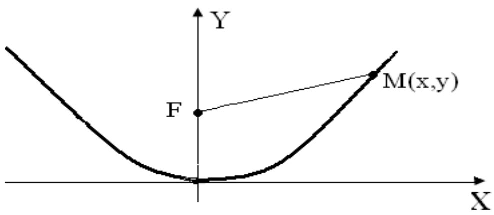
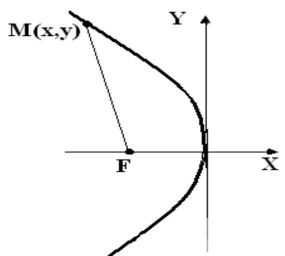
$$y^2=2px, \quad x^2=2py; \quad (y-y_0)^2=2p(x-x_0), \quad (x-x_0)^2=2p(y-y_0).$$

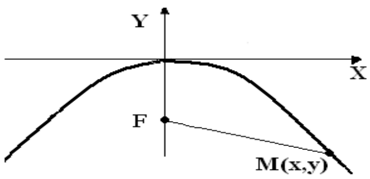
Криві другого порядку та їх центри

Крива	**Канонічне рівняння**	**Центр кривої**
еліпс	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\begin{cases}\frac{1}{a^2}x=0\\ \frac{1}{b^2}y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$
точка	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	
уявний еліпс	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$	
гіперболи	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1$	$\begin{cases}\frac{1}{a^2}x=0\\ \frac{1}{b^2}y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$
прямі, що перетинаються	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	
парабола	$y^2=2px, \quad p\neq 0$	$\begin{cases}p=0\\ y=0\end{cases}$ нецентральна лінія
паралельні прямі	$y^2=a^2, \ a>0$	$\begin{cases}0=0\\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow y=0$
здвоєна пряма	$y^2=0$	
уявні паралельні прямі	$y^2=-a^2, \ a>0$	

Основні графіки кривих другого порядку

Еліпс	

<table>
<tr><td>Гіпербола</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Парабола</td><td>y²=2px

</td></tr>
<tr><td>x²=2py

</td></tr>
<tr><td>

$y^2=-2px$
$x^2=-2py$

</td></tr>
</table>

Пряма в просторі

Рівняння прямої через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, паралельно вектору $\vec{l}(m, n, p)$:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

Кут між двома прямими $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ і $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$:

$$\cos\varphi=\frac{m_1 m_2+n_1 n_2+p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

Умова паралельності двох прямих: $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_2}{p_2}$, умова перпендикулярності :

$m_1 m_2+n_1 n_2+p_1 p_2=0.$

Рівняння прямої через дві точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$$

Параметричні рівняння прямої через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, паралельно вектору $\vec{l}(m, n, p)$:

$x=x_0+mt,\ y=y_0+nt,\ z=z_0+pt$.

Загальні рівняння прямої: $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$.

Площина в просторі

Рівняння площини через точку $M_0(x_0, y_0, z_0) \perp$ до вектора $\vec{N}(A, B, C)$:

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

Рівняння площини у відрізках на осях: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Загальне рівняння площини: $Ax+By+Cz+D=0$.

Рівняння площини через точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0.$$

Кут між площинами: $\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{N_1}\ \overrightarrow{N_2}}{|\overrightarrow{N_1}||\overrightarrow{N_2}|}$, $\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$.

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини $Ax+By+Cz+D=0$:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Пряма і площина в просторі

Кут між прямою $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ і площиною $Ax+By+Cz+D=0$:

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Умова паралельності прямої і площини: $Am+Bn+Cp=0$, а умова перпендикулярності $\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$.

Поверхні 2-го порядку

Сфера: $x^2+y^2+z^2=R^2$, *еліпсоїд:* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Циліндри 2-го порядку:

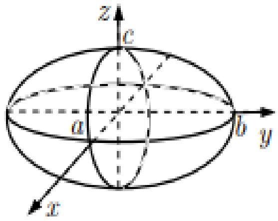
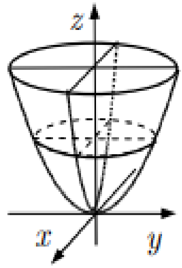
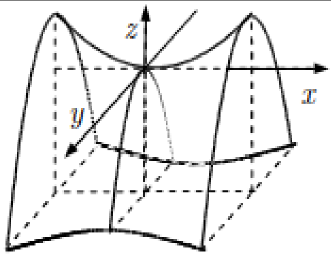
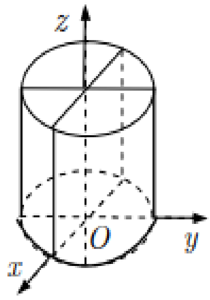
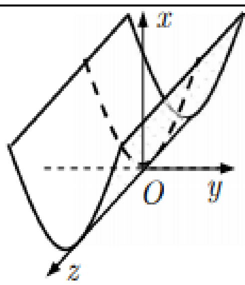
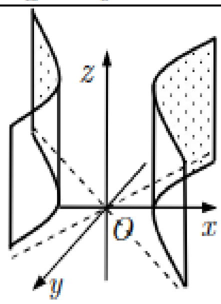
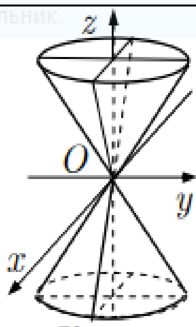
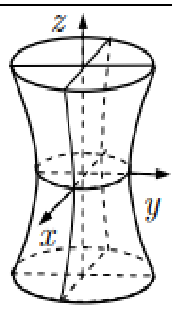
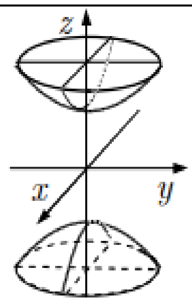
круговий $x^2+y^2=R^2$; еліптичний $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; гіперболічний $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; параболічний $y^2=2px$.

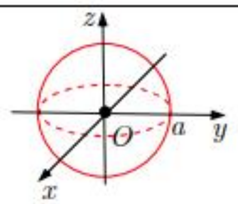
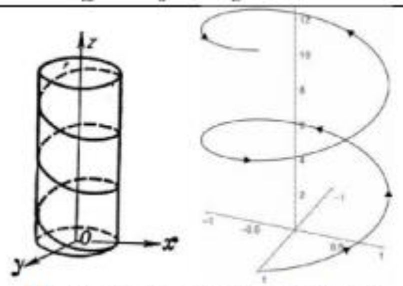
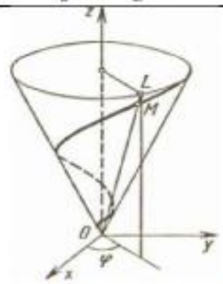
Конус $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.

Гіперболоїди: однопорожнинний $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, двопорожнинний $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

Параболоїд: еліптичний $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$; гіперболічний $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$.

Вигляд поверхонь другого порядку

 **Еліпсоїд** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	 **Еліптичний параболоїд** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$	 **Гіперболічний параболоїд** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$
 **Еліптичний циліндр** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	 **Параболічний циліндр** $y^2=2px$	 **Гіперболічний циліндр** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
 **Конус** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$	 **Однопорожнинний гіперболоїд** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	 **Двопорожнинний гіперболоїд** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

 ***Сфера*** $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$	 ***Циліндрична гвинтова лінія*** $\begin{cases} x = a\cos t, y = a\sin t, z = \dfrac{ht}{2\pi} \end{cases}$	 ***Конічна гвинтова лінія*** $\begin{cases} x = at\cos t, y = at\sin t, \\ z = bt \end{cases}$

Дві важливі границі: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{-x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1\pm x\right)^{\pm\frac{1}{x}}=e.$

Основні еквівалентні величини: $\sin x\sim x,\quad x\to 0$;

$\ln(1+x)\sim x,\ \log_a(1+x)\sim(\log_a e)x,\ \ x\to 0$; $e^x-1\sim x,\ a^x-1\sim x\ln a,\ x\to 0$; $\arcsin x\sim x,\ x\to 0$;

$\mathrm{tg}x\sim x,\ x\to 0$; $\mathrm{arctg}x\sim x,\ x\to 0$; $(1+x)^{\mu}-1\sim\mu x,\ x\to 0.$

Таблиця похідних

1. $\left(x^n\right)'=nx^{n-1}.$

2. $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\quad(x>0).$

3. $(\sin x)'=\cos x.$

4. $(\cos x)'=-\sin x.$

5. $(\mathrm{tg}x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}.$

6. $(\mathrm{ctg}x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}.$

7. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad(|x|<1).$

8. $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad(|x|<1).$

9. $(\mathrm{arctg}x)'=\dfrac{1}{1+x^2}.$

10. $(\mathrm{arcctg}x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}.$

11. $(a^x)'=a^x\ln a.$

12. $(e^x)'=e^x.$

13. $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}\quad(x>0).$

14. $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}=\dfrac{\log_a e}{x}\quad(x>0,\ a>0).$

15. $(\mathrm{sh}x)'=\mathrm{ch}x.$

16. $(\mathrm{ch}x)'=\mathrm{sh}x.$

17. $(\mathrm{th}x)'=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}.$

18. $(\mathrm{cth}x)'=-\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}.$

Якщо $C-$ стала величина і $u=\varphi(x), v=\psi(x)$ $-$ диференційовані функції, тоді

1) $(C)'=0,$ 2) $(x)'=1,$

3) $(u\pm v)'=u'\pm v',$ 4) $(Cu)'=Cu',$

5) $(uv)'=u'v+uv',$ 6) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}\quad (v\neq 0),$

7) $\left(\dfrac{C}{v}\right)'=-\dfrac{Cv'}{v^2}\quad (v\neq 0).$

1. Правило диференціювання складеної функції. Якщо $y=f(u), u=\varphi(x),$ тобто $y=f\left(\varphi(x)\right),$ де функції y та u мають похідні, тоді

$y_x'=y_u'\cdot u_x'$ або в інших позначеннях $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}.$

2. Диференціювання параметрично заданої функції:

$x=x(t),\ y=y(t),$ то $y_x'=\dfrac{y_t'}{x_t'}.$

Рівняння дотичної і нормалі

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0),\ y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0),\ k=\mathrm{tg}\alpha=f'(x_0).$$

Екстремуми функцій

Точки, в яких $f'(x_o)=0-$ критичні точки функції. Якщо похідна змінює знак з «+» на «-», то точка x_0- точка максимума, якщо з «-» на «+», то точка мінімума.