

МІНІСТЕРСТВО НАУКИ ТА ОСВІТИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ЧАСТИНА 2

ЗБІРНИК ЗАДАЧ

Київ

КПІ імені Ігоря Сікорського

2025

УДК 512(510)
В 41

Укладачі: *Журавська Ганна Вікторівна*, канд. фіз.-мат наук, доцент
Карпалюк Тамара Олексіївна, канд. фіз.-мат наук, доцент
Копась Інна Миколаївна, канд. фіз.-мат наук, доцент
Рева Надія Віталіївна, канд. фіз.-мат наук, доцент
Самойленко Тетяна Анатоліївна, канд. фіз.-мат. наук
Степаненко Наталія Вікторівна, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Рецензенти: *Пелехата Ольга*, канд. фіз.-мат наук, доцент кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей КПІ ім. Ігоря Сікорського
Плакош Андріяна, канд. фіз.-мат наук, старший науковий співробітник, Інститут математики НАН України

Відповідальний редактор *Поліщук Олена*, канд. фіз.-мат наук, доцент

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 9 від 26.06.2025 р.)
за поданням вченої ради фізико-математичного факультету
(протокол № 7 від 04.06.2025 р.)*

В 41 **Вища математика. Частина 2. Збірник задач** [Електронний ресурс]:
навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю G9
Прикладна механіка / Г. В. Журавська та ін. ; КПІ ім. Ігоря Сікорського.
Електрон. текст. дані (1 файл: 2,3Мб). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського,
2025. – 171 с.

УДК 512(510)

Реєстр. № НП 24/25-604.Обсяг 9,4 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056

<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© Г. В. Журавська, Т. О. Карпалюк, І. М. Копась, Н. В. Рева, Т. А. Самойленко, Н. В. Степаненко, 2025
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025

Зміст

<u>Вступ</u>	4
<u>Розділ 1. Диференціальне числення функцій багатьох змінних</u>	5
<u>Тема 1.1. Функція багатьох змінних та її властивості</u>	5
<u>Тема 1.2. Частинні похідні та диференціали функції багатьох змінних</u>	8
<u>Тема 1.3. Застосування частинних похідних функції багатьох змінних</u>	15
<u>Розділ 2. Кратні інтеграли</u>	20
<u>Тема 2.1. Подвійний інтеграл. Заміна змінних у подвійному інтегралі</u>	20
<u>Тема 2.2. Застосування подвійного інтеграла до задач геометрії та механіки</u>	31
<u>Тема 2.3. Потрійний інтеграл. Заміна змінних у потрійному інтегралі</u>	39
<u>Тема 2.4. Застосування потрійного інтеграла до задач геометрії та механіки</u>	48
<u>Розділ 3. Криволінійні та поверхневі інтеграли першого роду</u>	54
<u>Тема 3.1. Криволінійні інтегралі першого роду (по довжині дуги)</u>	54
<u>Тема 3.2. Поверхневі інтеграли першого роду</u>	62
<u>Розділ 4. Елементи теорії поля</u>	69
<u>Тема 4.1. Скалярне та векторне поля. Диференціальні характеристики полів</u>	69
<u>Тема 4.2. Криволінійний інтеграл другого роду (по координатах)</u>	80
<u>Тема 4.3. Поверхневий інтеграл другого роду</u>	87
<u>Розділ 5. Звичайні диференціальні рівняння</u>	100
<u>Тема 5.1. Диференціального рівняння першого порядку</u>	100
<u>Тема 5.2. Диференціальні рівняння вищих порядків, які допускають зниження порядку</u>	111
<u>Тема 5.3. Лінійні однорідні диференціальні рівняння вищих порядків</u>	115
<u>Тема 5.4. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння вищих порядків</u>	120
<u>Тема 5.5. Системи диференціальних рівнянь</u>	127
<u>Відповіді</u>	131
<u>Основні елементарні функції, їхні властивості та графіки</u>	158
<u>Графіки деяких функцій в полярних координатах</u>	165
<u>Графіки деяких функцій заданих параметрично</u>	166
<u>Основні поверхні</u>	167
<u>Список використаної літератури</u>	170

Вступ

Збірник задач призначено для студентів першого курсу спеціальності «Прикладна механіка». Завдання в збірнику системно розташовані відповідно до розділів і тем силабусу дисципліни «Вища математика. Частина 2. Диференціальне та інтегральне числення функції багатьох змінних. Диференціальні рівняння».

На початку кожної теми надано короткий довідковий матеріал (означення, теореми та формули). До всіх завдань на обчислення подаються відповіді у кінці збірника. Частина відповідей ілюструється графіками та малюнками. Для зручності користування збірником, після завдань до кожної теми є посилання на відповіді, звідки також можна повернутися до завдань за допомогою посилання після відповідей.

Розділ 1. Диференціальне числення функцій багатьох змінних.

Тема 1.1. Функція багатьох змінних та її властивості.

Якщо кожній упорядкованій парі чисел $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ поставлено у відповідність за певним законом одне і тільки одне число $z \in \mathbb{R}$, то кажуть, що на множині D визначено функцію z від двох змінних x, y і записують $z = f(x, y)$. Аналогічно визначається функція трьох і більше змінних.

Лінією рівня функції $z = f(x, y)$ називається лінія $f(x, y) = C$, в точках якої функція зберігає стале значення $z = C$, $C \in E(f)$.

Поверхнею рівня функції $u = f(x, y, z)$ називається поверхня $f(x, y, z) = C$, в точках якої функція зберігає стале значення $u = C$, $C \in E(f)$.

Функція $f(x, y)$ називається однорідною функцією k -го виміру відносно змінних x та y , якщо виконується тотожність $f(\lambda x, \lambda y) \equiv \lambda^k f(x, y)$, $\forall \lambda \neq 0$.

Число A називається границею функції $z = f(x, y)$ при $x \rightarrow x_0$, $y \rightarrow y_0$, якщо $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall (x, y) \in D : 0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$, виконується нерівність $|f(x, y) - A| < \varepsilon$ і позначається $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$.

Функція $z = f(x, y)$ називається неперервною в точці $M_0(x_0, y_0)$, якщо функція $z = f(x, y)$ визначена в точці M_0 та її околі і $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$. Функція $z = f(x, y)$ називається неперервною на множині, якщо вона неперервна у кожній точці цієї множини. Точки, в яких неперервність порушується, називаються точками розриву функції.

1.1.1. Знайти значення функції $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ в точках:

1) $f(3; -1)$;

2) $f\left(a; \frac{1}{a}\right)$, $a \neq 0$;

3) $f(-x; -y)$;

4) $f\left(\frac{1}{x}; \frac{1}{y}\right)$;

5) $f(kx; ky)$, $k \neq 0$;

6) $f(\cos t; \sin t)$.

1.1.2. Знайти функцію $f(x, y)$, якщо $f\left(x + y, \frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$.

1.1.3. Знайти функцію $f(x, y)$, якщо $f(x - y, x + y) = -\frac{2xy}{x^2 + y^2}$.

1.1.4. Дослідити на однорідність дані функції і визначити порядок їх однорідності:

1) $z = \frac{2x^2 + y^2 + 6xy}{x + 5y}$;

2) $z = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x + 5y}$;

3) $z = xy^2 + 4x^2y + 3y^3$.

1.1.5. Знайти і зобразити область визначення функцій двох змінних:

1) $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$;

2) $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}}$;

3) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 25}$;

4) $z = \frac{1}{5 - x^2 - y^2}$;

5) $z = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 2x}}$;

6) $z = \sqrt{x - y} + \sqrt{x + y}$;

7) $z = \frac{1}{\sqrt{x - y}} + \frac{1}{\sqrt{x + y}}$;

8) $z = \ln(y^2 - 2x + 4)$;

9) $z = \ln(x^2 + 4y^2 - 2x - 3)$;

10) $z = \ln \frac{\sqrt{4x - y^2}}{1 - x^2 - y^2}$;

11) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} + \ln(16 - x^2 - y^2)$;

12) $z = \arcsin \frac{y-1}{x}$;

13) $z = \arcsin \frac{x}{y^2}$;

14) $z = \sqrt{\sin \pi(x^2 + y^2)}$.

1.1.6. Знайти і зобразити область визначення функцій трьох змінних:

1) $u = \sqrt{16 - x^2 - y^2 - z^2}$;

$$2) u = \frac{1}{\ln(1-x^2-y^2-z^2)};$$

$$3) u = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}};$$

$$4) u = \sqrt{z - x^2 - y^2};$$

$$5) u = \ln(13 + 4y - 2z - 4x^2 - 2y^2 - z^2);$$

$$6) u = \ln(2z^2 - 6x^2 - 3y^2 - 6);$$

$$7) u = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}} \quad (R > r).$$

1.1.7. Знайти і побудувати лінії рівня функцій:

$$1) z = x + 2y;$$

$$2) z = \frac{y}{x};$$

$$3) z = \ln \sqrt{\frac{y}{x}};$$

$$4) z = \sqrt{\frac{y}{x}};$$

$$5) z = x^2 + y^2;$$

$$6) z = \sqrt{xy};$$

$$7) z = \frac{1}{x^2+y^2};$$

$$8) z = \frac{1}{4x^2+y^2}.$$

1.1.8. Знайти поверхні рівня функцій:

$$1) u = x + y + z;$$

$$2) u = \frac{x^2+y^2}{z};$$

$$3) u = x^2 + y^2 + z^2;$$

$$4) u = x^2 + y^2 - z^2;$$

$$5) u = x^2 - y^2 + z^2;$$

$$6) u = x^2 - y^2 - z^2.$$

1.1.9. Знайти границі функцій:

$$1) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2};$$

$$2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2};$$

$$3) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1 + x^2 y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}.$$

1.1.10. Знайти точки розриву функцій:

$$1) z = \frac{1}{1-e^{x-y}};$$

$$2) z = \frac{x^2+y^2}{y-4x};$$

$$3) z = \frac{1}{(x^2+y^2-9)(y^2-2x)}.$$

Відповіді до теми 1.1.

Тема 1.2. Частинні похідні та диференціали функції багатьох змінних.

Якщо існує границя $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$, то вона називається частинною похідною функції $z = f(x, y)$ у точці $M(x, y)$ по змінній x і позначається $\frac{\partial z}{\partial x}$ або $\frac{\partial f}{\partial x}$, z'_x , f'_x . Аналогічно визначається частинна похідна по змінній y , а також частинні похідні функції багатьох змінних.

При знаходженні частинних похідних всі змінні, крім тієї за якою диференціюємо, вважаються сталими, тобто частинні похідні функції знаходять за формулами і правилами обчислення похідних функції однієї змінної.

Функція $z = f(x, y)$ називається диференційовною в точці M , якщо її повний приріст $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ можна подати у вигляді

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

де A, B – дійсні числа, що не залежать від $\Delta x, \Delta y$; α, β – нескінченно малі функції при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$.

Частинними похідними 2-го порядку функції $z = f(x, y)$ називають частинні похідні, якщо вони існують, від частинних похідних першого порядку:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}. \end{aligned}$$

Частинні похідні, в яких диференціювання здійснюється по різних змінних, називаються мішаними похідними.

Аналогічно визначаються частинні похідні вище другого порядку.

1.2.1. Знайти частинні похідні даних функцій по кожній з незалежних змінних:

1) $z = x^4 y + \frac{xy^3}{3} + x - 2y + 1;$

2) $z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x};$

3) $z = \frac{x^2 + y^2}{x + y};$

4) $z = (6x^3 y + \frac{3x^4}{4} + 2\sqrt[3]{y})^4;$

5) $z = \ln(y + \sqrt{x^2 + y^2});$

6) $z = \frac{1}{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}};$

7) $z = \ln \operatorname{ctg} \frac{y}{x};$

8) $z = \sin \frac{y}{x} \cos \frac{x}{y};$

9) $z = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{y}{x}};$

10) $z = \frac{e^{xy} + 1}{\cos^2(xy)};$

11) $z = (1 + xy)^y;$

12) $z = x^{x^y};$

13) $u = x^3 y z^2 + 5e^{xz} + 3\sqrt{x} z^3 - 5^{xyz};$

14) $u = \operatorname{tg}^6(x^2 + y^2 + z^2);$

15) $u = x^{\frac{z}{y}};$

16) $u = (1 + z \log_x y)^5;$

17) $u = x^{y^z};$

18) $u = (\cos x)^{y^z}.$

1.2.2. Знайти частинні похідні даних функцій вказаних точках:

1) $z = \ln \operatorname{tg} e^{x+y^2}, \frac{\partial z}{\partial x}$ в точці $M(\ln \frac{\pi}{4}; 0);$

2) $u = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}, \frac{\partial u}{\partial z}$ в точці $M(0; 0; \frac{\pi}{4}).$

1.2.3. Показати, що для функції $z = e^{\frac{x}{y^2}}$ справджується рівність $2xz'_x + yz'_y = 0.$

1.2.4. Показати, що функція $z = y \ln(x^2 - y^2)$ задовольняє рівняння $\frac{1}{x} z'_x + \frac{1}{y} z'_y = \frac{z}{y^2}.$

1.2.5. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix},$ якщо $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}.$

1.2.6. Який кут утворює з додатнім напрямом осі абсцис дотична до лінії $\begin{cases} z = \frac{x^2 + y^2}{4} \\ y = 4 \end{cases}$ у

точці $M(2; 4; 5)?$

1.2.7. Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ даних функцій:

1) $z = x^y;$

2) $z = \sqrt{(x^2 + y^2)^3};$

3) $z = \cos^2(ax + by);$

4) $z = \arccos(xy);$

5) $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x};$

6) $z = e^{ye^x};$

7) $z = \ln(x^2 + y^2);$

8) $z = \sin(xy).$

1.2.8. Для функції $z = e^x (\cos y + x \sin y)$ показати, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$

1.2.9. Для функції $z = \sin(x + \cos y)$ знайти $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$.

1.2.10. Для функції $z = x^4 + x^3 y + x^2 y^2 + x y^3 + y^4$ знайти всі частинні похідні четвертого порядку.

1.2.11. Для функції $z = x^3 \sin y + y^3 \sin x$ знайти $\frac{\partial^6 z}{\partial x^3 \partial y^3}$ в точці $M(0; \pi)$.

1.2.12. Показати, що функція $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ задовольняє рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Диференціал функції багатьох змінних

Повним диференціалом dz диференційованої в точці $M(x, y)$ функції $z = f(x, y)$ називається головна, лінійна частина приросту функції, тобто

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

при цьому $d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx$, $d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy$ – частинні диференціали функції $z = f(x, y)$.

Відповідно для функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$ повний диференціал:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

Диференціал функції $z = f(x, y)$ інваріантний, тобто формула $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$ зберігає свій вигляд незалежно від того чи є змінні x і y незалежними, чи функціями інших змінних.

За допомогою формули повного диференціала можна наближено обчислювати значення функції $z = f(x, y)$ в заданій точці $M(x, y)$:

$$f(x, y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \Delta y.$$

Диференціалом другого порядку функції $z = f(x, y)$ двох незалежних змінних x, y називають диференціал, якщо він існує, від диференціалу першого порядку, тобто

$$d^2 z = d(dz) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

Формула для обчислення диференціала третього порядку функції двох незалежних змінних $z = f(x, y)$ має вигляд:

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3.$$

Відповідно диференціал n -го порядку функції $z = f(x, y)$ двох незалежних змінних x, y визначається за формулою: $d^n z = d(d^{n-1}z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n z$.

1.2.13. Знайти повні диференціали першого порядку заданих функцій:

1) $z = x^3 y - y^3 x$;

2) $z = x^2 y^4 - x^3 y^3 + x^4 y^2$;

3) $z = \arctg \frac{x}{y}$;

4) $z = \arccos \frac{y}{x}$;

5) $z = \frac{1}{5} \sqrt{(x^2 + y^2)^5}$;

6) $z = \operatorname{arcctg} \frac{y+x}{1-xy}$;

7) $z = \ln \sin(xy)$;

8) $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$;

9) $u = y^{xz}$;

10) $u = 2\sqrt{x^3 + y^3 + z^3}$.

1.2.14. Знайти значення повного диференціалу функції $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ при $x = 1$; $y = 2$;
 $\Delta x = 0,03$; $\Delta y = 0,01$.

1.2.15. Обчислити наближено:

1) $\ln(\sqrt[3]{1,06} + \sqrt[4]{0,96} - 1)$;

2) $\ln(1,09^3 + 0,99^3)$;

3) $1,02^{2,03}$;

4) $\sqrt{1,04^3 + 1,98^3}$;

5) $\sqrt[3]{1,02^2 + 0,05^2}$;

6) $\sqrt{5e^{0,02} + 2,03^2}$;

7) $\operatorname{arcctg} \frac{1,02}{0,95}$;

8) $\sin 29^\circ \operatorname{tg} 46^\circ$;

9) $\sqrt{11,96^2 + 9,02^2 + 7,98^2}$;

10) $\sqrt{1,04^{1,99} + \ln 1,02}$.

1.2.16. Знайти диференціали другого порядку заданих функцій:

1) $z = xy^2 + x^2 y$;

2) $z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$;

3) $z = \cos(x + y)$;

4) $z = x \cos^2 y$;

5) $z = \frac{y^2}{x^2}$;

6) $u = xyz$.

1.2.17. Знайти диференціал другого порядку функцій:

1) $z = e^{xy}$ в точці $M(1; 1)$;

2) $z = \frac{x}{x-y}$ в точці $M(2; 1)$.

Похідна складеної функції. Повна похідна

Нехай $z = f(x, y)$ – диференційовна в точці $M(x, y)$, а $x = x(t)$, $y = y(t)$ – диференційовні функції змінної t . Тоді похідна складеної функції $z = f(x(t), y(t))$, обчислюється за формулою

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Відповідно у випадку, коли $u = f(x, y, z)$, а $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, маємо

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

Якщо $z = f(x, y)$, де $y = y(x)$, то похідна складеної функції $z = f(x, y(x))$ обчислюється за формулою (повна похідна)

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx}.$$

Відповідно у випадку, коли $u = f(x, y, z)$, де $y = y(x)$, $z = z(x)$, формула повної похідної має вигляд

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dx}.$$

Загальний випадок. Нехай $z = f(x, y)$ – диференційовна в точці $M(x, y)$, а $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ – диференційовні в точці $M^*(u, v)$. Тоді частинні похідні складеної функції $z = f(x(u, v), y(u, v))$, обчислюються за формулами

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}.$$

1.2.18. Знайти похідні складених функцій:

1) $z = e^{2x-y}$, де $x = t^4$, $y = \sin t$, $\frac{dz}{dt} - ?$

2) $z = e^{x^2+y}$, де $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, ($a > 0$); $\frac{dz}{dt} - ?$

$$3) z = \arcsin(x - y), \text{ де } x = 3t, y = 4t^3, \frac{dz}{dt} - ?$$

$$4) u = x^2 + y^2 + zy, \text{ де } x = \sin t, y = e^t, z = t^2; \frac{du}{dt} - ?$$

$$5) u = \frac{xy}{z}, \text{ де } x = \ln t, y = e^t, z = t^3 - 1; \frac{du}{dt} - ?$$

$$6) z = \ln(x^2 + y^2), \text{ де } y = e^x; \frac{\partial z}{\partial x} - ? \frac{dz}{dx} - ?$$

$$7) z = \ln(e^x + e^y), \text{ де } y = x^4; \frac{dz}{dx} - ?$$

$$8) z = \operatorname{arctg}(xy), \text{ де } y = e^{-2x}; \frac{dz}{dx} - ?$$

$$9) z = \arcsin \frac{x}{y}, \text{ де } y = e^{-2x}; \frac{dz}{dx} - ?$$

$$10) u = \operatorname{tg}(4x + y^2 - 3z), \text{ де } y = \frac{1}{x}, z = \sqrt{x}; \frac{du}{dx} - ?$$

$$11) z = y^2 \ln x, \text{ де } x = 2u + 3v; y = \frac{u}{v}; \frac{\partial z}{\partial u} - ? \frac{\partial z}{\partial v} - ?$$

$$12) z = x^2 y - y^2 x, \text{ де } x = u \sin v; y = u \cos v; \frac{\partial z}{\partial u} - ? \frac{\partial z}{\partial v} - ?$$

$$13) z = \ln(x^2 + y^2), \text{ де } x = uv; y = \frac{u}{v}; \frac{\partial z}{\partial u} - ? \frac{\partial z}{\partial v} - ?$$

$$14) z = f(x, y), \text{ де } x = u^2 - v^2; y = e^{uv}; \frac{\partial z}{\partial u} - ? \frac{\partial z}{\partial v} - ?$$

1.2.19. Знайти повний диференціал складеної функції $z = u^2 v^3$, де $u = x^2 \sin y$, $v = x^3 e^y$.

1.2.20. Показати, що функція $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$, де $x = u + v$; $y = u - v$, задовольняє співвідношення:

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u - v}{u^2 + v^2}.$$

Похідна неявно заданої функції

Нехай рівняння $F(x, y) = 0$, де F – диференційовна функція змінних x, y , визначає y як функцію x . Тоді похідна цієї функції може бути обчислена за формулою

$$y' = - \frac{F'_x}{F'_y}, (F'_y \neq 0).$$

Аналогічно, нехай $F(x, y, z) = 0$, де F – диференційовна функція змінних x, y, z , визначає z як функцію x, y . Тоді формули для обчислення частинних похідних функції z набувають вигляду

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}, \quad (F'_z \neq 0).$$

1.2.21. Знайти похідну $\frac{dy}{dx}$ від функцій, заданих неявно:

1) $x^3y - y^3x - 1 = 0;$

2) $\cos(xy) - e^{xy} - xy^2 = 0;$

3) $x e^y + y e^x - e^{xy} = 0;$

4) $xy - \ln y = 2;$

3) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}};$

4) $y^x = x^y, (x \neq y).$

1.2.22. Знайти похідну $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ від функцій, заданих неявно:

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$

2) $x^3 - 2y^3 + z^3 + xz + 4xy^2 - 1 = 0;$

3) $z^4 + 4xyz = 1;$

4) $e^{xyz} + \cos z = 1.$

1.2.23. Знайти повні диференціали першого порядку неявно заданих функцій $f(x, y)$:

1) $xyz = x + y + z;$

1) $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1;$

2) $\frac{x}{z} = \ln \frac{x}{y}.$

Відповіді до теми 1.2.

Тема 1.3. Застосування частинних похідних функції багатьох змінних.

Нехай поверхня задана рівнянням $F(x, y, z) = 0$ і точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ належить поверхні. Рівняння дотичної площини до поверхні в точці M_0 має вигляд

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0,$$

а рівняння нормалі

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}.$$

Якщо рівняння поверхні задано в явному вигляді $z = f(x, y)$, то рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ набувають відповідно вигляду

$$f'_x(M_0)(x - x_0) + f'_y(M_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

$$\frac{x - x_0}{f'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

1.3.1. До даних поверхонь скласти рівняння дотичної площини та нормалі в указаних точках:

1) $z = 2x^2 + y^2$ в точці $M_0(1; -1; 3)$;

2) $z = 2x^2 - 4y^2$ в точці $M_0(3; 2; 2)$;

3) $z = xy$ в точці $M_0(1; 2; 2)$;

4) $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$ в точці $M_0(4; 3; -7)$;

5) $z = \sin x \cos y$ в точці $M_0(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{1}{2})$;

6) $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ в точці $M_0(1; 2; -1)$;

7) $2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} = 8$ в точці $M_0(2; 2; 1)$;

8) $(z^2 - x^2)xyz - y^5 = 5$ в точці $M_0(1; 1; 2)$.

1.3.2. Показати, що рівняння дотичної площини до еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ у довільній

його точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$ має вигляд $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} + \frac{z_0z}{c^2} = 1$.

1.3.3. До еліпсоїда $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ провести дотичну площину, яка паралельна площині $x - y + 2z = 0$.

Формула Тейлора

Нехай функція $f(x, y)$ в області D має неперервні частинні похідні до $(n + 1)$ -го порядку включно і точки $M_0(x_0, y_0)$ та $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ такі, що відрізок M_0M належить області D . Тоді має місце формула Тейлора із залишковим членом R_{n+1} у формі Лагранжа

$$\begin{aligned}\Delta f(x_0, y_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \\ &= df(x_0, y_0) + \frac{d^2 f(x_0, y_0)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(x_0, y_0)}{n!} + R_{n+1}, \\ R_{n+1} &= \frac{d^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y)}{(n + 1)!}, \quad 0 < \theta < 1.\end{aligned}$$

Якщо $x_0 = 0, y_0 = 0$, то формула називається формулою Маклорена.

1.3.4. Розвинути функцію $f(x, y)$ за формулою Маклорена до членів n -того порядку включно.

- 1) $f(x, y) = e^y \cos x, n = 3;$
- 2) $f(x, y) = e^x \sin y, n = 3;$
- 3) $f(x, y) = \cos x \cos y, n = 4;$
- 4) $f(x, y) = e^x \ln(1 + y), n = 3;$
- 5) $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2), n = 3;$
- 6) $f(x, y) = \frac{1}{1-x-y+xy}, n = 4.$

1.3.5. Розвинути функцію $f(x, y)$ за формулою Тейлора в околі заданої точки M до членів n -того порядку включно

- 1) $f(x, y) = \sin x \sin y, M\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right), n = 2;$
- 2) $f(x, y) = x^y, M(1, 1), n = 3;$
- 3) $f(x, y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y + 4, M(-2, 1), n = 2;$
- 4) $f(x, y) = y^x, M(1, 1), n = 2;$
- 5) $f(x, y) = e^{x+y}, M(1, -1), n = 3;$
- 6) $f(x, y) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y - z + 4, M(1, 1, 1), n = 2.$

Локальні екстремуми функції двох змінних

Точки локального мінімуму і максимуму функції називають точками екстремуму функції.

Для того, щоб знайти екстремуми диференційовної функції $z = f(x, y)$, необхідно:

1. Знайти область визначення функції і стаціонарні точки функції з системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0. \end{cases}$$

2. У кожній стаціонарній точці $M_0(x_0, y_0)$, обчислити визначник:

$$\Delta(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2.$$

Тоді:

1) $\Delta(x_0, y_0) > 0$, $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, то $M_0(x_0, y_0)$ – точка локального максимуму;

2) $\Delta(x_0, y_0) > 0$, $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, то $M_0(x_0, y_0)$ – точка локального мінімуму;

3) $\Delta(x_0, y_0) < 0$, то $M_0(x_0, y_0)$ – не є точкою екстремуму;

4) $\Delta(x_0, y_0) = 0$, то для з'ясування характеру стаціонарної точки $M_0(x_0, y_0)$ потрібне

додаткове дослідження.

3. Обчислити значення функції $z = f(x, y)$ в точках максимуму і мінімуму.

1.3.6. Дослідити на екстремум функції:

1) $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$;

2) $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$;

3) $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$;

4) $z = 2x^3 + 6xy - y^2 + 12x$;

5) $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$;

6) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$;

7) $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$;

8) $z = x^3 + y^3 - 3xy$;

$$9) z = x^3 y^2 (6 - x - y), \quad x > 0, \quad y > 0;$$

$$10) z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2;$$

$$11) z = 1 - \sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2};$$

$$12) z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)};$$

$$13) z = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y, \quad x > 0, \quad y > 0;$$

$$14) z = e^{x-y}(x^2 - 2y^2).$$

Найбільше і найменше значення функції двох змінних

Для того, щоб знайти найбільше і найменше значення неперервної функції в замкненій та обмеженій області D , потрібно:

1. На координатній площині побудувати задану область D .
2. Знайти критичні точки функції, які розташовані в заданій області, і обчислити значення функції в цих точках.
3. Знайти найменше та найбільше значення функції на лініях, що утворюють межу області.
4. З усіх знайдених значень вибрати найбільше і найменше.

Умовний екстремум

Для того, щоб знайти екстремум функції $z = f(x, y)$ при умові, що $\varphi(x, y) = 0$, потрібно:

1. Скласти функцію Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y),$$

де λ – множник Лагранжа.

2. Знайти стаціонарні точки із системи рівнянь

$$\begin{cases} f'_x(x, y) + \lambda \varphi'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) + \lambda \varphi'_y(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

3. У кожній стаціонарній точці $M_0(x_0, y_0, \lambda_0)$ обчислити диференціал другого порядку

$$d^2L(M_0) = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(M_0)dx^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(M_0)dxdy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(M_0)dy^2$$

з урахуванням, що dx та dy задовольняють рівнянню: $\varphi'_x(x_0, y_0)dx + \varphi'_y(x_0, y_0)dy = 0$.

Тоді:

- 1) $d^2L(M_0) > 0$, тоді $M_0(x_0, y_0)$ – точка умовного мінімуму функції $z = f(x, y)$;
- 2) $d^2L(M_0) < 0$, тоді $M_0(x_0, y_0)$ – точка умовного максимуму функції $z = f(x, y)$.

1.3.7. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ в прямокутнику, обмеженому прямими $x = 0, y = 0, x = 1, y = 2$.

1.3.8. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2y(4 - x - y)$ в трикутнику, обмеженому прямими $x = 0, y = 0, x + y = 6$.

1.3.9. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 - y^2$ в крузі $x^2 + y^2 \leq 4$.

1.3.10. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = xy + x + y$ в квадраті, обмеженому прямими $x = 1, x = 2, y = 2, y = 3$.

1.3.11. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + y^2$ всередині еліпса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.

1.3.12. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = e^{-x^2-y^2}(2x^2 + 3y^2)$ в крузі $x^2 + y^2 \leq 4$.

1.3.13. Визначити екстремум функції $z = x^2 + y^2$, при умові $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$.

1.3.14. Визначити екстремум функції $z = xy, x > 0, y > 0$, при умові $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$.

1.3.15. Визначити екстремум функції $z = xy$, при умові $y + x^2 - 3 = 0$.

[Відповіді до теми 1.3.](#)

Розділ 2. Кратні інтеграли.

Тема 2.1. Подвійний інтеграл. Заміна змінних у подвійному інтегралі.

Подвійним інтегралом функції $f(x, y)$ в області $D \subset \mathbb{R}^2$ називається інтеграл вигляду

$$\iint_D f(x, y) ds = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

У цьому випадку функція $f(x, y)$ називається інтегрованою в області D , D – областю інтегрування, x, y – змінними інтегрування, $ds = dx dy$ – елементом площі.

Властивості подвійних інтегралів

1. Нехай A, B довільні дійсні числа, а функції $f(x, y), g(x, y)$ неперервні в області D .

Тоді

$$\iint_D (Af(x, y) \pm Bg(x, y)) ds = A \iint_D f(x, y) ds \pm B \iint_D g(x, y) ds.$$

2. Якщо $D = D_1 \cup D_2$, де D_1 та D_2 не мають спільних внутрішніх точок, і функція $f(x, y)$ неперервна в кожній частині області D , то

$$\iint_D f(x, y) ds = \iint_{D_1} f(x, y) ds + \iint_{D_2} f(x, y) ds.$$

Обчислення подвійного інтеграла в декартових координатах

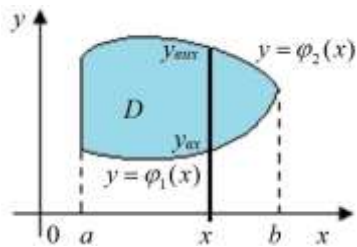
Нехай функція $f(x, y)$ неперервна в області D . По кроках розглянемо два випадки обчислення подвійних інтегралів, які залежать від вигляду області інтегрування.

1. У системі координат xOy побудувати область D .

2. Вибрати порядок інтегрування:

$$\int dx \int f(x, y) dy \quad \Bigg| \quad \int dy \int f(x, y) dx$$

3. Спроектувати D на вісь Ox та знайти на цій осі межові точки a та b . Це межі зовнішнього інтеграла.



4. Зафіксувати довільну точку x ($a \leq x \leq b$) на осі Ox і провести через неї пряму, паралельну до осі Oy , відмітити точки входу в область та виходу з неї. Значення координати y ($y_{вх} = \varphi_1(x)$, $y_{вих} = \varphi_2(x)$) в цих точках є відповідно нижньою та верхньою межами інтегрування внутрішнього інтеграла.

5. Записати область D наступним чином

$$D = \{(x, y) \mid \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b\}$$

6. Записати подвійний інтеграл у вигляді *повторного* інтеграла

$$\iint_D f(x, y) ds = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$

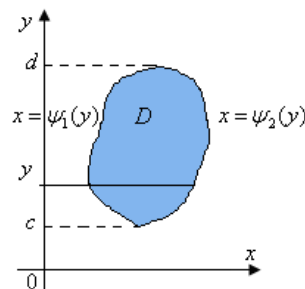
7. Обчислити повторний інтеграл

Спочатку обчислюється внутрішній інтеграл

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy,$$

в якому змінна x вважається сталою.

3. Спроектувати D на вісь Oy та знайти на цій осі межові точки c та d . Це межі зовнішнього інтеграла.



4. Зафіксувати довільну точку y ($c \leq y \leq d$) на осі Oy і провести через неї пряму, паралельну до осі Ox , відмітити точки входу в область та виходу з неї. Значення координати x ($x_{вх} = \psi_1(y)$, $x_{вих} = \psi_2(y)$) в цих точках є відповідно лівою та правою межами інтегрування внутрішнього інтеграла.

$$D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

$$\iint_D f(x, y) ds = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$$

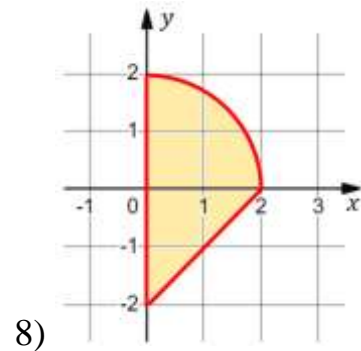
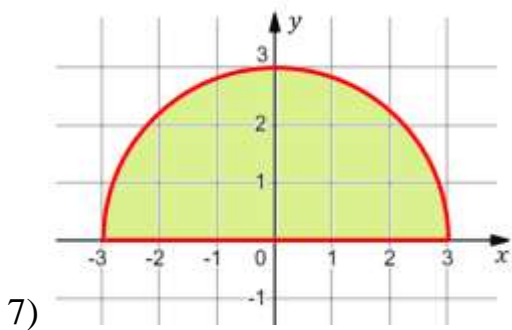
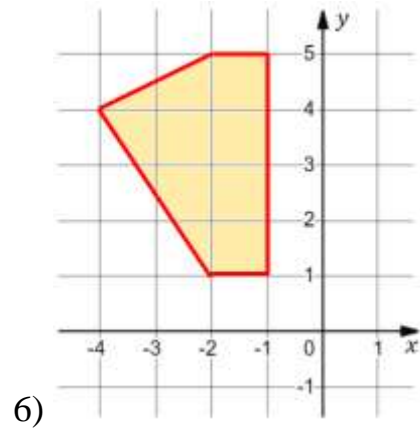
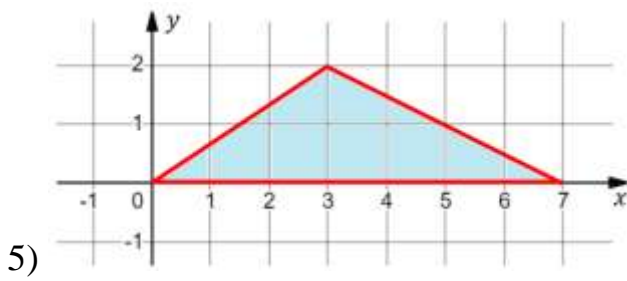
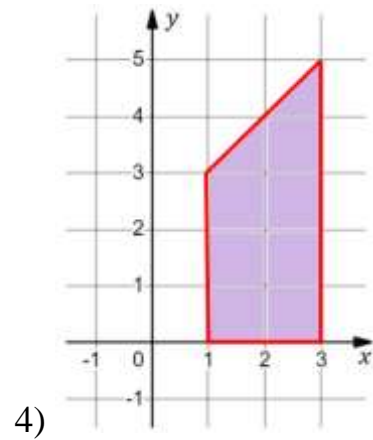
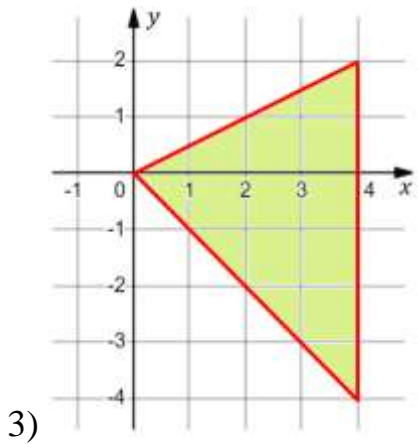
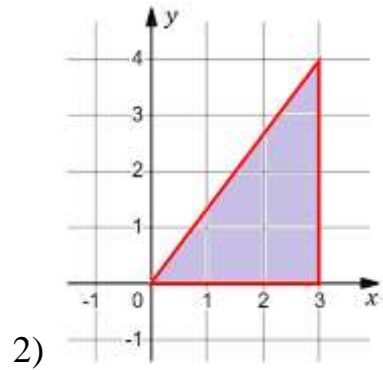
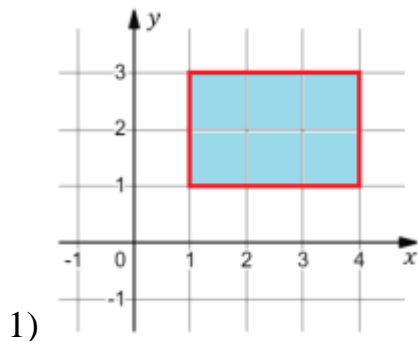
Спочатку обчислюється внутрішній інтеграл

$$\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx,$$

в якому змінна y вважається сталою.

2.1.1. Записати області, задані графічно, у вигляді

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} \text{ та } D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}.$$



2.1.2. Знайти межі двократного інтеграла $\iint_D f(x, y) dx dy$ при заданих областях інтегрування D .

- 1) D – прямокутник: $1 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2$;
- 2) D – трикутник зі сторонами: $x = 0, y = 0, x + y = 1$;
- 3) D – трикутник: $x + y \leq 1, x - y \leq 1, x \geq 0$;
- 4) D – чверть круга: $x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$;
- 5) D – область, обмежена параболою: $y = x^2, y = 4 - x^2$;
- 6) D – область, обмежена параболою: $y = x^2$ та $y = \sqrt{x}$;
- 7) D – область, обмежена еліпсом: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$;
- 8) D – круг: $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 \leq 4$;
- 9) D – трикутник зі сторонами $y = x, y = 2x, x + y = 6$;
- 10) D – область: $y \leq \frac{2}{1+x^2}, y \geq x^2$;
- 11) D – область: $y^2 \leq 2x, x \geq 0, x \leq 2, y \geq 0$.

2.1.3. Змінити порядок інтегрування.

- 1) $\int_1^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy$;
- 2) $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$;
- 3) $\int_0^2 dx \int_{x^2}^{2x} f(x, y) dy$;
- 4) $\int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x, y) dx$;
- 5) $\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$;
- 6) $\int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy$;
- 7) $\int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{4x-x^2}} f(x, y) dy$;
- 8) $\int_0^4 dy \int_{\frac{4y}{3}}^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y) dx$;
- 9) $\int_0^2 dx \int_{2x}^{6-x} f(x, y) dy$;
- 10) $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x, y) dy$;

$$\begin{aligned}
11) \int_1^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy; & \quad 12) \int_0^4 dy \int_0^{\frac{y}{2}} f(x, y) dx + \int_4^6 dy \int_0^{6-y} f(x, y) dx; \\
13) \int_{-1}^0 dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy; & \quad 14) \int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} f(x, y) dy; \\
15) \int_1^2 dy \int_y^{\frac{1}{y}} f(x, y) dx; & \quad 16) \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy + \int_1^4 dx \int_{-\sqrt{x}}^1 f(x, y) dy; \\
17) \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x, y) dx; & \quad 18) \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy; \\
19) \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy + \int_2^4 dx \int_{\sqrt{x-2}}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy + \int_4^6 dx \int_{\sqrt{x-2}}^2 f(x, y) dy; & \\
20) \int_0^2 dy \int_0^{y^3} f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_0^{10-y} f(x, y) dx + \int_4^7 dy \int_{y-4}^{10-y} f(x, y) dx. &
\end{aligned}$$

2.1.4. Обчислити.

$$\begin{aligned}
1) \int_0^{2\pi} dx \int_0^2 y \cos^2 x dy; & \quad 2) \int_0^{\pi/4} dy \int_0^{\pi/4} (\cos^2 x + \sin^2 y) dx; \\
3) \int_1^2 dx \int_x^{x^2} 2xy dy; & \quad 4) \int_1^3 dy \int_{y^3}^y (y-x) dx; \\
5) \int_0^1 dv \int_0^v e^{\frac{u}{v}} du; & \quad 6) \int_2^4 dt \int_0^t \frac{t^3}{p^2 + t^2} dp; \\
7) \int_1^2 dz \int_{1/z}^z \frac{z^2}{y^2} dy; & \quad 8) \int_{-3}^3 dw \int_{w^2-4}^5 (x+2w) dx; \\
9) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{5 \sin \varphi}^5 \rho d\rho; & \quad 10) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\omega \int_0^{3 \cos \omega} r^2 \sin^2 \omega dr; \\
11) \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dy; & \quad 12) \int_0^2 dx \int_0^x y^2 e^{-xy} dy.
\end{aligned}$$

2.1.5. Обчислити.

- 1) $\iint_D (x + y) ds$, якщо область D обмежена лініями $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 3$;
- 2) $\iint_D e^{x+y} ds$, якщо область D обмежена лініями $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$.
- 3) $\iint_D \cos(x + y) ds$, якщо область D обмежена лініями $x = 0$, $y = \pi$, $x = y$;
- 4) $\iint_D (y + x) ds$, якщо область D обмежена лініями $y = x$, $y^2 = x$;
- 5) $\iint_D (x^2 + y^2) ds$, якщо область D обмежена лініями $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = x^2$;
- 6) $\iint_D (x^3 + y^3) ds$, якщо область D обмежена лініями $x = 1$, $x = 4$, $y = x$, $y = \frac{x}{2}$;
- 7) $\iint_D e^{\frac{x}{y}} ds$, якщо область D обмежена лініями $x = 0$, $y = 1$, $y^2 = x$;
- 8) $\iint_D \frac{1}{y} \sin \frac{x}{y} ds$, якщо область D обмежена лініями $x = 0$, $y = \pi$, $y^2 = x$;
- 9) $\iint_D \frac{y^3}{x^2} ds$, якщо область D обмежена лініями $x = 1$, $y = \frac{x}{3}$, $y = \sqrt{x}$;
- 10) $\iint_D xy^2 ds$, якщо область D обмежена лініями $x = 0$, $y = x$, $y = 2 - x^2$;
- 11) $\iint_D xy ds$, якщо область D обмежена лініями $x = 2$, $y^2 = 2x$;
- 12) $\iint_D x^2(y - x) ds$, якщо область D обмежена лініями $y = x^2$, $y^2 = x$;
- 13) $\iint_D e^y ds$, якщо область D обмежена лініями $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$, $y = \ln x$;
- 14) $\iint_D \frac{x}{x^2 + y^2} ds$, якщо область D обмежена лініями $x = 2$, $y = x$, $2y = x$;
- 15) $\iint_D (2x + 3y + 1) ds$, якщо область D – трикутник з вершинами $(1,3)$, $(-1,-1)$ та $(2,-4)$;
- 16) $\iint_D x^2 y ds$, якщо область D обмежена лініями $y = 0$, $y = \sqrt{2x - x^2}$;
- 17) $\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} ds$, якщо область D – чверть круга $x^2 + y^2 \leq 1$, що розміщена у першому квадранті ($x \geq 0$, $y \geq 0$);
- 18) $\iint_D 2xy ds$, якщо область D обмежена лініями $x = 0$, $y = \sin x$, $y = \cos x$.

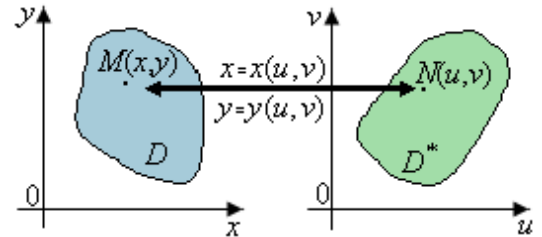
Заміна змінних у подвійному інтегралі.

Розглянемо подвійний інтеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$, де функція $f(x, y)$ неперервна в деякій замкненій і обмеженій області інтегрування D . Зробимо заміну змінних в інтегралі поклавши

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \end{cases}$$

де $x(u, v)$ та $y(u, v)$ неперервні разом зі своїми першими частинними похідними і визначник перетворення, який називається **якобіаном** (**визначником Якобі**), такий що

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$



У цьому випадку кожній парі змінних x та y відповідає єдина пара змінних u та v і навпаки, тобто здійснюються взаємно однозначне відображення замкненої обмеженої області D площини xOy на замкнену обмежену область D^* площини uOv .

Це дозволяє звести обчислення подвійного інтеграла по області D до обчислення подвійного інтеграла по області D^* за формулою

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv,$$

причому $dx dy = |J(u, v)| du dv$.

Межі в новому інтегралі розставляються залежно від виду області D^* . Заміну змінних в подвійному інтегралі рекомендується проводити таким чином, щоб спрощувались область інтегрування та підінтегральна функція.

Подвійний інтеграл в полярній системі координат

Перетворення з прямокутних координат на полярні координати є частинним випадком заміни змінних у подвійному інтегралі, що дуже часто виникає при застосуваннях подвійного інтегралу.

Полярні координати ρ та φ пов'язані з декартовими x та y співвідношеннями

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases}$$

причому якобіан перетворення $|J(\rho, \varphi)| = \rho$.

Тоді,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi.$$

Зображати окремо область D^* в системі $O\rho\varphi$ немає потреби. Потрібно зобразити область D в системі xOy і мати на увазі наступне:

якщо область D обмежена променями, які утворюють з полярною віссю кути α та β ($\alpha < \beta$), і кривими $\rho = \rho_1(\varphi)$ та $\rho = \rho_2(\varphi)$ ($\rho_1(\varphi) \leq \rho_2(\varphi)$), то область D^* можна описати як $D^* = \{(\rho, \varphi) \mid \alpha \leq \varphi \leq \beta, \rho_1(\varphi) \leq \rho \leq \rho_2(\varphi)\}$.

Отже,

$$\iint_D f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho.$$

Узагальнені полярні координати

$$\begin{cases} x = x_0 + a\rho^n \cos^m \varphi, \\ y = y_0 + b\rho^n \sin^m \varphi, \end{cases}$$

де числа x_0, y_0, a, b, n, m підбираються в кожному окремому випадку з міркувань зручності. Якобіан такого перетворення $|J(\rho, \varphi)| = abnm\rho^{2n-1} \cos^{m-1} \varphi \sin^{m-1} \varphi$.

2.1.6. Перейти у подвійному інтегралі $\iint_D f(x, y) dx dy$ до полярних координат ρ і φ та розставити межі інтегрування.

- 1) D – круг $x^2 + y^2 \leq R^2$;
- 2) D – круг $x^2 + y^2 \leq ax$;
- 3) D – круг $x^2 + y^2 \leq by$;
- 4) D – область, обмежена прямими $y = 0, y = x, x = 1$;
- 5) D – область, обмежена колами $x^2 + y^2 = 4x, x^2 + y^2 = 8x$ та прямими $y = x, y = 3x$;

6) D – сегмент, який відтинається від кола $x^2 + y^2 = 4$ прямою $x + y = 2$;

7) D – внутрішня частина правої петлі лемніскати Бернуллі

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

2.1.7. Перейти до полярної системи координат та обчислити інтеграли.

1) $\iint_D (3 - 2x - 3y) ds$, якщо область D – круг $x^2 + y^2 \leq 9$;

2) $\iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2} ds$, якщо область D – круг $x^2 + y^2 \leq 4$;

3) $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} ds$, якщо область D – кільце $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$;

4) $\iint_D \ln(1 + x^2 + y^2) ds$, якщо область D – верхня половина круга $x^2 + y^2 \leq 4$;

5) $\iint_D \sqrt{\frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}} ds$, якщо область D – частина круга $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \leq 0$;

6) $\iint_D \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} ds$, якщо область D визначається нерівностями

$$x^2 + y^2 \leq \pi^2, \quad x^2 + y^2 \geq \frac{\pi^2}{9};$$

7) $\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} ds$, якщо область D визначається нерівностями

$$x^2 + y^2 \leq a^2, \quad y \geq x, \quad y \leq \sqrt{3}x;$$

8) $\iint_D \arctg \frac{y}{x} ds$, якщо область D визначається нерівностями

$$x^2 + y^2 \leq 9, \quad x^2 + y^2 \geq 1, \quad y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}, \quad y \leq \sqrt{3}x;$$

9) $\iint_D y ds$, якщо область D визначається нерівностями

$$x^2 + y^2 \leq 2x, \quad y \geq 0, \quad y \leq \frac{x}{\sqrt{3}};$$

10) $\iint_D xy^2 ds$, якщо область D визначається нерівностями

$$x^2 + y^2 \leq 4y, \quad x^2 + y^2 \geq 2y;$$

11) $\iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} ds$, якщо область D визначається нерівностями

$$x^2 + y^2 \leq 8x, \quad x^2 + y^2 \geq 4x, \quad y \geq x, \quad y \leq 2x;$$

12) $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} ds$, якщо область D обмежена віссю абсцис ($y \geq 0$) та першим витком

кривої $x^2 + y^2 = a^2 \arctg \frac{y}{x}$;

13) $\iint_D x(x^2 + y^2)ds$, якщо область D визначається нерівностями

$$x^2 + y^2 \leq 2y, \quad x^2 + y^2 \geq \sqrt{3}, \quad x \geq 0;$$

14) $\iint_D xds$, якщо область D спільна частина кругів $x^2 + y^2 \leq 2x$, $x^2 + y^2 \leq 2y$;

15) $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}ds$, якщо область D обмежена віссю абсцис ($y \geq 0$) та кардіоїдою $(x^2 + y^2 + 2x)^2 = 4(x^2 + y^2)$;

16) $\iint_D \sqrt{(x^2 + y^2)^3}ds$, якщо область D внутрішня частина правої половини лемніскати Бернуллі $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$;

17) $\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}ds$, якщо область D розміщена між кривими

$$(x^2 + y^2 - x)^2 = 4(x^2 - y^2) \text{ та } x^2 + y^2 = 1.$$

2.1.8. Обчислити $\iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}ds$, якщо область D обмежена еліпсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

переходячи до нових змінних за формулами $x = a\rho \cos \varphi$, $y = b\rho \sin \varphi$.

2.1.9. Обчислити $\iint_D xyds$, якщо область D обмежена еліпсом $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ і розміщена у

першій чверті, переходячи до нових змінних за формулами $x = 2\rho \cos \varphi$, $y = 3\rho \sin \varphi$.

2.1.10. Обчислити $\iint_D xyds$, якщо область D обмежена лініями $xy = 1$, $x + y = \frac{5}{2}$,

переходячи до нових змінних за формулами $u = x + y$, $v = xy$.

2.1.11. Обчислити $\iint_D \sqrt{xy}ds$, якщо область D обмежена лініями $y^2 = x$, $y^2 = 2x$, $xy = 4$,

$xy = 9$, переходячи до нових змінних за формулами $y^2 = ux$, $xy = v$.

2.1.12. Обчислити $\iint_D ds$, якщо область D обмежена лініями $y^2 = x^3$, $16y^2 = x^3$, $y^2 = x$,

$y^2 = 16x$, переходячи до нових змінних за формулами $u = \frac{y^2}{x}$, $v = \frac{x^3}{y^2}$.

2.1.13. Обчислити $\iint_D ds$, якщо область D обмежена кривою $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, переходячи до

нових змінних за формулами $x = \rho \cos^3 \varphi$, $y = \rho \sin^3 \varphi$.

2.1.14. Обчислити $\iint_D \frac{x^2 \sin \frac{xy}{2}}{y}ds$, якщо область D обмежена параболою $x^2 = \frac{\pi}{3}y$, $x^2 = \frac{2\pi}{3}y$,

$y^2 = 2x$, $y^2 = 4x$, переходячи до нових змінних за формулами $x = \sqrt[3]{uv^2}$, $y = \sqrt[3]{u^2v}$.

2.1.15. Перейти до нових змінних та обчислити інтеграли.

1) $\iint_D xy ds$, якщо область D обмежена віссю Ox і верхнім півколом $(x - 2)^2 + y^2 = 1$;

2) $\iint_D \frac{1}{\sqrt{2a-x}} ds$, якщо область D – круг радіуса a , який дотикається до осей Ox і Oy і

лежить у першій чверті;

3) $\iint_D \sqrt{4 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} ds$, якщо область D обмежена лініями $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{4b^2} = 1$ і

розміщена у першій чверті;

4) $\iint_D (x + y)^3 (x - y)^2 ds$, якщо область D обмежена лініями $x + y = 1$, $x - y = 1$,
 $x + y = 3$, $x - y = -1$;

5) $\iint_D \sqrt{xy} ds$, якщо область D обмежена лініями $\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}\right)^4 = \frac{xy}{\sqrt{6}}$.

[Відповіді до теми 2.1.](#)

Тема 2.2. Застосування подвійного інтеграла до задач геометрії та механіки.

Площа плоскої фігури D обчислюється за формулою

$$S = \iint_D dx dy.$$

2.2.1. Обчислити площу фігури, що обмежена заданими лініями, за допомогою подвійного інтеграла.

- 1) $y = x, y = 5x, x = 1$;
- 2) $y = 0, x = 1, y = x^3$;
- 3) $y = x + 2, y = x^2$;
- 4) $y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}, y = 4$;
- 5) $y = x^2, 4y = x^2, y = 4$;
- 6) $y = x^2, 4y = x^2, x = \pm 2$;
- 7) $y^2 = 4 + x, x + 3y = 0$;
- 8) $x = 4 - y^2, x + 2y - 4 = 0$;
- 9) $4y = x^2 - 4x, x - y - 3 = 0$;
- 10) $y = 4x - x^2, y = 2x^2 - 5x$;
- 11) $y^2 = 10x + 25, y^2 = -6x + 9$;
- 12) $x + y = 1, x + 3y = 1, x = y, y = 2x$;
- 13) $xy = 1, x = 1, x = 3, y = 0$;
- 14) $xy = 4, y = x, x = 4$;
- 15) $xy = 4, y + x = 5$;
- 16) $y = e^x, x = 0, y = 0, x = 2$;
- 17) $y = e^x, y = e^{2x}, x = 1$;
- 18) $y = 2^x, y = 2^{-2x}, y = 4$;
- 19) $y = \ln x, x - y = 1, y = -1$;

20) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$;

21) $y = \cos 2x$, $y = \cos x$, $y = 0$ (найближча до початку координат частина);

22) $y = -1$, $y = -x$, $x^2 + y^2 = -2y$;

23) $y^2 = 4(1 - x)$, $x^2 + y^2 = 4$ (зовні параболи $\rho = 1$).

2.2.2. Обчислити площу фігури, що обмежена заданими лініями в полярній системі координат.

1) $\rho \cos \varphi = 1$, $\rho = 1$ (розглянути частину, що не містить полюса);

2) $\rho = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \varphi$, $\rho = 1$ (зовні кола $\rho = 1$);

3) $\rho = a(1 + \cos \varphi)$, $\rho = a \cos \varphi$, ($a > 0$);

4) $\rho = 4 \sin \varphi$, $\rho = 2 \sin \varphi$;

5) $\rho = a(1 - \cos \varphi)$, $\rho = a$ (зовні круга);

8) $\rho = 4(1 + \cos \varphi)$, $\rho \cos \varphi = 3$ (справа від прямої);

9) $\rho = a(1 - \cos \varphi)$, $\rho = a$ (зовні кардіоїди);

10) $\rho = a \sin 3\varphi$.

2.2.3. Обчислити площу фігури, що обмежена заданими лініями, виконавши відповідну заміну змінних.

1) $y^2 = x$, $y^2 = 8x$, $xy = 1$, $xy = 8$;

2) $xy = \frac{a^2}{2}$, $xy = 2a^2$, $y = \frac{x}{2}$, $y = 2x$;

3) $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 16$, $y \leq 2x$, $y \geq -\frac{1}{2}x$;

4) $x^2 + y^2 = 2y$, $y = x$, $x = 0$;

5) $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$, $y = 0$;

6) $x^2 + y^2 = 6x$, $x^2 + y^2 = 1$ (розглянути частину, що не містить полюса);

7) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$;

8) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$;

9) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$, $x^2 + y^2 = 2ax$;

10) $(x^2 + y^2)^2 = 2y^3$;

11) $(x^2 + y^2)^3 = x^4 + y^4$;

$$12) (x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2;$$

$$13) x^3 + y^3 = 2xy \text{ (петля).}$$

Об'єм тіла

Розглянемо тверде тіло $V \in \mathbb{R}^3$ (**циліндричний брус**), таке, що його верхня основа визначається неперервною додатною функцією $z = f(x, y)$, нижня основа - це замкнута область D в площині xOy , а бічна сторона є циліндричною поверхнею напрямна якої збігається з межею області D , а твірні паралельні осі Oz .

Об'єм циліндричного брусу обчислюється за формулою

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

2.2.4. Обчислити об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями, за допомогою подвійного інтеграла.

$$1) x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0;$$

$$2) y = 1 + x^2, y = 5, z = 0, z = 3x;$$

$$3) 2y^2 = x, y = 0, z = 0, x + 2y + z = 4;$$

$$4) 2x - y = 4, x = 0, y = 0, z = 4 - x^2, 4z = 0;$$

$$5) z^2 = xy, y = 0, x = 0, y = 4, x = 1, z = 0;$$

$$6) x^2 + y^2 = 8, x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 4;$$

$$7) z = x^2 + y^2, x + y = 1, x = 0, y = 0, z = 0;$$

$$8) z = x^2 + y^2 + 1, x = 0, y = 0, x = 4, y = 4;$$

$$9) z = x^2 + y^2, y = x^2, y = 1, z = 0;$$

$$10) z = 1 - x^2 - y^2, y = x, y = \sqrt{3}x, z = 0;$$

$$11) z = x^2 - y^2, y = 2, y = x, x = 0, z = 0;$$

$$12) z = 9 - y^2, 3x + 4y = 12, x = 0, y = 0 (y \geq 0);$$

$$13) y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}, z = 0, x + z = 6;$$

$$14) x^2 + y^2 = 2x, 2x - z = 0, 4x - z = 0;$$

$$15) x^2 + 4y^2 + z = 1, z = 0.$$

Площа поверхні

Розглянемо поверхню, що визначається неперервною та диференційованою функцією $z = f(x, y)$. Обчислимо площу частини цієї поверхні, обмеженої замкненою кривою L . Проекція кривої L на площину xOy є крива L_{xy} , яка обмежує область D_{xy} .

Площа поверхні обчислюється за формулою

$$P = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

Якщо рівняння поверхні задано рівняннями $x = g(y, z)$ або $y = h(x, z)$, то відповідні формули для обчислення площі поверхні мають вигляд

$$P = \iint_{D_{yz}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2} dy dz,$$

$$P = \iint_{D_{xz}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2} dx dz,$$

де області інтегрування будуть D_{yz} та D_{xz} - проекції поверхні на відповідні координатні площини yOz та xOz відповідно.

2.2.5. Обчислити площі:

- 1) частини площини $6x + 3y + 2z = 12$, що лежить у першому октанті;
- 2) частини площини $x + y + z = 3$, що вирізається циліндром $3x = y^2$ і площиною $x = 3$;
- 3) частини поверхні циліндра $2z = x^2$, що вирізається площинами $2y = x$, $y = 2x$, $x = 2\sqrt{2}$;
- 4) частини поверхні $z^2 = xy$, що вирізається площинами $x = 1$, $y = 4$, $z = 0$;
- 5) частини поверхні конуса $x^2 + y^2 = z^2$, що вирізається площиною $z = \sqrt{2} \left(\frac{x}{2} + 1\right)$ при $z \geq 0$;

- 6) частини поверхні кулі $x^2 + y^2 + z^2 = 100$, розміщена між площинами $x = -8$ та $x = 6$;
- 7) частини поверхні кулі $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, що вирізається циліндром $x^2 + y^2 = Rx$.
- 8) частини поверхні конуса $x^2 + y^2 = z^2$, що обмежена площинами $z = 1$ та $z = 2$
- 9) частини площини $z = x$, що розміщена всередині циліндра $x^2 + y^2 = 4$ вище площини $z = 0$;
- 10) частини поверхні конуса $x^2 + y^2 = z^2$, що розміщена всередині циліндра $x^2 + y^2 = 2x$;
- 11) частини поверхні конуса $x^2 + y^2 = z^2$, що вирізається циліндром $z^2 = 4y$;
- 12) частини поверхні конуса $x^2 - y^2 = z^2$, що розміщена всередині циліндра $x^2 + y^2 = 1$;
- 13) частини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, розміщена всередині циліндра $x^2 + y^2 = 2y$;
- 14) частини поверхні параболоїда $x^2 + y^2 = 2z$, що вирізається циліндром $x^2 + y^2 = 1$.
- 15) частини поверхні параболоїда $x = 1 - y^2 - z^2$, що вирізається циліндром $y^2 + z^2 = 1$.
- 16) повної поверхні тіла, обмеженої сферою $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ і параболоїдом $x^2 + y^2 = 2az$ ($z \geq 0$).

Маса пластинки

Розглянемо тонку пластинку у формі замкнутої області D в площині xOy з поверхневою густиною матеріалу $\gamma = \gamma(x, y)$ (якщо пластинка однорідна, то $\gamma(x, y) = 1$).

Маса пластинки форми D з поверхневою густиною $\gamma = \gamma(x, y)$ обчислюється за формулою

$$m = \iint_D \gamma(x, y) dx dy.$$

Центр мас пластинки

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \quad y_c = \frac{M_x}{m},$$

$$M_x = \iint_D y\gamma(x, y) dx dy, \quad M_y = \iint_D x\gamma(x, y) dx dy,$$

статичні моменти пластинки D з поверхневою густиною $\gamma = \gamma(x, y)$ відносно координатних осей.

Моменти інерції пластинки

Момент інерції пластинки відносно початку координат:

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\gamma(x, y) dx dy.$$

Моменти інерції пластинки відносно координатних осей.

$$I_x = \iint_D y^2\gamma(x, y) dx dy, \quad I_y = \iint_D x^2\gamma(x, y) dx dy.$$

2.2.6. Обчислити масу прямокутної пластинки $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 3$, якщо густина в кожній точці дорівнює кубу абсциси, помноженому на квадрат ординати цієї точки.

2.2.7. Обчислити масу круглої пластинки радіуса 2, якщо її густина пропорційна квадрату відстані точки від центра і дорівнює одиниці на краю пластинки.

2.2.8. Обчислити масу круглої пластинки радіуса R , якщо її густина пропорційна квадрату відстані точки від центра і дорівнює δ на краю пластинки.

2.2.9. Обчислити масу квадратної пластинки із стороною $2a$, якщо густина в кожній точці пропорційна квадрату відстані від точки перетину діагоналей, а у вершинах квадрату дорівнює одиниці.

2.2.10. Обчислити масу обмеженого двома концентричними колами радіусів r та R ($r < R$), якщо густина обернено пропорційна відстані точки від центра кіл і на колі радіуса r дорівнює одиниці.

2.2.11. Знайти статичні моменти заданих однорідних ($\gamma(x, y) = 1$) пластинок.

- 1) прямокутної пластинки зі сторонами a та b відносно сторони a ;
- 2) півкруглої пластинки радіуса R відносно діаметра;

3) пластинки у формі чверті круга $x^2 + y^2 = R^2$ ($x \geq 0, y \geq 0$) відносно координатних осей;

4) пластинки у формі фігури, обмеженої лініями $y = x^2, x + y = 2, y = 0$, відносно координатних осей;

5) пластинки у формі фігури, обмеженої лініями $y = \sin x$ і прямою, що проходить через точки $(0,0)$ та $(\frac{\pi}{2}, 1)$ ($y \geq 0$) відносно координатних осей;

6) пластинки у формі фігури, обмеженої кардіоїдою $\rho = a(1 + \cos \varphi)$, і полярною віссю, відносно координатних осей.

2.2.12. Обчислити центри мас однорідних ($\gamma(x, y) = 1$) пластинок у формі фігур, обмежених заданими лініями.

1) $x + y = 5, y = 0, x = 0$;

2) $y^2 = 4x, y = 0, x = 4$;

3) $x^2 + y^2 = a^2, x \geq 0, y \geq 0$;

4) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, x \geq 0, y \geq 0$;

5) $y = \sin x, y = 0, x = \frac{\pi}{4}$;

6) $y^2 = x^2 - x^4, x \geq 0$;

7) $x^2 + y^2 = a^2, y = x \operatorname{tg} \alpha, y \geq 0$;

8) $x^2 + y^2 = r^2, x^2 + y^2 = R^2, (r < R, y \geq 0)$;

9) $x^2 + y^2 = 13, xy = 6, x > 0$;

10) $y^2 = 4x + 4, y^2 = -2x + 4$;

11) $\rho = a(1 + \cos \varphi)$;

12) $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi (x > 0)$;

13) $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), y = 0 (0 \leq t \leq 2\pi)$.

2.2.13. Обчислити моменти інерції однорідних ($\gamma(x, y) = 1$) пластинок.

1) пластинки у формі прямокутника зі сторонами a та b відносно його сторін;

2) пластинки у формі трикутника, обмеженого прямими $y = 2x, x = 1$ та $y = 0$ відносно точки $(0,0)$;

- 3) пластинки у формі трикутника, обмеженого прямими $x + y = 1$, $x + 2y = 2$ та $y = 0$ відносно координатних осей;
- 4) пластинки у формі фігури, обмеженої лініями $y = a + \frac{x^2}{a}$, $y = 2x$ та $x = 0$ відносно вісі Oy ;
- 5) пластинки у формі квадрата зі стороною a відносно його вершини;
- 6) пластинки у формі фігури, обмеженої лініями $y = 4 - x^2$ та $y = 0$ відносно початку координат;
- 7) пластинки у формі круга радіуса a відносно дотичної;
- 8) пластинки у формі еліпса з піввісями a та b відносно координатних осей та початку координат;
- 9) пластинки у формі прямокутника зі сторонами a та b відносно точки перетину його діагоналей;
- 10) пластинки у формі рівнобедреного трикутника з основою a і висотою b відносно його вершини;
- 11) пластинки у формі круга радіуса a відносно точки на колі;
- 12) пластинки у формі круга радіуса a відносно центра та діаметра;
- 13) пластинки у формі фігури, обмеженої кардіоїдою зі сторонами $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ відносно полюса.

[Відповіді до теми 2.2.](#)

Тема 2.3. Потрійний інтеграл. Заміна змінних у потрійному інтегралі.

Потрійним інтегралом функції $f(x, y, z)$ в області $G \subset \mathbb{R}^3$ називається інтеграл вигляду

$$\iiint_G f(x, y, z) dv = \iiint_G f(x, y, z) dx dy dz.$$

В цьому випадку функція $f(x, y, z)$ називається інтегрованою в області G ; G – областю інтегрування; x, y, z – змінними інтегрування; $dv = dx dy dz$ – елементом об'єму.

Властивості потрійних інтегралів:

1. Нехай A, B - довільні дійсні числа, а $f(x, y, z)$ та $g(x, y, z)$ - неперервні в області G функції. Тоді

$$\iiint_G (Af(x, y, z) \pm Bg(x, y, z)) dv = A \iiint_G f(x, y, z) dv \pm B \iiint_G g(x, y, z) dv.$$

2. Якщо область G є об'єднанням двох областей G_1 та G_2 , таких, що вони не мають спільних внутрішніх точок, а функція $f(x, y, z)$ неперервна в обох частинах області G , то

$$\iiint_G f(x, y, z) dv = \iiint_{G_1} f(x, y, z) dv + \iiint_{G_2} f(x, y, z) dv.$$

Обчислення потрійних інтегралів в декартових координатах

Розстановку меж інтегрування рекомендується проводити наступним чином:

1. Зобразити поверхні, що обмежують тіло G у тривимірному просторі.
2. Спроектувати тіло G на площину xOy (або xOz , або yOz) – в замкнуту область D .
3. В області D з xOy зафіксувати довільну точку (x, y) , через яку провести пряму, паралельну осі Oz , і відзначити у напрямі цієї осі точки входу в область та виходу. Значення аплікати z ($z_{\text{вх}} = z_1(x, y)$ та $z_{\text{вих}} = z_2(x, y)$) в цих точках є відповідно нижньою та верхньою межами внутрішнього інтеграла по змінній z . (аналогічно діють і у випадку проектування на інші координатні площини)

4. Розставити межі у подвійному інтегралі в області D , залежно від виду області G .

Якщо область G визначається як

$$G = \{(x, y, z) | (x, y) \in D_{xy}, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\},$$

де D_{xy} – проекція тіла G на площину xOy , то область G можна записати у вигляді

$$G = \{(x, y, z) | a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x), z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}.$$

Тоді, потрійний інтеграл функції $f(x, y, z)$ в області G визначається як повторний

$$\iiint_G f(x, y, z) dv = \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Якщо область G визначається як

$$G = \{(x, y, z) : (x, z) \in D_{xz}, y_1(x, z) \leq y \leq y_2(x, z)\},$$

де D_{xz} – проекція тіла G на площину xOz , то

$$\iiint_G f(x, y, z) dv = \iint_{D_{xz}} dx dz \int_{y_1(x, z)}^{y_2(x, z)} f(x, y, z) dy.$$

Якщо область G можна записати як

$$G = \{(x, y, z) : (y, z) \in D_{yz}, x_1(y, z) \leq x \leq x_2(y, z)\},$$

де D_{yz} – проекція тіла G на площину yOz , то

$$\iiint_G f(x, y, z) dv = \iint_{D_{yz}} dy dz \int_{x_1(y, z)}^{x_2(y, z)} f(x, y, z) dx.$$

2.3.1. Обчислити задані повторні (трикратні) інтеграли.

$$1) \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 dz;$$

$$2) \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c (x + y + z) dz;$$

$$3) \int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^y xyz dz;$$

$$4) \int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^{xy} x^3 y^3 z dz.$$

2.3.2. Обчислити потрібні інтеграли.

1) $\iiint_G (x^2 + y^2) dv$, де G – область, обмежена координатними площинами та площинами $y = 1$, $x = 1$, $z = 1$;

2) $\iiint_G zy^2 e^{xyz} dv$, де G – область, обмежена площинами $x = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $y = 2$, $z = 1$, $z = 3$;

3) $\iiint_G 2y^2 \cos \pi xy dv$, де G – область, обмежена площинами $x = 0$, $y = 2x$, $y = 2$, $z = 0$, $z = 1$;

4) $\iiint_G (x + y + z) dv$, де G – область, обмежена координатними площинами та площиною $x + y + z = 5$;

5) $\iiint_G \frac{1}{(x+y+z+1)^3} dv$, де G – область, обмежена координатними площинами та площиною $x + y + z = 1$;

6) $\iiint_G x^2 yz dv$, де G – область, обмежена координатними площинами та площиною $x + y + z = 2$;

7) $\iiint_G \frac{1}{(x+y+z+1)^3} dv$, де G – область, обмежена координатними площинами та площинами $y = 2$, $x + z = 3$;

8) $\iiint_G y \cos(x + z) dv$, де G – область, обмежена поверхнями $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $z = 0$, $x + z = \frac{\pi}{2}$;

9) $\iiint_G (2x + 3y - z) dv$, де G – область, обмежена координатними площинами та площинами $z = a$, $x + y = b$ ($a > 0$, $b > 0$);

10) $\iiint_G x dv$, де G – область, обмежена координатними площинами та площинами $y = 3$, $x + z = 2$;

11) $\iiint_G xy^2 z^3 dv$, де G – область, обмежена поверхнями $z = xy$, $y = x$, $x = 1$, $z = 0$;

12) $\iiint_G xy dv$, де G – область, що обмежується поверхнями $z = xy$, $x + y = 1$, $z = 0$ ($z \geq 0$);

13) $\iiint_G (4 + z) dv$, де G – область, обмежена поверхнями $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 2$;

14) $\iiint_G xyz dv$, де G – область, обмежена поверхнями $y = x^2$, $x = y^2$, $z = xy$, $z = 0$;

15) $\iiint_G ydv$, де G – область, обмежена поверхнями $y = \sqrt{x}$, $z = 1 - x$, $z = 2 - 2x$;

16) $\iiint_G xdv$, де G – область, обмежена циліндром $x^2 + y^2 = 1$ і площинами $z = 0$, $z = 3$;

17) $\iiint_G 2zdv$, де G – область, обмежена конусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ і площинами $y = x$, $y = 2 - x$, $z = 0$;

18) $\iiint_G xydv$, де G – область, обмежена параболоїдом $z = x^2 + y^2$ і площинами $x = 0$, $y = 0$ (у першому октанті);

19) $\iiint_G (x - y)dv$, де G – область, обмежена параболоїдом $z = x^2 + y^2$, циліндром $y = x^2$ і площинами $y = 1$, $z = 0$;

20) $\iiint_G 4xyzdv$, де G – область, обмежена циліндрами $z = 1 - x^2$, $x = y^2$ та площинами $z = 0$, $y = 0$ ($y > 0$);

21) $\iiint_G zxdv$, де G – область, обмежена циліндрами $x^2 + z^2 = 1$, $y = x^3$ та координатними площинами ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$);

22) $\iiint_G 2ydv$, де G – область, обмежена параболоїдом $z = 3 - x^2 - 2y^2$, циліндром $y = \sqrt{x}$ та площинами $z = 0$, $x = 0$.

Заміна змінних в потрійному інтегралі. Загальний випадок

Розглянемо потрійний інтеграл $\iiint_G f(x, y, z)dx dy dz$ в області G . Проведемо зміну змінних в інтегралі, поклавши

$$\begin{cases} x = x(u, v, w), \\ y = y(u, v, w), \\ z = z(u, v, w), \end{cases} \quad (5.6)$$

де функції $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$, та $z(u, v, w)$ є однозначними, неперервними і мають неперервні частинні похідні в деякій обмеженій, замкнутій області G^* . У цьому випадку обмежена замкнута область G xuz -простору взаємно-однозначно відображається на область G^* uvw -простору.

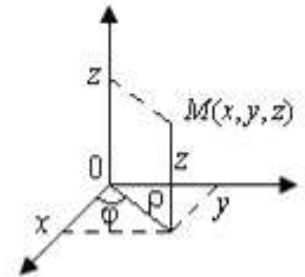
Обчислення потрійного інтеграла в області G зводиться до обчислення потрійного інтеграла в області G^* за формулою

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{G^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J(u, v, w)| du dv dw,$$

$$\text{де } J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ - якобiан перетворення.}$$

Потрiйний iнтеграл у цилiндричнiй системi координат

У цилiндричних координатах положення точки M в тривимiрному просторi визначається трьома числами ρ , φ та z , де ρ i φ є полярними координатами проєкцiї точки M на площину xOy , а z є аплiкатою точки: $M(\rho, \varphi, z)$.



Зв'язок між прямокутними та цилiндричними координатами задається формулами

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z, \end{cases}$$

де $0 \leq \rho \leq +\infty$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $-\infty \leq z \leq +\infty$, а якобiан перетворення

$$|J(\rho, \varphi, z)| = \rho \neq 0.$$

Тодi

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{G^*} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz.$$

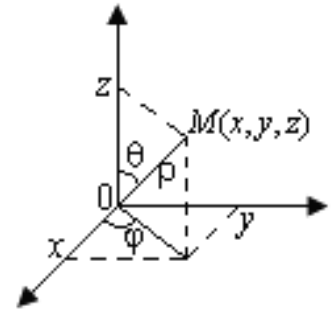
Узагальненi цилiндричнi координати

$$\begin{cases} x = x_0 + a\rho \cos \varphi, \\ y = y_0 + b\rho \sin \varphi, \\ z = z_0 + cz, \end{cases}$$

де числа x_0 , y_0 , z_0 , a , b , c пiдбираються в кожному окремому випадку з мiркувань зручностi. Якобiан такого перетворення $|J(\rho, \varphi, z)| = abc\rho$.

Потрійний інтеграл у сферичній системі координат

У сферичних координатах положення точки M , визначене трьома числами ρ , φ та θ , де ρ - відстань від початку координат до точки M , φ - полярний кут проекції точки M на площину xOy , а θ - кут між радіус-вектором точки M та віссю Oz . Тоді $M(\rho, \varphi, \theta)$.



Зв'язок між прямокутними та циліндричними координатами задається формулами

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \sin \theta, \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \\ z = \rho \cos \theta, \end{cases}$$

де $0 \leq \rho \leq +\infty$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$, а якобіан перетворення

$$|J(\rho, \varphi, \theta)| = \rho^2 \sin \theta.$$

Тоді

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{G^*} f(\rho \cos \varphi \sin \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \theta) \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta.$$

Узагальнені сферичні координати

$$\begin{cases} x = x_0 + a\rho \cos \varphi \sin \theta, \\ y = y_0 + b\rho \sin \varphi \sin \theta, \\ z = z_0 + c\rho \cos \theta, \end{cases}$$

де числа x_0, y_0, z_0, a, b, c підбираються в кожному окремому випадку з міркувань зручності. Якобіан такого перетворення $|J(\rho, \varphi, \theta)| = abc\rho^2 \sin \theta$.

2.3.3. Перейти у потрійному інтегралі $\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz$ до циліндричних координат ρ, φ, z або сферичних координат ρ, φ, θ і розставити межі інтегрування.

1) G – область, що знаходиться у першому октанті та обмежена циліндром $x^2 + y^2 = R^2$ та площинами $y = x$, $y = x\sqrt{3}$, $z = 0$, $z = 1$;

2) G – область, що обмежена циліндром $x^2 + y^2 = 2x$, параболоїдом $z = x^2 + y^2$ і площиною $z = 0$;

3) G – частина кулі $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, що лежить у першому октанті;

4) G – частина кулі $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, така що $x \geq 0$; $y \geq 0$; $z \leq 0$;

5) G – спільна частина двох куль $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, $x^2 + y^2 + (z - R)^2 \leq R^2$.

2.3.4. Обчислити інтеграли, перейшовши до циліндричних або сферичних координат.

$$1) \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^3 dz;$$

$$2) \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^1 z\sqrt{x^2 + y^2} dz;$$

$$3) \int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} (x^2 + y^2) dz;$$

$$4) \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dz.$$

2.3.5. Обчислити потрібні інтеграли, перейшовши до циліндричної системи координат.

1) $\iiint_G z dv$, де G – область, розташована у першому октанті і обмежена циліндром $x^2 + y^2 = a^2$ і площинами $z = 0$, $z = b$;

2) $\iiint_G z\sqrt{x^2 + y^2} dv$, де G – область, обмежена циліндром $x^2 + y^2 = 2x$ і площинами $y = 0$, $z = 0$, $z = a$;

3) $\iiint_G xz^2 dv$, де G – область, обмежена циліндром $x^2 + y^2 = 2y$ і площинами $x = 0$, $y = x$, $z = 0$, $z = 3$;

4) $\iiint_G (x^2 + y + z^2)^3 dv$, де G – область, обмежена циліндром $x^2 + z^2 = 1$ і площинами $y = 0$, $y = 1$;

5) $\iiint_G y dv$, де G – область, що обмежена конусом $y = \sqrt{x^2 + z^2}$ і площиною $y = a$ ($a > 0$);

6) $\iiint_G (x^2 + y^2) dv$, де G – область, обмежена параболоїдом $z = \frac{x^2 + y^2}{2}$ і площиною $z = 2$;

7) $\iiint_G zx dv$, де G – область, обмежена поверхнями $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 4$, $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $y = x$, $z = -1$ ($x > 0, y > 0$);

8) $\iiint_G z(x + y) dv$, де G – область, обмежена площинами $x = 0$, $z = 0$ ($x \geq 0, z \geq 0$) та поверхнями $y = 2 - x^2 - z^2$, $y = \sqrt{x^2 + z^2}$;

9) $\iiint_G y dv$, де G – область, розташована у першому октанті і обмежена координатними площинами та поверхнями $z = 1 + x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 2x$;

10) $\iiint_G y\sqrt{x^2 + y^2} dv$, де G – область, обмежена поверхнями $z = x^2 + y^2$, $z = 2x$;

11) $\iiint_G z dv$, де G – область, обмежена розташована у першому октанті і обмежена координатними площинами та поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = 2ay$;

12) $\iiint_G (x + y + z)^2 dv$, де G – спільна частина параболоїда $z \geq \frac{x^2 + y^2}{2a}$ та кулі $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2$.

2.3.6. Обчислити потрібні інтеграли, перейшовши до сферичної системи координат.

1) $\iiint_G (x^2 + y^2) dv$, де G – верхня половина кулі $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$;

2) $\iiint_G \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2}} dv$, де G – область, обмежена координатними площинами і сферою $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, що міститься у першому октанті;

3) $\iiint_G y^2 dv$, де область G задається нерівностями $r^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, $y \geq 0$;

4) $\iiint_G \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dv$, де G – область, обмежена сферою $x^2 + y^2 + z^2 = z$;

5) $\iiint_G x dv$, де G – область, що задається нерівностями $y \geq 0$, $z \geq 0$, $y \leq x$, $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$;

6) $\iiint_G \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dv$, де G – область, що задається нерівностями $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$;

7) $\iiint_G z dv$, де G – область, що задається нерівностями $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $z \geq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}$;

8) $\iiint_G \operatorname{arctg}^2 \frac{y}{x} dv$, де G – область, що задається нерівностями $r^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{3(x^2 + y^2)}$;

9) $\iiint_G \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dv$, де G – область, обмежена кульовим сектором з центром в початку координат, радіусом R і кутом 2α ($0 < \alpha < \pi$) при вершині;

10) $\iiint_G z \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dv$, де G – область, що задана нерівностями $x^2 + y^2 + z^2 \geq R^2$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz$.

2.3.7. Обчислити потрібні інтеграли, перейшовши до узагальненої циліндричної або сферичної системи координат.

1) $\iiint_G z dv$, де G – область, обмежена параболоїдом $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ і площиною $z = \pi^2$;

2) $\iiint_G 2z dv$, де G – область, що задається нерівностями $x^2 - 2x + y^2 - 2y + 1 \leq 0$, $0 \leq z \leq x - 1$, $y \geq x$, $x \geq 1$;

3) $\iiint_G \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} dv$, де G – область, обмежена еліпсоїдом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$;

4) $\iiint_G z dv$, де G – область, обмежена площиною $z = 0$ і верхньою половиною еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Відповіді до теми 2.3.

Тема 2.4. Застосування потрійного інтеграла

до задач геометрії та механіки.

Об'єм тіла $G \in \mathbb{R}^3$ обчислюється за формулою

$$V = \iiint_G dx dy dz .$$

2.4.1. Обчислити об'єм тіла за допомогою потрійного інтеграла.

1) $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{6} = 1, x = 0, y = 0, z = 0;$

2) $x + y + z = 4, x = 3, y = 2, x = 0, y = 0, z = 0;$

3) $z = 4 - y^2, z = 2 + y^2, x = -1, x = 2;$

4) $z = xy, z = x + y, x + y = 1, x = 0, y = 0;$

5) $y = 2\sqrt{x}, x = 2\sqrt{y}, z = 4 - x (z \geq 0);$

6) $x^2 = y, x^2 = 4 - 3y, z = 0, z = 9;$

7) $y^2 = 4a^2 - 3ax, y^2 = ax, z = \pm H;$

8) $z = \ln(x + 2), z = \ln(6 - x), x = 0, x + y = 2, x - y = 2;$

9) $z = \frac{x^2 + y^2}{a}, z = a;$

10) $z = 1 + x^2 + y^2, x = 2, y = 2, x = 0, y = 0, z = 0;$

11) $z^2 = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 4 (z \geq 0);$

12) $z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 4 (z \geq 0);$

13) $y = x^2 + z^2, y = 1, x = 0 (x \geq 0);$

14) $z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = x^2 + y^2;$

15) $z^2 = x^2 + y^2, 6 - z = x^2 + y^2 (z \geq 0);$

16) $2z = x^2 + y^2, y + z = 4;$

17) $y^2 + z^2 = 2Rx, y^2 + z^2 = 2Rz, x = 0;$

18) $x = z^2 + y^2, x = z^2 + 2y^2, y = z, y = 2z, z = 1;$

19) $z = (x - 1)^2 + y^2, z + 2x = 2;$

20) $z = x^2 + y^2, z = 2(x^2 + y^2), y = x^2, y = x;$

- 21) $z = x^2 + y^2, z = x + y$;
 22) $3z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 = 4$;
 23) $z \geq x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$;
 24) $x^2 + y^2 + z^2 = 2R^2, x^2 + y^2 = 2Rz$;
 25) $y^2 + z^2 = 3x, x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (внутрішній щодо параболоїда);
 26) $2x \geq x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0$;
 27) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z^2 = x^2 + y^2$ (зовнішній щодо конуса);
 28) $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 + z^2 = 16, z^2 = x^2 + y^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$;
 29) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = R^2(x^2 + y^2)$;
 30) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = R^2z^4$;
 31) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = R^3x$;
 32) $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = R^2z^3$.

Маса тіла

Розглянемо тіло $G \in \mathbb{R}^3$ з густиною матеріалу $\gamma = \gamma(x, y, z)$ (якщо тіло однорідне, то $\gamma(x, y, z) = 1$).

Маса тіла обчислюється за формулою

$$m = \iiint_G \gamma(x, y, z) dx dy dz.$$

2.4.2. Обчислити масу неоднорідного тіла, обмеженого заданими поверхнями, за відомої густини $\gamma = \gamma(x, y, z)$.

- 1) $x = 0, y = 0, z = 0, x = a, y = b, z = c$, якщо $\gamma = x + y + z$;
- 2) $x + y + z = a, x = 0, y = 0, z = 0$, якщо густина γ в кожній точці дорівнює аплікаті цієї точки;
- 3) $2x + z = 2a, x + z = a, y^2 = ax, y = 0 (y > 0)$, якщо густина γ в кожній точці дорівнює ординаті цієї точки;
- 4) $z^2 = x^2 + y^2, z = H$, якщо густина γ в кожній точці дорівнює аплікаті цієї точки;

5) $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, $z = 5$, якщо густина γ в кожній точці пропорційна висоті, а на нижній основі дорівнює одиниці;

6) $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$, $z = H$ ($H > 0$), якщо густина γ в кожній точці пропорційна квадрату відстані її від осі циліндра;

7) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, якщо густина γ в кожній точці дорівнює відстані від цієї точки до осі Oz ;

8) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z = 0$, якщо густина $\gamma(x, y, z) = z$;

9) $3z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, якщо густина $\gamma(x, y, z) = z$;

10) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z = 0$, ($z \geq 0$), якщо густина γ в кожній точці дорівнює відстані від цієї точки до центра кулі;

11) $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$, якщо густина γ в кожній точці дорівнює відстані цієї точки від початку координат;

12) $x^2 + y^2 + z^2 \geq a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2$, якщо густина γ в кожній точці обернено пропорційна відстані цієї точки від початку координат;

13) $x^2 + y^2 = 2az$, $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ ($z > 0$), якщо густина γ в кожній точці дорівнює сумі квадратів координат точки;

14) $x^2 + y^2 + z^2 \geq a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az$, якщо густина γ в кожній точці пропорційна відстані цієї точки до площини xOy ;

15) $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq 1$ ($a \leq R$, $b \leq R$), якщо густина γ в кожній точці дорівнює аплікаті цієї точки.

Центр мас тіла

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m}, \quad y_c = \frac{M_{xz}}{m}, \quad z_c = \frac{M_{xy}}{m},$$

де m – маса тіла, а M_{xy} , M_{xz} , M_{yz} статичні моменти тіла відносно координатних площин xOy , xOz та yOz відповідно:

$$M_{xy} = \iiint_G z\gamma(x, y, z) dx dy dz,$$

$$M_{xz} = \iiint_G y\gamma(x, y, z) dx dy dz,$$

$$M_{yz} = \iiint_G x\gamma(x, y, z) dx dy dz.$$

2.4.3. Обчислити статичні моменти однорідного тіла, обмеженого заданими поверхнями.

1) $x = 0, y = 0, z = 0, x = a, y = b, z = c$, відносно граней паралелепіпеда;

2) $z = x^2 + y^2, z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$, відносно площини zOy ;

3) $z^2 = y^2 - x^2, y = 1$, відносно площини zOx ;

4) $z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = H$, відносно площини xOy ;

5) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, z = 0 (z \geq 0)$, відносно площини xOy .

2.4.4. Обчислити статичний момент спільної частини куль $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$, відносно площини xOy , якщо густина γ в кожній точці дорівнює відстані цієї точки від площини xOy .

2.4.5. Обчислити центр мас однорідного тіла, обмеженого заданими поверхнями.

1) $x = 0, y = 1, y = 3, x + 2z = 3$;

2) $x + y + z = 8, x = 2, x = 0, y = 4, y = 0, z = 0$;

3) $z = \frac{y^2}{2}, 2x + 3y = 12, x = 0, y = 0, z = 0$;

4) $y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}, x + z = 6, z = 0$;

5) $az = a^2 - x^2 - y^2, z = 0$;

6) $z = x^2 + y^2, x + y = 1, x = 0, y = 0, z = 0$;

7) $4x = y^2 + 2z^2, x = 2$;

8) $z = x^2 + y^2, x + y = z$;

9) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0$;

10) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$;

11) $x^2 + y^2 = R^2, y^2 + z^2 = R^2 (z > 0)$;

12) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x^2 + y^2 = Rx$.

2.4.6. Обчислити центр мас півкулі $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$, якщо його густина γ в кожній точці дорівнює відстані від точки до центра кулі.

Моменти інерції тіла

Момент інерції тіла відносно початку координат:

$$I_0 = \iiint_G (x^2 + y^2 + z^2)\gamma(x, y, z) dx dy dz.$$

Моменти інерції тіла відносно координатних осей:

$$I_x = \iiint_G (y^2 + z^2)\gamma(x, y, z) dx dy dz,$$

$$I_y = \iiint_G (x^2 + z^2)\gamma(x, y, z) dx dy dz,$$

$$I_z = \iiint_G (x^2 + y^2)\gamma(x, y, z) dx dy dz.$$

Моменти інерції тіла відносно координатних площин:

$$I_{xy} = \iiint_G z^2\gamma(x, y, z) dx dy dz,$$

$$I_{yz} = \iiint_G x^2\gamma(x, y, z) dx dy dz,$$

$$I_{xz} = \iiint_G y^2\gamma(x, y, z) dx dy dz.$$

2.4.7. Обчислити момент інерції відносно осі Oz однорідного тіла, обмеженого заданими поверхнями.

- 1) $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$, $z = 0$, $z = c$;
- 2) $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y = a$, $x + z = a$;
- 3) $x + y + z = a\sqrt{2}$, $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$;

$$4) z^2 = 2ax, z = 0, x^2 + y^2 = ax;$$

$$5) z = 0, z = \frac{7}{3}(3 - y), y = \frac{3}{5}x^2;$$

$$6) z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = H;$$

$$7) x = \sqrt{z^2 + y^2}, x = H;$$

$$8) x^2 + y^2 + z^2 = 2, x^2 + y^2 = z^2 (z > 0);$$

$$9) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

2.4.8. Обчислити момент інерції відносно осі циліндра $x^2 + y^2 = R^2, z = 0, z = H > 0$), якщо густина γ в кожній точці пропорційна квадрату відстані її від осі циліндра.

2.4.9. Обчислити момент інерції відносно осі Oz тіла, що обмежене площинами $x = 2, y = 0, y = 1, z = 0$ та циліндром $z^2 = 6x$, якщо густина γ в кожній точці пропорційна відстані цієї точки від площини xOy .

2.4.10. Обчислити момент інерції відносно початку координат однорідного тіла, обмеженого заданими поверхнями.

$$1) z = x^2 + y^2, z = 4;$$

$$2) z^2 = x^2 - y^2, x^2 + y^2 + z^2 = R^2;$$

$$3) x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

2.4.11. Обчислити моменти інерції відносно координатних площин однорідного тіла, обмеженого заданими поверхнями.

$$1) x^2 = y^2 + z^2, x = H > 0;$$

$$2) \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, x = 0, y = 0, z = 0;$$

$$3) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

$$4) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, z = c > 0;$$

$$5) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a};$$

$$6) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{z}{c}, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

Відповіді до теми 2.4.

Розділ 3. Криволінійні та поверхневі інтеграли першого роду.

Тема 3.1. Криволінійні інтеграли першого роду (по довжині дуги).

Розглянемо дугу кривої L між точками A та B і неперервну в області, що містить криву L , функцію f .

Означення. *Криволінійним інтегралом першого роду* або *криволінійним інтегралом по довжині дуги* називається інтеграл вигляду

$$\text{в } \mathbb{R}^2: \int_{L_{AB}} f(x, y) d\ell;$$

$$\text{в } \mathbb{R}^3: \int_{L_{AB}} f(x, y, z) d\ell,$$

де $d\ell$ називається елемент дуги кривої.

Властивості криволінійних інтегралів першого роду.

1. Якщо функції f та g неперервні вздовж кривої L_{AB} , то для будь-яких дійсних чисел C_1 та C_2 виконується

$$\int_{L_{AB}} (C_1 f \pm C_2 g) d\ell = C_1 \int_{L_{AB}} f d\ell \pm C_2 \int_{L_{AB}} g d\ell.$$

2. Нехай функція f неперервна вздовж кривої L_{AB} . Припустимо, що крива складається з двох частин: $L_{AB} = L_{AC} \cup L_{CB}$. Тоді

$$\int_{L_{AB}} f d\ell = \int_{L_{AC}} f d\ell + \int_{L_{CB}} f d\ell.$$

3. Криволінійний інтеграл першого роду не залежить від орієнтації дуги, або ж від напрямку інтегрування

$$\int_{L_{AB}} f d\ell = \int_{L_{BA}} f d\ell.$$

Обчислення криволінійних інтегралів першого роду

1. Якщо крива L_{AB} визначена в просторі \mathbb{R}^2 у параметричному вигляді $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ або

у векторній формі $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, $t \in [a, b]$.

Тоді елемент дуги кривої

$$d\ell = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

та

$$\int_{L_{AB}} f(x, y) d\ell = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

2. Якщо крива визначена у явному вигляді $y = y(x)$, де $a \leq x \leq b$, то її можна записати у векторній формі $\vec{r}(x) = x\vec{i} + y(x)\vec{j}$, $x \in [a, b]$ і

$$\int_{L_{AB}} f(x, y) d\ell = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

3. Якщо криву задано полярним рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, де $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, то

$$\vec{r}(\varphi) = \rho(\varphi) \cos \varphi \vec{i} + \rho(\varphi) \sin \varphi \vec{j}, \varphi \in [\alpha, \beta] \text{ і}$$

$$\int_{L_{AB}} f(x, y) d\ell = \int_{\alpha}^{\beta} f(\rho(\varphi) \cos \varphi, \rho(\varphi) \sin \varphi) \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi.$$

4. Якщо крива в просторі \mathbb{R}^3 визначена у параметричному вигляді $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$ або

у векторній формі $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, $t \in [a, b]$, то

$$\int_{L_{AB}} f(x, y, z) d\ell = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

3.1.1. Обчислити задані криволінійні інтеграли першого роду в двовимірному просторі.

1) $\int_L \frac{d\ell}{x-y}$, де L – відрізок прямої $y = \frac{x}{2} - 2$ від точки $A(0, -2)$ до точки $B(4, 0)$;

2) $\int_L (3x + 4y) d\ell$, де L – відрізок прямої від точки $A(0, 0)$ до точки $B(4, 3)$;

- 3) $\int_L (x + y) d\ell$, де L – контур трикутника з вершинами $A(1,0)$, $B(0,1)$, $O(0,0)$;
- 4) $\int_L xz d\ell$, де L – контур квадрата $|x| + |z| = a$ ($a > 0$);
- 5) $\int_L y d\ell$, де L – дуга параболи $y^2 = 2x$, що відтинається параболою $x^2 = 2y$;
- 6) $\int_L \frac{y}{\sqrt{x}} d\ell$, де L – дуга кривої $y^2 = \frac{4}{9}x^3$ від точки $A(3, 2\sqrt{3})$ до точки $B\left(8, \frac{32\sqrt{2}}{3}\right)$;
- 7) $\int_L (e^y - \cos x) d\ell$, де L – дуга кривої $y = \ln \sin x$ від точки $A\left(\frac{\pi}{6}, \ln \frac{1}{2}\right)$ до точки $B\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$;
- 8) $\int_L y^2 d\ell$, де L – перша арка циклоїди $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t); \end{cases}$
- 9) $\int_L \frac{3x-y}{1-y} d\ell$, де L – дуга кривої $\begin{cases} x = \frac{t^3}{3} - t, \\ y = t^2 + 2, \end{cases} 0 \leq t \leq 2$;
- 10) $\int_L (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}) d\ell$, де L – чверть астроїди $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$ від точки $A(1,0)$ до точки $B(0,1)$;
- 11) $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} d\ell$, де L – дуга розгортки кола $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t), \\ y = a(\sin t - t \cos t), \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi$;
- 12) $\int_L (x^2 + y^2)^n d\ell$, де L – коло $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi$;
- 13) $\int_L xy d\ell$, де L – чверть еліпса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, що лежить в першій чверті;
- 14) $\int_L (x^2 + y^2)^2 d\ell$, де L – дуга логарифмічної спіралі $\rho = ae^{m\varphi}$ ($m > 0$) від точки $A(1, a)$ до точки $B(-\infty, 0)$;
- 15) $\int_L (x - y) d\ell$, де L – коло $x^2 + y^2 = ax$ (Вказівка: перейти до полярної системи координат);
- 16) $\int_L (x + y) d\ell$, де L – права половина лемніскати $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$;
- 17) $\int_L (u^2 + v^2)^n d\ell$, де L – коло $u^2 + v^2 = a^2$ (Вказівка: перейти до полярної системи координат);
- 18) $\int_L \arctg \frac{y}{x} d\ell$, де L – частина спіралі Архімеда $\rho = 2\varphi$, що знаходиться всередині круга радіуса R з центром в початку координат (полюсі).

3.1.2. Обчислити задані криволінійні інтеграли першого роду в тривимірному просторі.

1) $\int_L (2x - y + 4z) d\ell$, де L – відрізок прямої від точки $A(1, -2, 2)$ до точки $B(0, 1, 3)$;

2) $\int_L xyz d\ell$, де L – відрізок прямої від точки $A(1, 0, 1)$ до точки $B(2, 2, 3)$;

3) $\int_L (x + z) d\ell$, де L – дуга кривої $\begin{cases} x = t, \\ y = \frac{3t^2}{\sqrt{2}}, \\ z = t^3, \end{cases} 0 \leq t \leq 1$;

4) $\int_L \frac{z^2}{x^2 + y^2} d\ell$, де L – перший виток гвинтової лінії $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \\ z = a t; \end{cases}$

5) $\int_L (2z - \sqrt{x^2 + y^2}) d\ell$, де L – перший виток кінчної гвинтової лінії $\begin{cases} x = t \cos t, \\ y = t \sin t, \\ z = t; \end{cases}$

6) $\int_L (x^2 - z^2 + y^2) d\ell$, де L – коло, утворене перетином циліндра $x^2 + z^2 = 4$ і площини $y = 2$;

7) $\int_L xyz d\ell$, де L – чверть кола, утвореного перетином сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ і циліндра $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$;

8) $\int_L (x + y) d\ell$, де L – чверть кола, утвореного перетином сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ і площини $y = x$;

9) $\int_L \sqrt{2y^2 + z^2} d\ell$, де L – коло, утворене перетином сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ і площини $x = y$.

Застосування криволінійних інтегралів першого роду

Довжина дуги кривої

Довжина дуги кривої L між точками A та B обчислюється за формулою

$$L = \int_{L_{AB}} d\ell.$$

Площа циліндричної поверхні

Нехай в площині xOy задано криву L і додатно визначену для точок кривої L поверхню $z = f(x, y)$. Розглянемо циліндричну поверхню напрямною якої буде задана крива, а твірна паралельна осі Oz .

Площа частини циліндричної поверхні, що обмежена знизу дугою кривої L між точками A та B , а зверху проекцією L на поверхню $z = f(x, y)$ визначається за формулою

$$P = \int_{L_{AB}} f(x, y) d\ell.$$

Маса та центр мас матеріальної кривої

Розглянемо матеріальну криву L із заданою лінійною густиною γ

$$\text{в } \mathbb{R}^2: \gamma = \gamma(x, y);$$

$$\text{в } \mathbb{R}^3: \gamma = \gamma(x, y, z).$$

Маса матеріальної кривої обчислюється за формулою

$$m = \int_L \gamma d\ell.$$

Центр мас матеріальної кривої

$$\text{в } \mathbb{R}^2: x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_L x\gamma(x, y) d\ell}{\int_L \gamma(x, y) d\ell}, \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\int_L y\gamma(x, y) d\ell}{\int_L \gamma(x, y) d\ell};$$

$$\text{в } \mathbb{R}^3: x_c = \frac{1}{m} \int_L x\gamma(x, y, z) d\ell, \quad y_c = \frac{1}{m} \int_L y\gamma(x, y, z) d\ell, \quad z_c = \frac{1}{m} \int_L z\gamma(x, y, z) d\ell.$$

Моменти інерції матеріальної кривої

Розглянемо матеріальну криву L у двовимірному просторі із заданою лінійною густиною $\gamma = \gamma(x, y)$.

Момент інерції матеріальної кривої відносно початку координат

$$I_0 = \int_L (x^2 + y^2)\gamma(x, y) d\ell.$$

Момент інерції матеріальної кривої відносно координатних осей

$$I_x = \int_L y^2\gamma(x, y) d\ell,$$

$$I_y = \int_L x^2\gamma(x, y) d\ell.$$

Для тривимірної матеріальної кривої L з густиною $\gamma = \gamma(x, y, z)$ маємо

$$I_0 = \int_L (x^2 + y^2 + z^2)\gamma(x, y, z)d\ell,$$

$$I_x = \int_L y^2\gamma(x, y, z)d\ell,$$

$$I_y = \int_L x^2\gamma(x, y, z)d\ell,$$

$$I_z = \int_L z^2\gamma(x, y, z)d\ell.$$

3.1.3. Обчислити довжину дуги заданої кривої.

1) $y = \operatorname{ch}x, (0 \leq x \leq \ln 2);$

2) $y = 1 - \ln \cos x, (0 \leq x \leq \frac{\pi}{6});$

3) $\begin{cases} x = 8 \sin t + 6 \cos t, \\ y = 6 \sin t - 8 \cos t, \end{cases} 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2};$

4) $\rho = 8 \cos^3 \frac{\varphi}{3}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2};$

5) $\begin{cases} x = 3t, \\ y = 3t^2, \\ z = 2t^3, \end{cases}$ від точки $A(0,0,0)$ до точки $B(3,3,2);$

6) $\begin{cases} x = 2e^t \cos t, \\ y = 2e^t \sin t, \\ z = 2e^t, \end{cases} 0 \leq t \leq \pi.$

3.1.4. Обчислити площу бічної поверхні параболічного циліндра $y = \frac{3}{8}x^2$, що обмежений площинами $z = 0, x = 0, z = x, y = 6$.

3.1.5. Обчислити площу циліндричної поверхні, розміщену між площиною xOy і заданою поверхнею.

1) $x^2 + y^2 = 1, z = 1 + x^2;$

$$2) y^2 = 2x, z = \sqrt{2x - 4x^2};$$

$$3) y^2 = \frac{4}{9}(x - 1)^3, z = 2 - \sqrt{x};$$

$$4) x^2 + y^2 = R^2, 2Rz = xy;$$

$$5) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b), z = kx, z = 0 (z \geq 0) \text{ (“циліндрична підкова”)};$$

$$6) x^2 + y^2 = Rx, x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (z \geq 0).$$

3.1.6. Обчислити масу дуги кривої із заданою густиною.

1) $y = 1 + 2x, 0 \leq x \leq 3$, якщо густина в кожній точці дорівнює квадрату ординати точки;

2) $y = \ln x, 1 \leq x \leq 3$, якщо густина в кожній точці дорівнює квадрату абсциси точки;

3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b)$, якщо густина в кожній точці дорівнює $|y|$;

4) кардіоида $\rho = a(1 + \cos \varphi)$, якщо густина в кожній точці пропорційна радіус-вектору цієї точки з коефіцієнтом пропорційності k ;

5) гвинтова лінія $\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 3 \sin t, \\ z = 4t, \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi$, якщо густина в кожній точці дорівнює $4z$.

3.1.7. Знайти координати центра мас однорідних кривих.

$$1) y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}, 0 \leq x \leq b, a \leq y \leq h;$$

$$2) x^2 + y^2 = 4, y \geq 0;$$

$$3) \text{ дуга астроїди } x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, y \geq 0;$$

$$4) \text{ дуга гвинтової лінії } \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \\ z = bt, \end{cases} 0 \leq t \leq \pi;$$

$$5) x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$$

3.1.8. Знайти центр мас дуги кривої $\begin{cases} x = t, \\ y = \frac{\sqrt{2}t^2}{2}, \\ z = \frac{t^3}{3}, \end{cases} 0 \leq t \leq 1$, якщо густина $\gamma = xyz$.

3.1.9. Знайти статичний момент першого витка кінчної гвинтової лінії $\begin{cases} x = t \cos t, \\ y = t \sin t, \\ z = t, \end{cases}$

відносно площини xOy , якщо густина лінії $\gamma = 2z^2$.

3.1.10. Знайти моменти інерції відносно координатних осей і початку координат відрізка однорідної прямої $y + 2x - 1 = 0$ ($y \geq 0, x \geq 0$).

3.1.11. Знайти моменти інерції відносно координатних осей і початку координат однорідної дуги кола $x^2 + y^2 = 4$ ($y \geq 0, x \geq 0$).

3.1.12. Знайти моменти інерції відносно координатних осей першого витка однорідної

гвинтової лінії $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \\ z = \frac{h}{2\pi} t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$

[Відповіді до теми 3.1.](#)

Тема 3.2. Поверхневі інтеграли першого роду.

Поняття поверхневого інтеграла першого роду

Розглянемо функцію $z = z(x, y)$, яка визначає замкнуту частину S поверхні у тривимірному просторі. Нехай D_{xy} є проекцією поверхні S на площину xOy , причому існує площа області D_{xy} . В такому випадку проекція називається регулярною.

Нехай неперервна функція $f(x, y, z)$ визначена та неперервна на цій поверхні.

Означення. Поверхневим інтегралом першого роду по поверхні S називається інтеграл вигляду

$$\iint_S f(x, y, z) d\sigma,$$

де $d\sigma$ називається елемент площі поверхні.

Властивості поверхневого інтеграла першого роду

1. Якщо функції $f(x, y, z)$ та $g(x, y, z)$ неперервні на поверхні S , то для дійсних чисел C_1 та C_2

$$\iint_S [C_1 f(x, y, z) + C_2 g(x, y, z)] d\sigma = C_1 \iint_S f(x, y, z) d\sigma + C_2 \iint_S g(x, y, z) d\sigma.$$

2. Нехай функція $f(x, y, z)$ неперервна на поверхні S . Якщо поверхня S складається з двох частин S_1 та S_2 , що не мають спільних внутрішніх точок, то

$$\iint_S f(x, y, z) d\sigma = \iint_{S_1} f(x, y, z) d\sigma + \iint_{S_2} f(x, y, z) d\sigma.$$

Обчислення поверхневого інтеграла першого роду

Розглянемо поверхню S визначену рівнянням $z = z(x, y)$. Нехай область D_{xy} є проекцією поверхні S на площину xOy . Припустимо, що функції $z(x, y)$, $z'_x(x, y)$, $z'_y(x, y)$ є неперервними в області D_{xy} , а функція $f(x, y, z)$ є неперервною на поверхні S .

Тоді $d\sigma = \sqrt{1 + (z'_x(x, y))^2 + (z'_y(x, y))^2} dx dy$ і

$$\iint_S f(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + (z'_x(x, y))^2 + (z'_y(x, y))^2} dx dy.$$

Якщо поверхню визначено рівнянням $y = y(x, z)$, а її проекцією в площину xOz є область D_{xz} , то

$$\iint_S f(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z) \sqrt{1 + (y'_x(x, z))^2 + (y'_z(x, z))^2} dx dz,$$

де $y(x, z)$, $y'_x(x, z)$, $y'_z(x, z)$ неперервні в точках області D_{xz} .

Для поверхні визначеної рівнянням $x = x(y, z)$ маємо

$$\iint_S f(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + (x'_y(y, z))^2 + (x'_z(y, z))^2} dy dz,$$

де $x(y, z)$, $x'_y(y, z)$, $x'_z(y, z)$ неперервні в області D_{yz} - проекції поверхні S на площину zOy .

Для поверхні S визначеної у параметричному вигляді

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in D,$$

маємо

$$d\sigma = \sqrt{J_1^2(u, v) + J_2^2(u, v) + J_3^2(u, v)} du dv,$$

де

$$J_1(u, v) = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix} = y'_u z'_v - y'_v z'_u, \quad J_2(u, v) = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix} = z'_u x'_v - z'_v x'_u,$$

$$J_3(u, v) = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} = x'_u y'_v - x'_v y'_u.$$

Тоді,

$$\iint_S f(x, y, z) d\sigma = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{J_1^2(u, v) + J_2^2(u, v) + J_3^2(u, v)} du dv.$$

3.2.1. Обчислити поверхневі інтеграли першого роду по заданих поверхнях.

1) $\iint_S (2x + y + z - 1) d\sigma$, де S – частина площини $3x + y + z = 1$, розміщена в першому октанті;

2) $\iint_S \frac{1}{(1+x+y)^2} d\sigma$, де S – частина площини $x + y + z = 1$, розміщена в першому октанті;

3) $\iint_S xyz d\sigma$, де S – частина площини $x + y + z = 1$, розміщена в першому октанті;

4) $\iint_S (6x + 4y + 3z) d\sigma$, де S – частина площини $x + 2y + 3z = 6$, розміщена в першому октанті;

5) $\iint_S (y + z + \sqrt{a^2 - x^2}) d\sigma$, де S – частина циліндра $x^2 + y^2 = a^2$, розміщена між площинами $z = 0$ та $z = H$;

6) $\iint_S (x^2 + y^2) d\sigma$, де S – частина параболоїда $x^2 + y^2 = 2z$, що відтинається площиною $z = 1$;

7) $\iint_S \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma$, де S – частина конуса $z^2 = x^2 + y^2$, що відтинається площинами $z = 0$ та $z = 1$;

8) $\iint_S (z^2 + y^2) d\sigma$, де S – частина конуса $x^2 = z^2 + y^2$, що відтинається площинами $x = 0$ та $x = 1$;

9) $\iint_S (x^2 y^2 + x^2 z^2 + y^2 z^2) d\sigma$, де S – частина конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, що відтинається циліндром $x^2 + y^2 = 2x$;

10) $\iint_S \sqrt{a^2 - z^2 - x^2} d\sigma$, де S – півсфера $y = \sqrt{a^2 - z^2 - x^2}$;

11) $\iint_S x d\sigma$, де S – частина сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, розміщена в першому октанті;

12) $\iint_S z d\sigma$, де S – півсфера $y = \sqrt{a^2 - x^2 - z^2}$;

13) $\iint_S x^2 y^2 d\sigma$, де S – півсфера $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$;

14) $\iint_S \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} d\sigma$, де S – частина сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, розміщена в першому октанті;

15) $\iint_S (x^2 + y^2) d\sigma$, де S – сфера $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Застосування поверхневих інтегралів першого роду

Площа поверхні площа поверхні S обчислюється за формулою

$$P_S = \iint_S d\sigma.$$

3.2.2. Обчислити площі заданих поверхонь за допомогою поверхневого інтеграла.

1) частини площини $x + y + z = 3$, що вирізається циліндром $y = \frac{x^2}{3}$ і площиною $y = 3$;

2) частини поверхні $z^2 = xy$, що вирізається площинами $x = 1$, $y = 4$, $z = 0$;

3) частини поверхні конуса $z^2 + y^2 = x^2$, що вирізається площиною $x = \sqrt{2} \left(\frac{z}{2} + 1 \right)$ при $x \geq 0$;

4) частини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 10^2$, що розміщена між площинами $z = -8$ та $z = 6$;

5) частини поверхні конуса $x^2 + y^2 = z^2$, що розміщена всередині циліндра $x^2 + y^2 = 2y$;

6) частини поверхні конуса $z^2 + y^2 = zx^2$, що вирізається циліндром $x^2 = 4y$;

7) частини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, що розміщена всередині циліндра $x^2 + y^2 = Rx$;

8) частини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, що розміщена зовні циліндра $x^2 + y^2 = Rx$;

9) частини поверхні параболоїда $z = 1 - y^2 - x^2$, що вирізається циліндром $y^2 + x^2 = 1$.

10) частини поверхні гелікоїда $\begin{cases} x = u \cos v, \\ y = u \sin v, \\ z = v, \end{cases}$ при $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 2\pi$.

Маса матеріальної поверхні

Розглянемо матеріальну поверхню S з густиною розподілу речовини $\gamma = \gamma(x, y, z)$.

Тоді маса матеріальної поверхні обчислюється за формулою

$$m = \iint_S \gamma(x, y, z) d\sigma.$$

Координати центра мас матеріальної поверхні

$$x_c = \frac{1}{m} \iint_S x\gamma(x, y, z) d\sigma,$$

$$y_c = \frac{1}{m} \iint_S y\gamma(x, y, z) d\sigma, \quad z_c = \frac{1}{m} \iint_S z\gamma(x, y, z) d\sigma.$$

3.2.3. Обчислити маси заданих неоднорідних поверхонь.

1) поверхні куба $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$, якщо поверхнева густина в кожній точці поверхні $\gamma = xyz$;

2) частини поверхні гіперболічного параболоїда $2az = x^2 - y^2$, що вирізається циліндром $x^2 + y^2 = a^2$, якщо поверхнева густина в кожній точці поверхні $\gamma = 15|z|$;

3) поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, якщо поверхнева густина в кожній точці поверхні дорівнює відстані цієї точки до деякого фіксованого діаметра сфери;

4) поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, якщо поверхнева густина в кожній точці поверхні дорівнює квадрату відстані цієї точки до деякого фіксованого діаметра сфери;

5) частини поверхні гелікоїда $\begin{cases} x = Ru \cos v, \\ y = Ru \sin v, \\ z = v, \end{cases}$ при $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq \pi$, поверхнева

густина в кожній точці поверхні дорівнює ординаті цієї точки;

6) частини поверхні обертання $\begin{cases} x = u, \\ y = \sin u \cos v, \\ z = \sin u \sin v, \end{cases}$ при $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq v \leq \pi$,

поверхнева густина в кожній точці поверхні $\gamma = \frac{y^2}{y^2+z^2}$.

3.2.4. Обчислити центри мас заданих однорідних поверхонь.

1) частини параболоїда $z = x^2 + y^2$, що вирізається площиною $z = 1$;

2) частини конуса $\frac{a^2}{h^2}z = x^2 + y^2$, що вирізається площиною $z = h$;

3) частини поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, розміщеної в першому октанті;

4) частини поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ при $0 < h \leq z \leq R$;

5) частини поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, обмеженої площинами $x + y = \pm a, x - y = \pm a$.

3.2.5. Обчислити центр мас частини поверхні конуса $x^2 + y^2 = z^2$ при $0 \leq z \leq 1$, якщо поверхнева густина в кожній точці поверхні дорівнює відстані цієї точки до осі конуса.

3.2.6. Обчислити центр мас півсфери $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, якщо поверхнева густина в кожній точці поверхні дорівнює відстані цієї точки від радіуса, перпендикулярного до основи півсфери.

Моменти інерції матеріальної поверхні

Момент інерції матеріальної поверхні S відносно початку координат

$$I_0 = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) d\sigma.$$

Момент інерції матеріальної поверхні S відносно відповідних координатних осей

$$I_x = \iint_S (y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) d\sigma,$$

$$I_y = \iint_S (x^2 + z^2) \gamma(x, y, z) d\sigma,$$

$$I_z = \iint_S (x^2 + y^2) \gamma(x, y, z) d\sigma.$$

Моменти інерції матеріальної поверхні S відносно відповідних координатних площин

$$I_{xy} = \iint_S z^2 \gamma(x, y, z) d\sigma, \quad I_{xz} = \iint_S y^2 \gamma(x, y, z) d\sigma,$$

$$I_{yz} = \iint_S x^2 \gamma(x, y, z) d\sigma.$$

3.2.7. Обчислити момент інерції відносно осі Oz частини однорідної поверхні конуса $x^2 + y^2 = z^2$ при $0 \leq z \leq h$.

3.2.8. Обчислити моменти інерції відносно площини основи та осі симетрії однорідної півсфери $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

3.2.9. Обчислити момент інерції відносно осі Oz сегмента сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ при $0 < h \leq z \leq R$.

3.2.10. Обчислити моменти інерції відносно осі Oz частини однорідного параболоїда $2az = x^2 + y^2$ при $0 \leq z \leq a$.

3.2.11. Обчислити момент інерції відносно діаметра сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

[Відповіді до теми 3.2.](#)

Розділ 4. Елементи теорії поля.

Тема 4.1. Скалярне та векторне поля.

Диференціальні характеристики полів.

Скалярне поле

Розглянемо функцію $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, визначену для кожної точки (x_1, x_2, \dots, x_n) області $D \subset \mathbb{R}^n$. У цьому випадку ми кажемо, що в області визначено **скалярне поле**. Це означає, що функція асоціює дійсне число з положенням точки у певній області.

Для кращого розуміння скалярних полів використовуємо криві рівня $u(x, y) = C$ та поверхні рівня $u(x, y, z) = C$, де $C \in \mathbb{R}$.

Означення. Вектор, що складається з частинних похідних, називається **градієнтом** або **вектор-градієнтом** і позначається

$$\text{в } \mathbb{R}^2: \text{grad}(u) = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} \quad \text{або} \quad \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j};$$

$$\text{в } \mathbb{R}^3: \text{grad}(u) = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} \quad \text{або} \quad \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}.$$

Вектор-градієнт є перпендикулярним до кривої рівня $u(x, y) = C$ або поверхні рівня $u(x, y, z) = C$.

Зауваження. Символ ∇ називається **набла**. Він використовується як позначення для **векторного диференціального оператора**. У математиці **оператор** - це дія на елемент одного простору для отримання елемента іншого простору.

Властивості градієнта.

Нехай задані два гладких скалярних поля u та v , тоді:

- $\text{grad}(u + v) = \text{grad}(u) + \text{grad}(v)$;
- $\text{grad}(uv) = v \text{grad}(u) + u \text{grad}(v)$;
- $\text{grad}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \text{grad}(u) - u \text{grad}(v)}{v^2}$.

Оскільки вектор-градієнт є перпендикулярним до кривої рівня $u(x, y) = C$ або поверхні рівня $u(x, y, z) = C$, то за його допомогою визначається **нормаль (нормальний вектор) до кривої (поверхні)**:

$$\vec{n} = \frac{\text{grad}(u)}{|\text{grad}(u)|}$$

Якщо $u = u(x, y, z)$, то

$$\vec{n} = \pm \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}},$$

де знак вибираємо в залежності від умов поставленої задачі.

При цьому вирази

$$\cos \alpha = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos \beta = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}}$$

прийнято називати **напрямними косинусами нормального вектора до поверхні**.

4.1.1. Встановити область визначення та лінії рівня плоских скалярних полів

1) $u(x, y) = x^2 y^2$;

2) $u(x, y) = \sqrt{4 - 2x^2 - 9y^2}$;

3) $u(x, y) = \sin(y^2 - 5x)$;

4) $u(x, y) = \vec{a}\vec{r}$, де \vec{a} – сталий вектор, \vec{r} – радіус вектор точки $M(x, y)$.

4.1.2. Встановити область визначення та поверхні рівня скалярних полів

1) $u(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

2) $u(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 6z^2$;

3) $u(x, y, z) = x - 4y^2 - z^2$;

4) $u(x, y, z) = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{r})$, де \vec{a}, \vec{b} – сталі вектори, \vec{r} – радіус вектор точки $M(x, y, z)$.

4.1.3. Знайти градієнт скалярного поля u у будь-якій точці та в точці M .

1) $u(x, y) = x^2 + y^2$, $M(3, 2)$;

2) $u(x, y) = x^2 + 2y^3 + 4xy - 1$, $M(-1, 1)$;

3) $u(x, y) = y \cos\left(xy + \frac{\pi}{4}\right)$, $M(0, 1)$;

4) $u(x, y) = e^{x^3-y^2}$, $M(-1, 0)$;

5) $u(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy - x + 2y - z$, $M(1, 0, -1)$;

6) $u(x, y, z) = \frac{y-1}{\sqrt{x-z}}$, $M(2, 3, 1)$;

7) $u(x, y, z) = y \sin(x + 4z)$, $M\left(\frac{\pi}{3}, 2, \pi\right)$.

4.1.4. Знайти кут φ між градієнтами скалярного поля u в точках A та B .

1) $u(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$, $A(1, 1)$, $B(-1, -1)$;

2) $u(x, y) = (x + y)e^{x+y}$, $A(0, 0)$, $B(1, 1)$.

3) $u(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z^2$, $A(2, 3, -1)$, $B(1, -1, 2)$.

4.1.5. Знайти кут φ між градієнтами скалярних полів u та v в точці M .

1) $u(x, y) = x^2 + 3y^2 - 4xy$, $v(x, y) = \sqrt{x+y} + \frac{x}{2} + \frac{y}{2}$, $M(1, 0)$;

2) $u(x, y) = \sin(2y + x)$, $v(x, y) = -y \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, $M\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$;

3) $u(x, y, z) = xy^2 + 3z$, $v(x, y, z) = \frac{1}{2x+y} + \ln z$, $M(0, 1, 1)$;

4) $u(x, y, z) = x - \cos(y + 2z)$, $v(x, y, z) = x \operatorname{ctg}(y + z)$, $M\left(3, -\frac{\pi}{2}, 0\right)$;

5) $u(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $v(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $M(0, 0, 1)$;

4.1.6. Знайти точки, в яких градієнт скалярного поля $u = \sin(y + x)$ дорівнює $\vec{i} + \vec{j}$.

4.1.7. Знайти точки, в яких модуль градієнт скалярного поля $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ дорівнює одиниці.

4.1.8. Знайти одиничний вектор зовнішньої нормалі.

1) до кола $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 10 = 0$;

2) до параболи $x = 3y^2 - y$;

3) до параболоїда $x^2 + y^2 = z$;

4) до сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;

5) до циліндра $x^2 + y^2 = a^2$;

6) до конуса $x^2 + y^2 = z^2$ ($z \geq 0$).

Похідна за напрямом

Означення. Швидкість зміни функції $u = u(x, y)$ ($u = u(x, y, z)$) в напрямку одиничного вектора $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$ ($\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$) називається **похідною за напрямом** і визначається формулою

$$\text{в } \mathbb{R}^2: \frac{\partial u}{\partial \vec{a}} = \frac{\partial u}{\partial x} a_x + \frac{\partial u}{\partial y} a_y;$$

$$\text{в } \mathbb{R}^3: \frac{\partial u}{\partial \vec{a}} = \frac{\partial u}{\partial x} a_x + \frac{\partial u}{\partial y} a_y + \frac{\partial u}{\partial z} a_z.$$

Формули для обчислення похідної за напрямом у векторній формі

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{a}} = \text{grad}(u) \cdot \vec{a} = \nabla u \cdot \vec{a} = \text{пр}_{\vec{a}} \text{grad}(u).$$

Якщо вектор \vec{a} не одиничний, то

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{a}} = \frac{\nabla u \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} = \text{пр}_{\vec{a}} \text{grad}(u).$$

Похідна скалярного поля u в точці M вздовж деякої кривої L визначається за формулою

$$\frac{\partial u}{\partial L} = \vec{\tau}(M) \cdot \text{grad}(u)|_M,$$

де $\vec{\tau}(M)$ – одиничний дотичний до кривої L вектор в точці M .

Якщо лінія L задається у параметричному $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$ або у векторному вигляді

$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, то

$$\vec{\tau}(M) = \frac{x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j} + z'(t_0)\vec{k}}{\sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2 + (z'(t_0))^2}},$$

де t_0 – значення параметра t , що відповідає точці M .

Оскільки похідна за напрямом представляє швидкість зміни функції вздовж напрямку вектора, *максимальна швидкість зміни скалярного поля* u задається $|\text{grad}(u)|$ і відбудеться у напрямку $\text{grad}(u)$ та

$$V_{max} = |\text{grad}(u)|.$$

4.1.9.

1) Знайти похідну скалярного поля $u = x^3 + 3y^4 + ux$ в точці $M_0(-2,1)$ за напрямом вектора \vec{a} , що утворює кут $\frac{\pi}{6}$ з додатним напрямом осі OX .

2) Знайти похідну скалярного поля $u = \sin(2x + y) - \cos(3z + y)$ в точці $M_0(-\pi, \frac{\pi}{4}, \pi)$ за напрямом вектора \vec{a} , що лежить в площині XOY під кутом $\frac{\pi}{3}$ до осі OX .

4.1.10.

1) Знайти похідну скалярного поля $u = x^2 - \frac{1}{2}y^2$ в точці $M_0(2, -1)$ за напрямом вектора $\vec{a} = \overline{M_0M_1}$, якщо $M_1(6,2)$.

2) Знайти похідну скалярного поля $u = x^3y - y^3x + 6z$ в точці $M_0(1,1, -1)$ за напрямом вектора $\vec{a} = \overline{M_0M_1}$, якщо $M_1(3, -1, -2)$.

3) Знайти похідну скалярного поля $u = \frac{xy}{z}$ в точці $M_0(1,2,1)$ за напрямом вектора $\vec{a} = \overline{M_0M_1}$, якщо $M_1(0,3,4)$.

4) Знайти похідну скалярного поля $u = xuz$ в точці $M_0(5,1,2)$ за напрямом вектора $\vec{a} = \overline{M_0M_1}$, якщо $M_1(9,4,14)$.

5) Знайти похідну скалярного поля $u = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + z$ в точці $M_0(2,1,1)$ за напрямом прямої $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{2}$, в сторону зростання поля.

6) Знайти похідну скалярного поля $u(r) = \frac{1}{r}$ (r - довжина радіус-вектора \vec{r} точки (x, y, z)) в точці $M_0(2,2,-1)$ за напрямом вектора $\vec{a} = \overline{M_0M_1}$, якщо $M_1(2,0,1)$.

7) Знайти похідну скалярного поля $u(r) = r^4$ (r - довжина радіус-вектора \vec{r} точки (x, y, z)) в точці $M_0(1,-2,0)$ за напрямом радіус-вектора \vec{r} цієї точки.

8) Знайти похідну скалярного поля $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ в точці $M_0(x, y, z)$ за напрямом радіус-вектора \vec{r} цієї точки.

9) Знайти похідну скалярного поля $u(r) = \frac{1}{r}$ (r - довжина радіус-вектора \vec{r} точки (x, y, z)) за напрямом її градієнта.

10) Знайти похідну скалярного поля $u(r) = \frac{1}{r}$ (r - довжина радіус-вектора \vec{r} точки (x, y, z)) за напрямом вектора $\vec{a} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$. За якої умови ця похідна буде дорівнювати нулю?

4.1.11.

1) Знайти похідну скалярного поля $u = (x^2 + y^2)z$ вздовж гвинтової лінії $r(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + t \vec{k}$ в точці M_0 , що відповідає значенню параметра $t = \pi$.

2) Знайти похідну скалярного поля $u = xz^2 + 2yz$ вздовж кола $r(t) = (\cos t + 1)\vec{i} + (\sin t - 1)\vec{j} + 2\vec{k}$ в точці $M_0(1,0,2)$.

3) Знайти похідну скалярного поля $u = x^2 - y^2$ вздовж параболи $y = x^2$ в точці $M_0(1,1)$.

4.1.12. В якому напрямі в точці M скалярне поле u змінюється найшвидше? Знайти максимальну швидкість цієї зміни.

1) $u = xyz$, $M(1,2,2)$;

2) $u = xy + xz + zy$, $M(-3, -1, 2)$;

3) $u = (2x + y^2) \cos 2z$, $M(1, -2, \frac{\pi}{6})$.

Векторне поле

Векторне поле асоціює кожному точці області (x_1, x_2, \dots, x_n) області $D \subset \mathbb{R}^n$ із вектором $\vec{F}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

$$\text{в } \mathbb{R}^2: \vec{F} = \{P(x, y), Q(x, y)\} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j};$$

$$\text{в } \mathbb{R}^3: \vec{F} = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Компоненти векторного поля це скалярні функції (скалярні поля), а саме векторне поле визначається як вектор-функція точки.

Векторне поле можна зобразити, як сукупність стрілок із заданою величиною та напрямком, кожна з яких прикріплена до точки в просторі.

Однією з важливих характеристик векторного поля є **векторна лінія, або силова лінія**. Векторна лінія – це така гладка крива, дотична в кожній точці якої збігається з напрямком вектора \vec{F} .

Сімейство векторних ліній поля \vec{F} визначається диференціальними рівняннями

$$\text{в } \mathbb{R}^2: \frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)}, \quad dz = 0;$$

$$\text{в } \mathbb{R}^3: \frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}.$$

4.1.13. Знайти векторні лінії плоских векторних полів в заданій площині. Побудувати ці лінії.

1) $\vec{F} = x\vec{i} + 2y\vec{j}, \quad z = 0;$

2) $\vec{F} = x\vec{i} + z\vec{k}, \quad y = 0;$

3) $\vec{F} = x\vec{i} - y\vec{j}, \quad z = 0;$

4) $\vec{F} = 2z\vec{j} + 4y\vec{k}, \quad x = 0;$

5) $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j}, \quad z = 0;$

6) $\vec{F} = z\vec{j} - y\vec{k}, \quad x = 0.$

4.1.14. Знайти векторні лінії заданих векторних полів

1) $\vec{F} = x\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k};$

2) $\vec{F} = x\vec{i} + 2z^2\vec{j} + z\vec{k};$

$$3) \vec{F} = \frac{1}{x}\vec{i} + \frac{1}{y}\vec{j}.$$

$$4) \vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k};$$

$$5) \vec{F} = (z - y)\vec{i} + (x - z)\vec{j} + (y - x)\vec{k}.$$

4.1.15. Знайти векторну лінію поля \vec{F} , що проходить через точку M .

$$1) \vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j} + b\vec{k}, M(1, 0, 0);$$

$$2) \vec{F} = x^2\vec{i} - y^3\vec{j} + z^2\vec{k}, M\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right).$$

4.1.16. Знайти векторні лінії векторного поля \vec{F} , якщо \vec{r} – радіус-вектор точки (x, y, z) .

$$1) \vec{F} = [\vec{c} \vec{r}], \text{ де } \vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k} \text{ – сталий вектор};$$

$$2) \vec{F} = f(|\vec{r}|)\vec{r}, \text{ де } f \text{ – неперервна функція};$$

$$3) \vec{F} = (\vec{a}\vec{r})\vec{b}, \text{ де } \vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \text{ та } \vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k} \text{ – сталі вектори.}$$

4.1.17. Знайти силові лінії магнітного поля \vec{H} нескінченного провідника електричного струму сили I .

Означення. *Дивергенція* векторного поля \vec{F} – це скалярне поле, визначене як

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \right) \cdot (P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}).$$

Якщо розглянути векторне поле \vec{F} як поле швидкості потоку рідини, то дивергенція являє собою зміну густини рідини в кожній точці. Він показує схильність рідини до «витікання» з точки. Якщо дивергенція додатна в точці, то рідина витікає з точки, і ця точка називається **джерелом** поля. Від'ємна дивергенція означає, що рідина рухається всередину точки. Таку точку називають **стоком** поля. Нульова дивергенція означає відсутність стоків і джерел, або вони компенсують одне одного. Абсолютне значення дивергенції показує міру того, наскільки точка є джерелом або стоком.

Означення. Ротор векторного поля \vec{F} — це векторне поле, визначене як

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \operatorname{curl}\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Ротор зображує здатність векторного поля \vec{F} в даній точці обертатися навколо осі, визначеної напрямком $\operatorname{rot}\vec{F}$. Довжина ротора вказує інтенсивність обертання. Якщо ротор нуль-вектор, то векторне поле \vec{F} називається ірротаційним.

Означення. Векторне поле \vec{F} називається *соленоїдальним*, якщо $\operatorname{div}\vec{F} = 0$.

Означення. Векторне поле \vec{F} називається *потенціальним*, якщо $\operatorname{rot}\vec{F} = 0$.

В цьому випадку *потенціал* такого поля обчислюється за формулою:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P dx + Q dy + R dz = \\ &= \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z) dz. \end{aligned}$$

Означення. Векторне поле \vec{F} називається *гармонічним*, якщо $\operatorname{div}\vec{F} = 0$ та $\operatorname{rot}\vec{F} = 0$.

4.1.18. Знайти дивергенцію векторного поля.

1) $\vec{F} = (y^2 + z^2)\vec{i} + (z^2 + x^2)\vec{j} + (x^2 + y^2)\vec{k}$;

2) $\vec{F} = e^{xy}(x\vec{i} + z\vec{j} - xyz\vec{k})$;

3) $\vec{F} = x^2y\vec{i} + xy^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ в точці $M(1, 2, -1)$;

4) $\vec{F} = xy^3\vec{i} + xyz^2\vec{j} - x^2yz\vec{k}$ в точці $M(1, -1, 2)$;

5) $\vec{F} = \operatorname{grad}(x^2 + y^2 + z^2)$;

6) $\vec{F} = \operatorname{grad}(xy^2z^3)$;

7) $\vec{F} = \operatorname{grad}(x^3y^2z)$ в точці $M(1, -1, 1)$;

8) $\vec{F} = \operatorname{grad}(y \cos(x + z)) + 2\operatorname{grad}(3x + 2y + z)$.

4.1.19. Знайти ротор векторного поля.

1) $\vec{F} = xy\vec{i} - xz\vec{j} + yz\vec{k}$;

2) $\vec{F} = x^2yz\vec{i} + xy^2z\vec{j} + xyz^2\vec{k}$;

3) $\vec{F} = \arctg(x - y + z)(\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k})$;

4) $\vec{F} = z^3\vec{i} + y^3\vec{j} + x^3\vec{k}$;

5) $\vec{F} = xyz\vec{i} + \sin z\vec{j} + y \cos z\vec{k}$ в точці $M(1,3, -5)$;

6) $\vec{F} = \text{grad}(x^2 + y^2 + z^2)$.

4.1.20. Знайти дивергенцію та ротор векторного поля $\vec{F} = \vec{a} \times \vec{b}$.

1) $\vec{a} = xz\vec{i} + y^3\vec{j} + yz^2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 7\vec{j} + 2\vec{k}$;

2) $\vec{a} = \text{grad}(x^3y^2z)$, $\vec{b} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$;

3) $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} - x^2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, в точці $M(1, -1, 1)$.

4.1.21. Відомо, що дивергенція векторного поля $\vec{F} = xz\vec{i} + y\vec{j} + f(z)\vec{k}$ дорівнює z . Знайти функцію $f(z)$.

4.1.22. Відомо, що ротор векторного поля $\vec{F} = yz\vec{i} + f(x, z)\vec{j} + xy\vec{k}$ дорівнює $\vec{k} - \vec{i}$. Знайти функцію $f(x, z)$.

4.1.23. Довести соленоїдальність поля лінійних швидкостей точок твердого тіла, що рухається навколо закріпленої точки O .

Вказівка: $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, де \vec{r} – радіус-вектор точки (x, y, z) , $\vec{\omega}$ – вектор миттєвої кутової швидкості напрямленої вздовж осі Oz .

4.1.24. Показати, що ротор поля лінійних швидкостей \vec{V} точок твердого тіла, що обертається, є сталим вектором, напрямленим паралельно вісі обертання і його модуль дорівнює подвійній кутовій швидкості обертання.

4.1.25. Знайти кутову швидкість, з якою обертається тверде тіло навколо нерухомої осі, що проходить через деяку його точку, якщо його лінійна швидкість $\vec{V} = 2x\vec{i} + y^2\vec{j} + xz\vec{k}$.

4.1.26. Показати, що векторне поле \vec{F} потенціальне.

1) $\vec{F} = \text{grad}(\sqrt{x} \sqrt[3]{y} \sqrt[4]{z})$;

2) $\vec{F} = f(|\vec{r}|)\vec{r}$, якщо \vec{r} – радіус-вектор точки (x, y, z) ;

3) \vec{F} – магнітне поле \vec{H} (дивитися задачу 4.1.17.).

4.1.27. Показати, що векторне поле \vec{F} потенціальне і знайти його потенціал.

1) $\vec{F} = (3x^2y - y^3)\vec{i} + (x^3 - 3xy^2)\vec{j}$;

2) $\vec{F} = (y + z)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (x + y)\vec{k}$;

3) $\vec{F} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$;

4) $\vec{F} = 2xy\vec{i} + (x^2 - 2yz)\vec{j} - y^2\vec{k}$.

4.1.28. Показати, що векторне поле соленоїдальне.

1) $\vec{F} = (x^2y + y^3)\vec{i} + (x^3 - xy^2)\vec{j}$;

2) $\vec{F} = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} + z(x^2 + y^2)\vec{k}$;

3) $\vec{F} = x(z^2 - y^2)\vec{i} + y(x^2 - z^2)\vec{j} + z(y^2 - x^2)\vec{k}$;

4) $\vec{F} = \frac{x}{yz}\vec{i} + \frac{y}{xz}x^2\vec{j} - \frac{x+y}{xy}\vec{k}$;

5) $\vec{F} = |\vec{r}|(\vec{c} \times \vec{r})$, де $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ – сталий вектор, \vec{r} – радіус-вектор точки (x, y, z) ;

б) електростатичне поле заряду q , $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^2}$, якщо $\vec{r} \neq 0$.

4.1.29. Показати, що векторне поле $\vec{F} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$ є гармонічним.

4.1.30. Перевірити, чи буде векторне поле \vec{F} гармонічним.

1) $\vec{F} = (y + z)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (x + y)\vec{k}$;

2) $\vec{F} = 2xyz\vec{i} - y(yz + 1)\vec{j} + z\vec{k}$;

3) $\vec{F} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$.

Відповіді до теми 4.1.

Тема 4.2. Криволінійний інтеграл другого роду (по координатах).

Криволінійним інтегралом другого роду або криволінійним інтегралом вздовж кривої L_{AB} називається інтеграл вигляду

$$\begin{aligned} \text{в } \mathbb{R}^2: & \int_{L_{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy ; \\ \text{в } \mathbb{R}^3: & \int_{L_{AB}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz. \end{aligned}$$

Крива L_{AB} називається *шляхом інтегрування*.

Обчислення криволінійного інтеграла другого роду

Припустимо, що криву L_{AB} , задано рівнянням

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \text{ або } \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad a \leq t \leq b.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \text{в } \mathbb{R}^2: & \vec{dr} = dx(t)\vec{i} + dy(t)\vec{j} = (x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j})dt ; \\ \text{в } \mathbb{R}^3: & \vec{dr} = dx(t)\vec{i} + dy(t)\vec{j} + dz(t)\vec{k} = (x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k})dt, \end{aligned}$$

то інтеграл набуде векторного вигляду

$$\int_{L_{AB}} \vec{F} \cdot \vec{dr},$$

а загальна формула для обчислення криволінійного інтеграла другого роду

$$\begin{aligned} \text{в } \mathbb{R}^2: & \int_{L_{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t))dt \\ \text{в } \mathbb{R}^3: & \int_{L_{AB}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \\ & = \int_a^b (P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t))dt. \end{aligned}$$

Якщо крива L_{AB} замкнута (крива без точок самоперетину, у якої початкова та кінцева точки збігаються), то інтеграл записують у вигляді

$$\oint_{L_{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad \text{або} \quad \oint_{L_{AB}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

У цьому випадку слід вказати **орієнтацію** (вибір напрямку руху вздовж кривої). Крива L_{AB} називається **додатно орієнтовною**, якщо при русі вздовж неї, область обмежена цією кривою залишається зліва. Ця властивість позначається через L_+ . У протилежному випадку крива називається **від'ємно орієнтовною** і позначається L_- .

Властивості криволінійного інтеграла другого роду

1. Криволінійний інтеграл другого роду залежить від напрямку інтегрування

$$\int_{L_{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = - \int_{L_{BA}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

2. Якщо крива L_{AB} складається з двох частин $L_{AB} = L_{AC} \cup L_{CB}$, то

$$\int_{L_{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{L_{AC}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + \int_{L_{CB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

4.2.1 Обчислити задані криволінійні інтеграли другого роду вздовж заданих кривих інтегрування.

1) $\int_L (x + y^3)dx + ydy$, де L – відрізок прямої $y = x - 1$ від точки $A(1,0)$ до точки $B(-1, -2)$;

2) $\int_L xdy$, де L – відрізок прямої $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ від точки перетину її з віссю абсцис до точки перетину її з віссю ординат;

3) $\int_L (2x^3 - x^2y)dx + 2x^2dy$, де L – відрізок прямої від точки $A(0,1)$ до точки $B(2,5)$;

4) $\int_L -x \cos y dx + y \sin x dy$, де L – відрізок прямої від точки $A(0,0)$ до точки $B(\pi, 2\pi)$;

5) $\int_L (x^2 - y^2)dx$, де L – дуга параболи $y = x^2$ від точки $A(0,0)$ до точки $B(2,4)$;

6) $\int_L (x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy$, де L – дуга параболи $y = x^2$ від точки $A(1,1)$ до точки $B(2,4)$;

7) $\int_L xudy + (y - x)dy$, де L – дуга параболи $y = x^3$ від точки $A(0,0)$ до точки $B(1,1)$;

8) $\int_L \frac{y^2 dx - x^2 dy}{x^2 + y^2}$, де L – верхня половина кола $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \end{cases}$ причому рух здійснюється проти годинникової стрілки;

9) $\int_L (2x - y^2)dx + 8ydy$, де L – верхня половина еліпса $\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases}$ причому рух

здійснюється за годинниковою стрілкою;

10) $\int_L ydx + xdy$, де L – дуга кола $\begin{cases} x = 5 \cos t, \\ y = 5 \sin t, \end{cases}$ що розташована в першій чверті,

причому рух здійснюється проти годинникової стрілки;

11) $\int_L (2a - y)dx + (y - a)dy$, де L – перша арка циклоїди $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t); \end{cases}$

12) $\int_L \frac{x^2 dx + y^2 dy}{\sqrt[3]{x^5 + \sqrt[3]{y^5}}}$, де L – чверть астроїди $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t, \end{cases}$ від точки $A(a, 0)$ до точки

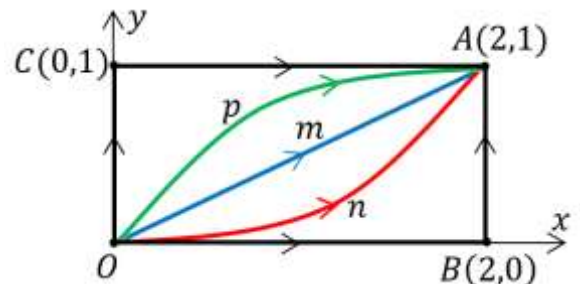
$B(0, a)$.

4.2.2 Обчислити задані криволінійні інтеграли другого роду

$$I_1 = \int_L 2xydx - x^2dy \quad \text{та} \quad I_2 = \int_L 2xydx + x^2dy$$

вздовж різних шляхів, що виходять з початку координат $O(0,0)$ і закінчуються в точці $A(2,1)$ (дивитися малюнок):

- 1) пряма OmA ;
- 2) парабола OnA , якщо її вісь симетрії вісь Oy ;
- 3) парабола OpA , якщо її вісь симетрії вісь Ox ;
- 4) ламана OBA ;
- 5) ламана OCA .



Перевірити незалежність від шляху інтегрування інтеграла I_2 .

4.2.3 Обчислити задані криволінійні інтеграли другого роду вздовж заданих кривих інтегрування.

1) $\int_L xdx + ydy + (x + y - 1)dz$, де L – відрізок прямої від точки $A(1,1,1)$ до точки $B(2,3,4)$;

2) $\int_L (y^2 - z^2)dx + 2yzdy - x^2dz$, де L – дуга кривої $\begin{cases} x = t, \\ y = t^2, \\ z = t^3, \end{cases} 0 \leq t \leq 1$, в напрямі

зростання параметра;

$$3) \int_L ydx + zdy + xdz, \text{ де } L - \text{ виток гвинтової лінії } \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \\ z = bt, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \text{ в}$$

напрямі зростання параметра;

4) $\int_L y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, де L – лінія перетину сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ та циліндра $x^2 + y^2 = Rx$, ($R > 0, z \geq 0$), причому рух відбувається проти годинникової стрілки, якщо дивитися з початку координат.

5) $\int_L xydx + yzdy + xzdz$, де L – лінія перетину сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$ та площини $z = x$, розміщена по той бік площини zOx , де $y > 0$.

Формула Гріна

Нехай замкнена однозв'язна область D , що лежить в площині xOy , обмежена кусково-гладкою кривою C . Якщо компоненти векторного поля $\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в цій області D , то справджується формула Гріна, яка пов'язує інтеграл по межі області з інтегралом по самій області:

$$\oint_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

(тут інтегрування по контуру C виконується у додатному напрямі).

4.2.4 Обчислити задані криволінійні інтеграли другого роду за допомогою формули Гріна (напряму руху додатний (проти годинникової стрілки)).

1) $\oint_C xdy$, де C – контур трикутника, утвореного осями координат і прямою $3x + 2y - 6 = 0$;

2) $\oint_C (x + y)dx - 2x dy$, де C – контур трикутника зі сторонами $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$;

3) $\oint_C y^2 dx + (x + y)^2 dy$, де C – контур трикутника з вершинами $A(2,0)$, $B(2,2)$, $C(0,2)$;

4) $\oint_C (x+y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy$, де C – контур трикутника з вершинами $A(1,1)$, $B(3,2)$, $C(2,5)$;

5) $\oint_C (1-x^2) dx + (1+y^2) dy$, де C – коло радіуса R з центром в початку координат;

6) $\oint_C (-x^2 y) dx + xy^2 dy$, де C – коло радіуса R з центром в початку координат;

7) $\oint_C (1-x^2) y dx + x(1+y^2) dy$, де C – коло радіуса R з центром в початку координат;

8) $\oint_C (xy + x + y) dx + (xy + x - y) dy$, де C – коло $x^2 + y^2 = ax$;

9) $\oint_C y \cos x dx + (\cos y + \sin x) dy$, де C – еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Незалежність криволінійного інтеграла другого роду від шляху інтегрування

Якщо значення криволінійного інтеграла залишається однаковим по всіх можливих кривих, які сполучають кінцеві точки кривої інтегрування, то кажуть, що криволінійний інтеграл не залежить від форми шляху інтегрування.

Умовою для незалежності від шляху інтегрування є потенціальність векторного поля \vec{F} ($\text{rot} \vec{F} = 0$), отже,

$$\begin{aligned} & \text{в } \mathbb{R}^2: \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}; \\ & \text{в } \mathbb{R}^3: \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \end{aligned}$$

Означення. При виконанні умов незалежності від шляху інтегрування вираз $Pdx + Qdy + Rdz$ називається *повним диференціалом деякої функції* $u = u(x, y)$ ($u = u(x, y, z)$), і позначається

$$\text{в } \mathbb{R}^2: du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy;$$

$$\text{в } \mathbb{R}^3: du(x, y, z) = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

Тоді

$$\text{в } \mathbb{R}^2: u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy;$$

$$\text{в } \mathbb{R}^3: u(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z) dz.$$

У цьому випадку

$$\text{в } \mathbb{R}^2: \int_A^B Pdx + Qdy = \int_A^B du(x, y) = u(B) - u(A);$$

$$\text{в } \mathbb{R}^3: \int_A^B Pdx + Qdy + Rdz = \int_A^B du(x, y, z) = u(B) - u(A).$$

Якщо крива визначена у векторній формі $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, то незалежний від шляху інтегрування криволінійний інтеграл другого роду можна записати у векторній формі

$$\int_L \nabla u \cdot d\vec{r} = u(\vec{r}(b)) - u(\vec{r}(a)).$$

4.2.5 Переконатися, що задані вирази є повними диференціалами функцій двох або трьох змінних. Знайти ці функції.

1) $du = x^2 dx + y^2 dy$;

2) $du = (3x^2 y^2 + 4x) dx + (2x^3 y + 5) dy$;

3) $du = 4(x^2 - y^2)(x dx - y dy)$;

4) $du = \frac{(x+2y)dx+ydy}{(x+y)^2}$;

5) $du = (2x \cos y - y^2 \sin x) dx + (2y \cos x - x^2 \sin y) dy$;

6) $du = (12x^3 y^3 + z^2 y + 1) dx + (9x^4 y^2 + z^2 x - 2) dy + (xy + 3z^2) dz$;

7) $du = (y \cos yx - e^{z+x}) dx + x \cos yx dy - e^{z+x} dz$;

8) $du = \frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$;

9) $du = \frac{yzdx+xzdy+xydz}{1+x^2y^2z^2}$.

4.2.6 Обчислити криволінійні інтеграли від повних диференціалів.

1) $\int_{(-1,2)}^{(2,3)} y dx + x dy$;

2) $\int_{(0,0)}^{(2,1)} 2xy dx + x^2 dy$;

$$3) \int_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy;$$

$$4) \int_{(3,4)}^{(5,12)} \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2};$$

$$5) \int_{(0,0)}^{(1,\pi)} e^x(\cos y dx - \sin y dy);$$

$$6) \int_{(1,-1,2)}^{(2,1,3)} xdx - y^2dy + zdz;$$

$$7) \int_{(1,2,3)}^{(3,2,1)} yzdx + zxdy + xydz;$$

$$8) \int_{(7,2,3)}^{(5,3,1)} \frac{-yzdx + zxdy + xydz}{(x - yz)^2}.$$

Відповіді до теми 4.2.

Тема 4.3. Поверхневий інтеграл другого роду.

Нехай в тривимірному просторі задано орієнтовану поверхню S і припустимо, що одиничний вектор нормалі до цієї поверхні є $\vec{n} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$.

Розглянемо векторне поле

$$\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k},$$

де $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ і $R(x, y, z)$ – неперервні функції на поверхні S .

Означення. Інтеграл вигляду

$$\iint_S P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dxdz + R(x, y, z)dxdy$$

називається поверхневим інтегралом другого роду по поверхні S .

До поверхневих інтегралів другого роду відносяться також інтеграли вигляду

$$\iint_S P(x, y, z)dydz, \quad \iint_S Q(x, y, z)dxdz, \quad \iint_S R(x, y, z)dxdy.$$

Якщо поверхня S є замкнутою, то інтеграл позначається як

$$\oiint_S P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dxdz + R(x, y, z)dxdy.$$

Зауваження. Оскільки при зміні орієнтації поверхні напрям нормалі змінюється на протилежний, то і поверхневий інтеграл другого роду буде **змінювати** свій знак на протилежний.

Обчислення поверхневого інтеграла другого роду

Оскільки $\vec{n} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$, то $dxdy = \cos \gamma d\sigma$, $dxdz = \cos \beta d\sigma$ та $dydz = \cos \alpha d\sigma$, і ми можемо переписати інтеграл у вигляді

$$\iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma.$$

Якщо гладка двостороння поверхня S задана параметричними рівняннями

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

то поверхневий інтеграл другого роду по одній з вибраних сторін цієї поверхні обчислюється за формулою

$$\begin{aligned} & \iint_S P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy = \\ & = \iint_S \{P(x(u, v), y(u, v), z(u, v))J_1 + Q(x(u, v), y(u, v), z(u, v))J_2 + \\ & \quad + R(x(u, v), y(u, v), z(u, v))J_3\} dudv, \end{aligned}$$

$$\text{де } J_1(u, v) = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \quad J_2(u, v) = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}, \quad J_3(u, v) = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}.$$

4.3.1. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду.

1) $\iint_S x dx dz + z dx dy$, де S – зовнішня сторона поверхні трикутника, утвореного перетином площини $x - y + z = 1$ з координатними площинами;

2) $\iint_S yz dy dz + z dx dz + xy dx dy$, де S – зовнішня сторона поверхні трикутника, утвореного перетином площини $x + y + z = 3$ з координатними площинами;

3) $\iint_S x dy dz + y dx dz + z dx dy$, де S – зовнішня сторона поверхні трикутника, утвореного перетином площини $x + 2y + z - 6 = 0$ з координатними площинами;

4) $\iint_S xy dy dz + yz dx dz + xz dx dy$, де S – зовнішня сторона поверхні піраміди, утвореної площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$;

5) $\iint_S x dy dz + y dx dz + z dx dy$, де S – зовнішня сторона поверхні куба, утвореного площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$;

6) $\iint_S xz dy dz + xy dx dz + yz dx dy$, де S – зовнішня сторона поверхні циліндра $x^2 + y^2 = R^2$, що розташована у першому октанті між площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = H$;

7) $\iint_S z^2 dx dy$, де S – зовнішня сторона частини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, розміщена в першому октанті;

8) $\iint_S xz^2 dx dy$, де S – зовнішня сторона частини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, розміщена в першому октанті;

9) $\iint_S x^2 dydz + y^2 dxdz + z^2 dxdy$, де S – зовнішня сторона верхньої півсфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;

10) $\iint_S z^2 dxdy$, де S – зовнішня сторона еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$;

11) $\iint_S (2z - 3z^2) dxdy$, де S – зовнішня сторона еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$;

12) $\iint_S (y - z) dydz + (z - x) dxdz + (x - y) dxdy$, де S – зовнішня сторона конічної поверхні $x^2 + y^2 = z^2$, де $0 \leq z \leq h$.

Формула Остроградського-Гауса

Розглянемо тіло V у тривимірному просторі, що обмежене додатно орієнтованою поверхнею S , і векторне поле $\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$, компоненти якого є неперервними функціями і мають неперервні частинні похідні першого порядку в області V .

Тоді,

$$\oiint_S P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz$$

або у векторній формі

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dxdydz.$$

4.3.2. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду, використовуючи формули Остроградського – Гауса.

1) $\oiint_S x dydz + y dxdz + z dxdy$, де S – зовнішня сторона куба $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$;

2) $\oiint_S -x dydz + z dxdz + 5 dxdy$, де S – зовнішня сторона піраміди, утвореної площинами $2x - 3y + z = 6, x = 0, y = 0, z = 0$;

3) $\oiint_S xy dydz + yz dxdz + xz dxdy$, де S – зовнішня сторона піраміди, утвореної площинами $x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$;

4) $\oiint_S xdydz + ydxdz + (1 - z)dxdy$, де S – зовнішня сторона поверхні конуса $z^2 = x^2 + y^2$, що розташована між площинами $z = 0$, $z = H$;

5) $\oiint_S xzdydz + yxdxdz + yzdxdy$, де S – зовнішня сторона поверхні, що розміщена в першому октанті і складається з циліндра $x^2 + y^2 = R^2$ та площин $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = H$;

6) $\oiint_S 4x^3dydz + 4y^3dxdz - 6z^4dxdy$, де S – зовнішня сторона поверхні, що складається з циліндра $x^2 + y^2 = R^2$ та площин $z = 0$, $z = H$;

7) $\oiint_S xzdydz + yx^2dxdz + y^2zdxdy$, де S – зовнішня сторона поверхні, що розміщена в першому октанті і складається з параболоїда $x^2 + y^2 = z$, циліндра $x^2 + y^2 = 1$ та координатних площин.

Формула Стокса

Нехай додатно орієнтована крива L є межею поверхні S , а крива l є проекцією L на площину xOy , тобто це крива, яка обмежує область D , причому крива l є також додатно орієнтованою.

Розглянемо векторне поле $\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$, компоненти якого є неперервними функціями і мають неперервні частинні похідні першого порядку на S , причому, одиничний вектор нормалі до цієї поверхні є $\vec{n} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$.

Тоді

$$\begin{aligned} \oint_L Pdx + Qdy + Rdz &= \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] d\sigma = \\ &= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \end{aligned}$$

або у векторній формі

$$\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

4.3.3. Обчислити задані криволінійні інтеграли другого роду за допомогою формули Стокса (напрямок руху додатний (проти годинникової стрілки)).

1) $\oint_C y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, де C – контур трикутника, утвореного перетином координатних площин з площиною $x + y + z = 2$;

2) $\oint_C yz dx + xz dy + xy dz$, де C – контур трикутника OAB з вершинами $O(0,0,0)$, $A(1,1,0)$, $B(1,1,1)$;

3) $\oint_C x^2 y^3 dx + dy + z dz$, де C – коло $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$, взявши в якості поверхні верхню півсферу $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$;

4) $\oint_C x dx + (y + x) dy + (x + y + z) dz$, де C – контур
$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \\ z = a(\sin t + \cos t), \end{cases}$$

$0 \leq t \leq 2\pi$;

5) $\oint_C (y - z) dx + (z + x) dy + (x + y) dz$, де C – коло, утворене перетином поверхонь $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x + y + z = 0$;

6) $\oint_C y^2 dx - x^2 dy + z^2 dz$, де C – контур, утворений перетином координатних площин з параболоїдом $x^2 + y^2 = 1 - y$;

7) $\oint_C (y - x) dx + (2x - y) dy + z dz$, де C – контур, що складається з відрізків осей Ox , Oy і дуги кола
$$\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 3 \sin t, \\ z = 0, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

8) $\oint_C e^x dx + z(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} dy + yz^3 dz$, де C – контур, утворений перетином поверхонь $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = 0$, $y = 0$, $x = 2$, $y = 1$.

Застосування криволінійних та поверхневих інтегралів в теорії поля.

Робота, потік та циркуляція векторного поля.

Робота змінної сили вздовж кривої

Нехай точка рухається вздовж кривої L_{AB} від точки A до точки B під дією сили \vec{F} , тоді робота W сили \vec{F} вздовж кривої L_{AB} дорівнює

$$W = \int_{L_{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Якщо векторне поле сили \vec{F} є потенціальним, тоді загальна робота, виконана вздовж кривої, не залежить від вигляду кривої, а якщо крива L_{AB} замкнута, то робота дорівнює нулю.

Потік векторного поля

Нехай в тривимірному просторі задано орієнтовану поверхню S і припустимо, що одиничний вектор нормалі до цієї поверхні є $\vec{n} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$.

Розглянемо векторне поле

$$\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k},$$

де $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ і $R(x, y, z)$ – неперервні функції на поверхні S .

Потоком векторного поля \vec{F} через поверхню S називається поверхневий інтеграл першого роду по поверхні S від проекції вектору \vec{F} на нормаль \vec{n} до цієї поверхні

$$\Pi_S \vec{F} = \iint_S \text{пр}_{\vec{n}} \vec{F} d\sigma = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma$$

У випадку замкнutoї поверхні потік векторного поля \vec{F} через поверхню S можна обчислювати за допомогою формули Остроградського-Гаусса

$$\Pi_S \vec{F} = \oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_V \text{div} \vec{F} dv = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Циркуляція векторного поля

Нехай координати вектора $\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ неперервні і мають неперервні частинні похідні.

Циркуляцією векторного поля \vec{F} навколо орієнтованого контуру L називається криволінійний інтеграл

$$\oint_L \vec{F} = \int_L P dx + Q dy + R dz = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Якщо замкнута крива L обмежує частину деякої поверхні S , то за формулою Стокса

$$\oint_L \vec{F} = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Отже, циркуляція векторного поля вздовж замкнутого контура дорівнює потоку ротора цього поля через будь-яку поверхню, натягнуту на цей контур (обмежену цим контуром). Орієнтація нормалі до поверхні пов'язана з орієнтацією контура таким чином, щоб з кінця нормалі рух вздовж контура спостерігався як проти годинникової стрілки.

4.3.4. Користуючись означенням потоку ($\Pi = \iint_S n p_{\vec{n}} \vec{a} d\sigma = \iint_S (\vec{a}, \vec{n}_0) d\sigma$) розв'язати задачі.

- 1) Знайти потік вектора $\vec{a} = 3\vec{j}$ в напрямі початку координат через пластинку трикутної форми з вершинами в точках $M_1(1,2,0)$, $M_2(0,2,0)$, $M_3(0,2,2)$;
- 2) Знайти потік вектора $\vec{a} = \vec{i}$ в напрямі осі Ox через перпендикулярну до цієї вісі пластинку, що має форму прямокутника зі сторонами 1 та 2;
- 3) Знайти потік сталого вектора \vec{a} в напрямі осі Oz через перпендикулярну до цієї вісі пластинку, що має форму круга радіуса R ;
- 4) Знайти потік радіус-вектора через зовнішню сторону кругового конуса висоти H , з вершиною у початку координат і радіусом основи R ;
- 5) Знайти потік радіус-вектора через прямий круговий циліндр висоти H , віссю Oz і радіусом основи R ;
- 6) Знайти потік векторного поля $\vec{F} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$ через сферу радіуса з центром у початку координат R ;
- 7) Знайти потік векторного поля $\vec{F} = f(|\vec{r}|)\vec{r}$ через сферу радіуса з центром у початку координат R .

4.3.5. Знайти потік векторного поля \vec{F} через задану **незамкнену** поверхню S .

1) $\vec{F} = (x - 2z)\vec{i} + (x + 3y + z)\vec{j} + (5x + y)\vec{k}$, S – верхня сторона трикутника ABC з вершинами в точках $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$;

2) $\vec{F} = (5x - y)\vec{i} + (x + 3y)\vec{j} + (y + 3z)\vec{k}$, S – верхня частина площини $x - 2y + z = 4$, що лежить в другому октанті;

3) $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, S – внутрішня сторона бічної поверхні кругового циліндра $x^2 + y^2 = R^2$, що відтинається площинами $z = 0$, $z = H (H > 0)$;

4) $\vec{F} = xz\vec{i}$, S – зовнішня сторона параболоїда $z = 1 - x^2 - y^2$, що відтинається площиною $z = 0 (z \geq 0)$;

5) $\vec{F} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$, S – зовнішня частина сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, що розташована у першому октанті;

6) $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + \sqrt{x^2 + y^2 - 1}\vec{k}$, S – зовнішня сторона однопорожнинного гіперболоїда $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$, що відтинається площинами $z = 0$, $z = \sqrt{3}$;

7) $\vec{F} = \vec{i} - \vec{j} + xyz\vec{k}$, S – круг, отриманий перетином кулі $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ з площиною $y = x$, в напрямі нормалі, що утворює гострий кут з напрямом осі Ox ;

8) $\vec{F} = x\vec{i} - xy\vec{j} + z\vec{k}$, S – зовнішня сторона бічної поверхні кругового циліндра $x^2 + z^2 = R^2$, що відтинається площинами $y = 1$ та $x + y = 4$;

9) $\vec{F} = x^3\vec{i} - y^3\vec{j} + z\vec{k}$, S – зовнішня сторона частини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, що відтинається конусом $x^2 + y^2 = z^2$, $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$.

4.3.6. Знайти потік векторного поля \vec{F} через задану **замкнену** поверхню S в напрямку зовнішньої нормалі.

1) $\vec{F} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} - z^3\vec{k}$; S – повна поверхня куба, що утворена площинами $x = a$, $y = a$, $z = a$ та координатними площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$;

2) $\vec{F} = z\vec{i} - y\vec{j} + 2z\vec{k}$; S – повна поверхня піраміди, що утворена площиною $x + y + z = 1$ та координатними площинами $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$;

3) $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$; S – повна поверхня піраміди, що утворена площиною $3x + 2y - z - 6 = 0$ та координатними площинами $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$;

4) $\vec{F} = (5x - y)\vec{i} + (x + 3y)\vec{j} + (y + 3z)\vec{k}$; S – повна поверхня піраміди, що утворена площиною $x - 2y - z - 4 = 0$ та координатними площинами $x \geq 0$, $y \leq 0$, $z \geq 0$;

5) $\vec{F} = (y^2 + z^2)\vec{i} + y^2\vec{j} + 2yz\vec{k}$; $S : x^2 + z^2 = y^2$, $y = 1$, $y \geq 0$;

6) $\vec{F} = x\vec{i} + xz\vec{j} + y\vec{k}$; $S : x^2 + y^2 = 4 - z$, $z = 0$, $z \geq 0$;

7) $\vec{F} = (x + z)\vec{i} + (x + y)\vec{j} + (y + z)\vec{k}$; $S : x^2 + y^2 = R^2$, $x + y + z = R$, $z \geq 0$;

8) $\vec{F} = y^2\vec{j} + x^2\vec{k}$; $S : x^2 = 1 - y - z$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$;

9) $\vec{F} = 2xy\vec{i} - y^2\vec{j} + 2z\vec{k}$; $S : x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$;

10) $\vec{F} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$; $S : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x^2 + y^2 \leq z^2$, $z \geq 0$;

11) $\vec{F} = (y - x)\vec{i} + (z - y)\vec{j} + (x - z)\vec{k}$;

$S : x - y + z = 1$, $x + y + z = 1$, $z = 0$, $x = 0$;

12) $\vec{F} = x\vec{i} - z\vec{j}$; $S : z = 6 - x^2 - y^2$, $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$;

13) $\vec{F} = 2x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$; $S : x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $3z = x^2 + y^2$;

14) $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$; $S : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z = 0$, $z \geq 0$.

4.3.7. Знайти потік векторного поля \vec{F} через задану незамкнену поверхню S , доповнюючи її до замкненої і використовуючи формулу Остроградського-Гауса.

1) $\vec{F} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$; S – зовнішня сторона бічної поверхні піраміди з вершиною в точці $C(0,0,2)$, якщо основою піраміди є трикутник з вершинами $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$ і $B(0,1,0)$;

2) $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$; S – зовнішня сторона бічної поверхні кругового циліндра $x^2 + y^2 = R^2$, що відтинається площинами $z = 0$, $z = H$ ($H > 0$);

3) $\vec{F} = 2x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$, S – зовнішня сторона бічної поверхні кругового циліндра $x^2 + y^2 = 16$, що відтинається площинами $z = -3$, $z = 5$;

4) $\vec{F} = (x - 3z)\vec{i} + (x + 2y + z)\vec{j} + (4x + y)\vec{k}$; S – зовнішня сторона поверхні трикутника, утвореного перетином площини $x + y + z - 2 = 0$ з координатними площинами;

5) $\vec{F} = 8x\vec{i} + 11y\vec{j} + 17z\vec{k}$; S – верхня частина площини $x + 2y + 3z - 1 = 0$, що лежить в першому октанті;

6) $\vec{F} = z\vec{i} - x\vec{j} + y\vec{k}$; S – зовнішня сторона поверхні трикутника, утвореного перетином площини $3x + 6y - 2z - 6 = 0$ з координатними площинами;

7) $\vec{F} = y^2\vec{j} + z\vec{k}$, S – зовнішня частина поверхні параболоїда $z = x^2 + y^2$, що відтинається площиною $z = 2$;

8) $\vec{F} = xz\vec{i} + yz\vec{j} + z^2\vec{k}$; S – зовнішня сторона частини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, що відтинається площиною $z = 2$ ($z \geq 2$);

9) $\vec{F} = xz\vec{i}$, S – зовнішня сторона параболоїда $z = 1 - x^2 - y^2$, що відтинається площиною $z = 0$ ($z \geq 0$).

4.3.8. Знайти роботу векторного поля \vec{F} по переміщенню матеріальної точки вздовж заданого шляху L .

1) $\vec{F} = (x^2 + 2xy)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$, вздовж параболи $y = x^2$ від точки $A(0,0)$ до точки $B(1,1)$;

2) $\vec{F} = \frac{y^2\vec{i} + x^2\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, вздовж верхньої частини півкола $x^2 + y^2 = R^2$ від точки $A(R, 0)$ до точки $B(-R, 0)$;

3) $\vec{F} = (x^2 + y^2)\vec{i} + (x^2 - y)\vec{j}$, вздовж лінії $y = |x|$ від точки $A(-1,1)$ до точки $B(2,2)$;

4) $\vec{F} = -y^3\vec{i} + x^3\vec{j}$, вздовж еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в додатному напрямі;

5) $\vec{F} = x^2\vec{i} - \vec{j} - zy\vec{k}$, вздовж прямої від точки $A(1, -1, 2)$ до точки $B(2, 0, 3)$;

6) $\vec{F} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}$, вздовж першої чверті кола, що утворене перетином циліндричної поверхні $x^2 + y^2 = 1$ і площини $z = 1$, в додатному напрямі;

7) $\vec{F} = yz\vec{i} + z\sqrt{a^2 - y^2}\vec{j} + xy\vec{k}$, вздовж дуги гвинтової лінії $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \\ z = \frac{h}{2\pi} t, \end{cases}$ від точки

перетину лінії з площиною $z = 0$ до точки її перетину з площиною $z = h$;

8) $\vec{F} = 2xy\vec{i} + (x^2 + 2yz)\vec{j} + y^2\vec{k}$, вздовж лінії перетину конуса $(z - 1)^2 = x^2 + y^2$ з координатними площинами, якщо $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

4.3.9. Розв'язати задачі.

1) Обчислити роботу сили тяжіння при переміщенні маси m з точки $A(x_1, y_1, z_1)$ в точку $B(x_2, y_2, z_2)$;

2) Сила за величиною обернено пропорційна з коефіцієнтом k відстані точки її прикладання від площини xOy і напрямлена до початку координат. Обчислити роботу при переміщенні точки під дією цієї сили вздовж прямої від точки $A(a, b, c)$ до точки $B(2a, 2b, 2c)$;

3) Сила за величиною обернено пропорційна з коефіцієнтом k відстані точки її прикладання від площини Oz і напрямлена до неї. Обчислити роботу при переміщенні

точки під дією цієї сили вздовж кола
$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 1, \\ z = \sin t, \end{cases}$$
 від точки $A(1, 1, 0)$ до точки $B(0, 1, 1)$;

4) Сила \vec{F} стала за величиною і діє в напрямку осі абсцис. Обчислити роботу при переміщенні точки маси m під дією цієї сили вздовж дуги кола $x^2 + y^2 = R^2$, що лежить в першій чверті.

4.3.10. Знайти циркуляцію векторного поля \vec{F} вздовж заданого контура C двома способами: безпосередньо та за формулою Стокса.

1) $\vec{F} = (x^3 - y)\vec{i} + (y^3 + x)\vec{j}$, C – коло, радіуса R з центром у початку координат;

2) $\vec{F} = y\vec{i} + x^2\vec{j} - z\vec{k}$, C – контур, утворений перетином циліндричної поверхні $x^2 + y^2 = 4$ і площини $z = 3$;

3) $\vec{F} = 2xz\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$, C – контур, утворений перетином площини $x + y + 2z = 1$ з координатними площинами;

4) $\vec{F} = z\vec{i} + (x + y)\vec{j} + y\vec{k}$, C – контур, утворений перетином площини $2x + y + 2z = 2$ з координатними площинами;

5) $\vec{F} = -y\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, C – контур, утворений перетином конуса $x^2 + y^2 = z^2$ і площини $z = 1$, в додатному напрямі обходу відносно орта \vec{k} ;

6) $\vec{F} = y^2\vec{i} + xy\vec{j} + (x^2 + y^2)\vec{k}$, C – контур, утворений перетином параболоїда $x^2 + y^2 = Rz$ з площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = R$ в додатному напрямі обходу відносно зовнішньої нормалі поверхні параболоїда;

7) $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j} + (x + y)\vec{k}$, C – контур, утворений перетином параболоїда $x^2 + y^2 = z$ і площини $z = 1$, в додатному напрямі;

8) $\vec{F} = y^2\vec{i} + z^2\vec{j}$, C – контур, утворений перетином циліндричної поверхні $x^2 + y^2 = 9$ і площини $3y + 4z = 5$;

9) $\vec{F} = zy^2\vec{i} + xz^2\vec{j} + yx^2\vec{k}$, C – контур, утворений перетином параболоїда $z^2 + y^2 = x$ і площини $x = 9$, в додатному напрямі;

10) $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k}$, C – контур, утворений перетином сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ і конічної поверхні $x^2 + y^2 = z^2$, $z \geq 0$;

11) $\vec{F} = z^2\vec{i}$, C – контур, утворений перетином восьмої частини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ з координатними площинами;

12) $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k}$, C – контур, утворений перетином сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ і площини $z = x$;

13) $\vec{F} = x\vec{i} - z\vec{j} + y\vec{k}$, C – контур, утворений перетином поверхні $y^2 = 4 - z - x$ з координатними площинами.

4.3.11. Знайти густину циркуляції векторного поля \vec{F} вздовж заданого контура C в заданій точці.

1) $\vec{F} = y\vec{i}$, C – коло, утворене перетином циліндричної поверхні $x^2 + y^2 = a^2$ і площини $z = 0$, в центрі цього кола в додатному напрямі осі Oz ;

2) $\vec{F} = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$, C – коло, утворене перетином циліндричної поверхні $z^2 + y^2 = a^2$ і площини $x = 0$, в центрі цього кола в додатному напрямі осі Ox ;

3) $\vec{F} = 2y\vec{i} + 5xz\vec{j}$, C – еліпс, утворене перетином циліндричної поверхні $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ і площини $z = 1$, в центрі цього еліпса в додатному напрямі осі Oz .

4.3.12. Встановити потенціальність векторного поля \vec{F} та знайти його потенціал.

1) $\vec{F} = 2xyz\vec{i} + x^2z\vec{j} + x^2y\vec{k}$;

2) $\vec{F} = (yx + 1)\vec{i} + zx\vec{j} + xy\vec{k}$;

3) $\vec{F} = -2xyz \sin x^2y\vec{i} - zx^2 \sin x^2y\vec{j} + \cos x^2y\vec{k}$;

$$4) \vec{F} = \frac{2x\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}}{x^2 + y - z};$$

$$5) \vec{F} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|};$$

$$6) \vec{F} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^2};$$

$$7) \vec{F} = \vec{r} \cdot |\vec{r}|.$$

4.3.13. Встановити, що векторне поле \vec{F} є соленоїдальним та знайти його векторний потенціал.

$$1) \vec{F} = 2y\vec{i} - z\vec{j} - 2x\vec{k};$$

$$2) \vec{F} = 6y^2\vec{i} + 6z\vec{j} + 6x\vec{k};$$

$$3) \vec{F} = 3y^2\vec{i} - 3x^2\vec{j} - (y^2 + 2x)\vec{k};$$

$$4) \vec{F} = 6x\vec{i} - 15y\vec{j} + 9z\vec{k}.$$

[Відповіді до теми 4.3.](#)

Розділ 5. Звичайні диференціальні рівняння.

Тема 5.1. Диференціального рівняння першого порядку

Диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними називається рівняння 1-го порядку вигляду

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

або

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

де $P(x, y) = M_1(x)N_1(y)$ і $Q(x, y) = M_2(x)N_2(y)$.

Якщо диференціальне рівняння задано у вигляді

$$y' = f(x) \cdot g(y),$$

то замінимо похідну y' на $\frac{dy}{dx}$. Далі поділимо обидві частини рівняння на $g(y)$ ($g(y) \neq 0$)

та помножимо на dx :

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Звідси, інтегруючи обидві частини рівняння, отримаємо загальний інтеграл у вигляді

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C.$$

Для рівняння у вигляді

$$M_1(x)N_1(y) dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0,$$

поділимо обидві частини на добуток $N_1(y)M_2(x)$ ($N_1(y) \neq 0$, $M_2(x) \neq 0$):

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = 0.$$

Зінтегруємо та отримаємо загальний інтеграл у вигляді

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = C.$$

При такому почленному діленні диференціального рівняння можуть бути загублені розв'язки. Тому слід окремо розв'язати рівняння $g(y) = 0$ або $N_1(y) = 0$ та $M_2(x) = 0$ і

встановити ті розв'язки диференціального рівняння, які не можуть бути отримані із загального розв'язку, – *особливі розв'язки*.

5.1.1. Знайти загальний розв'язок

1) $(y - 1)^2 dx + (1 - x)^3 dy = 0;$

2) $x\sqrt{9 - y^2} dx - y(4 + x^2) dy = 0;$

3) $\sqrt{1 - y^2} dx - y\sqrt{1 - x^2} dy = 0;$

4) $\cos x \cos y dx - \sin x \sin y dy = 0;$

5) $\ln x \sin^3 y dx - x \cos y dy = 0;$

6) $(xy^2 - y^2) dx - (x^2 y + x^2) dy = 0;$

7) $(xy^2 + x) dx + (y - x^2 y) dy = 0;$

8) $xyy' = 1 - x^2;$

9) $yy' = \frac{1-2x}{y};$

10) $yy' + x = 1;$

11) $(\sqrt{xy} - 2\sqrt{x})y' - y = 0;$

12) $(1 + y')e^y + 1 = 0;$

13) $(1 + x^2)y' = xy - y\sqrt{1 + x^2};$

14) $y' = \frac{y \ln y}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x};$

15) $x(y^2 - 4) dx + y dy = 0;$

16) $\ln \cos y dx + x \operatorname{tg} y dy = 0;$

17) $(y + xy) dx + (x - xy) dy = 0;$

18) $\cos x \cos y dx - dy = 0;$

19) $y' = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y;$

20) $y' + \sin(x + y) = \sin(x - y);$

21) $y' = 10^{x+y};$

22) $2^{x+y} + 3^{x-2y} y' = 0;$

23) $xyy' = 1 - x^2;$

$$24) y' \operatorname{tg} x - y = a;$$

$$25) yy' = \frac{1-2x}{y}.$$

5.1.2. Знайти частинний розв'язок, що задовольняє початкову умову:

$$1) 3x^3\sqrt{y}dx + (1 - x^2)dy = 0, \quad y(0) = 0;$$

$$2) ydx - (4 + x^2) \ln y dy = 0, \quad y(2) = 1;$$

$$3) \sin^2 x \cos^2 y dx - \cos^2 x dy = 0, \quad y(0) = \frac{\pi}{4};$$

$$4) y'e^{-x} = x - 1, \quad y(1) = -e;$$

$$5) y'(x + \sqrt{x}) = \sqrt{1 - y}, \quad y(0) = 1;$$

$$6) \cos x \sin y dy - \cos y \sin x dx = 0, \quad y(0) = \frac{\pi}{4};$$

$$7) y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}, \quad y(0) = 1;$$

$$8) y' \sin x = y \ln y, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1;$$

$$9) y^2 + x^2 y' = 0, \quad y(-1) = 1;$$

$$10) 2(1 + e^x)yy' = e^x, \quad y(0) = 0;$$

$$11) (1 + x^2)y^3 dx - (y^2 - 1)x^3 dy = 0, \quad y(1) = -1;$$

$$12) e^{1+x^2} \operatorname{tg} y dx - \frac{e^{2x}}{x-1} dy = 0, \quad y(1) = \frac{\pi}{4};$$

$$13) (1 + e^{2x})y^2 dy = e^x dx, \quad y(0) = 0;$$

$$14) y'\sqrt{x+1} + y \ln^3 y = 0, \quad y\left(-\frac{15}{16}\right) = e;$$

$$15) \frac{dx}{xy-x} + \frac{dy}{xy+2y} = 0, \quad y(1) = 1;$$

$$16) x(1 + y^6)dx + y^2(1 + x^4)dy = 0, \quad y(0) = 1;$$

$$17) y' = e^{x+y} + e^{x-y}, \quad y(0) = 0;$$

$$18) y' + \cos(x + 2y) = \cos(x - 2y), \quad y(0) = \frac{\pi}{4};$$

$$19) 3e^x \operatorname{tg} y dx + (1 + e^x) \sec^2 y dy = 0, \quad y(0) = \frac{\pi}{4};$$

$$20) y - xy' = b(1 - x^2 y'), \quad y(1) = 1.$$

Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

Функція $f(x, y)$ називається **однорідною** функцією n -го виміру (n – натуральне число), якщо при будь-якому λ справедлива тотожність:

$$f(\lambda x, \lambda y) \equiv \lambda^n f(x, y).$$

Диференціальне рівняння 1-го порядку вигляду

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

називається **однорідним**, якщо $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ є однорідними функціями однакового виміру.

Такі диференціальні рівняння можуть бути перетворені до рівняння вигляду

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою підстановки $\frac{y}{x} = u$, де $u = u(x)$ – нова шукана функція. Тоді

$$y = ux \quad \Rightarrow \quad y' = u'x + u.$$

Диференціальні рівняння, які зводяться до однорідних

Розглянемо диференціальне рівняння

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

де $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$ – сталі, а $f(u)$ – неперервна функція на деякому проміжку.

Якщо визначник $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то рівняння зводиться до однорідного підстановкою

$$x = t + x_0, \quad y = z + y_0,$$

де (x_0, y_0) знаходимо з системи

$$\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0, \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0; \end{cases}$$

Якщо визначник $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, то рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними підстановкою

$$a_1x + b_1y = z.$$

5.1.3. Знайти загальний розв'язок рівняння.

1) $y' = 2 + \frac{y}{x}$;

2) $(x + y)dx + 2xdy = 0$;

3) $y - xy' = x + yy'$;

4) $ydy + (x - 2y)dx = 0$;

5) $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$;

6) $y = x(y' - \sqrt{x}e^y)$;

7) $xy' \sin \frac{y}{x} + x = y \sin \frac{y}{x}$;

8) $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$;

9) $xy' \ln \frac{y}{x} = x + y \ln \frac{y}{x}$;

10) $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$;

11) $y^2 + x^2y' = xyy'$;

12) $xy' = y \ln \frac{y}{x}$;

13) $(3y^2 + 3xy + x^2)dx = (x^2 + 2xy)dy$;

14) $y' = \frac{y+x}{x-y}$;

15) $(x + 2y - 1)dy + (2x + y + 1)dx = 0$;

16) $(2x + 2y - 1)dy + (x + y + 2)dx = 0$;

17) $y' = \frac{2y-x-5}{2x-y+4}$;

18) $y' = \frac{2x-y+1}{x-2y+1}$;

19) $y' = \frac{1-3y-3x}{1+x+y}$;

20) $y' = \frac{x+2y+1}{2x+4y+3}$;

21) $(x - y + 4)dy + (x + y - 2)dx = 0$;

22) $(x - 2y + 3)dy + (2x + y - 1)dx = 0$.

5.1.4. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння.

1) $(2x - 3y)dx + xdy = 0, y(1) = -1$;

$$2) (5\sqrt{xy} - y)dx + xdy = 0, \quad y(1) = 25;$$

$$3) xy' - y = x \cos^2 \frac{y}{x}, \quad y(3) = 0;$$

$$4) xy' = y(3 + \ln y - \ln x), \quad y(1) = \frac{1}{e};$$

$$5) xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}, \quad y(1) = \frac{\pi}{2};$$

$$6) (y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0, \quad y(1) = -2;$$

$$7) (xy' - y) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = x, \quad y(1) = 0;$$

$$8) y' = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2}, \quad y(1) = -1;$$

$$9) y' = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2, \quad y(1) = 2;$$

$$10) (x^4 + 6x^2y^2 + y^4)dx + 4xy(x^2 + y^2)dy = 0, \quad y(1) = 0;$$

$$11) y' = \frac{y+x-2}{y-x-4}, \quad y(1) = 1;$$

$$12) 2(x+y)dy + (3x+3y-1)dx = 0, \quad y(0) = 2;$$

Лінійне диференціальне рівняння

Диференціальне рівняння вигляду:

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ - визначені і неперервні на деякому проміжку функції, називається ***лінійним диференціальним рівнянням 1-го порядку***.

Якщо $Q(x) \neq 0$, то рівняння називається ***лінійним неоднорідним***.

Якщо $Q(x) = 0$, то рівняння

$$y' + P(x)y = 0$$

називається ***лінійним однорідним***, що відповідає даному неоднорідному рівнянню. Воно є рівнянням з відокремлюваними змінними.

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння можна отримати методом Бернуллі або методом варіації довільної сталої (методом Лагранжа).

Метод Бернуллі

Метод Бернуллі полягає в тому, розв'язок лінійного неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді добутку двох функцій

$$y = u \cdot v,$$

де $u = u(x)$ і $v = v(x)$ - невідомі функції, одна з яких довільна, але не рівна нулю.

Підставляючи вирази $y = u \cdot v$ та $y' = u'v + uv'$ в рівняння, отримаємо:

$$u'v + uv' + P(x) \cdot uv = Q(x) \quad \Rightarrow \quad u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x)$$

Рівняння буде рівносильне системі

$$\begin{cases} v' + P(x)v = 0, \\ u'v = Q(x). \end{cases}$$

Розв'язавши ці рівняння і підставивши в $y = u \cdot v$ отримаємо загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння.

Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа)

Метод полягає в тому, що загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді розв'язку відповідного однорідного рівняння, в якому сталу вважають функцією.

Спочатку записуємо лінійне однорідне рівняння, відповідне даному неоднорідному рівнянню:

$$y' + P(x)y = 0,$$

Інтегруючи, отримаємо його загальний розв'язок

$$y(x) = Ce^{-\int P(x)dx}.$$

Далі записуємо загальний розв'язок неоднорідного рівняння у такому ж вигляді, вважаючи довільну сталу деякою диференційованою функцією:

$$y(x) = C(x)e^{-\int P(x)dx}.$$

Підставляючи вирази $y(x)$ та $y'(x)$ в неоднорідне рівняння, отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними відносно функції $C(x)$ і розв'язуємо його.

5.1.5 Знайти загальний розв'язок

1) $y' - \frac{y}{x} = 3x$;

2) $y' + 4\frac{y}{x} + x = 0$;

3) $x^2y' + 2xy - 1 = 0$;

4) $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$;

5) $y' - 7y = 8e^{3x}$;

6) $(x^2 + 1)y' - xy = x^3 + x$;

7) $y' - \frac{y}{\sqrt{x}} - e^{2\sqrt{x}} = 0$;

8) $y' \cos x - y \sin x = \cos^2 x$;

9) $xy' \ln x = 5x - y$;

10) $y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg}x$;

11) $y'(x^2 + 4) - xy = \sqrt{x^2 + 4}$;

12) $y^2 dx + (5xy - 4)dy = 0$; (**Вказівка.** Прийняти за невідому функцію $x = x(y)$.)

13) $y' = \frac{y^2}{x + ye^{-1/y}}$; (**Вказівка.** Прийняти за невідому функцію $x = x(y)$.)

14) $y' = \frac{1}{2x - y^2}$; (**Вказівка.** Прийняти за невідому функцію $x = x(y)$.)

15) $y' = \frac{y}{2y \ln y + y - x}$; (**Вказівка.** Прийняти за невідому функцію $x = x(y)$.)

16) $y'(x + y^2) = y$; (**Вказівка.** Прийняти за невідому функцію $x = x(y)$.)

17) $(2xy + 3)dy - y^2 dx = 0$; (**Вказівка.** Прийняти за невідому функцію $x = x(y)$.)

18) $(y^4 + 2x)y' = y$; (**Вказівка.** Прийняти за невідому функцію $x = x(y)$.)

19) $y = xy' + y' \ln y$; (**Вказівка.** Прийняти за невідому функцію $x = x(y)$.)

20) $xy' - y = x^2 \cos x$;

21) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$;

22) $(1 + x^2)y' + y = \operatorname{arctg} x$;

23) $y' - y \operatorname{th} x = \operatorname{ch}^2 x$.

5.1.6 Знайти частинний розв'язок лінійного диференціального рівняння.

1) $y' + 3y = xe^{-3x}$, $y(0) = 0$;

- 2) $y'(1 - x^2) = xy + 1, y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\pi}{3};$
- 3) $y' + e^x y = e^{2x}, y(0) = \frac{1}{e};$
- 4) $(1 - x^2)y' - 2xy = (1 - x^2)^2, y(3) = 40;$
- 5) $xy' + y - e^x = 0, y(a) = b;$
- 6) $xy' - y = x^2 \sin x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi;$
- 7) $xy' \ln x = x + \ln x, y(e^2) = 2 \ln 2;$
- 8) $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1, y(1) = 0;$
- 9) $y' - y \operatorname{tg} x = \sec x, y(0) = 0;$
- 10) $xy' - \frac{y}{x+1} = x, y(1) = 0;$
- 11) $ydx - (3x + 1 + \ln y)dy = 0, y\left(-\frac{1}{3}\right) = 1;$
- 12) $2ydx + (y^2 - 6x)dy = 0, y(2) = -6;$
- 13) $y'\sqrt{1 - x^2} + y = \arcsin x, y(0) = 0;$
- 14) $y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x, y(e) = \frac{e^2}{2};$
- 15) $y' \sin x - y \cos x = 1, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$
- 16) $y' + 3y \operatorname{tg} 3x = \sin 6x, y(0) = \frac{1}{3}.$

Диференціальне рівняння Бернуллі

Диференціальне рівняння 1-го порядку вигляду

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n,$$

де $n \in R, n \neq 0, n \neq 1$, а $P(x)$ і $Q(x)$ – визначені і неперервні на деякому проміжку функції, називається ***рівнянням Бернуллі***. Воно зводиться до лінійного рівняння підстановкою

$$z = y^{1-n}.$$

На практиці розв'язок рівняння Бернуллі краще шукати безпосередньо методом Бернуллі у вигляді $y = uv$, не зводячи його попередньо до лінійного рівняння.

5.1.7. Знайти загальний або частинний розв'язок рівняння.

1) $y' + y = x\sqrt{y}$;

2) $y' + 2xy = 2x^3y^3$;

3) $y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0$;

4) $y' + 2\frac{y}{x} = 3x^2y^{4/3}$;

5) $y' - \frac{y}{x-1} = \frac{y^2}{x-1}$;

6) $y' + 2\frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$;

7) $4xy' + 3y = -e^x x^4 y^5$;

8) $y' + y = e^{\frac{1}{2}x} \sqrt{y}$, $y(0) = \frac{9}{4}$;

9) $y' + \frac{3x^2y}{x^3+1} = y^2(x^3 + 1) \sin x$, $y(0) = 1$;

10) $ydx + (x + x^2y^2)dy = 0$; (**Вказівка.** Прийняти за невідому функцію $x = x(y)$.)

11) $3dy = -(1 + 3y^2)y \sin x dx$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$;

12) $y' - 2y \operatorname{tg} x + y^2 \sin^2 x = 0$;

13) $y'(y^2 + 2y + x^2) + 2x = 0$, $y(1) = 0$; (**Вказівка.** Прийняти за невідому функцію $x = x(y)$.)

14) $(x^2 \ln y - x)y' = y$; (**Вказівка.** Прийняти за невідому функцію $x = x(y)$.)

15) $x^2y^2y' + xy^3 = 1$, $y(1) = 2$.

Рівняння у повних диференціалах

Диференціальне рівняння вигляду

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

де $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ такі, що $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, називається **рівнянням у повних диференціалах**.

Його можна переписати у вигляді $dU(x, y) = 0$, причому функція $U(x, y)$, що визначається формулою

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy + C$$

є загальним інтегралом цього рівняння.

5.1.8. Знайти загальний або частинний розв'язок рівняння.

1) $(2y + 3)dx + (2x + 3y^2)dy = 0;$

2) $(x + \ln |y|)dx + \left(1 + \frac{x}{y} + \sin y\right)dy = 0;$

3) $(3x^2y^2 + 7)dx + 2x^3ydy = 0;$

4) $(e^y + ye^x + 3)dx = (2 - xe^y - e^x)dy;$

5) $\sin(x + y)dx + x \cos(x + y)(dx + dy) = 0;$

6) $(1 + xe^{xy})dy + (2x + ye^{xy})dx = 0, y(0) = 1;$

7) $(x^2 + y^2 + y)dx + (2xy + x + e^y)dy = 0, y(0) = 0;$

8) $(x + \sin y)dx + (x \cos y + \sin y)dy = 0, y(0) = \pi;$

9) $(e^{x+y} + 4y^3)dy + (e^{x+y} + 3x^2)dx = 0, y(0) = 0;$

10) $(3x^2y + \sin x)dx = (\cos y - x^3)dy, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 8\pi.$

[Відповіді до теми 5.1.](#)

Тема 5.2. Диференціальні рівняння вищих порядків, які допускають зниження порядку

Диференціальні рівняння вищих порядків, що допускають зниження порядку

1. Рівняння вигляду

$$y^{(n)} = f(x),$$

яке містить тільки похідну n -го порядку і незалежну змінну x , розв'язуються послідовним n -кратним інтегруванням

$$y = \underbrace{\int dx \int \dots \int}_{n \text{ разів}} f(x) dx + \frac{C_1}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!} x^{n-2} + \dots + C_{n-1} x + C_n.$$

2. Диференціальне рівняння другого порядку вигляду

$$F(x, y', y'') = 0,$$

яке **явно не містить шуканої функції y** .

Порядок такого рівняння можна знизити за допомогою заміни:

$$y' = p(x), \quad y'' = p'(x),$$

де $p = p(x)$ – нова невідома функція.

Тоді отримаємо диференціальне рівняння першого порядку відносно нової змінної $p(x)$

$$F(x, p, p') = 0.$$

3. Диференціальне рівняння другого порядку вигляду

$$F(y, y', y'') = 0,$$

яке **явно не містить незалежної змінної x** .

Порядок такого рівняння можна знизити за допомогою заміни:

$$y' = p(y), \quad y'' = p'(y) \cdot y'(x) = p'p,$$

де $p = p(y)$ – нова невідома функція.

Тоді отримаємо диференціальне рівняння першого порядку відносно нової змінної $p(y)$

$$F(y, p, p') = 0.$$

5.2.1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

1) $y'' = \sin 2x$.

2) $y'' = x + \sin x$.

3) $y'' = \operatorname{arctg} x$.

4) $y''' = \frac{1}{x}$.

5) $y''' = \cos 2x$.

6) $y''' = e^{-\frac{x}{4}}$.

7) $y'' = \ln x$.

8) $x^2 y'' = 2$.

9) $xy'' - y' = 0$.

10) $y'' = y' + x$.

11) $y'' = \frac{y'}{x} + x$.

12) $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$.

13) $y''(e^x + 1) + y' = 0$.

14) $x^2 y'' + xy' = 1$.

15) $y'' + y' \operatorname{tg} 2x = \sin 2x$.

16) $y'' + \frac{2}{1-y} (y')^2 = 0$.

17) $yy'' + (y')^2 = 1$.

18) $2x^3 y' y'' = (y')^2 + 1$.

19) $2yy'' = (y')^2$.

20) $y''(3y + 4) - 3(y')^2 = 0$.

21) $yy'' = y^2 y' + (y')^2$.

22) $y'' = \frac{8}{y^3}$.

23) $yy'' + (y')^2 = 1$.

5.2.2. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє заданим початковим умовам

1) $y'' = \sin 3x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{9}$;

2) $xy'' = 1$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 2$;

3) $y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$;

4) $yy'' + (y')^3 - (y')^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = \frac{1}{2}$;

5) $y''(x^2 + 1) = 2xy'$, $y(1) = \frac{1}{3}$, $y'(1) = 2$;

6) $2yy'' = (y')^2 - y^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;

7) $xy'' = y' \ln\left(\frac{y'}{x}\right)$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$;

8) $y'' = xe^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;

9) $(y''x - y')y' = x^3$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$;

10) $yy'' - (y')^2 = y^3$, $y(0) = -\frac{1}{2}$, $y'(0) = 0$;

11) $xy'' + x(y')^2 - y' = 0$, $y(2) = 2$, $y'(2) = 1$;

12) $y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}$, $y(2) = 0$, $y'(2) = 4$;

13) $2y'' = 3y^2$, $y(-2) = 1$, $y'(-2) = -1$;

14) $y^3y'' = -1$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$;

15) $y^4 - y^3y'' = 1$, $y(0) = \sqrt{2}$, $y'(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

5.2.3. Знайти загальний або частинний розв'язок рівняння.

1) $2xy''''y'' = (y'')^2 - 1$;

2) $x^2y'''' = (y'')^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$;

3) $y''''(x-1) - y'' = 0$, $y(2) = 2$, $y'(2) = 1$, $y''(2) = 1$;

4) $y'''' = (y'')^3$;

5) $y'''' \sin^4 x = \sin 2x$;

6) $y'y'''' = 3(y'')^2$;

7) $(y'')^2 - y'y'''' = \left(\frac{y'}{x}\right)^2$;

8) $y''' = x \sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 2$;

9) $yy''' - y'y'' = 0$;

10) $xy^v = y^{iv}$, $y^{iv}(1) = 2$, $y'''(1) = 3$, $y''(1) = \frac{1}{3}$, $y'(1) = -\frac{11}{12}$, $y(1) = \frac{1}{60}$.

Відповіді до теми 5.2.

Тема 5.3. Лінійні однорідні диференціальні рівняння вищих порядків

Лінійні однорідні диференціальні рівняння

Функції $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x)$ називаються **лінійно незалежними** на інтервалі (a, b) , якщо рівність $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n = 0$ виконується тоді і тільки тоді, коли всі числа $\alpha_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). У протилежному випадку, якщо хоча б одне з чисел $\alpha_i \neq 0$, функції y_1, y_2, \dots, y_n називаються **лінійно залежними**.

Визначник Вронського (вронскіан) системи функцій y_1, y_2, \dots, y_n має вигляд

$$W(y_i(x)) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Для того щоб система функцій y_1, y_2, \dots, y_n була **лінійно незалежною** на інтервалі (a, b) , необхідно і достатньо, щоб вронскіан на цьому інтервалі був відмінний від нуля

$$W(y_i(x)) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b).$$

Загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння n -го порядку

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

з неперервними коефіцієнтами $a_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) має вигляд

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n,$$

де C_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – довільні сталі, а y_i – сукупність n лінійно незалежних частинних розв'язків y_1, y_2, \dots, y_n рівняння, що утворює **фундаментальну систему розв'язків** на інтервалі (a, b) .

У випадку лінійного диференціального рівняння другого порядку

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0,$$

якщо відомий один з розв'язків рівняння $y_1 = y_1(x)$, то другий лінійно незалежний частинний розв'язок $y_2 = y_2(x)$, можна знайти за формулою

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1(x) dx}}{y_1^2} dx.$$

5.3.1. Встановити, чи будуть функції y_1, y_2, y_3 лінійно незалежними на заданому проміжку

- 1) $y_1 = e^x, y_2 = xe^x, y_3 = x^2e^x$ на $(-\infty, +\infty)$;
- 2) $y_1 = 1, y_2 = \arcsin 2x, y_3 = \arccos 2x$ на $(-1, 1)$;
- 3) $y_1 = \ln(5x), y_2 = \ln(3x), y_3 = \ln(9x)$ на $(0, +\infty)$;
- 4) $y_1 = \sqrt{x}, y_2 = \sqrt{x+1}, y_3 = \sqrt{x+2}$ на $[0, +\infty)$;
- 5) $y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}, y_3 = e^{3x}$ на $(-\infty, +\infty)$;
- 6) $y_1 = \sin x, y_2 = \cos x, y_3 = 1$ на $(-\pi, \pi)$;
- 7) $y_1 = x, y_2 = x+1, y_3 = x+2$ на $(0, +\infty)$;
- 8) $y_1 = \sin^2 x, y_2 = \cos^2 x, y_3 = 1$ на $[0, 2\pi]$.

5.3.2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, якщо відомий частинний розв'язок y_1 .

- 1) $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0, y_1 = \frac{\sin x}{x}$;
- 2) $y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0, y_1 = x$;
- 3) $x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0, y_1 = x$;
- 4) $(1 + x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, y_1 = x$.

5.3.3. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$(2x - x^2)y'' + (x^2 - 2)y' + 2(1 - x)y = 0,$$

що задовольняє умовам

$$y(1) = 0, y'(1) = 1,$$

якщо відомий його частинний розв'язок $y_1 = e^x$.

5.3.4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, підбравши частинний нетривіальний розв'язок y_1 .

- 1) $y'' - y' + \frac{1}{x}y = 0$;
- 2) $y'' - \frac{2x}{1+x^2}y' + \frac{2}{1+x^2}y = 0$;
- 3) $y'' - \operatorname{tg} x y' + 2y = 0$.

Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Рівняння вигляду

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,$$

де коефіцієнти a_1, a_2, \dots, a_n – дійсні числа, називається **лінійним однорідним диференціальним рівнянням n -го порядку зі сталими коефіцієнтами**.

Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння має вигляд

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n,$$

де C_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – довільні сталі, y_i – частинні розв'язки, які утворюють фундаментальну систему.

Частинні розв'язки шукаємо за допомогою характеристичного рівняння, яке є алгебраїчним рівнянням n -го степеня вигляду

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Таке рівняння має n коренів (серед них можуть бути і комплексні). Позначимо ці корені через $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ і розглянемо випадки.

1. Всі корені λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) характеристичного рівняння **дійсні й різні (прості)**.

Тоді функції $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$, ..., $y_n = e^{\lambda_n x}$ є частинними розв'язками диференціального рівняння і утворюють фундаментальну систему розв'язків.

2. Всі корені λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) характеристичного рівняння **дійсні, але деякі з них кратні** (кратності $k > 1$).

Тоді кожному простому кореню λ відповідає один частинний розв'язок вигляду $e^{\lambda x}$, а кожному кореню λ кратності $k > 1$ відповідає k частинних розв'язків вигляду: $e^{\lambda x}$, $x e^{\lambda x}$, $x^2 e^{\lambda x}$, ..., $x^{k-1} e^{\lambda x}$.

3. Серед коренів характеристичного рівняння є **комплексно-спряжені**.

Тоді кожній парі $a \pm ib$ простих комплексно-спряжених коренів відповідає два частинних розв'язки:

$$e^{ax} \cos bx \text{ і } e^{ax} \sin bx,$$

а кожній парі $a \pm ib$ комплексно-спряжених коренів кратності $k > 1$ відповідає $2k$ частинних розв'язків вигляду:

$$e^{ax} \cos bx, xe^{ax} \cos bx, \dots, x^{k-1}e^{ax} \cos bx;$$
$$e^{ax} \sin bx, xe^{ax} \sin bx, \dots, x^{k-1}e^{ax} \sin bx.$$

Позначимо ці частинні розв'язки через y_1, y_2, \dots, y_n . Вони утворюють фундаментальну систему розв'язків і загальний розв'язок рівняння

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n.$$

5.3.5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

1) $y'' + y' - 2y = 0$;

2) $y'' - 9y = 0$;

3) $y'' - 4y' = 0$;

4) $y'' - y' - 12y = 0$;

5) $y'' + 7y' + 6y = 0$;

6) $y'' - 2y' + y = 0$;

7) $y'' + 4y' + 4y = 0$;

8) $4y'' - 20y' + 25y = 0$;

9) $y'' + 6y' + 13y = 0$;

10) $4y'' - 8y' + 5y = 0$;

11) $y'' - 4y' + 13y = 0$;

12) $y'' + 8y' = 0$;

13) $y'' + 25y = 0$;

14) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$;

15) $y''' + 2y'' - 15y' = 0$;

16) $y''' - 8y'' + 16y' = 0$;

17) $y''' - 3y' - 2y = 0$;

18) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$;

19) $y''' + 64y' = 0$;

$$20) y^{IV} - y''' + y'' - y' = 0;$$

$$21) y^{IV} + 4y'' + 3y = 0;$$

$$22) y^{IV} + 18y'' + 81y = 0;$$

$$23) y^V - 4y''' = 0;$$

$$24) y^V - 81y' = 0;$$

$$25) y^V - 6y^{IV} + 9y''' = 0;$$

$$26) y^V + 8y''' + 16y' = 0.$$

5.3.6. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє заданим початковим умовам.

$$1) y'' - 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 6, \quad y'(0) = 10;$$

$$2) 4y'' + 4y' + y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0;$$

$$3) y'' + 4y' + 29y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 15;$$

$$4) y'' - 2y' + y = 0, \quad y(2) = 1, \quad y'(2) = -2;$$

$$5) y'' + 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -6;$$

$$6) y'' - 10y' + 25y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$$

$$7) y'' - 2y' + 10y = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = e^{\frac{\pi}{6}};$$

$$8) 9y'' + y = 0, \quad y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2, \quad y'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0;$$

$$9) y'' + 3y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2;$$

$$10) y''' + y' = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -1;$$

$$11) y''' - 13y' - 12y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 7, \quad y''(0) = 7;$$

$$12) y^{IV} - 16y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 1;$$

$$13) y^{IV} + 2y''' + y'' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 0;$$

$$14) y^V - y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 1, \quad y^{IV}(0) = 2.$$

Відповіді до теми 5.3.

Тема 5.4. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння вищих порядків

Лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням n -го порядку зі сталими коефіцієнтами називається рівняння вигляду:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x),$$

де коефіцієнти a_1, a_2, \dots, a_n - дійсні числа, а $f(x) \neq 0$ - задана функція, неперервна на деякому проміжку (a, b) .

Рівняння вигляду

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,$$

називається *лінійним однорідним диференціальним рівнянням*, відповідним даному неоднорідному рівнянню.

Теорема (про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння)

Загальний розв'язок $y_{\text{зг}}$ лінійного неоднорідного диференціального рівняння дорівнює сумі загального розв'язку $y_{\text{зо}}$ відповідного однорідного рівняння і деякого частинного розв'язку $y_{\text{чн}}$ неоднорідного рівняння, тобто

$$y_{\text{зг}} = y_{\text{зо}} + y_{\text{чн}}.$$

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду

Рівняння вигляду

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x),$$

в якому права частина

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x),$$

коефіцієнти $a_1, a_2, \dots, a_n, \alpha, \beta$ - дійсні числа, а $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ - многочлени від x степеня n і m відповідно, називається *лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням n -го порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду*.

Метод підбору частинного розв'язку або метод невизначених коефіцієнтів.

Нехай права частина рівняння має спеціальний вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x).$$

Тоді частинний розв'язок цього рівняння слід шукати у вигляді

$$y_{\text{чн}} = x^r e^{\alpha x} (\tilde{P}_l(x) \cos \beta x + \tilde{Q}_l(x) \sin \beta x),$$

де r дорівнює кратності кореня λ характеристичного рівняння

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

що співпадає з числом $\alpha + \beta i$, тобто r - число, яке показує скільки разів $\alpha + \beta i$ є коренем характеристичного рівняння (якщо характеристичне рівняння такого кореня не має, то слід покласти $r = 0$); $\tilde{P}_l(x)$ і $\tilde{Q}_l(x)$ - повні многочлени від x з невизначеними коефіцієнтами степеня l , яке дорівнює найбільшому з чисел n і m , тобто $l = \max\{n, m\}$.

Зауваження 1. Многочлени $\tilde{P}_l(x)$ і $\tilde{Q}_l(x)$ повні бути повними, тобто містити всі степені x від нуля до l , з різними невизначеними коефіцієнтами при однакових степенях x в обох многочленах.

Зауваження 2. Якщо у вираз функції $f(x)$ входить хоча б одна з функцій $\cos \beta x$ або $\sin \beta x$, то у вираз $y_{\text{чн}}$ треба завжди записувати обидві функції.

Зауваження 3. Якщо права частина $f(x)$ дорівнює сумі двох (чи більше) функцій: $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, де $f_1(x)$, $f_2(x)$ - функції спеціального вигляду, то частинний розв'язок $y_{\text{чн}}(x)$ буде складатися з суми частинних розв'язків: $y_{\text{чн}}(x) = y_{\text{чн},1}(x) + y_{\text{чн},2}(x)$, де $y_{\text{чн},1}(x)$, $y_{\text{чн},2}(x)$ - частинні розв'язки, що відповідають $f_1(x)$, $f_2(x)$.

5.4.1. Для заданого рівняння записати загальний розв'язок та частинний розв'язок з невизначеними коефіцієнтами (чисельних значень коефіцієнтів не знаходити).

1) $y'' + 2y' + 5y = e^{-2x}(x^2 - 7x + 2)$;

2) $y'' + 4y' + 3y = xe^{-3x}$;

3) $y'' - 8y' = x^3 - 2x$;

4) $y'' - 10y' + 25y = e^{5x}(1 - x^2)$;

5) $y'' - 2y' + 10y = xe^x \cos 2x$;

- 6) $y'' + 16y = (x^2 - 7) \sin 4x$;
- 7) $y'' - 6y' + 13y = e^{3x} \sin 2x$;
- 8) $y^{IV} + 4y'' + 4y = x \sin 2x$;
- 9) $y'' + 10y' = x^2 + xe^{-10x} \cos x$;
- 10) $y'' - 36y = xe^{-6x} - e^{6x} + \sin 6x$;
- 11) $y'' + 6y' + 25y = e^{-3x} \cos 4x + x \sin 4x$.

5.4.2. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 3y' + 2y = f(x)$ методом підбору, якщо:

- 1) $f(x) = 10e^{-x}$;
- 2) $f(x) = 3e^{2x}$;
- 3) $f(x) = 2 \sin x$;
- 4) $f(x) = 2e^x \cos \frac{x}{2}$;
- 5) $f(x) = 2x^3 - 30$;
- 6) $f(x) = e^x(3 - 4x)$.

5.4.3. Записати очікуваний вигляд частинного розв'язку $y_{\text{чн}}$ лінійного неоднорідного диференціального рівняння, якщо відома його права частина $f(x)$ та корені характеристичного рівняння відповідного однорідного рівняння.

- 1) $f(x) = 10, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$;
- 2) $f(x) = e^{-x}(2x + 8), \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$;
- 3) $f(x) = e^{2x}(x^2 + 5x - 1), \lambda_{1,2} = 2$;
- 4) $f(x) = \cos 3x + 2 \sin 3x, \lambda_1 = 3i, \lambda_2 = -3i$;
- 5) $f(x) = e^x(3x \cos 2x + \sin 2x), \lambda_1 = 1 + 2i, \lambda_2 = 1 - 2i$;
- 6) $f(x) = \sin x, \lambda_1 = 2i, \lambda_2 = -2i$;
- 7) $f(x) = e^{3x}(2x \cos 5x + 7 \sin 5x), \lambda_1 = 5 + 3i, \lambda_2 = 5 - 3i$;
- 8) $f(x) = 2 \cos 2x, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$.

5.4.4. Знайти загальний розв'язок рівняння методом підбору.

- 1) $y'' + 3y' - 10y = 10x^2 + 4x - 5$;
- 2) $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$;
- 3) $y'' - 4y' - 5y = (27x - 39)e^{-4x}$;
- 4) $2y'' + y' - y = 2e^x$;
- 5) $y'' - 4y' + 3y = 10e^{3x}$;
- 6) $y'' + 4y' = -2xe^{-4x}$;

- 7) $y'' + 16y = (34x + 13)e^{-x}$;
- 8) $y'' + 4y' + 4y = 3xe^{-2x}$;
- 9) $y'' + y = \cos x$;
- 10) $y'' - 7y' + 6y = \sin x$;
- 11) $y'' + 5y' = 50 \cos 5x$;
- 12) $y'' - 4y' + 5y = 2 \cos x + 6 \sin x$;
- 13) $y'' + 4y = 10 \cos 2x - 6 \sin 2x$;
- 14) $y'' - 4y = e^{2x} \sin 2x$;
- 15) $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$;
- 16) $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3$;
- 17) $y''' - 3y' + 2y = e^{-x}(4x^2 + 4x - 10)$;
- 18) $y^{IV} + 8y'' + 16y = \cos x$;
- 19) $y^{IV} - y = xe^x + \cos x$.

5.4.5. Знайти загальний розв'язок рівняння, використовуючи принцип суперпозиції розв'язків.

- 1) $y'' - y' - 2y = 4x - 2e^x$;
- 2) $y'' - 3y' = 18x - 10 \cos x$;
- 3) $y'' - 2y' + y = 2 + e^x \sin x$;
- 4) $y'' - 3y' = e^{3x} + 12x - 7$;
- 5) $y'' - 3y' + 2y = x - e^{-2x} + 1$;
- 6) $5y'' - 6y' + 5y = e^{2x} + 2x^3 - x + 2$;
- 7) $y'' - 4y' + 4y = 8(x^2 + e^{2x} + \sin 2x)$;
- 8) $y^{IV} - 2y'' + y = 8(e^x + e^{-x}) + 4(\sin x + \cos x)$.

5.4.6. Знайти частинний розв'язок рівняння, що задовольняє заданим початковим умовам.

- 1) $y'' - y' = 2(1 - x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;
- 2) $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$;
- 3) $4y'' + 16y' + 15y = 4e^{-\frac{3}{2}x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -5,5$;
- 4) $y'' + 4y = (6x + 5)e^{-2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = \frac{3}{4}$;

$$5) y'' + 2y' - 8y = (12x + 20)e^{2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$$

$$6) y'' + y = -\sin 2x, \quad y(\pi) = 1, \quad y'(\pi) = 1;$$

$$7) y'' - 2y' + 10y = 74 \sin 3x, \quad y(0) = 6, \quad y'(0) = 3;$$

$$8) y'' + y = -8 \sin x - 6 \cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\pi;$$

$$9) y'' - 4y' + 13y = e^{2x} \cos 3x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1;$$

$$10) y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3,2;$$

$$11) y''' - y'' - 4y' + 4y = x^2 + 3, \quad y(0) = \frac{11}{8}, \quad y'(0) = \frac{3}{2}, \quad y''(0) = -\frac{1}{2};$$

$$12) y''' - y' = 3(2 - x^2), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 1;$$

$$13) y''' + 2y'' + y' = -2e^{-2x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 1;$$

$$4) 4y''' + y' = 3e^x + 2 \sin \frac{x}{2}, \quad y(0) = \frac{13}{5}, \quad y'(0) = -\frac{2}{5}, \quad y''(0) = \frac{8}{5}.$$

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами та неспеціальною правою частиною.

Метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа).

Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x).$$

Тоді відповідне йому однорідне рівняння має вигляд

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0.$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння визначається формулою

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n,$$

де C_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – довільні сталі, y_i – частинні розв'язки, які утворюють фундаментальну систему.

Будемо шукати **загальний розв'язок** неоднорідного рівняння у такому ж вигляді, замінивши сталі C_i ($i = 1, 2, \dots, n$) невідомими функціями від x , які слід підібрати так, щоб функція

$$y_{зН} = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + \dots + C_n(x) y_n$$

задовольняла неоднорідне рівняння, тобто була його розв'язком.

$$15) y''' + y' = \frac{1}{\cos x};$$

$$16) y'' + 5y' + 6y = \frac{1}{e^{2x+1}}, \quad y(0) = -\frac{3\pi}{4}, \quad y'(0) = \frac{\pi}{4};$$

$$17) y'' \cos \frac{x}{2} + \frac{1}{4}y \cos \frac{x}{2} = 1;$$

$$18) y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = x - 1;$$

$$19) (3x + 2x^2)y'' - 6(1 + x)y' + 6y = 6;$$

$$20) (1 + x^2)y'' + 2xy' - 2y = 4x^2 + 2, \quad y(-1) = 0, \quad y'(-1) = 0.$$

Відповіді до теми 5.4.

Тема 5.5. Системи диференціальних рівнянь

Системи лінійних диференціальних рівнянь

Нормальна система диференціальних рівнянь називається *лінійною*, якщо кожне рівняння системи лінійне відносно шуканої функції та їїхніх похідних:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x), \\ \dots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x), \end{cases}$$

де функції $a_{ij}(x)$ і $f_i(x)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) визначені й неперервні при $x \in (a, b)$.

Лінійна система називається *однорідною*, якщо при всіх $x \in (a, b)$ функції $f_i(x)$ тотожно дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n, \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots + a_{2n}(x)y_n, \\ \dots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nn}(x)y_n. \end{cases}$$

Теорема. Загальний розв'язок \bar{y}_k однорідної лінійної системи в інтервалі (a, b) є лінійною комбінацією

$$\bar{y}_k = C_1 y_{1k} + C_2 y_{2k} + \dots + C_n y_{nk} = \sum_{i=1}^n C_i y_{ik} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

n її частинних лінійно незалежних розв'язків $y_{1k}, y_{2k}, \dots, y_{nk}$, що утворюють фундаментальну систему розв'язків.

Система функцій $y_{1k}(x), y_{2k}(x), \dots, y_{nk}(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) називається фундаментальною, якщо її визначник Вронського відмінний від нуля хоча б в одній точці інтервалу (a, b) .

Теорема. Загальний розв'язок y_k неоднорідної лінійної системи в інтервалі (a, b) дорівнює сумі загального розв'язку \bar{y}_k відповідної однорідної системи та будь-якого частинного розв'язку y_k^* неоднорідної системи:

$$y_k = \bar{y}_k + y_k^* = \sum_{i=1}^n C_i y_{ik} + y_k^* \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

5.5.1. Знайти розв'язок системи методом виключення.

$$1) \begin{cases} x'(t) = -y, \\ y'(t) = -4x; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x'(t) = y, \\ y'(t) = -x; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x'(t) = 2x + y, \\ y'(t) = 3x + 4y; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x'(t) = y, \\ y'(t) = -2x + 3y; \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x'(t) = x + 3y, \\ y'(t) = -x + 5y, \end{cases} \quad x(0) = 3, \quad y(0) = 1;$$

$$6) \begin{cases} x'(t) = y - 7x, \\ y'(t) = -2x - 5y; \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x'(t) = -y + e^{3t}, \\ y'(t) = -x + 2e^{3t}; \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} x'(t) = 2y - 5x + e^t, \\ y'(t) = x - 6y + e^{-2t}; \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} x'(t) = -x + y, \\ y'(t) = 25x - y + 6 \cos 3t - 33 \sin 3t; \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} x'(t) = -3x - 4y + 2t, \\ y'(t) = x + y + t, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0;$$

$$11) \begin{cases} x'(t) = y + t, \\ y'(t) = x + e^t, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0;$$

$$12) \begin{cases} x'(t) = 2x + y + \cos t, \\ y'(t) = -x + 2 \sin t, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0;$$

$$13) \begin{cases} 4x'(t) - y'(t) + 3x = \sin t, \\ x'(t) + y = \cos t; \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} x''(t) = x, \\ y''(t) = y; \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} x'(t) = x - z, \\ y'(t) = x, \\ z'(t) = x - y; \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} x'(t) = y + z, \\ y'(t) = x + z, \\ z'(t) = x + y, \end{cases} \quad x(0) = -1, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 0.$$

5.5.2 Знайти загальний розв'язок матричним методом.

$$1) \begin{cases} x'(t) = x - y, \\ y'(t) = -4x + y; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x'(t) = 3x - y, \\ y'(t) = 4x - y; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x'(t) = x - 3y, \\ y'(t) = 3x + y; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x'(t) = x - 2y - z, \\ y'(t) = -x + y + z, \\ z'(t) = x - z; \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x'(t) = x - y + z, \\ y'(t) = x + y - z, \\ z'(t) = 2x - y; \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x'(t) = 3x - y + z, \\ y'(t) = -x + 5y - z, \\ z'(t) = x - y + 3z; \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x'(t) = x - z, \\ y'(t) = x, \\ z'(t) = x - y. \end{cases}$$

5.5.3 Знайти частинний розв'язок системи, що задовольняє заданим початковим умовам.

$$1) \begin{cases} x'(t) = 2x + y, \\ y'(t) = 3x + 4y, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 3;$$

$$2) \begin{cases} x'(t) = 3x + 2y, \\ y'(t) = x + 2y, \end{cases} \quad x(0) = 2, \quad y(0) = -\frac{1}{2};$$

$$3) \begin{cases} x'(t) = -3x + 2y, \\ y'(t) = -2x + y, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} x'(t) = x - 5y, \\ y'(t) = x - y, \end{cases} \quad x(0) = 3, \quad y(0) = \frac{1}{5};$$

$$5) \begin{cases} x'(t) = x + y, \\ y'(t) = -2x + 3y, \end{cases} \quad x(0) = 2, \quad y(0) = 1;$$

$$6) \begin{cases} x'(t) = -x + y + z, \\ y'(t) = x - y + z, \\ z'(t) = x + y + z, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 0;$$

$$7) \begin{cases} x'(t) = y + z, \\ y'(t) = x + z, \\ z'(t) = x + y, \end{cases} \quad x(0) = -1, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 0.$$

Відповіді до теми 5.5.

Відповіді

Відповіді до Теми 1.1.

1.1.1. 1) $\frac{8}{10}$; 2) $\frac{a^4-1}{a^4+1}$; 3) $f(x, y)$; 4) $-f(x, y)$; 5) $f(x, y)$; 6) $\cos 2t$.

1.1.2. $f(x, y) = \frac{x^2(1-y)}{1+y}$.

1.1.3. $f(x, y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

1.1.4. 1) однорідна функція першого порядку; 2) однорідна функція нульового порядку; 3) однорідна функція третього порядку.

1.1.5. 1) $x^2 + y^2 \leq a^2$ – круг з центром у початку координат, радіуса a ; 2) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$; 3) частина площини, яка лежить ззовні кола з центром в початку координат і радіусом $R=5$, включаючи точки, що лежать на колі; 4) вся площина, за виключенням точок кола $x^2 + y^2 = 5$; 5) частина площини, яка лежить ззовні параболи $y^2 = 2x$, за виключенням точок, що лежать на дузі параболи; 6) внутрішня частина правого вертикального кута, утвореного бісектрисами координатних кутів, включаючи самі бісектриси; 7) теж саме, що в завданні 5), але без меж; 8) $y^2 > 2x - 4$; 9) частина площини, що міститься ззовні еліпса з центром в точці $(1;0)$ і півосями $a=2, b=1$; 10) частина площини, яка лежить всередині параболи $y^2 = 4x$, між параболою і колом $x^2 + y^2 = 1$, включаючи дугу параболи (точки, що лежать на колі не входять в область); 11) частина площини, що міститься в кільці $4 \leq x^2 + y^2 < 16$; 12) внутрішня частина правого і лівого вертикальних кутів, утворених прямими $y = 1 + x, y = 1 - x$, включаючи самі прямі, без точки їх перетину; 13) множина точок площини між параболою $x = y^2$ та $x = -y^2$, включно з параболою і виключаючи точку $(0,0)$; 14) $2n \leq x^2 + y^2 \leq 2n + 1, n$ - ціле.

1.1.6. 1) внутрішні точки простору, обмежені сферою $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, включаючи межу; 2) внутрішні точки простору, обмежені сферою $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, без початку координат; 3) $x > 0, y > 0, z > 0$; 4) частина простору всередині кругового параболоїда $z = x^2 + y^2$, виключаючи межу; 5) внутрішні точки простору, обмежені еліпсоїдом

$\frac{x^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{8} + \frac{(z+1)^2}{16} = 1$, виключаючи межу; б) внутрішні точки простору, обмежені

двопорожнинним гіперболоїдом $x^2 + \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{3} = -1$, виключаючи межу;

б) $r^2 < x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ – частина простору між більшою і меншою сферами, включно з поверхнею більшої сфери та виключаючи поверхню меншої сфери.

1.1.7. 1) сімейство паралельних прямих $x + 2y = C$; 2) сімейство паралельних прямих $y = Cx$; 3) сімейство паралельних прямих $y = e^{2C}x$ або $y = C_1x$ ($C > 0$); 4) сімейство парабол $y = C\sqrt{x}$; 5) концентричні кола $x^2 + y^2 = C$, $C \neq 0$; початок координат, $C = 0$; 6) сімейство гіпербол, розміщених у I і III квадрантах; 7) сімейство кіл $x^2 + y^2 = C$, $C \neq 0$; 8) сімейство еліпсів $4x^2 + y^2 = C$, $C \neq 0$.

1.1.8. 1) сімейство площин $x + y + z = C$; 2) параболоїди обертання $x^2 + y^2 = Cz$; 3) сімейство сфер $x^2 + y^2 + z^2 = C$; 4) поверхня рівня $x^2 + y^2 - z^2 = C$, що визначає: сімейство однопорожнинних гіперболоїдів при $C > 0$; сімейство двопорожнинних гіперболоїдів при $C < 0$; конус при $C = 0$; 5) поверхня рівня $x^2 + z^2 - y^2 = C$, що визначає: сімейство однопорожнинних гіперболоїдів при $C > 0$; сімейство двопорожнинних гіперболоїдів при $C < 0$; конус при $C = 0$ (вісь симетрії Oy); 6) сімейство двопорожнинних гіперболоїдів при $C > 0$; сімейство однопорожнинних гіперболоїдів при $C < 0$; конус при $C = 0$.

1.1.9. 1) 4; 2) 0; 3) 1.

1.1.10. 1) точки прямої $y = x$; 2) точки прямої $y = 4x$; 3) точки кола $x^2 + y^2 = 9$ та параболи $y^2 = 2x$.

[Повернутися до завдань.](#)

Відповіді до Теми 1.2.

1.2.1. 1) $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3y + \frac{y^3}{3} + 1$; $\frac{\partial z}{\partial y} = x^4 + xy^2 - 2$; 2) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x}$;

3) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{(x+y)^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y^2 + 2xy - x^2}{(x+y)^2}$; 4) $\frac{\partial z}{\partial x} = 4(6x^3y + \frac{3x^4}{4} + 2\sqrt[3]{y})^3(18x^2y + 3x^3)$;

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4(6x^3y + \frac{3x^4}{4} + 2\sqrt[3]{y})^3(6x^3 + \frac{2}{3\sqrt[3]{y^2}}); \quad 5) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2+x^2+y^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$6) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{(x^2+y^2)(\arctg\frac{y}{x})^2}; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{(x^2+y^2)(\arctg\frac{y}{x})^2}; 7) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2y}{x^2 \sin\frac{2y}{x}}; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2}{x \sin\frac{2y}{x}};$$

$$8) \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \cos\frac{y}{x} \cos\frac{x}{y} - \frac{1}{y} \sin\frac{y}{x} \sin\frac{x}{y}; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x} \cos\frac{y}{x} \cos\frac{x}{y} + \frac{x}{y^2} \sin\frac{y}{x} \sin\frac{x}{y}; 9) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2} \ln 5 \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{y}{x}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{x} \ln 5 \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{y}{x}}; 10) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y(e^{xy} \cos^2(xy) + \sin(2xy)(e^{xy}+1))}{\cos^4(xy)}; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x(e^{xy} \cos^2(xy) + \sin(2xy)(e^{xy}+1))}{\cos^4(xy)};$$

$$11) \frac{\partial z}{\partial x} = y^2(1+xy)^{y-1}; \frac{\partial z}{\partial y} = xy(1+xy)^{y-1} + (1+xy)^y \ln(1+xy);$$

$$12) \frac{\partial z}{\partial x} = x^{xy} x^{y-1}(y \ln x + 1); \frac{\partial z}{\partial y} = x^{xy} x^y (\ln x)^2;$$

$$13) \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2yz^2 + 5ze^{xz} + \frac{3z^3}{2\sqrt{x}} - 5^{xyz} \ln 5 yz; \frac{\partial u}{\partial y} = x^3z^2 - 5^{xyz} \ln 5 xz;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2x^3yz + 5xe^{xz} + 9\sqrt{x}z^2 - 5^{xyz} \ln 5 xy;$$

$$14) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{12x \operatorname{tg}^5(x^2+y^2+z^2)}{\cos^2(x^2+y^2+z^2)}; \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{12y \operatorname{tg}^5(x^2+y^2+z^2)}{\cos^2(x^2+y^2+z^2)}; \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{12z \operatorname{tg}^5(x^2+y^2+z^2)}{\cos^2(x^2+y^2+z^2)}; 15) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{z}{y} x^{\frac{z}{y}-1};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^{\frac{z}{y}} \ln x \left(-\frac{z}{y^2}\right); \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{y} x^{\frac{z}{y}} \ln x; 16) \frac{\partial u}{\partial x} = -5 \frac{z \ln y}{x \ln^2 x} \left(1 + \frac{z \ln y}{\ln x}\right)^4; \frac{\partial u}{\partial y} = 5 \frac{z}{y \ln x} \left(1 + \frac{z \ln y}{\ln x}\right)^4;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 5 \frac{\ln y}{\ln x} \left(1 + \frac{z \ln y}{\ln x}\right)^4; 17) \frac{\partial u}{\partial x} = y^z x^{y^z-1}; \frac{\partial u}{\partial y} = zy^{z-1} x^{y^z} \ln x; \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^z} y^z \ln x \ln y;$$

$$18) \frac{\partial u}{\partial x} = -yz (\cos x)^{yz-1} \sin x; \frac{\partial u}{\partial y} = z (\cos x)^{yz} \ln \cos x; \frac{\partial u}{\partial z} = y (\cos x)^{yz} \ln \cos x.$$

$$1.2.2. 1) \frac{\pi}{2}; 2) \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$1.2.5. \rho.$$

$$1.2.6. \frac{\pi}{4}.$$

$$1.2.7. 1) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (\ln x)^2 x^y; 2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{3(2x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{3xy}{\sqrt{x^2+y^2}}; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{3(2y^2+x)}{\sqrt{x^2+y^2}}; 3) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2a^2 \cos 2(ax+by); \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2ab \cos 2(ax+by);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2b^2 \cos 2(ax+by); 4) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{xy^3}{\sqrt{(1-(xy)^2)^3}}; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{\sqrt{(1-(xy)^2)^3}}; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{xy^3}{\sqrt{(1-(xy)^2)^3}};$$

$$5) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{y}{x^2+y^2}; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}; 6) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = ye^{x+ye^x}(1+ye^x);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{x+ye^x}(1+ye^x); \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{2x+ye^x};$$

$$7) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-4xy}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$8) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -y^2 \sin(xy); \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos(xy) - xy \sin(xy); \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x^2 \sin(xy).$$

1.2.9. $\sin y \cos(x + \cos y)$.

$$\mathbf{1.2.10.} \quad \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = 24, \quad \frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} = 6, \quad \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = 4; \quad \frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3} = 6; \quad \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = 24.$$

1.2.11. 0.

$$\mathbf{1.2.13.} \quad 1) dz = y(3x^2 - y^2)dx + x(x^2 - 3y^2)dy;$$

$$2) dz = xy((2y^3 - 3xy^2 + 4x^2y)dx + (4y^2x - 3yx^2 + 2y^3)dy);$$

$$3) dz = \frac{1}{x^2 + y^2} (ydx - xdy); \quad 4) dz = \frac{ydx - xdy}{x\sqrt{x^2 - y^2}}; \quad 5) dz = \sqrt{(x^2 + y^2)^3} (xdx + ydy);$$

$$6) dz = -\frac{dx}{1+x^2} - \frac{dy}{1+y^2}; \quad 7) dz = \operatorname{ctg}(xy)(ydx + xdy); \quad 8) dz = \frac{4xy(ydx - xdy)}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$9) du = y^{xz-1}(zy \ln y dx + xz dy + xy \ln y dz); \quad 10) du = \frac{3}{\sqrt{x^3 + y^3 + z^3}} (x^2 dx + y^2 dy + z^2 dz).$$

$$\mathbf{1.2.14.} \quad \frac{3}{500}.$$

$$\mathbf{1.2.15.} \quad 1) 0,01; \quad 2) -0,03; \quad 3) 1,04; \quad 4) 2,98; \quad 5) 1,013; \quad 6) 3,037; \quad 7) 0,82; \quad 8) 0,502; \quad 9) 16,97; \quad 10) 1,05.$$

$$\mathbf{1.2.16.} \quad 1) d^2 z = 2y dx^2 + 4(x + y) dx dy + 2x dy^2;$$

$$2) d^2 z = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} ((y^2 - x^2) dx^2 - 4xy dx dy + (x^2 - y^2) dy^2);$$

$$3) d^2 z = -\cos(x + y)(dx + dy)^2;$$

$$4) d^2 z = -2(\sin 2y dx dy + x \cos 2y dy^2);$$

$$5) d^2 z = \frac{2}{x^4} (3y^2 dx^2 - 4xy dx dy + x^2 dy^2);$$

$$6) d^2 z = 2(z dx dy + y dx dz + x dy dz).$$

$$\mathbf{1.2.17.} \quad 1) d^2 z(1; 1) = e(dx^2 + 4dx dy + dy^2); \quad 2) d^2 z(1; 2) = 2dx^2 - 6dx dy + 4dy^2.$$

$$\mathbf{1.2.18.} \quad 1) \frac{dz}{dt} = e^{2t^4 - \sin t} (8t^3 - \cos t); \quad 2) \frac{dz}{dt} = ae^{a^2 \cos^2 t + a \sin t} (\cos t - a \sin 2t);$$

$$3) \frac{dz}{dt} = \frac{3(1-4t^2)}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}; \quad 4) \frac{du}{dt} = \sin 2t + e^t (2e^t + t^2 + 2t); \quad 5) \frac{du}{dt} = \frac{e^t}{t^3-1} \left(\frac{1}{t} + \ln t - \frac{3t^2 \ln t}{t^3-1} \right);$$

$$6) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{(x^2 + y^2)}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{2(x + e^{2x})}{x^2 + e^{2x}}; \quad 7) \frac{dz}{dx} = \frac{1}{e^x + e^{x^4}} (e^x + 4x^3 e^{x^4}); \quad 8) \frac{dz}{dx} = \frac{e^{-2x}}{1 + x^2 e^{-4x}} (1 - 2x);$$

$$9) \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x^2+1}; 10) \frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2\left(4x+\frac{1}{x^2}-3\sqrt{x}\right)} \left(4 - \frac{2}{x^3} - \frac{3}{2\sqrt{x}}\right); 11) \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2u^2}{v^2(2u+3v)} + 2 \frac{u}{v^2} \ln(2u+3v),$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{3u^2}{v^2(2u+3v)} + 2 \frac{u^2}{v^3} \ln(2u+3v); 12) \frac{\partial z}{\partial u} = 3u^3 \sin v \cos v (\sin v - \cos v);$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = u^3 (\sin v + \cos v) (3 \sin v \cos v - 1); 13) \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2}{u}; \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{2(v^4-1)}{v(v^4+1)};$$

$$14) \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} 2u + \frac{\partial f}{\partial y} v e^{uv}; \frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{\partial f}{\partial x} 2v + \frac{\partial f}{\partial y} u e^{uv}.$$

$$1.2.19. dz = 13x^{12} e^{3y} \sin^2 y dx + x^{13} e^{3y} (\sin 2y + 3 \sin^2 y) dy;$$

$$1.2.21. 1) \frac{dy}{dx} = \frac{y(y^2-3x^2)}{x(x^2-3y^2)}; 2) \frac{dy}{dx} = -\frac{y(\sin(xy)+e^{xy}+y)}{x(\sin(xy)+e^{xy}+2y)}; 3) \frac{dy}{dx} = \frac{ye^{xy}-ye^x-e^y}{xe^y+e^x-xe^{xy}}; 4) \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1-xy};$$

$$5) \frac{dy}{dx} = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}; 6) \frac{dy}{dx} = \frac{y^2(1-\ln x)}{x^2(1-\ln y)}.$$

$$1.2.22. 1) \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c^2 x}{a^2 z}; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c^2 y}{b^2 z}; 2) \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3x^2+4y^2+z}{3z^2+x}; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y(3y-4x)}{3z^2+x};$$

$$3) \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yz}{z^3+xy}; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xz}{z^3+xy}; 4) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz(1-\cos z)}{\sin z-xy(1-\cos z)}; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz(\cos z-1)}{\sin z-yx(1-\cos z)}.$$

$$1.2.23. 1) dz = \frac{(1-yz)dx+(1-xz)dy}{xy-1}; 1) dz = -\frac{\sin 2x dx+\sin 2y dy}{\sin 2z}; 2) dz = \frac{yzdx+z^2 dy}{y(x+z)}.$$

[Повернутися до завдань.](#)

Відповіді до Теми 1.3.

$$1.3.1. 1) 4x - 2y - z - 3 = 0, \frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{-1}; 2) 12x - 16y - z - 2 = 0, \frac{x-3}{12} = \frac{y-2}{-16} = \frac{z-2}{-1};$$

$$3) 2x + y - z - 2 = 0, \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{-1}; 4) 11x + 17y + 5z - 60 = 0, \frac{x-4}{11} = \frac{y-3}{17} = \frac{z+7}{5};$$

$$5) x - y - 2z + 1 = 0, \frac{x-\pi}{1} = \frac{y-\pi}{-1} = \frac{z-\frac{1}{2}}{-2}; 6) x + 11y + 5z - 18 = 0, \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{11} = \frac{z+1}{5};$$

$$7) x + y - 4z = 0, \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-4}; 8) 2x + y + 11z - 25 = 0, \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{11}.$$

$$1.3.3. x - y + 2z = \pm \sqrt{\frac{11}{2}}.$$

$$1.3.4. 1) 1 + y + \frac{1}{2!}(y^2 - x^2) + \frac{1}{3!}(y^3 - 3x^2y) + \dots; 2) y + xy + \frac{3x^2y-y^3}{3!} + \dots;$$

$$3) 1 - \frac{x^2+y^2}{2!} + \frac{x^4+6x^2y^2+y^4}{4!} + \dots; 4) y + \frac{2xy-y^2}{2!} + \frac{3x^2y-3xy^2+y^3}{3!} + \dots; 5) y + xy + \frac{3x^2y-y^3}{3!};$$

$$6) 1 + (x + y) + (x^2 + xy + y^2) + (x^3 + y^2x + xy^2 + y^3) + \dots.$$

$$1.3.5. 1) \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\left(x - \frac{\pi}{4} \right) + \left(y - \frac{\pi}{4} \right) \right) - \frac{1}{4} \left(\left(x - \frac{\pi}{4} \right)^2 - 2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \left(y - \frac{\pi}{4} \right) + \left(y - \frac{\pi}{4} \right)^2 \right) + \dots;$$

$$2) 1 + (y - 1) + (x - 1)(y - 1) + \frac{1}{2}(x - 1)^2(y - 1) + \dots;$$

$$3) 1 - (x + 2)^2 + 2(x + 2)(y - 1) + 3(y - 1)^2;$$

$$4) 1 + (y - 1) + (x - 1)(y - 1) + \dots;$$

$$5) 1 + \left((x - 1) + (y + 1) \right) + \frac{\left((x - 1) + (y + 1) \right)^2}{2!} + \frac{\left((x - 1) + (y + 1) \right)^3}{3!} + \dots;$$

$$6) (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 + 2(x - 1)(y - 1) - (y - 1)(z - 1).$$

$$1.3.6. 1) z_{max}(0; 0) = 10; 2) z_{max}(2; -2) = 8; 3) z_{min}(0, 0) = 0; z_{max}\left(-\frac{5}{3}, 0\right) = \frac{125}{27};$$

в точках $(-1, 2), (-1, -2)$ екстремуму немає; 4) $z_{max}(-2, -6) = -4$; в точці $(-1, -3)$

екстремуму немає; 5) $z_{min}(-1, 1) = 0$; 6) $z_{min}\left(1, \frac{1}{2}\right) = 0$; в точці $(0, 0)$ екстремуму немає;

7) $z_{min}(-2, 0) = -\frac{2}{e}$; 8) $z_{min}(1, 1) = -1$, в точці $(0, 0)$ екстремуму немає;

9) $z_{max}(3, 2) = 108$; 10) $z_{min}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = z_{min}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -8$, в точці $(0, 0)$ екстремуму

немає; 11) $z_{max}(0, 0) = 1$; 12) $z_{min}(0, 0) = 0$; 13) $z_{min}(4, 2) = 6$; 14) $z_{max}(-4, -2) = 8e^{-2}$,

в точці $(0, 0)$ екстремуму немає.

$$1.3.7. z_{min}(1, 0) = -3, z_{max}(1, 2) = 17.$$

$$1.3.8. z_{min}(4, 2) = -64, z_{max}(2, 1) = 4.$$

$$1.3.9. z_{min}(0, 2) = z_{min}(0, -2) = -4, z_{max}(2, 0) = z_{max}(-2, 0) = 4.$$

$$1.3.10. z_{min} = 5, z_{max} = 11.$$

$$1.3.11. z_{min}(0, 0) = 0, z_{max}(4, 0) = z_{max}(-4, 0) = 16.$$

$$1.3.12. z_{min}(0, 0) = 0, z_{max}(0, 1) = z_{max}(0, -1) = \frac{3}{e}.$$

$$1.3.13. z_{min} = \frac{36}{13}.$$

$$1.3.14. z_{max}(1, 2) = 2.$$

$$1.3.15. z_{min}(-1, 2) = -2, z_{max}(1, 2) = 2.$$

[Повернутися до завдань.](#)

Відповіді до Теми 2.1.

2.1.1. 1) $\{1 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 3\}$;

2) $\{0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq \frac{4}{3}x\}, \{0 \leq y \leq 4, \frac{3}{4}y \leq x \leq 3\}$;

3) $\{0 \leq x \leq 4, -x \leq y \leq \frac{x}{2}\}, \{-4 \leq y \leq 0, -y \leq x \leq 4\} \cup \{0 \leq y \leq 2, 2y \leq x \leq 4\}$;

4) $\{1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq x + 2\}, \{0 \leq y \leq 3, 1 \leq x \leq 3\} \cup \{3 \leq y \leq 5, y - 2 \leq x \leq 3\}$;

5) $\{0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq \frac{2}{3}x\} \cup \{3 \leq x \leq 7, 0 \leq y \leq -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}\},$

$\{0 \leq y \leq 2, \frac{3}{2}y \leq x \leq -2y + 7\}$;

6) $\{-4 \leq x \leq -2, -\frac{3}{2}x - 2 \leq y \leq \frac{1}{2}x + 6\} \cup \{-2 \leq x \leq -1, 1 \leq y \leq 5\},$

$\{1 \leq y \leq 4, -1 \leq x \leq -\frac{2}{3}y - \frac{4}{3}\} \cup \{4 \leq y \leq 5, -1 \leq x \leq 2y - 12\}$;

7) $\{-3 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq \sqrt{9 - x^2}\}, \{0 \leq y \leq 3, -\sqrt{9 - y^2} \leq x \leq \sqrt{9 - y^2}\}$;

8) $\{0 \leq x \leq 2, x + 2 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\},$

$\{-2 \leq y \leq 0, 0 \leq x \leq y - 2\} \cup \{0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq \sqrt{9 - y^2}\}.$

2.1.2. 1) $\int_1^4 dx \int_0^2 f(x, y) dy$; 2) $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy$; 3) $\int_0^1 dx \int_{x-1}^{1-x} f(x, y) dy$;

4) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$; 5) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2}^{4-x^2} f(x, y) dy$; 6) $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy$;

7) $\int_{-2}^2 dx \int_{\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy$; 8) $\int_0^4 dx \int_{3-\sqrt{4x-x^2}}^{3+\sqrt{4x-x^2}} f(x, y) dy$;

9) $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy + \int_2^3 dx \int_x^{6-x} f(x, y) dy$;

10) $\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^{\frac{2}{1+x^2}} f(x, y) dy$; 11) $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x}} f(x, y) dy.$

$$2.1.3. 1) \int_0^2 dy \int_1^y f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^2 f(x, y) dx; \quad 2) \int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x, y) dy;$$

$$3) \int_0^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx; \quad 4) \int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy;$$

$$5) \int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy; \quad 6) \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x, y) dx;$$

$$7) \int_0^2 dy \int_{2-\sqrt{4-y^2}}^y f(x, y) dx; \quad 8) \int_0^3 dx \int_0^{\frac{4x}{3}} f(x, y) dy + \int_3^5 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) dy;$$

$$9) \int_0^4 dy \int_0^{\frac{y}{2}} f(x, y) dx + \int_4^6 dy \int_0^{6-y} f(x, y) dx; \quad 10) \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x, y) dx;$$

$$11) \int_1^2 dy \int_1^y f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^2 f(x, y) dx; \quad 12) \int_0^2 dx \int_{2x}^{6-x} f(x, y) dy;$$

$$13) \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{y-1} f(x, y) dx; \quad 14) \int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} f(x, y) dx;$$

$$15) \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_{\frac{1}{x}}^2 f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_x^2 f(x, y) dy; \quad 16) \int_{-2}^1 dy \int_{y^2}^4 f(x, y) dx;$$

$$17) \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x} f(x, y) dy; \quad 18) \int_0^1 dy \int_y^{2-y} f(x, y) dx;$$

$$19) \int_0^2 dy \int_{y^2}^{y^2+2} f(x, y) dx; \quad 20) \int_0^3 dx \int_{\sqrt[3]{x}}^{x+4} f(x, y) dy + \int_3^8 dx \int_{\sqrt[3]{x}}^{10-x} f(x, y) dy.$$

2.1.4. 1) 2π ; 2) $\frac{\pi^2}{16}$; 3) $\frac{27}{4}$; 4) $112\frac{8}{105}$; 5) $\frac{e-1}{2}$; 6) $\frac{14\pi}{3}$; 7) $\frac{9}{4}$; 8) 50,4; 9) $\frac{25\pi}{2}$; 10) 2,4;

11) $\frac{\pi}{6}$; 12) $\frac{5-e^{-2}}{2}$.

2.1.5. 1) 9; 2) $(e-1)^2$; 3) -2 ; 4) $\frac{3}{20}$; 5) $\frac{26}{105}$; 6) $\frac{752}{5}$; 7) $\frac{1}{2}$; 8) π ; 9) $\frac{121}{486}$; 10) $-\frac{93}{120}$; 11) 0;

12) $-\frac{1}{504}$; 13) $\frac{1}{2}$; 14) $\frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$; 15) 3; 16) $\frac{4}{5}$; 17) $\frac{\pi}{6}$; 18) $\frac{\pi-2}{8}$.

2.1.6. 1) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho$; 2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho$;

3) $\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{b \sin \varphi} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho$; 4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos \varphi}} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho$;

5) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} 2} d\varphi \int_{4 \cos \varphi}^{8 \cos \varphi} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho$; 6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{2}{\cos \varphi + \sin \varphi}}^2 f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho$;

7) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho$.

2.1.7. 1) 27π ; 2) $\frac{16}{3}\pi$; 3) 6π ; 4) $\frac{\pi}{2}(5 \ln 5 - 4)$; 5) $\frac{\pi(\pi-2)}{8}$; 6) 3π ; 7) $\frac{a^3\pi}{36}$; 8) $\frac{\pi^2}{6}$; 9) $\frac{14}{48}$; 10) 0;

11) $\frac{3}{128}$; 12) $\frac{a^3\pi^4}{12}$; 13) $\frac{199-108\sqrt{3}}{60}$; 14) $\frac{10+7\pi}{12}$; 15) $\frac{4a^3}{3}$; 16) $\frac{a^4\pi}{16}$; 17) 0.

2.1.8. $\frac{2\pi ab}{3}$.

2.1.9. $\frac{9}{2}$.

2.1.10. $\frac{165}{128} - \ln 2$.

2.1.11. $\frac{38}{9} \ln 2$.

2.1.12. $\frac{868}{15}$.

2.1.13. $\frac{3\pi a^2}{8}$.

2.1.14. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2.1.15. 1) $\frac{4}{3}$; 2) $\frac{8}{3}a\sqrt{2a}$; 3) $2\sqrt{3}\pi ab$; 4) $\frac{20}{3}$; 5) $\frac{1}{\sqrt[4]{6}}$.

[Повернутися до завдань.](#)

Відповіді до Теми 2.2.

2.2.1. 1) $\frac{1}{4}$; 2) 4,5; 3) $\frac{32}{3}$; 4) 4; 5) $\frac{125}{6}$; 6) $\frac{4}{3}$; 7) $\frac{8}{3}$; 8) $\frac{27}{2}$; 9) $\frac{16}{3}\sqrt{15}$; 10) $\frac{7}{120}$; 11) $\ln 3$; 12) $6 - 4 \ln 2$;
13) $\frac{15}{2} - 4 \ln 4$; 14) $e^2 - 1$; 15) $\frac{(e-1)^2}{2}$; 16) $12 - \frac{9}{\ln 4}$; 17) $\frac{e-2}{2e}$; 18) $\sqrt{2} - 1$; 19) $\frac{1}{2}$; 20) $\frac{\pi+2}{4}$;
21) $2\pi - \frac{8}{3}$.

2.2.2. 1) $\frac{4\pi+3\sqrt{3}}{3}$; 2) $\frac{1}{18}(3\sqrt{3} - \pi)$; 3) $\frac{5\pi a^2}{4}$; 4) 3π ; 5) $\frac{\pi+2}{4}a^2$; 6) $8\pi + 9\sqrt{3}$; 7) $\frac{4-\pi}{4}a^2$; 8) $\frac{\pi a^2}{4}$.

2.2.3. 1) $2 \ln 2$; 2) $\frac{3a^2}{2} \ln 2$; 3) $6(\arctg 2 + \arctg 0,5)$; 4) $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$; 5) $\frac{3\pi+6}{4}$; 6) $17 \arccos \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{35}}{2}$;
7) a^2 ; 8) $2a^2$; 9) $(\pi - 1)a^2$; 10) $\frac{5\pi}{8}$; 11) $\frac{3\pi}{4}$; 12) $\frac{\pi}{2}$; 13) $\frac{2}{3}$.

2.2.4. 1) 12; 2) $\frac{17}{5}$; 3) $\frac{40}{3}$; 4) $\frac{32}{9}$; 5) $8\pi - \frac{32\sqrt{2}}{3}$; 6) $\frac{88}{105}$; 7) $\frac{\pi}{48}$; 8) $\frac{8}{3}$; 9) 45; 10) $\frac{48\sqrt{6}}{5}$; 11) 2π ; 12) $\frac{\pi}{4}$.

2.2.5. 1) 14; 2) $12\sqrt{3}$; 3) 13; 4) $\frac{20\sqrt{2}}{3}$; 5) 8π ; 6) 280π ; 7) $3\sqrt{2}\pi$; 8) $2\pi\sqrt{2}$; 9) $2\pi\sqrt{2}$; 10) $8\pi\sqrt{2}$;
11) π ; 12) $8(\pi - 2)$; 13) $\frac{(5\sqrt{5}-1)\pi}{6}$.

2.2.6. 36.

2.2.7. 2π .

2.2.8. $\frac{1}{2}\pi\delta R^2$.

2.2.9. $\frac{4}{3}a^2$.

2.2.10. $2\pi r(R - r)$.

2.2.11. 1) $\frac{ab^2}{2}$; 2) $\frac{2}{3}R^2$; 3) $M_x = M_y = \frac{R^2}{12}$; 4) $M_x = \frac{4}{15}$, $M_y = \frac{11}{12}$; 5) $M_x = \frac{\pi}{24}$, $M_y = 1 - \frac{\pi^2}{12}$;
6) $M_x = \frac{4}{3}a^2$, $M_y = \frac{5}{8}\pi a^2$.

2.2.12. 1) $x_c = y_c = \frac{5}{3}$; 2) $x_c = \frac{12}{5}$, $y_c = \frac{3}{2}$; 3) $x_c = y_c = \frac{4a}{3\pi}$; 4) $x_c = y_c = \frac{256a}{315\pi}$;

$$5) x_c = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)(\sqrt{2} + 1), y_c = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)(\sqrt{2} + 2); 6) x_c = \frac{3\pi}{16}, y_c = 0;$$

$$7) x_c = \frac{2a \sin \alpha}{3\alpha}, y_c = \frac{4a \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{3\alpha}; 8) x_c = 0, y_c = \frac{4(R^2 + Rr + r^2)}{3\pi(R+r)};$$

$$9) x_c = y_c = \frac{3}{31}(\arcsin \frac{5}{13} - 6 \ln \frac{3}{2}); 10) x_c = \frac{2}{5}, y_c = 0; 11) x_c = \frac{2a}{5}, y_c = 0;$$

$$12) x_c = \frac{a\pi\sqrt{2}}{8} y_c = 0; 13) x_c = \pi a, y_c = \frac{5a}{6}.$$

$$2.2.13. 1) \frac{a^3 b}{3}, \frac{ab^3}{3}; 2) \frac{7}{6}; 3) I_x = \frac{1}{12}, I_y = \frac{7}{12}; 4) \frac{a^4}{30}; 5) \frac{2}{3} a^4; 6) 47,5; 7) \frac{5}{4} \pi a^4;$$

$$8) I_x = \frac{\pi ab^3}{4}, I_y = \frac{\pi a^3 b}{4}, I_0 = \frac{\pi ab}{4}(a^2 + b^2); 9) \frac{ab(a^2 + b^2)}{12}; 10) \frac{ab(a^2 + 12b^2)}{48}; 11) \frac{3\pi a^4}{2};$$

$$12) I_{\text{центр}} = I_0 = \frac{\pi a^4}{2}, I_{\text{діаметр}} = I_x = \frac{\pi a^4}{4}; 13) \frac{35}{16} \pi a^4.$$

[Повернутися до завдань.](#)

Відповіді до Теми 2.3.

$$2.3.1. 1) 6; 2) \frac{abc(a+b+c)}{2}; 3) \frac{a^6}{48}; 4) \frac{a^{11}}{110}.$$

$$2.3.2. 1) \frac{2}{3}; 2) \frac{1}{3}(2e - 2e^2 - 9); 3) 0; 4) \frac{625}{8}; 5) \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \frac{5}{8}\right); 6) \frac{16}{315}; 7) \frac{4 \ln 2 - 1}{8}; 8) \frac{\pi^2 - 8}{16};$$

$$9) \frac{ab^2}{12}(10b - 3a); 10) 4; 11) \frac{1}{364}; 12) \frac{1}{180}; 13) \frac{40}{3}; 14) \frac{1}{96}; 15) \frac{1}{12}; 16) 0; 17) \frac{4}{3}; 18) \frac{1}{24}; 19) -\frac{40}{63};$$

$$20) \frac{1}{24}; 21) \frac{27}{280}; 22) \frac{53}{60}.$$

2.3.3.

$$1) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^R \rho d\rho \int_0^1 f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) dz;$$

$$2) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} \rho d\rho \int_0^{\rho^2} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) dz;$$

$$3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^R f(\rho \cos \varphi \sin \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \theta) \rho^2 d\rho;$$

$$4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^R f(\rho \cos \varphi \sin \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \theta) \rho^2 d\rho;$$

$$5) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} \rho d\rho \int_{R-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{\sqrt{R^2-\rho^2}} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) dz;$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin \theta d\theta \int_0^R f(\rho \cos \varphi \sin \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \theta) \rho^2 d\rho +$$

$$+ \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^{2R \cos \theta} f(\rho \cos \varphi \sin \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \theta) \rho^2 d\rho.$$

2.3.4. 1) $\frac{3}{2}\pi$; 2) $\frac{8}{9}$; 3) $\frac{128}{15}\pi$; 4) $\frac{\pi}{8}$.

2.3.5. 1) $\frac{\pi a^3 b^2}{12}$; 2) $\frac{8a^2}{9}$; 3) $\frac{21}{4}$; 4) $\frac{3\pi}{2}$; 5) $\frac{\pi a^4}{4}$; 6) $\frac{16\pi}{3}$; 7) $\frac{656}{21}(\sqrt{2} - 1)$; 8) $\frac{179}{420}$; 9) $\frac{68}{15}$; 10) $\frac{64}{105}$; 11) $\frac{5\pi a^4}{32}$;
12) $\frac{\pi a^5}{5} \left(18\sqrt{3} - \frac{97}{6} \right)$.

2.3.6. 1) $\frac{4\pi R^5}{15}$; 2) $\frac{\pi^2 R^2}{8}$; 3) $\frac{\pi(R^5 - r^5)}{15}$; 4) $\frac{\pi}{10}$; 5) $\frac{15\sqrt{2}\pi}{32}$; 6) $2\pi\sqrt{2}$; 7) $\frac{3\pi}{64}$; 8) $\frac{4\pi^3}{9}(R^3 - r^3)(\sqrt{3} - \sqrt{2})$;
9) $2\pi R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$; 10) $\frac{9\pi^2 R^4}{8}$.

2.3.7. 1) $2\pi^7$; 2) $\frac{\pi-2}{32}$; 3) $\frac{4\pi abc}{5}$; 4) $\frac{\pi abc^2}{4}$.

[Повернутися до завдань.](#)

Відповіді до Теми 2.4.

2.4.1. 1) 8; 2) $\frac{55}{6}$; 3) 8; 4) $\frac{7}{24}$; 5) $\frac{176}{15}$; 6) 16; 7) $\frac{32}{9}a^3 H$; 8) $4(4 - 3 \ln 3)$; 9) $\frac{\pi a^3}{2}$; 10) $\frac{44}{3}$; 11) $\frac{16}{3}\pi$;
12) 8π ; 13) $\frac{\pi}{4}$; 14) $\frac{\pi}{6}$; 15) $\frac{32\pi}{3}$; 16) $\frac{81\pi}{4}$; 17) $\frac{3\pi R^3}{4}$; 18) $\frac{7}{12}$; 19) $\frac{\pi}{2}$; 20) $\frac{3}{35}$; 21) $\frac{\pi}{8}$; 22) $\frac{19}{6}\pi$; $\frac{15}{2}\pi$;
23) π ; 24) $\frac{\pi R^3}{3}(6\sqrt{3} - 5)$; 25) $\frac{19\pi}{6}$; 26) $\frac{8}{9}(3\pi - 4)$; 27) $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi R^3$; 28) $\frac{21\pi}{4}(2 - \sqrt{2})$; 29) $\frac{\pi^2 R^3}{4}$;

$$30) \frac{4\pi R^3}{21}; 31) \frac{\pi R^3}{3}; 32) \frac{\pi R^3}{6}.$$

$$2.4.2. 1) \frac{abc}{2}(a+b+c); 2) \frac{a^4}{24}; 3) \frac{a^4}{12}; 4) \frac{\pi H^4}{4}; 5) 70\pi; 6) \frac{k\pi HR^4}{2}; 7) \frac{\pi}{2}; 8) 8\pi; 9) \frac{13\pi}{4}; 10) \frac{81\pi}{2}; 11) \frac{8\pi}{4}; 12) 6k\pi a^2; 13) \frac{\pi a^4}{5} \left(18\sqrt{3} - \frac{97}{6}\right); 14) \frac{k\pi a^4}{12}; 15) \frac{ab}{24}(6R^2 - a^2 - b^2).$$

$$2.4.3. 1) \frac{a^2bc}{2}, \frac{b^2ac}{2}, \frac{c^2ab}{2}; 2) \frac{\pi}{15}; 3) \frac{\pi}{4}; 4) \frac{\pi H^4}{4}; 5) \frac{\pi abc^2}{4}.$$

$$2.4.4. \frac{54\pi R^5}{480}.$$

$$2.4.5. 1) \left(1, 2, \frac{1}{2}\right); 2) \left(\frac{14}{15}, \frac{26}{15}, \frac{8}{3}\right); 3) \left(\frac{6}{5}, \frac{12}{5}, \frac{8}{5}\right); 4) \left(\frac{18}{7}, \frac{15}{16}\sqrt{6}, \frac{12}{7}\right); 5) \left(0, 0, \frac{a}{3}\right); 6) \left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{7}{30}\right); 7) \left(\frac{4}{3}, 0, 0\right); 8) \left(1, 1, \frac{5}{3}\right); 9) \left(0, 0, \frac{3R}{8}\right); 10) \left(\frac{3R}{8}, \frac{3R}{8}, \frac{3R}{8}\right); 11) \left(0, 0, \frac{3R}{8}\right); 12) \left(\frac{12R}{5(3\pi-4)}, 0, 0\right).$$

$$2.4.6. \left(0, 0, \frac{2R}{5}\right).$$

$$2.4.7. 1) \frac{abc}{3}(a^2 + b^2); 2) \frac{a^5}{4}; 3) \frac{\pi a^5}{\sqrt{2}}; 4) \frac{32\sqrt{2}a^5}{135}; 5) 80; 6) \frac{\pi H^5}{10}; 7) \frac{\pi H^4}{12}; 8) \frac{14}{45}; 9) \frac{4\pi}{15}abc(a^2 + b^2 + c^2).$$

$$2.4.8. \frac{k\pi HR^4}{6}(R^2 + H^2).$$

$$2.4.9. 14k.$$

$$2.4.10. 1) \frac{224\pi}{3}; 2) \frac{2(2-\sqrt{2})\pi R^2}{5}; 3) \frac{4\pi R^5}{5}.$$

$$2.4.11. 1) I_{xy} = I_{xz} = \frac{\pi H^5}{20}, I_{zy} = \frac{\pi H^5}{5}; 2) I_{xy} = \frac{abc^3}{60}, I_{xz} = \frac{ab^3c}{60}, I_{zy} = \frac{a^3bc}{60};$$

$$3) I_{xy} = \frac{4\pi}{15}abc^3, I_{xz} = \frac{4\pi}{15}ab^3c, I_{zy} = \frac{4\pi}{15}a^3bc;$$

$$4) I_{xy} = \frac{\pi}{5}abc^3, I_{xz} = \frac{\pi}{5}ab^3c, I_{zy} = \frac{\pi}{5}a^3bc;$$

$$5) I_{xy} = \frac{2}{225}abc^3(15\pi - 16), I_{xz} = \frac{2}{1575}ab^3c(105\pi - 272), I_{zy} = \frac{2}{1575}a^3bc(105\pi - 92);$$

$$6) I_{xy} = \frac{7\pi}{2}abc^3, I_{xz} = \frac{4\pi}{3}ab^3c, I_{zy} = \frac{4\pi}{3}a^3bc.$$

[Повернутися до завдань.](#)

Відповіді до Теми 3.1.

3.1.1. 1) $\sqrt{5} \ln 2$; 2) 60; 3) $\sqrt{2} + 1$; 4) $\frac{5\sqrt{5}-1}{3}$; 5) 0; 6) $\frac{2152}{45}$; 7) $\frac{\pi}{3} + \ln \frac{1}{2}$; 8) $\frac{256}{15} a^3$; 9) $\frac{2}{3}$; 10) 2;
11) $\frac{a^2}{3} (\sqrt{(1+4\pi^2)^3} - 1)$; 12) $a^{2n+1} 2\pi$; 13) $\frac{38}{5}$; 14) $\frac{a^5}{5m} \sqrt{1+m^2}$; 15) $\frac{\pi a^2}{2}$; 16) $a^2 \sqrt{2}$;
17) $2\pi a^{2n-1}$; 18) $\frac{1}{12} (\sqrt{(4+R^2)^3} - 8)$.

3.1.2. 1) $\frac{19\sqrt{11}}{2}$; 2) 12; 3) $\frac{56\sqrt{7}-1}{54}$; 4) $\frac{8}{3} a\pi^3 \sqrt{2}$; 5) $\frac{2\sqrt{2}}{3} (\sqrt{(1+2\pi^2)^3} - 1)$; 6) 16π ; 7) $\frac{R^4 \sqrt{3}}{2}$;
8) $4\sqrt{2}$; 9) $2\pi R^2$.

3.1.3. 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\ln \sqrt{3}$; 3) 5π ; 4) $2\pi + 3\sqrt{3}$; 5) 5; 6) $2\sqrt{3}(e^\pi - 1)$.

3.1.4. $\frac{16}{27} (10\sqrt{10} - 1)$.

3.1.5. 1) 3π ; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{11}{3}$; 4) R^2 ; 5) $ka \left(a + \frac{b^2}{2\sqrt{a^2-b^2}} \ln \frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}} \right)$; 6) $2R^2$.

6.1.6. 1) $\frac{343}{6} \sqrt{5}$; 2) $\frac{1}{3} (10\sqrt{10} - 2\sqrt{2})$; 3) $2 \left(b^2 + \frac{a^2 b}{\sqrt{a^2-b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \right)$; 4) $k\pi \sqrt{8a^3}$; 5) $80\pi^2$.

3.1.7. 1) $\left(b - a \sqrt{\frac{h-a}{h+a}}, \frac{h}{2} + \frac{ab}{2\sqrt{h^2-a^2}} \right)$; 2) $\left(0, \frac{4}{\pi} \right)$; 3) $\left(0, \frac{2a}{5} \right)$; 4) $\left(0, \frac{2a}{\pi}, \frac{b\pi}{2} \right)$; 5) $\left(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4a}{3\pi}, \frac{4a}{3\pi} \right)$.

3.1.8. $\left(\frac{567}{640}, \frac{35\sqrt{2}}{88}, \frac{77}{320} \right)$.

3.1.9. $\frac{16\sqrt{2}}{15} \left((3\pi^2 - 1) \sqrt{(2\pi^2 + 1)^3 + 1} \right)$;

3.1.10. $I_x = \frac{\sqrt{5}}{6}, I_y = \frac{\sqrt{5}}{24}$;

3.1.11. $I_x = I_y = 2\pi$;

3.1.12. $I_x = I_y = \left(\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{3} \right) \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}, I_z = a^2 \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}$.

[Повернутися до завдань.](#)

Відповіді до Теми 3.2.

3.2.1.1) $-\frac{\sqrt{11}}{54}$; 2) $\sqrt{3} \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right)$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{120}$; 4) $54\sqrt{14}$; 5) $aH(4a + \pi H)$; 6) $\frac{55+9\sqrt{3}}{65}$; 7) $\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$; 8) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$;
9) $\frac{29\pi\sqrt{2}}{8}$; 10) πa^3 ; 11) $\frac{\pi a^3}{4}$; 12) $\frac{\pi a^3}{4}$; 13) 0; 14) $\frac{2\pi a^6}{15}$; 15) $\frac{8\pi a^4}{3}$.

3.2.2. 1) $12\sqrt{3}$; 2) $\frac{20\sqrt{2}}{3}$; 3) 8π ; 4) 280π ; 5) $2\pi\sqrt{2}$; 6) $8\pi\sqrt{2}$; 7) $2R^2(\pi - 2)$; 8) $8R^2$;

9) $\frac{(5\sqrt{5}-1)\pi}{6}$; 10) $\pi(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$.

3.2.3. 1) $\frac{3}{4}$; 2) $8a^3(\sqrt{2} + 1)$; 3) πR^3 ; 4) $\frac{8}{3}\pi R^4$; 5) $\frac{2}{3R}(\sqrt{(R^2 + 1)^3} - 1)$; 6) $\frac{\pi}{4}(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$.

3.2.4. 1) $(0, 0, \frac{25\sqrt{5}+1}{10(5\sqrt{5}-1)})$; 2) $(0, 0, \frac{2h}{3})$; 3) $(\frac{R}{2}, \frac{R}{2}, \frac{R}{2})$; 4) $(0, 0, \frac{R+h}{2})$; 5) $(0, 0, \frac{a}{\pi(\sqrt{2}-1)})$.

3.2.5. $(0, 0, \frac{3}{4})$.

3.2.6. $(0, 0, \frac{4R}{3\pi})$.

3.2.7. $\frac{\pi h^4}{\sqrt{2}}$.

3.2.8. $\frac{2\pi R^4}{3}, \frac{4\pi R^4}{3}$.

3.2.9. $\frac{2\pi R}{3}(2R^3 - 3R^2h + h^3)$.

3.2.10. $\frac{4\pi a^4(6\sqrt{3}+1)}{15}$.

3.2.11. $\frac{8\pi R^4}{3}$.

[Повернутися до завдань.](#)

Відповіді до Теми 4.1.

4.1.1. 1) вся площина, сім'я гіпербол $xy = \pm\sqrt{C}$;

2) $2x^2 + 9y^2 \geq 4$, сім'я еліпсів $2x^2 + 9y^2 = 4 - C^2$;

3) вся площина, сім'я парабол $y^2 = 5x + \arcsin C$;

4) вся площина, сім'я прямих, що перпендикулярні вектору \vec{a} .

4.1.2. 1) $x^2 + y^2 > 0, z \in \mathbb{R}$, сім'я конусів $x^2 + y^2 = C^2 z^2$; 2) весь простір, сім'я еліпсоїдів

$C = x^2 + 4y^2 + 6z^2$; 3) весь простір, сім'я еліптичних параболоїдів $x = C + 4y^2 + z^2$;

4) весь простір, сім'я площин, що перпендикулярні вектору $[\vec{b}\vec{a}]$.

4.1.3. 1) $\text{grad } u = 2x\vec{i} + 2y\vec{j}$, $\text{grad } u|_M = 6\vec{i} + 4\vec{j}$;

2) $\text{grad } u = (2x + 4y)\vec{i} + (6y^2 + 4x)\vec{j}$, $\text{grad } u|_M = 2\vec{i} + 2\vec{j}$;

3) $\text{grad } u = -y^2 \sin\left(xy + \frac{\pi}{4}\right)\vec{i} + \left(\cos\left(xy + \frac{\pi}{4}\right) - xy \sin\left(xy + \frac{\pi}{4}\right)\right)\vec{j}$,

$$\text{grad } u|_M = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j};$$

$$4) \text{ grad } u = 3x^2 e^{x^3-y^2}\vec{i} - 2ye^{x^3-y^2}\vec{j}, \text{ grad } u|_M = \frac{3}{e}\vec{i};$$

$$5) \text{ grad } u = (2x - 2y - 1)\vec{i} + (4y - 2x + 2)\vec{j} + (6z - 1)\vec{k}, \text{ grad } u|_M = \vec{i} - 7\vec{k};$$

$$6) \text{ grad } u = \frac{1-y}{2\sqrt{(x-z)^3}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{x-z}}\vec{j} + \frac{y-1}{2\sqrt{(x-z)^3}}\vec{k}, \text{ grad } u|_M = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k};$$

$$7) \text{ grad } u = y \cos(x + 4z)\vec{i} + \sin(x + 4z)\vec{j} + 4y \cos(x + 4z)\vec{k}, \text{ grad } u|_M = \vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j} + 4\vec{k}.$$

$$4.1.4. 1) \varphi = \pi; 2) \varphi = 0; 3) \cos \varphi = -\frac{4}{\sqrt{41}}.$$

$$4.1.5. 1) \cos \varphi = -\frac{1}{\sqrt{10}}; 2) \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}; 3) \cos \varphi = \frac{1}{5\sqrt{2}}; 4) \cos \varphi = -\frac{10}{\sqrt{114}}; 5) \varphi = 0.$$

$$4.1.6. y = -x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$4.1.7. x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

$$4.1.8. 1) \frac{(x+1)\vec{i}+(y+2)\vec{j}}{\sqrt{x^2+y^2+2x+4y+5}} = \frac{(x+1)\vec{i}+(y+2)\vec{j}}{\sqrt{15}}; 2) \frac{\vec{i}+(1-6y)\vec{j}}{\sqrt{2-12y+36y^2}}; 3) \frac{2x\vec{i}+2y\vec{j}-\vec{k}}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} = \frac{2x\vec{i}+2y\vec{j}-\vec{k}}{\sqrt{4z+1}};$$

$$4) \frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{R}; 5) \frac{x\vec{i}+y\vec{j}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x\vec{i}+y\vec{j}}{a}; 6) \frac{x\vec{i}+y\vec{j}-z\vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x\vec{i}+y\vec{j}-z\vec{k}}{z\sqrt{2}}.$$

$$4.1.9. 1) \frac{10+13\sqrt{3}}{2}; 2) \sqrt{\frac{13}{2}}.$$

$$4.1.10. 1) \frac{13}{5}; 2) 2; 3) -\frac{7}{\sqrt{14}}; 4) \frac{98}{13}; 5) \frac{4}{\sqrt{5}}; 6) -\frac{\sqrt{2}}{27}; 7) -\frac{4}{5}; 8) \frac{2}{|\vec{r}|}u; 9) \frac{2}{|\vec{r}|}u;$$

$$10) -\frac{1}{|\vec{r}|^2} \cos(\widehat{\vec{r}\vec{a}}), \vec{r} \perp \vec{a}.$$

$$4.1.11. 1) \frac{\sqrt{2}}{2}; 2) -4; 3) \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$4.1.12. 1) \frac{1}{\sqrt{6}}(2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}), 2\sqrt{6}; 2) \vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}, 3\sqrt{2}; 3) \vec{i} - 2\vec{j} - 6\sqrt{3}\vec{k}, \sqrt{113}.$$

$$4.1.13. 1) x^2 = Cy; 2) x = Cz; 3) xy = C; 4) 2y^2 - z^2 = C; 5) \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = C; 6) y^2 + z^2 = C.$$

$$4.1.14. \text{перетин поверхонь} 1) z = C_1y, xy = C_2; 2) x = C_1z, y = z^2 + C_2;$$

$$3) z = C_1, x^2 - y^2 = C_2; 4) x = C_1y, x = C_2z; 5) x + y + z = C_1, x^2 + y^2 + z^2 = C_2^2.$$

$$4.1.15. 1) \text{гвинтова лінія } x = \cos t, y = \sin t, z = bt; 2) \frac{1}{x} - \frac{1}{z} = 1, \frac{1}{x} + \frac{1}{2y^2} = 4.$$

4.1.16. 1) $c_1x + c_2y + c_3z = C_1$, $x^2 + y^2 + z^2 = C_2^2$; 2) $x = C_1y$, $x = C_2z$; 3) $\frac{x}{b_1} - \frac{y}{b_2} = C_1$,
 $\frac{x}{b_1} - \frac{z}{b_3} = C_2$.

4.1.17. $z = h$, $x^2 + y^2 = c^2$. **Вказівка:** напрямити провідник вздовж осі Oz , тоді $\vec{H} = \frac{2}{\rho^2} [\vec{l}, \vec{r}]$, де $\vec{l} = l\vec{k}$, ρ – відстань від осі провідника до точки (x, y, z) .

4.1.18. 1) $\text{div}\vec{F} = 0$; 2) $\text{div}\vec{F} = e^{xy} + zxe^{xy}$; 3) $\text{div}\vec{F} = 6$; 4) $\text{div}\vec{F} = 4$; 5) $\text{div}\vec{F} = 6$;
 6) $\text{div}\vec{F} = 2xz^3 + 6xy^2z$; 7) $\text{div}\vec{F} = 8$; 8) $\text{div}\vec{F} = -2y \cos(x + z)$.

4.1.19. 1) $\text{rot}\vec{F} = (x + z)\vec{i} - (x + z)\vec{k}$; 2) $\text{rot}\vec{F} = x(z^2 - y^2)\vec{i} + y(x^2 - z^2)\vec{j} + z(y^2 - x^2)\vec{k}$
 3) $\text{rot}\vec{F} = \frac{5\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}}{1 + (x - y + z)^2}$; 4) $\text{rot}\vec{F} = 3(z^2 - x^2)\vec{j}$; 5) $\text{rot}\vec{F}|_M = (xy\vec{j} - xz\vec{k})|_M = 3\vec{j} + 5\vec{k}$;
 6) $\text{rot}\vec{F} = 0$.

4.1.20.

1) $\text{div}\vec{F} = -3z^3 - 7x$, $\text{rot}\vec{F} = (2x - 9y^2 - 6zy)\vec{i} + (14yz + 7z)\vec{j} - (6y^2 + 7z^2 + 2z)\vec{k}$;
 2) $\text{div}\vec{F} = 0$, $\text{rot}\vec{F} = (15x^2y^2z - 2x^4z)\vec{i} + (12x^3yz - 6xy^3z)\vec{j} + (3x^3z^2 - 6xy^2z^2)\vec{k}$;
 3) $\text{div}\vec{F}|_M = -2x|_M = -2$, $\text{rot}\vec{F}|_M = (-2y\vec{i} + 2x\vec{j} - (6x + 4y)\vec{k})|_M = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

4.1.21. $C = z$, де C - деяка стала.

4.1.22. $xz + x + z + C$, де C - деяка стала.

4.1.25. $\omega = \frac{1}{2} \text{rot}\vec{V} = -\frac{z}{2}\vec{j}$.

4.1.27. 1) $u = x^3y - xy^3 + C$; 2) $u = xy + xz + yz$; 3) $u = xyz + C$;

4) $u = x^2y - y^2z + C$.

4.1.30. 1) Так; 2) Ні; 3) Так.

[Повернутися до завдань.](#)

Відповіді до Теми 4.2.

4.2.1 1) $-\frac{2}{3}$; 2) $\frac{ab}{2}$; 3) 8; 4) 4π ; 5) $-\frac{56}{15}$; 6) $40\frac{19}{30}$; 7) $-\frac{1}{20}$; 8) $-\frac{4}{3}a$; 9) $2\pi + \frac{4}{3}$; 10) 0; 11) πa^2 ;
 12) $\frac{3}{16}\pi^3\sqrt{a^4}$.

4.2.2 1) $I_1 = \frac{4}{3}$, $I_2 = 4$; 2) $I_1 = 0$, $I_2 = 4$; 3) $I_1 = \frac{12}{5}$, $I_2 = 4$; 4) $I_1 = -4$, $I_2 = 4$;

5) $I_1 = 4, I_2 = 4.$

4.2.3 1) 13; 2) $\frac{1}{32}$; 3) $-\pi a^2$; 4) $-\frac{\pi R^3}{4}$; 5) $\frac{R^3}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \right).$

4.2.4 1) 3; 2) $-\frac{3}{2}$; 3) $\frac{16}{3}$; 4) $-\frac{140}{3}$; 5) $\frac{\pi R^4}{2}$; 6) $\frac{\pi}{2} R^4$; 7) $\frac{\pi}{2} R^4$; 8) $-\frac{\pi a^3}{8}$; 9) 0.

4.2.5 1) $u = \frac{x^3+y^3}{3}$; 2) $u = x^3y^2 + 2x^2 + 5y + C$; 3) $u = (x^2 - y^2)^2 + C$;

4) $u = \ln|x+y| - \frac{y}{x+y} + C$; 5) $u = x^2 \cos y + y^2 \cos x + C$;

6) $u = 3x^4y^3 + z^2xy + z^3 + x - 2y + C$; 7) $u = \sin yx - e^{z+x} + C$;

8) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + C$; 9) $u = \operatorname{arctg} xyz + C.$

4.2.6 1) 8; 2) 4; 3) 64; 4) $\ln \frac{13}{5}$; 5) $-1 - e$; 6) $\frac{10}{3}$; 7) 0; 8) $-\frac{9}{2}$.

[Повернутися до завдань.](#)

Відповіді до Теми 4.3.

4.3.1. 1) $-\frac{1}{3}$; 2) $\frac{81}{8}$; 3) 54; 4) $\frac{1}{8}$; 5) 3; 6) $R^2H \left(\frac{\pi H}{8} + \frac{2R}{3} \right)$; 7) $\frac{\pi}{2} R^4$; 8) $\frac{2}{15}$; 9) $\frac{\pi R^4}{2}$; 10) 0; 11) $\frac{8}{3} \pi abc$;
12) 0.

4.3.2. 1) 3; 2) -6; 3) $\frac{1}{8}$; 4) $\frac{\pi}{3} H^3$; 5) $R^2H \left(\frac{2R}{3} + \frac{\pi H}{8} \right)$; 6) $6\pi R^2H(R^2 - H^3)$; 7) $\frac{\pi}{8}$.

4.3.3. 1) -8; 2) 0; 3) $-\frac{\pi R^6}{8}$; 4) $-\pi a^2$; 5) 0; 6) $-\frac{31}{30}$; 7) $\frac{9\pi}{4}$; 8) -14.

4.3.4. 1) 3; 2) 2; 3) $\pi R^2 a_z$; 4) $\pi R^2 H$; 5) $3\pi R^2 H$; 6) 4π ; 7) $4\pi R^3 f(R)$.

4.3.5. 1) $\frac{5}{3}$; 2) 48; 3) $-2\pi R^2 H$; 4) $\frac{\pi}{6}$; 5) $\frac{3\pi}{16}$; 6) $2\sqrt{3}\pi$; 7) $\frac{\pi R^2}{\sqrt{2}}$; 8) $6\pi R$; 9) $\frac{2}{3} \pi \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \right).$

4.3.6. 1) a^5 ; 2) 6; 3) $\frac{1}{4}$; 4) $\frac{176}{3}$; 5) 2π ; 6) 8π ; 7) $3\pi R^3$; 8) $\frac{16}{105}$; 9) 18π ; 10) $\frac{3\sqrt{2}}{5} R^5$; 11) -1;

12) $\frac{32}{3} \pi$; 13) $\frac{19\pi}{3}$; 14) $\frac{\pi}{2} R^4$.

4.3.7. 1) $\frac{1}{6}$; 2) $2\pi R^2 H$; 3) 128π ; 4) $\frac{26}{3}$; 5) 1; 6) $-\frac{7}{6}$; 7) -2π ; 8) 45π ; 9) $\frac{\pi}{6}$.

4.3.8. 1) $\frac{5}{3}$; 2) $-\frac{4}{3} R^2$; 3) $\frac{41}{6}$; 4) $\frac{3}{4} \pi ab(a^2 + b^2)$; 5) $\frac{5}{2}$; 6) $\frac{1}{6}$; 7) 0; 8) 0.

4.3.9. 1) $mg(z_1 - z_2)$; 2) $\frac{k\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{c} \ln 2$; 3) $\frac{1}{2} k \ln 2$; 4) $m|\vec{F}|R$.

4.3.10. 1) $2\pi R^2$; 2) -4π ; 3) $\frac{4}{3}$; 4) $\frac{5}{2}$; 5) π ; 6) $\frac{R^3}{3}$; 7) -2π ; 8) 0; 9) 729π ; 10) -4π ; 11) $\frac{128}{3}$;
12) $-\sqrt{2}\pi$; 13) $\frac{32}{3}$.

4.3.11. 1) -1 ; 2) 1; 3) 3.

4.3.12. 1) x^2yz ; 2) $x + xyz$; 3) $z \cos x^2y$; 4) $\ln(x^2 + y - z)$; 5) $|\vec{r}|$; 6) $\ln|\vec{r}|$; 7) $\frac{1}{3}|\vec{r}|^3$.

4.3.13. 1) $\vec{b} = x^2\vec{j} + (xz + y^2)\vec{k}$; 2) $\vec{b} = 3x^2\vec{j} + (y^3 - 6xz)\vec{k}$;
3) $\vec{b} = -x(x + y^2)\vec{j} + (x^3 + y^3)\vec{k}$; 4) $\vec{b} = -8yz\vec{i} + xz\vec{j} + 7xy\vec{k}$.

[Повернутися до завдань.](#)

Відповіді до теми 5.1.

5.1.1. 1) $\frac{1}{(y-1)} + \frac{1}{2(x-1)^2} = C$; 2) $\ln(4 + x^2) + \sqrt{9 - y^2} = C$;

3) $\sqrt{1 - y^2} = \arcsin x + C$, $y = \pm 1$; 4) $\sin x \cos y = C$; 5) $\ln^2 x - \operatorname{ctg}^2 y = C$;

6) $\ln|xy| + \frac{y-x}{xy} = C$; 7) $1 + y^2 = C(1 - x^2)$; 8) $x^2 + y^2 = \ln Cx^2$; 9) $y = \sqrt[3]{C + 3x - 3x^2}$;

10) $(x - 1)^2 + y^2 = C$; 11) $y - \sqrt{x} + C = \ln|y|$; 12) $(e^y + 1)e^x = C$; 13) $y = \frac{C\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$;

14) $y = e^{C \arcsin x}$; 15) $e^{x^2}(y^2 - 4) = C$; 16) $\cos y = e^{Cx}$; 17) $x - y + \ln|xy| = C$;

18) $\frac{1}{(y-1)} + \frac{1}{2(x-1)^2} = C$; 19) $\sin y \cos x = C$; 20) $2 \sin x + \ln|\operatorname{tg} \frac{y}{2}| = C$; 21) $10^x + 10^{-y} = C$;

22) $\frac{(\frac{2}{3})^x}{\ln 2 - \ln 3} - \frac{18^{-y}}{\ln 18} = C$; 23) $x^2 + y^2 = \ln Cx^2$; 24) $y = C \sin x - a$; 25) $y = \sqrt[3]{C + 3x - 3x^2}$.

5.1.2. 1) $y = \sqrt{\ln^3|1 - x^2|}$; 2) $\operatorname{arctg} \left(\frac{x}{2}\right) = \ln^2 y + \frac{\pi}{4}$; 3) $y = 1 - x + \operatorname{tg} x$;

4) $y = e^x(x - 2)$; 5) $\ln(\sqrt{x} + 1) = -\sqrt{1 - y}$; 6) $\cos x = \sqrt{2} \cos y$; 7) $y = \frac{1+x}{1-x}$;

8) $y = 1$; 9) $y = -x$; 10) $2e^{y^2} = e^x + 1$; 11) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 2 \left(1 + \ln \left|\frac{x}{y}\right|\right)$;

12) $2 \ln |\sin y| = e^{(x-1)^2} - 1$; 13) $\frac{y^3}{3} + \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} e^x$; 14) $\ln^4 y = \frac{1}{16(x+1)}$;

15) $x + y + 2 \ln x - \ln y = 2$; 16) $3 \operatorname{arctg} x^2 + 2 \operatorname{arctg} y^3 = \frac{\pi}{2}$; 17) $y = \ln \operatorname{tg} \left(e^x + \frac{\pi}{4} - 1\right)$;

18) $\ln |\operatorname{tg} y| = 4(1 - \cos x)$; 19) $(1 + e^x)^3 \operatorname{tg} y = 8$; 20) $y = \frac{b+x}{1+bx}$.

5.1.3. 1) $y = 2x(C + \ln|x|)$; 2) $x + (x + 3y)^2 = C$; 3) $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \ln C \sqrt{x^2 + y^2} = 0$;

4) $x = (y - x) \ln C (y - x)$; 5) $\sqrt{x} + \sqrt{y} \ln C y = 0$; 6) $e^{-\frac{y}{x}} + \ln C x = 0$; 7) $Cx = e^{\cos \frac{y}{x}}$;
 8) $y^2 = Cxe^{-\frac{y}{x}}$; 9) $\ln x = \frac{y}{x} \left(\ln \frac{y}{x} - 1 \right) + C$; 10) $x^2 = C^2 + 2Cy$; 11) $e^{\frac{y}{x}} = Cy$; 12) $y = xe^{1+Cx}$;
 13) $(x + y)^2 = Cx^3 e^{-\frac{x}{x+y}}$; 14) $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln C \sqrt{x^2 + y^2}$; 5) $x^2 + y^2 + xy + x - y = C$;
 16) $x + 2y + 5 \ln |x + y - 3| = C$; 17) $(x + y - 1)^3 = C(x - y + 3)$;
 18) $x^2 - xy + y^2 + x - y = C$; 19) $3x + y + 2 \ln |x + y - 1| = C$;
 20) $\ln |4x + 8y + 5| + 8y - 4x = C$; 21) $x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C$;
 22) $x^2 + xy - y^2 - x + 3y = C$.

5.1.4. 1) $y = x - 2x^3$; 2) $2 - \ln |x| = \frac{2}{5} \sqrt{\frac{y}{x}}$; 3) $x = 3e^{\operatorname{tg} \frac{y}{x}}$; 4) $x - 2 = \ln \frac{y}{x}$; 5) $y = x \arcsin x$;

6) $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$, $y(1) = -2$; $3y^3 = 8(x^2 - y^2)$; 7) $\sqrt{x^2 + y^2} = e^{\frac{y}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$;
 8) $y = -x$; 9) $\operatorname{arctg} \frac{y}{2x} - 2 \ln |x| = \frac{\pi}{4}$; 10) $x^5 + 10x^3y^2 + 5xy^4 = 1$;
 11) $x^2 - y^2 + 2xy - 4x + 8y - 6 = C$; 12) $3x + 2y - 4 + 2 \ln |x + y - 1| = 0$;

5.1.5. 1) $y = x(C + 3x)$; 2) $y = \frac{C}{x^4} - \frac{x^2}{6}$; 3) $y = \frac{C+x}{x^2}$; 4) $y = Cx^2 e^{\frac{1}{x}} + x^2$;

5) $y = Ce^{7x} - 2e^{3x}$; 6) $y = C\sqrt{x^2 + 1} + x^2 + 1$; 7) $y = e^{2\sqrt{x}}(C + x)$;
 8) $y = \frac{1}{\cos x} \left(C + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x \right)$; 9) $y = \frac{C+5x}{\ln x}$; 10) $y = Ce^{-\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x - 1$;

11) $y = \sqrt{x^2 + 4} \left(C + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right)$; 12) $x = \frac{C+y^4}{y^5}$; 13) $x = e^{-\frac{1}{y}}(C + y)$;

14) $x = Ce^{2y} + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}$; 15) $x = y \ln y + \frac{C}{y}$;

16) $x = Cy + y^2$; 17) $x = Cy^2 - \frac{1}{y}$; 18) $x = Cy^2 + \frac{1}{2}y^4$;

19) $x = Cy - 1 - \ln y$; 20) $y = x(\sin x + C)$; 21) $y = e^{-x^2} \left(\frac{1}{2}x^2 + C \right)$;

22) $y = \operatorname{arctg} x - 1 + Ce^{-\operatorname{arctg} x}$; 23) $y = \operatorname{ch} x (\operatorname{sh} x + C)$.

5.1.6. 1) $y = \frac{1}{2}x^2 e^{-3x}$; 2) $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$; 3) $y = e^{-e^x} + e^x - 1$; 4) $y = x^3 + x^2 + x + 1$;

5) $y = \frac{e^{x+ab} - e^a}{x}$; 6) $y = x(2 - \cos x)$; 7) $y = \ln x \cdot \ln |\ln x|$; 8) $y = x^2 - x^2 e^{\frac{1}{x}-1}$;

9) $y = \frac{x}{\cos x}$; 10) $y = \frac{x}{x+1} (x - 1 + \ln |x|)$; 11) $x = \frac{1}{9}(y^3 - 4) - \frac{1}{3} \ln y$; 12) $x = \frac{1}{2}y^2 - y^3$;

13) $y = e^{-\arcsin x} + \arcsin x - 1$; 14) $y = \frac{1}{2}x^2 \ln x$; 15) $y = -\cos x$;

16) $y = \cos 3x \left(1 - \frac{2}{3} \cos 3x\right)$.

5.1.7. 1) $y = \left(x - 2 + Ce^{-\frac{x}{2}}\right)^2$; 2) $\frac{1}{y^2} = Ce^{2x^2} + x^2 + \frac{1}{2}$, $y = 0$;

3) $y = \frac{1}{(1+x)(C+\ln|1+x|)}$, $y = 0$; 4) $y^{-\frac{1}{3}} = Cx^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{7}x^3$; 5) $y = \frac{x-1}{C-x}$; 6) $y^{\frac{1}{2}} - \operatorname{tg} x = \frac{\ln \cos x + C}{x}$;

7) $y^{-4} = x^3(e^x + C)$; 8) $y = e^{-x} \left(\frac{1}{2}e^x + 1\right)^2$; 9) $y = \frac{\sec x}{x^3+1}$; 10) $x = \frac{1}{y(y+C)}$;

11) $y^3 = \frac{1}{3-2e^{\cos x}}$; 12) $y = \frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x - x + C}$; 13) $x^2 + y^2 = e^{-y}$; 14) $x(\ln y + 1 - Cy) = 1$;

15) $y = \sqrt[3]{\frac{3}{2x} + \frac{13}{2x^3}}$.

5.1.8. 1) $2xy - 3x + y^3 = C$; 2) $\frac{x^2}{2} + x \ln |y| + y - \cos y = C$; 3) $x^3y^2 + 7x = C$;

4) $3x - 2y + xe^y + ye^x = C$; 5) $x \sin(x + y) = C$; 6) $x^2 + y + e^{xy} = 2$;

7) $\frac{1}{3}x^3 + xy^2 + xy + e^y = 1$; 8) $\frac{1}{2}x^2 + x \sin y - \cos y = 1$; 9) $e^{x+y} + x^3 + y^4 = 1$;

10) $x^3y - \cos x - \sin y = \pi^4$.

[Повернутися до завдань.](#)

Відповіді до теми 5.2

5.2.1. 1) $y = -\frac{1}{4} \sin 2x + C_1x + C_2$; 2) $y = \frac{x^3}{6} - \sin x + C_1x + C_2$;

3) $y = \frac{1}{2}(x^2 - 1)\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} \ln(1 + x^2) + C_1x + C_2$; 4) $y = x^2 \ln \sqrt{x} + C_1x^2 + C_2x + C_3$;

5) $y = -\frac{1}{8} \sin 2x + C_1x^2 + C_2x + C_3$; 6) $y = -64e^{-\frac{x}{4}} + C_1x^2 + C_2x + C_3$;

7) $y = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{3}{4}x^2 + C_1x + C_2$; 8) $y = -2 \ln|x| + C_1x + C_2$; 9) $y = C_1x^2 + C_2$;

10) $y = -\frac{x^2}{2} - x + C_1e^x + C_2$; 11) $y = \frac{1}{3}x^3 + C_1x^2 + C_2$; 12) $y = (C_1x + C_1^2)e^{\frac{x}{C_1}} + C_2$;

13) $y = C_1(x - e^{-x}) + C_2$; 14) $y = \frac{1}{2} \ln^2|x| + C_1 \ln|x| + C_2$;

15) $y = C_2 + C_1 \sin x - x - \frac{1}{2} \sin 2x$; 16) $y = \frac{x+C_1}{x+C_2}$; 17) $(x + C_2)^2 = 4C_1(y - C_1)$.

18) $y = \frac{2}{3C_1} \sqrt{(C_1x - 1)^3} + C_2$; 19) $y = (C_1x + C_2)^2$; 20) $y = \frac{1}{3} \ln|3y + 4| = C_1x + C_2$;

$$21) x = \frac{1}{C_1} \ln \left| \frac{y}{y+C_1} \right| + C_2; 22) (C_1x + C_2)^2 = C_1y^2 - 8; 23) x = \frac{1}{2} \sqrt{y^2 + C_1} + C_2.$$

$$5.2.2. 1) y = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} \sin 3x; 2) y = x \ln|x| + x - 1; 3) y = \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - x;$$

$$4) x = y + \ln|y| - 1; 5) y = \frac{x^3}{3} + x - 1; 6) y = 1 + \sin x; 7) y = 2 - (x + 1)e^{1-x};$$

$$8) y = x - 1 + (x + 2)e^{-x}; 9) (y - 1)^2 = \frac{8}{225} (x - 1)^3 (3x + 2)^2; 10) x = \pm \ln \left| \frac{1 - \sqrt{2y+1}}{1 + \sqrt{2y+1}} \right|;$$

$$11) y = 2 + \ln \frac{x^2}{4}; 12) y = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{2x} - \frac{16}{5}; 13) y = \frac{4}{(x+4)^2}; 14) y = \sqrt{2x - x^2};$$

$$15) y = \sqrt{1 + e^{2x}}.$$

$$5.2.3. 1) y = \pm \frac{4}{15C_1^2} \left(\sqrt{(C_1x + 1)^5} + C_2x + C_3 \right); 2) y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1 - (x + 1) \ln(x + 1);$$

$$3) y = \frac{1}{6}(x^3 - 3x^2 + 6x + 4); 4) y = \frac{1}{3} \sqrt{(C_1 - 2x)^3} + C_2x + C_3;$$

$$5) y = \ln \sin x + C_1x^2 + C_2x + C_3; 6) x = C_1y^2 + C_2y + C_3;$$

$$7) y = C_2 \left(xe^{C_1x} - \frac{1}{C_1} e^{C_1x} \right) + C_3; 8) y = x \cos x - 3 \sin x + x^2 + 2x;$$

$$9) y = C_1 \sin(C_2x + C_3); 10) y = \frac{x^5}{60} + \frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{2}{3}.$$

[Повернутися до завдань.](#)

Відповіді до теми 5.3.

5.3.1. 1) так; 2) ні; 3) ні; 4) так; 5) так; 6) так; 7) ні; 8) ні.

$$5.3.2. 1) y = C_1 \frac{\sin x}{x} - C_2 \frac{\cos x}{x}; 2) y = C_1x + C_2x \ln x;$$

$$3) y = C_1x + C_2 \ln x; 4) y = C_1x - C_2(x^2 - 1).$$

$$5.3.3. y = x^2 - e^{x-1}.$$

$$5.3.4. 1) y = C_1x + C_2x \int \frac{e^x dx}{x^2}; 2) y = C_1x + C_2(x^2 - 1);$$

$$3) y = C_1 \sin x + C_2 \left(1 - \sin x \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| \right).$$

$$5.3.5. 1) y = C_1e^x + C_2e^{-2x}; 2) y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}; 3) y = C_1 + C_2e^{4x};$$

$$4) y = C_1e^{-3x} + C_2e^{4x}; 5) y = C_1e^{-x} + C_2e^{-6x}; 6) y = e^x(C_1 + C_2x);$$

$$7) y = e^{-2x}(C_1 + C_2x); 8) y = e^{2,5x}(C_1 + C_2x); 9) y = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x);$$

- 6) $y = e^x \left(C_1 \cos \frac{x}{2} + C_2 \sin \frac{x}{2} \right)$; 7) $y = e^{2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$;
 8) $y = C_1 + C_2 e^{-8x}$; 9) $y = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x$;
 10) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 e^{2x}$; 11) $y = C_1 + C_2 e^{-5x} + C_3 e^{3x}$; 12) $y = C_1 + e^{4x} (C_2 + C_3 x)$;
 13) $y = e^{-x} (C_1 + C_2 x) + C_3 e^{3x}$; 14) $y = e^x (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)$;
 15) $y = C_1 + C_2 \cos 8x + C_3 \sin 8x$; 16) $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 \cos x + C_4 \sin x$;
 17) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \cos \sqrt{3}x + C_4 \sin \sqrt{3}x$;
 18) $y = \cos x (C_1 + C_2 x) + \sin x (C_3 + C_4 x)$; 19) $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{-2x} + C_5$;
 20) $y = C_1 + C_2 e^{-3x} + C_3 e^{3x} + C_4 \cos 3x + C_5 \sin 3x$;
 21) $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + e^{3x} (C_4 + C_5 x)$;
 22) $y = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x + x (C_4 \cos 2x + C_5 \sin 2x)$.

- 5.3.6.** 1) $y = 4e^x + 2e^{3x}$; 2) $y = e^{-\frac{x}{2}} (2 + x)$; 3) $y = 3e^{-2x} \sin 5x$; 4) $y = e^{x-2} (7 - 3x)$;
 5) $y = 4e^{-3x} - 3e^{-2x}$; 6) $y = xe^{5x}$; 7) $y = -\frac{1}{3} e^x \cos 3x$; 8) $y = 2 \sin \frac{x}{3}$;
 9) $y = \frac{1}{3} (5 - 2e^{-3x})$; 10) $y = 1 + \cos x$; 11) $y = e^{4x} + 2e^{-3x} - 3e^{-x}$;
 12) $y = 2x - 2 + 2e^{-x} + xe^{-x}$; 13) $y = -\frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x$;
 14) $y = e^x - 2 + \cos x$.

[Повернутися до завдань.](#)

Відповіді до теми 5.4.

- 5.4.1.** 1) $y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + (Ax^2 + Bx + C)e^{-2x}$;
 2) $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x} + (Ax^2 + Bx)e^{-3x}$;
 3) $y = C_1 + C_2 e^{8x} + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx$;
 4) $y = (C_1 + C_2 x)e^{5x} + (Ax^3 + Bx^2 + Cx)e^{5x}$;
 5) $y = e^x (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + e^x ((Ax + B) \cos 2x + (Cx + D) \sin 2x)$;
 6) $y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx) \cos 4x + (Dx^3 + Ex^2 + Fx) \sin 4x$;
 7) $y = e^{3x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + e^{3x} (Ax \cos 2x + Bx \sin 2x)$;
 8) $(Ax + B) \sin 2x + (Cx + D) \cos 2x$;

$$9) y = C_1 + C_2 e^{-10x} + Ax^3 + Bx^2 + Cx + e^{-10x}((Dx + E) \cos x + (Fx + G) \sin x);$$

$$10) y = C_1 e^{-6x} + C_2 e^{6x} + (Ax^2 + Bx)e^{-6x} + Cx e^{6x} + D \cos 6x + E \sin 6x;$$

$$11) y = e^{-3x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x) + e^{-3x}(Ax \cos 4x + Bx \sin 4x) + (Cx + D) \cos 4x + (Ex + F) \sin 4x.$$

$$5.4.2. 1) y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{5}{3} e^{-x}; 2) y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 3x e^{2x};$$

$$3) y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{3}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x; 4) y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - \frac{8}{5} e^x \left(\cos \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \right);$$

$$5) y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x^3 + \frac{9}{2} x^2 + \frac{21}{2} x - \frac{15}{4}; 6) y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + e^x(2x^2 + x).$$

$$5.4.3. 1) Ax; 2) e^{-x}(Ax + B); 3) x^2 e^{2x}(Ax^2 + Bx + C); 4) x(A \cos 3x + B \sin 3x); 5) x e^x((Ax + B) \cos 2x + (Cx + D) \sin 2x); 6) A \cos x + B \sin x; 7) e^{3x}((Ax + B) \cos 5x + (Cx + D) \sin 5x); 8) A \cos 2x + B \sin 2x.$$

$$5.4.4. 1) y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - 2x + 1 + e^x;$$

$$2) y = C_1 + C_2 e^{3x} - 3x^2 - 2x + \cos x + 3 \sin x; 3) y = 2 + e^x(C_1 + C_2 x - \sin x);$$

$$4) y = C_1 + C_2 e^{3x} + (1/3)x e^{3x} - 2x^2 + x; 5) y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2}x + \frac{5}{4} - \frac{1}{12} e^{-2x};$$

$$6) y = C_1 e^{\frac{3}{5}x} \cos \frac{4}{5}x + C_2 e^{\frac{3}{5}x} \sin \frac{4}{5}x + \frac{1}{13} e^{2x} + \frac{1}{5} \left(2x^3 + \frac{36}{5} x^2 + \frac{107}{25} x - \frac{908}{125} \right);$$

$$7) y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + 2x^2 + 4x + 3 + 4x^2 e^{2x} + \cos 2x;$$

$$8) y = (C_1 + C_2 x + x^2) e^x + (C_3 + C_4 x + x^2) e^{-x} + \sin x + \cos x.$$

$$5.4.5. 1) y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-5x} - x^2 - x; 2) y = (C_1 + C_2 x) e^{3x} + \frac{2}{9} x^2 + \frac{5}{27} x - \frac{11}{27};$$

$$3) y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{5x} + (x - 1) e^{-4x}; 4) y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{x}{2}} + e^x;$$

$$5) y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + 5x e^{3x}; 6) y = C_1 + C_2 e^{-4x} + (x^2/4 + x/8) e^{-4x};$$

$$7) y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x + (2x + 1) e^{-x}; 8) y = e^{-2x}(C_1 + C_2 x) + (1/2) x^3 e^{-2x};$$

$$9) y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} x \sin x; 10) y = C_1 e^{6x} + C_2 e^x + \frac{5}{74} \cos x + \frac{7}{74} \sin x;$$

$$11) y = C_1 + C_2 e^{-5x} + \sin 5x - \cos 5x;$$

$$12) y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \cos x + (1/2) \sin x;$$

$$13) y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + (3/2)x \cos 2x + (5/2)x \sin 2x;$$

$$14) y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} - e^{2x} (2 \cos 2x + \sin 2x)/20;$$

$$15) y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x) - (1/2)xe^x \cos x;$$

$$16) y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{2x} - x - 4;$$

$$17) y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-2x} + (x^2 + x - 1)e^{-x};$$

$$18) y = (C_1 + C_2 x) \cos 2x + (C_3 + C_4 x) \sin 2x + \frac{1}{9} \cos x;$$

$$19) y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \sin x + C_4 \cos x + \frac{1}{8}(x^2 - 3x)e^x - \frac{1}{4}x \sin x;$$

$$5.4.6. 1) y = e^x + x^2; 2) y = e^{2x}(1 - 3x) + \frac{3}{2}x^2 e^{2x}; 3) y = (1 + x)e^{-\frac{3}{2}x} + 2e^{-\frac{5}{2}x};$$

$$4) y = -\cos 2x + \sin 2x + (3x/4 + 1)e^{-2x};$$

$$5) y = (1/3)e^{-4x} - (1/3)e^{2x} + (x^2 + 3x)e^{2x};$$

$$6) y = \frac{1}{3} \sin 2x - \frac{1}{3} \sin x - \cos x;$$

$$7) y = e^x(-6 \cos 3x + \sin 3x) + 12 \cos 3x + 2 \sin 3x;$$

$$8) y = -3 \cos x + \pi \sin x + x(4 \cos x - 3 \sin x);$$

$$9) y = e^{2x}(\cos 3x - \sin 3x + (1/6)x \sin 3x);$$

$$10) y = e^x(0,16 \cos 3x + 0,28 \sin 3x) + x^2 + 2,2x + 0,84;$$

$$11) y = -\frac{1}{3}e^{-2x} + \frac{1}{3}e^x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{11}{8}; 12) y = e^x + x^3; 13) y = 4 - 3e^{-x} + e^{-2x};$$

$$14) y = 4 - 2 \cos \frac{x}{2} - 4 \sin \frac{x}{2} + \frac{3}{5}e^x - x \sin \frac{x}{2}.$$

$$5.4.7. 1) y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln|\cos x|;$$

$$2) y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \ln|\operatorname{tg} 2x|;$$

$$3) y = C_1 e^x + C_2 + (e^x + 1) \ln(1 + e^{-x});$$

$$4) y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}((e^x + e^{-x}) \ln(e^x + 1) - (xe^x + 1));$$

$$5) y = C_1 e^x + C_2 x e^x + x e^x \ln|x|;$$

$$6) y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x - \frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{9} \sin 3x \ln|\sin 3x|;$$

$$7) y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + x e^{-x} \ln|x|;$$

$$8) y = C_1 + C_2 e^x - \cos e^x;$$

$$9) y = e^x + 2x e^x - \frac{1}{2} e^x \ln(x^2 + 1) + x e^x \operatorname{arctg} x;$$

$$10) y = C_1 + C_2 e^{-\frac{5}{2}x} + \frac{1}{10}x - \frac{5}{164} \sin 2x - \frac{1}{41} \cos 2x;$$

$$11) y = 2 + C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|;$$

$$12) y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \cos 2x \ln |\sin x| - \left(x + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} x \right) \sin 2x;$$

$$13) y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2 \cos x}; \quad 12) y = 2 \sin x + \cos x \cdot \ln \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right);$$

$$14) y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x + \ln \left| \frac{1 + \sin x}{\cos x} \right| - x \cos x + \sin x \cdot \ln |\cos x|;$$

$$15) y = e^{-2x} + e^{-3x} + \frac{1}{2} e^{-2x} \ln(1 + e^{2x}) - e^{-2x} + e^{-3x} \operatorname{arctg} e^x;$$

$$16) y = C_1 \cos \frac{x}{2} + C_2 \sin \frac{x}{2} + 2x \sin \frac{x}{2} + 4 \cos \frac{x}{2} \ln \cos \frac{x}{2}; \quad 16) y = C_1 e^x + C_2 x - x^2 - 1;$$

$$17) y = C_1 x^3 + C_2 (x + 1) - x; \quad 18) y = 2 + 3x + x^2 + x \left(\frac{\pi}{2} + 2 \operatorname{arctg} x \right).$$

[Повернутися до завдань.](#)

Відповіді до теми 5.5.

$$5.5.1. \quad 1) x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t}, y(t) = 2C_1 e^{-2t} - 2C_2 e^{2t};$$

$$2) x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t, y(t) = -C_1 \sin t + C_2 \cos t;$$

$$3) x = C_1 e^t + C_2 e^{5t}, y = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t};$$

$$4) x = C_1 e^t + C_2 e^{2t}, y = C_1 e^t + 2C_2 e^{5t};$$

$$5) x = 3C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t}, y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t}, x = 3e^{2t}, y = e^{2t};$$

$$6) x(t) = e^{-6t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t), y(t) = e^{-6t} ((C_1 + C_2) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t);$$

$$7) x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + \frac{1}{8} e^{3t}, y(t) = -C_1 e^t + C_2 e^{-t} + \frac{5}{8} e^{3t};$$

$$8) x(t) = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-7t} + \frac{7}{40} e^t + \frac{1}{5} e^{-2t}, y(t) = \frac{1}{2} C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-7t} + \frac{1}{40} e^t + \frac{3}{10} e^{-2t};$$

$$9) x(t) = C_1 e^{-6t} + C_2 e^{4t} + \sin 3t, y(t) = -5C_1 e^{-6t} + 5C_2 e^{4t} + 3 \cos 3t + \sin 3t;$$

$$10) x(t) = -14e^{-t} - 8te^{-t} - 6t + 14, y(t) = 9e^{-t} + 4te^{-t} + 5t - 9;$$

$$11) x(t) = \frac{3}{4} e^t + \frac{5}{4} e^{-t} + \frac{1}{2} te^t - 1, y(t) = \frac{5}{4} e^t - \frac{5}{4} e^{-t} + \frac{1}{2} te^t - t;$$

$$12) x(t) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} t \right) e^t - \frac{1}{2} \cos t, y(t) = \left(2 - \frac{3}{2} t \right) e^t - 2 \cos t - \frac{1}{2} \sin t;$$

$$13) x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}, y(t) = C_1 e^{-t} + 3C_2 e^{-3t} + \cos t;$$

$$14) x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \sin t + C_4 \cos t, y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - C_4 \sin t - C_3 \cos t;$$

$$15) x(t) = C_1 e^t + C_2 \cos t + C_3 \sin t, y(t) = C_1 e^t - C_2 \sin t + C_3 \cos t,$$

$$z(t) = (C_2 - C_3) \cos t + (C_2 + C_3) \sin t;$$

$$16) x(t) = -e^{-t}, y(t) = e^{-t}, z(t) = 0.$$

$$5.5.2. 1) x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}, y(t) = 2C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{3t};$$

$$2) x(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t, y(t) = (2C_1 - C_2) e^t + 2C_2 t e^t;$$

$$3) x(t) = C_1 e^t \cos 3t + C_2 \sin 3t, y(t) = C_1 e^t \sin 3t - C_2 e^t \cos 3t;$$

$$4) x(t) = C_1 + 3C_2 e^{2t}, y(t) = -2C_2 e^{2t} + C_3 e^{-t}, z(t) = C_1 + C_2 e^{2t} - 2C_3 e^{-t};$$

$$5) x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-t}, y(t) = C_1 e^t - 3C_2 e^{-t}, z(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} - 5C_3 e^{-t};$$

$$6) x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t}, y(t) = C_2 e^{3t} + 2C_3 e^{6t}, z(t) = -C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} - C_3 e^{6t};$$

$$7) x(t) = C_1 e^t + C_2 \cos t + C_3 \sin t, y(t) = C_1 e^t - C_2 \sin t + C_3 \cos t,$$

$$z(t) = (C_2 - C_3) \cos t + (C_2 + C_3) \sin t.$$

$$5.5.3. 1) x(t) = e^{5t}, y(t) = 3e^{5t}; 2) x(t) = e^t + e^{4t}, y(t) = -e^t + \frac{1}{2}e^{4t};$$

$$3) x(t) = -e^{-t}, y(t) = \frac{1}{2} t e^{-t}; 4) x(t) = 3 \cos 2t + \sin 2t, y(t) = \frac{1}{5} \cos 2t + \frac{7}{5} \sin 2t;$$

$$5) x(t) = 2e^{2t} \cos t - e^{2t} \sin t, y(t) = e^{2t} \cos t - 3e^{2t} \sin t;$$

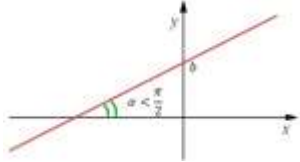
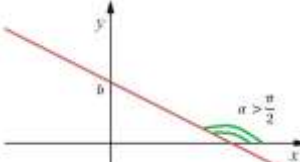
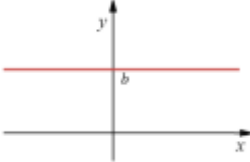
$$6) x(t) = \frac{1}{3} e^{-t} + \frac{1}{6} e^{2t} + \frac{1}{2} e^{-2t}, y(t) = \frac{1}{3} e^{-t} + \frac{1}{6} e^{2t} - \frac{1}{2} e^{-2t}, z(t) = -\frac{1}{3} e^{-t} + \frac{1}{3} e^{2t};$$

$$7) x(t) = -e^{-t}, y(t) = e^{-t}, z(t) = 0.$$

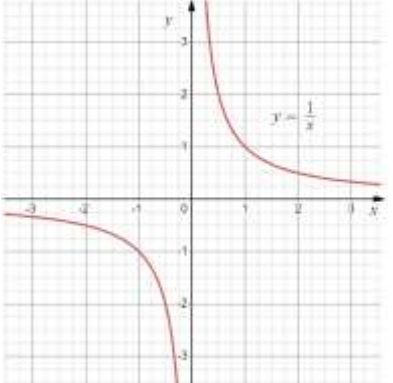
[Повернутися до завдань.](#)

Основні елементарні функції, їхні властивості та графіки

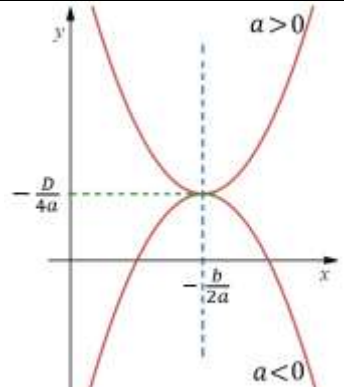
Лінійна функція $y = kx + b$

<p>Похила пряма для $k > 0$ та довільного b</p> 	<p>Похила пряма для $k < 0$ та довільного b</p> 	<p>Горизонтальна пряма для $k = 0$ та довільного b</p> 
--	--	--

Обернена пропорційність $y = \frac{k}{x}$

<ul style="list-style-type: none"> • Графік функції називається гіперболою; • $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$; • $E(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$; • Пряма $y = 0$ називається горизонтальною асимптотою; • Пряма $x = 0$ називається вертикальною асимптотою. 	
--	--

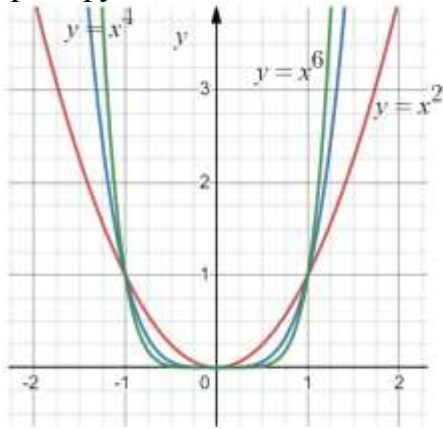
Квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

<ul style="list-style-type: none"> • Графік функції називається параболою; • $D(f) = (-\infty, +\infty)$; • $a > 0 \Rightarrow E(f) = \left(-\frac{D}{4a}, +\infty\right)$; • $a < 0 \Rightarrow E(f) = \left(-\infty, -\frac{D}{4a}\right)$; • Вершина параболи $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$, де $D = b^2 - 4ac$; • Крива має симетрію відносно вертикальної прямої $x = -\frac{b}{2a}$. 	
--	---

Степенева функція $y = x^n$, $n > 0$ – ціле число

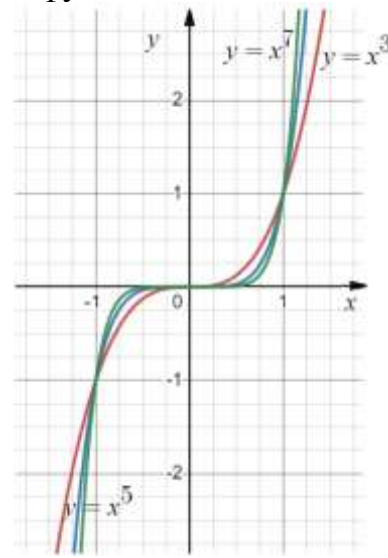
Якщо n парне, то $y = x^n$

- $D(f) = (-\infty, +\infty)$;
- $E(f) = [0, +\infty)$;
- завжди проходить через точки $(0,0)$, $(\pm 1,1)$;
- парна функція.



Якщо n непарне, то $y = x^n$

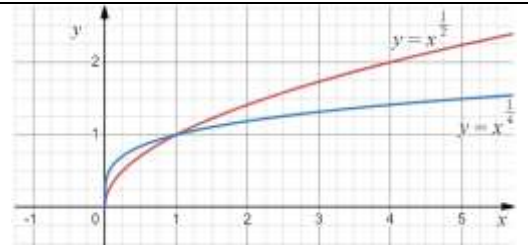
- $D(f) = (-\infty, +\infty)$;
- $E(f) = (-\infty, +\infty)$;
- завжди проходить через точки $(0,0)$, $(1,1)$ та $(-1,-1)$;
- непарна функція;



Обернена степеневая функція $y = \sqrt[n]{x}$, $n > 0$ – ціле число

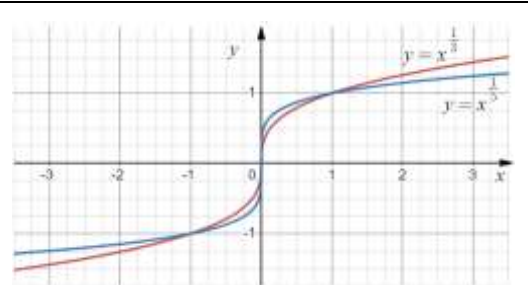
Якщо n парне, то $y = \sqrt[n]{x}$

- $D(f) = [0, +\infty)$;
- $E(f) = [0, +\infty)$;
- завжди проходить через точки $(0,0)$, $(1,1)$.



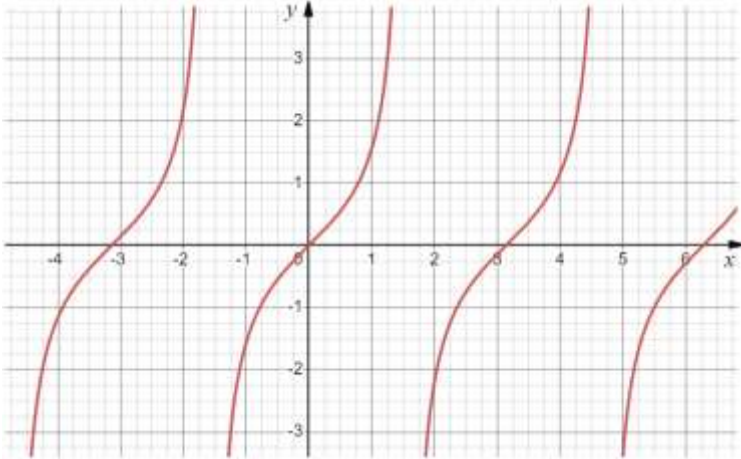
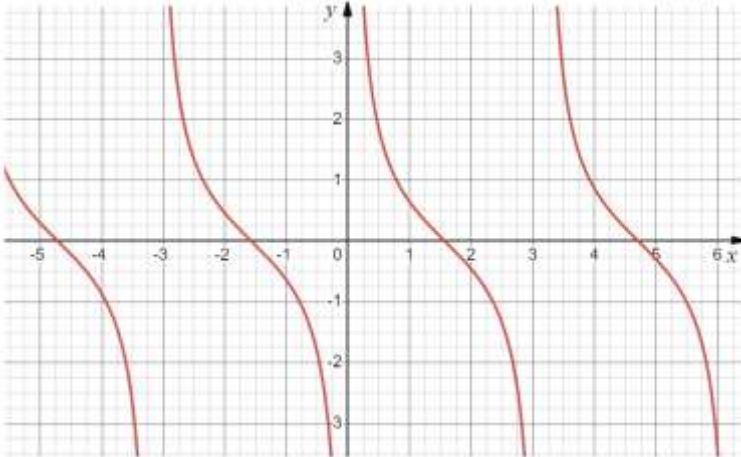
Якщо n непарне, то $y = \sqrt[n]{x}$

- $D(f) = (-\infty, +\infty)$;
- $E(f) = (-\infty, +\infty)$;
- завжди проходить через точки $(0,0)$, $(1,1)$ та $(-1,-1)$;
- є непарною функцією.

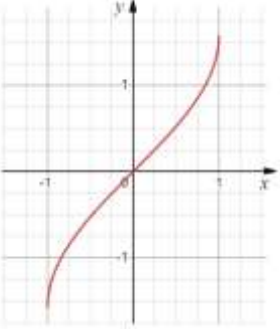
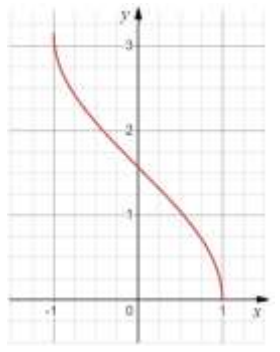
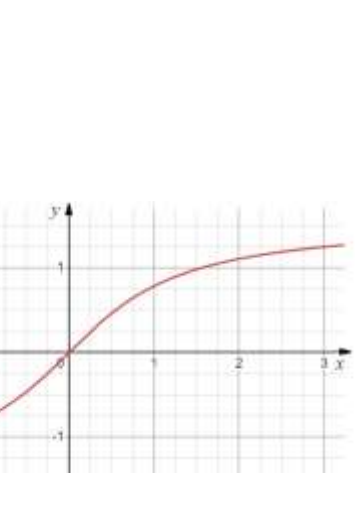
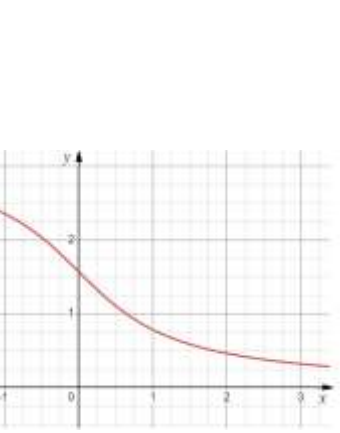


Тригонометричні функції

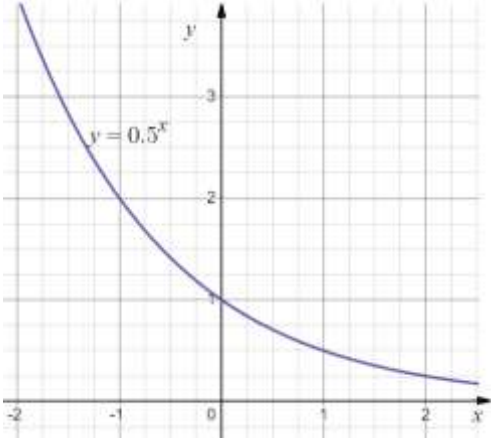
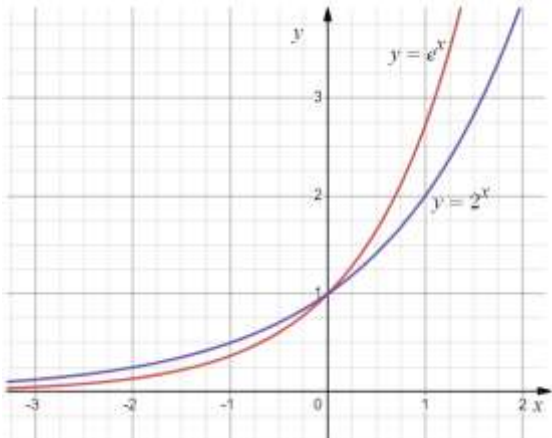
$y = \sin x$	<ul style="list-style-type: none"> • $D(y) = (-\infty, +\infty)$; $E(y) = [-1, 1]$; • періодична функція, $T = 2\pi$ – період; • непарна функція; • $\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$; • $\sin x > 0 \Rightarrow x \in (2\pi n, \pi + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$, • $\sin x < 0 \Rightarrow x \in (\pi + 2\pi n, 2\pi + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$; • зростає для $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$; • спадає для $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$;
$y = \cos x$	<ul style="list-style-type: none"> • $D(y) = (-\infty, +\infty)$; $E(y) = [-1, 1]$; • періодична функція, $T = 2\pi$ – період; • парна функція • $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; • $\cos x > 0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$; • $\cos x < 0 \Rightarrow x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$; • зростає для $x \in (\pi + 2\pi n, 2\pi + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$; • спадає для $x \in (2\pi n, \pi + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$;

$y = \operatorname{tg} x$	<ul style="list-style-type: none"> • $D(y): x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; E(y) = (-\infty, +\infty);$ • періодична функція, $T = \pi$ – період; • непарна функція; • $\operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow x = \pi n, n \in \mathbb{Z};$ • $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z},$ – вертикальна асимптота; • $\operatorname{tg} x > 0 \Rightarrow x \in \left(\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z};$ • $\operatorname{tg} x < 0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \pi n\right), n \in \mathbb{Z};$ • зростає для $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z};$ 
$y = \operatorname{ctg} x$	<ul style="list-style-type: none"> • $D(y): x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}; E(y) = (-\infty, +\infty);$ • періодична функція, $T = \pi$ – період; • непарна функція; • $\operatorname{ctg} x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$ • $x = \pi n, n \in \mathbb{Z},$ – вертикальна асимптота; • $\operatorname{ctg} x > 0 \Rightarrow x \in \left(\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z};$ • $\operatorname{ctg} x < 0 \Rightarrow x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi n, \pi + \pi n\right), n \in \mathbb{Z};$ • спадає для $x \in \left(\pi n, \pi + \pi n\right), n \in \mathbb{Z};$ 

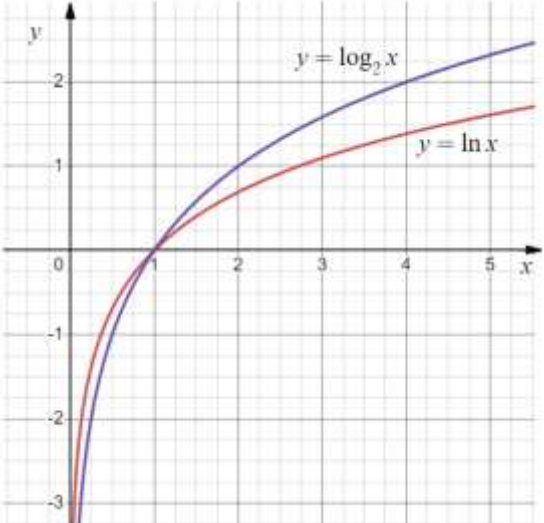
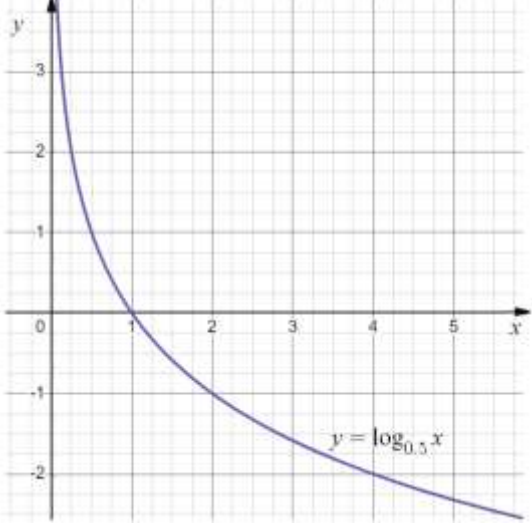
Обернені тригонометричні функції

$y = \arcsin x$	<ul style="list-style-type: none"> • $D(y) = [-1, 1]; E(y) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right];$ • непарна функція; • $\arcsin x = 0 \Rightarrow x = 0;$ • $\arcsin x > 0 \Rightarrow x \in (0, 1);$ • $\arcsin x < 0 \Rightarrow x \in [-1, 0);$ • зростає для $x \in [-1, 1];$ 	
$y = \arccos x$	<ul style="list-style-type: none"> • $D(y) = [-1, 1]; E(y) = [0, \pi];$ • $\arccos(-x) = \pi - \arccos x;$ • $\arccos x = 0 \Rightarrow x = 1;$ • $\arccos x > 0 \Rightarrow x \in [-1, 1);$ • спадає для $x \in [-1, 1];$ 	
$y = \operatorname{arctg} x$	<ul style="list-style-type: none"> • $D(y) = (-\infty, +\infty); E(y) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$ • непарна функція; • $\operatorname{arctg} x = 0 \Rightarrow x = 0;$ • $y = \pm \frac{\pi}{2}$ – горизонтальні асимптоти; • $\operatorname{arctg} x > 0 \Rightarrow x \in (0, +\infty);$ • $\operatorname{arctg} x < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0);$ • зростає для $x \in (-\infty, +\infty);$ 	
$y = \operatorname{arcctg} x$	<ul style="list-style-type: none"> • $D(y) = (-\infty, +\infty); E(y) = (0, \pi);$ • $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x;$ • $y = 0, y = \pi$ – горизонтальні асимптоти; • $\operatorname{arcctg} x > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, +\infty);$ • спадає для $x \in (-\infty, +\infty);$ 	

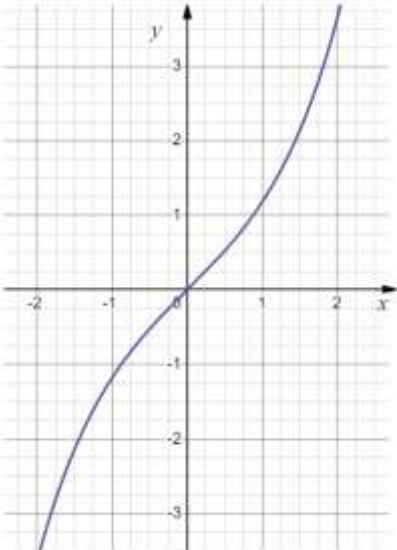
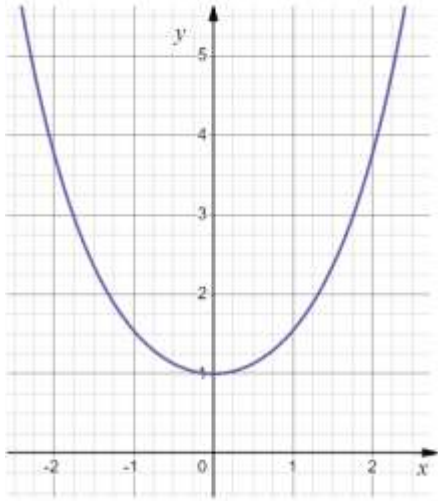
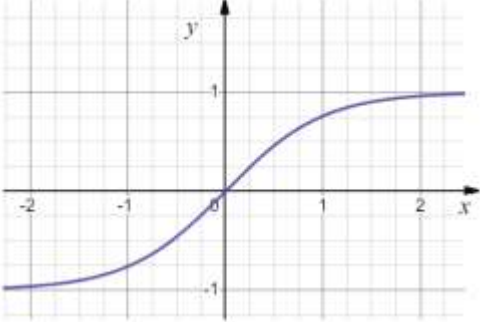
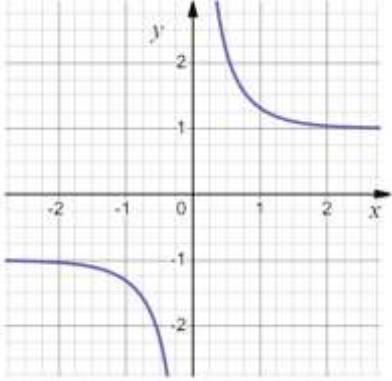
Показникова функція

$y = a^x, 0 < a < 1$	$y = a^x, a > 1$
<ul style="list-style-type: none"> • $D(y) = (-\infty, +\infty)$; • $E(y) = (0, +\infty)$; • $a^x > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, +\infty)$; • точка перетину з віссю ОУ – $(0, 1)$; • $y = 0$ – горизонтальна асимптота; • спадає для $x \in (-\infty, +\infty)$; 	<ul style="list-style-type: none"> • $D(y) = (-\infty, +\infty)$; • $E(y) = (0, +\infty)$; • $a^x > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, +\infty)$; • точка перетину з віссю ОУ – $(0, 1)$; • $y = 0$ – горизонтальна асимптота; • зростає для $x \in (-\infty, +\infty)$;
	

Логарифмічна функція

$y = \log_a x, a > 1$	$y = \log_a x, 0 < a < 1$
<ul style="list-style-type: none"> • $D(y) = (0, +\infty)$; • $E(y) = (-\infty, +\infty)$; • точка перетину з віссю ОХ – $(1, 0)$; • $x=0$ – вертикальна асимптота; • зростає для $x \in (0, +\infty)$; 	<ul style="list-style-type: none"> • $D(y) = (0, +\infty)$; • $E(y) = (-\infty, +\infty)$; • точка перетину з віссю ОХ – $(1, 0)$; • $x=0$ – вертикальна асимптота; • спадає для $x \in (0, +\infty)$;
	

Гіперболічні функції

$y = \operatorname{sh} x$	$y = \operatorname{ch} x$
<ul style="list-style-type: none"> • $D(y) = (-\infty, +\infty)$; • $E(y) = (-\infty, +\infty)$; • $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$; • непарна функція; 	<ul style="list-style-type: none"> • $D(y) = (-\infty, +\infty)$; • $E(y) = (1, +\infty)$; • $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; • парна функція; 
$y = \operatorname{th} x$	$y = \operatorname{cth} x$
<ul style="list-style-type: none"> • $D(y) = (-\infty, +\infty)$; • $E(y) = (-1, 1)$; • $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; • $y = \pm 1$ – горизонтальні асимптоти; 	<ul style="list-style-type: none"> • $D(y) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$; • $E(y) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; • $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$; • $y = \pm 1$ – горизонтальні асимптоти; • $x=0$ – вертикальна асимптота; 

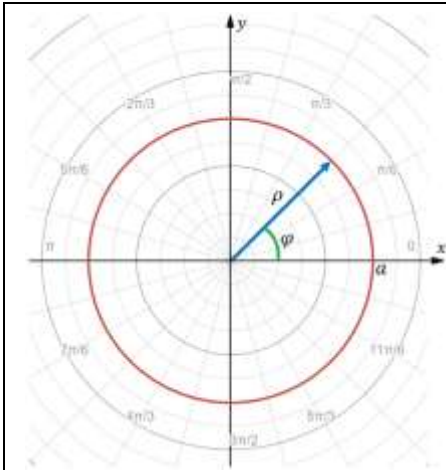
$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1; \quad 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}; \quad 1 - \operatorname{cth}^2 x = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x};$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh}^2 x; \quad \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x;$$

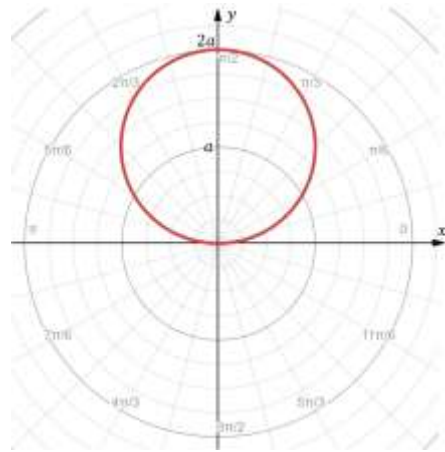
$$\operatorname{ch} 2x - 1 = 2 \operatorname{sh}^2 x; \quad \operatorname{ch} 2x + 1 = 2 \operatorname{ch}^2 x;$$

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y; \quad \operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y;$$

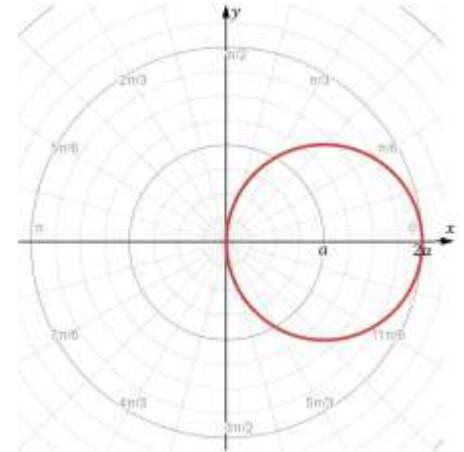
Графіки деяких функцій в полярних координатах



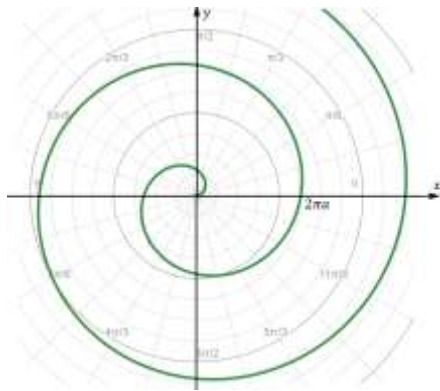
Коло
 $x^2 + y^2 = a^2$
 $\rho = a$



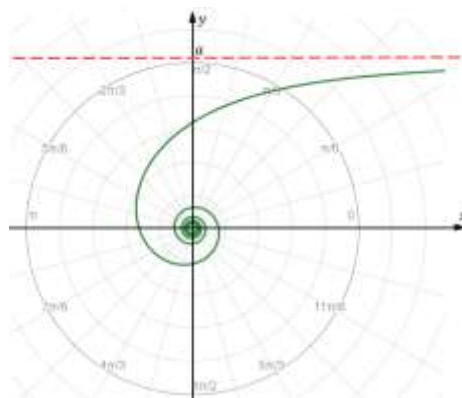
Коло
 $x^2 + y^2 = 2ay$
 $\rho = 2a \sin \varphi$



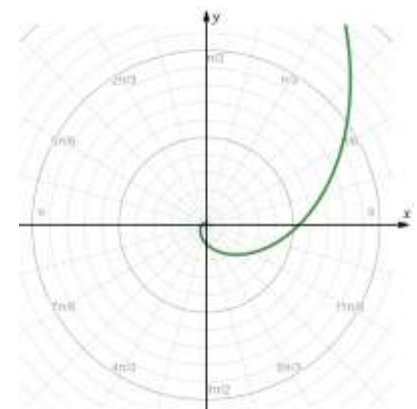
Коло
 $x^2 + y^2 = 2ax$
 $\rho = 2a \cos \varphi$



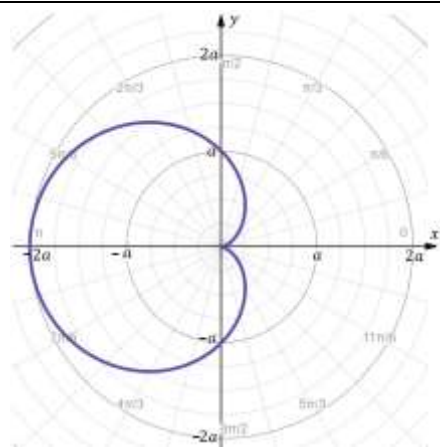
Спіраль Архімеда
 $\rho = a\varphi$



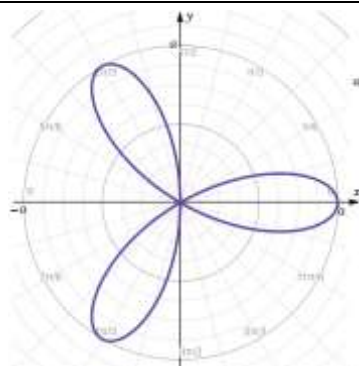
Гіперболічна спіраль
 $\rho = \frac{a}{\varphi}$



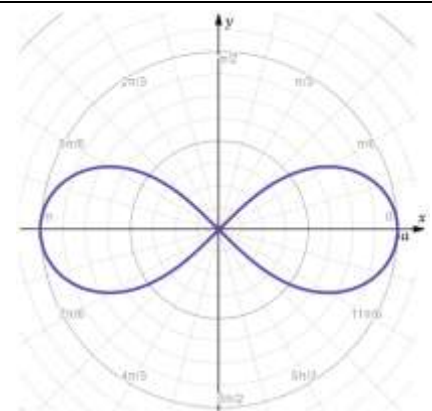
Логарифмічна спіраль
 $\rho = e^{a\varphi}$



Кардіоїда
 $\rho = a(1 - \cos \varphi)$

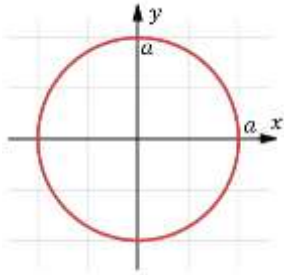


Трьохпелюсткова троянда
 $\rho = a \cos 3\varphi$



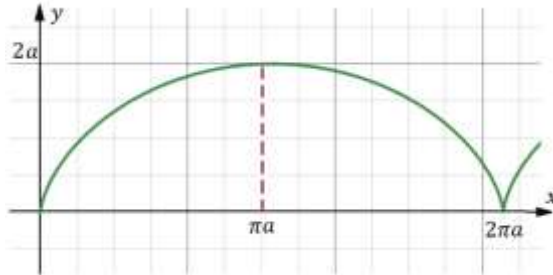
Лемніската Бернуллі
 $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$

Графіки деяких функцій заданих параметрично



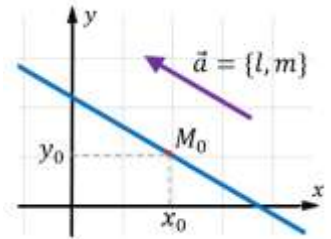
Коло

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \end{cases} t \in [0, 2\pi]$$



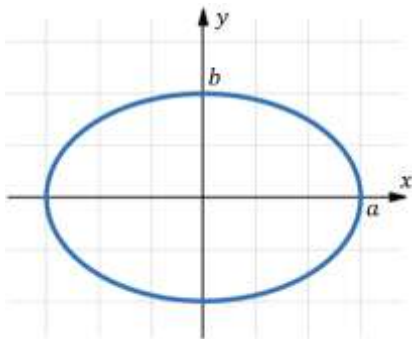
Циклоїда

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} t \in [0, 2\pi]$$



Пряма

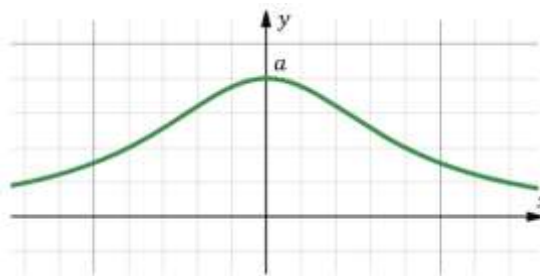
$$\begin{cases} x = lt + x_0, \\ y = mt + y_0, \end{cases} t \in \mathbb{R}$$



Еліпс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

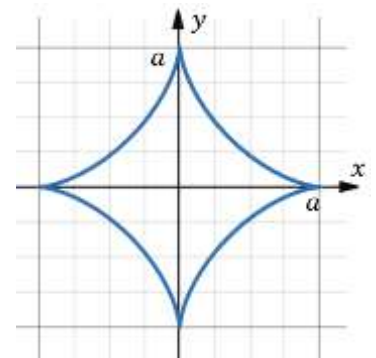
$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} t \in [0, 2\pi]$$



Локон Аньєзі

$$y(x^2 + a^2) = a^3$$

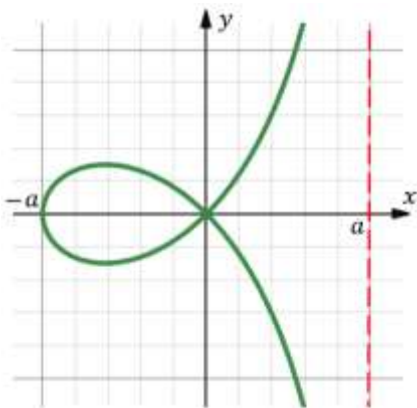
$$\begin{cases} x = at, \\ y = \frac{a}{t^2 + 1}, \end{cases} t \in \mathbb{R}$$



Астроїда

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

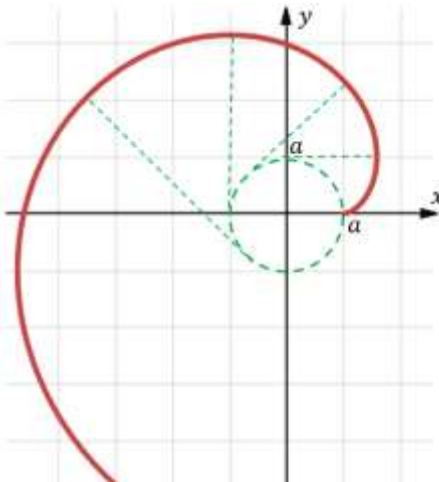
$$\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t, \end{cases} t \in [0, 2\pi]$$



Строфоїда

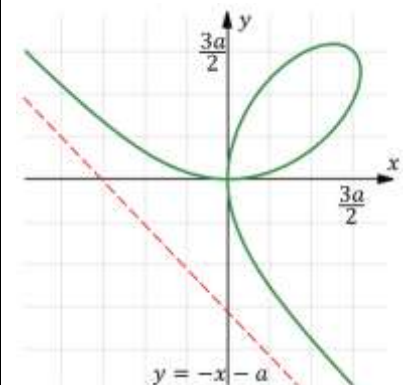
$$y^2(a - x) = x^2(a + x)$$

$$\begin{cases} x = a \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \\ y = at \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \end{cases} t \in \mathbb{R}$$



Інволюта кола

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t), \\ y = a(\sin t - t \cos t), \end{cases} t \in [0, 2\pi]$$



Лист Декарта

$$y^3 + x^3 = 3axy$$

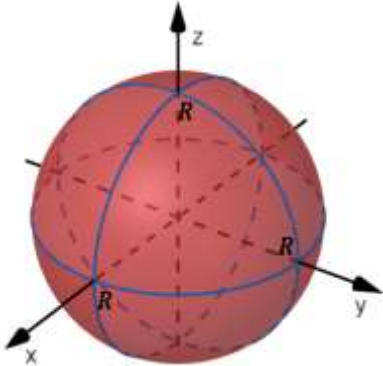
$$\begin{cases} x = \frac{3at}{t^3 + 1}, \\ y = \frac{3at^2}{t^3 + 1}, \end{cases} t \in \mathbb{R}$$

Основні поверхні

Сфера

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2;$$

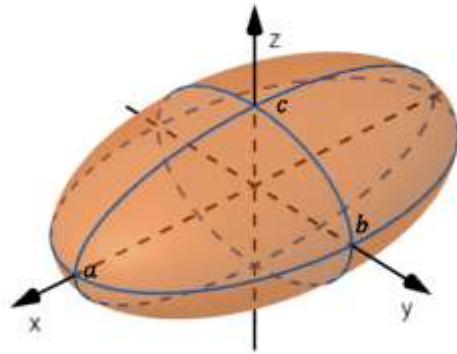
$$\begin{cases} x = R \sin u \cos v, \\ y = R \sin u \sin v, \\ z = R \cos u, \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq u \leq \pi, \\ 0 \leq v \leq 2\pi. \end{matrix}$$



Еліпсоїд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

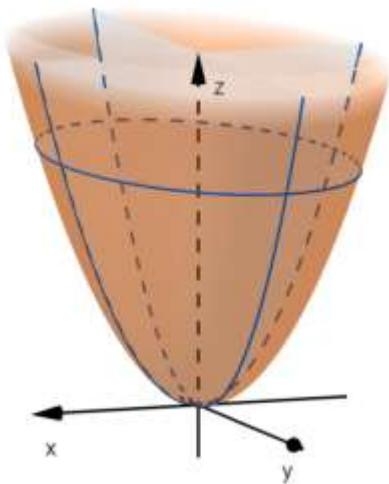
$$\begin{cases} x = a \sin u \cos v, \\ y = b \sin u \sin v, \\ z = c \cos u, \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq u \leq \pi, \\ 0 \leq v \leq 2\pi. \end{matrix}$$



Еліптичний параболоїд

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2};$$

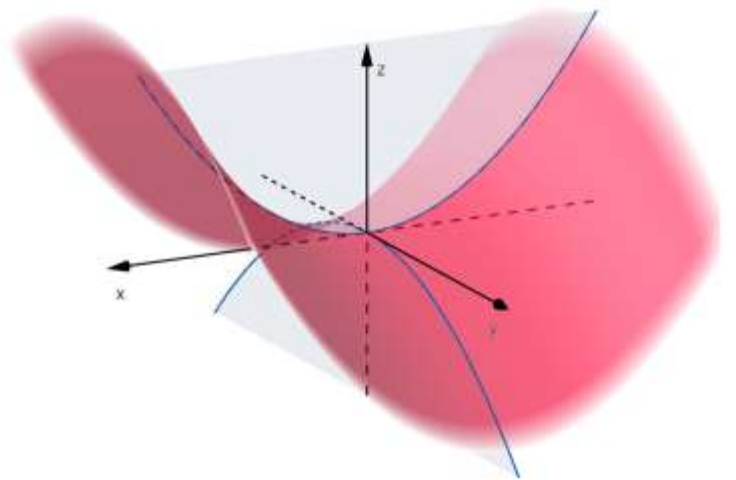
$$\begin{cases} x = au \cos v, \\ y = bu \sin v, \\ z = u^2, \end{cases} \quad \begin{matrix} -\infty \leq u \leq +\infty, \\ 0 \leq v \leq 2\pi. \end{matrix}$$



Гіперболічний параболоїд

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2};$$

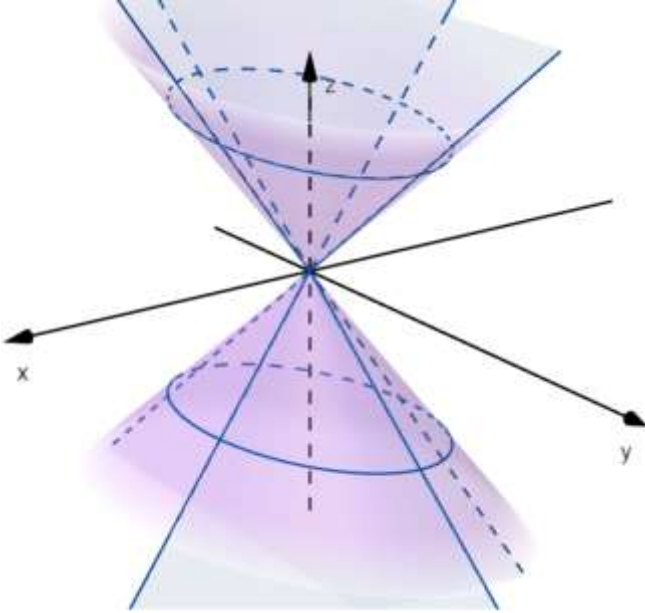
$$\begin{cases} x = au \operatorname{ch} v, \\ y = bu \operatorname{sh} v, \\ z = u^2, \end{cases} \quad \begin{matrix} -\infty \leq u \leq +\infty, \\ -\infty \leq v \leq +\infty. \end{matrix}$$



Конус

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2};$$

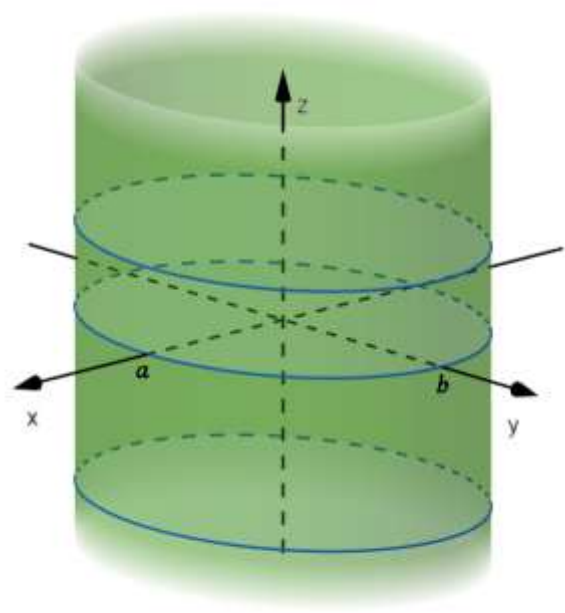
$$\begin{cases} x = au \cos v, \\ y = bu \sin v, \\ z = cu, \end{cases} \quad \begin{matrix} -\infty \leq u \leq +\infty, \\ 0 \leq v \leq 2\pi. \end{matrix}$$



Циліндр

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

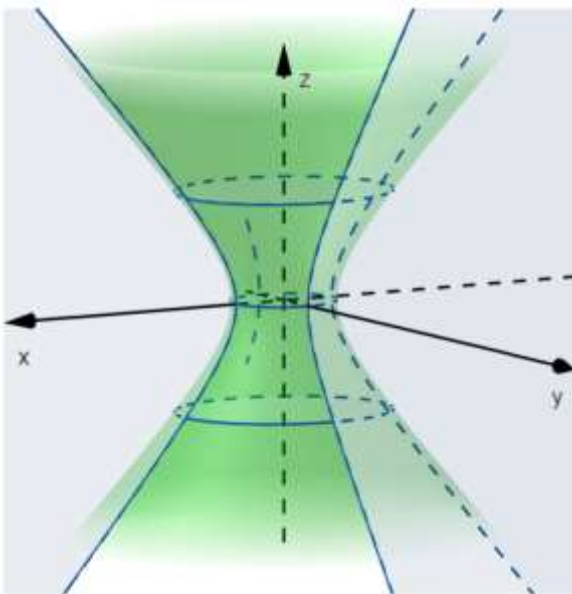
$$\begin{cases} x = a \cos v, \\ y = b \sin v, \\ z = u, \end{cases} \quad \begin{matrix} -\infty \leq u \leq +\infty, \\ 0 \leq v \leq 2\pi. \end{matrix}$$



Однопорожнинний гіперboloїд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

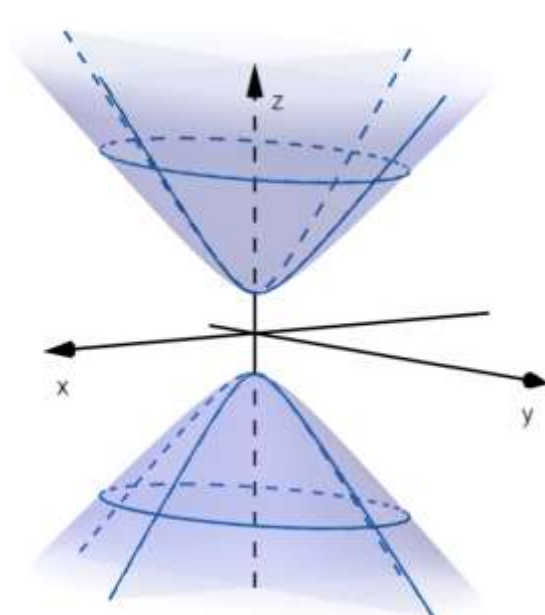
$$\begin{cases} x = a \operatorname{ch} u \cos v, \\ y = b \operatorname{ch} u \sin v, \\ z = c \operatorname{sh} u, \end{cases} \quad \begin{matrix} -\infty \leq u \leq +\infty, \\ 0 \leq v \leq 2\pi. \end{matrix}$$



Двопорожнинний гіперboloїд

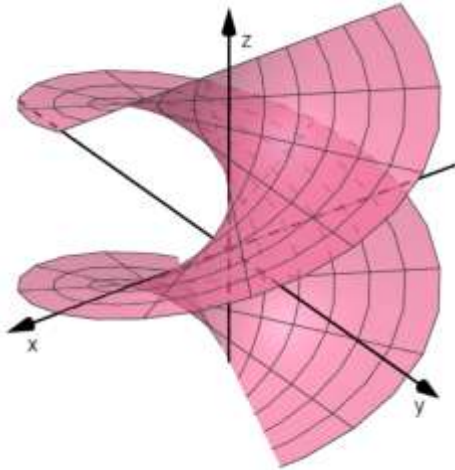
$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

$$\begin{cases} x = a \operatorname{sh} u \cos v, \\ y = b \operatorname{sh} u \sin v, \\ z = \pm c \operatorname{ch} u, \end{cases} \quad \begin{matrix} -\infty \leq u \leq +\infty, \\ 0 \leq v \leq 2\pi. \end{matrix}$$



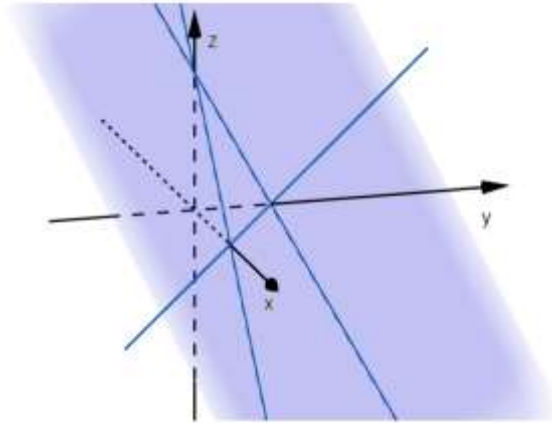
Гелікоїд

$$\begin{cases} x = Ru \cos v, & -\infty \leq u \leq +\infty, \\ y = Ru \sin v, & 0 \leq v \leq 2\pi. \\ z = Hv, \end{cases}$$



Площина

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$



Список використаної літератури

1. Дубовик В.П. Вища математика. Збірник задач: навч. посібн./ Дубовик В.П., Юрик І.І. – К.: А.С.К., 2005. – 648 с.
2. G.N. Berman A Problem Book in Mathematical Analysis/ G.N. Berman -Arihant Publications India Limited, – 2018 – 472 p. ISBN-13 : 978-9351762546
3. Герасимчук В. С. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах. Лінійна й векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функцій однієї та багатьох змінних. Прикладні задачі : навч. посіб. / В. С. Герасимчук, Г. С. Васильченко, В. І. Кравцов. – Київ : Книги України ЛТД, 2014. – 578 с. – 3000 пр. – ISBN 978-966-2331-03-5.
4. Герасимчук В. С. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах. Невизначений, визначений та невластні інтеграли. Звичайні диференціальні рівняння. Прикладні задачі : навч. посіб. / В. С. Герасимчук, Г. С. Васильченко, В. І. Кравцов. – Київ : Книги України ЛТД, 2014. – 470 с. – 3000 пр. – ISBN 978-966-2331-05-9.
5. Герасимчук В.С. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах. Частина 3. Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли. Елементи теорії поля. Ряди. Прикладні задачі : навчальний посібник для студентів вищих технічних закладів / В. С. Герасимчук, Г. С. Васильченко, В. І. Кравцов – К.: Книги України, 2014. – Ч. 3. – 399 с. – ISBN 978-966-2331-04-2.
6. Журавська Г.В. Методичні вказівки та варіанти типово-розрахункових робіт. Кратні інтеграли/ Уклад.: Г. В. Журавська, І. М. Копась, Г. М. Кулик, Н. В. Рева, Н. В. Степаненко 88 с.–К.: НТУУ«КПІ», 2015.(електронне навчальне видання) - Режим доступу: <http://ela.kpi.ua/handle/123456789/27852>
7. Журавська Г.В. Методичні вказівки та варіанти типово-розрахункових робіт з вищої математики. Поверхневі інтеграли. Теорія поля / Уклад.: Г.В. Журавська, І.М., Копась, Г.М. Кулик, Н.В.Рева, Н.В. Степаненко - К.: НТУУ«КПІ», 2015. 67 - с. Електронні ресурси: <http://ela.kpi.ua/handle/123456789/27853>
8. Копась І.М. Диференціальні рівняння. Навчальний посібник для інженерних спеціальностей [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 131 «Прикладна механіка» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: І. М. Копась. – Електронні текстові данні (1 файл: 2504 Кбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 126 с.– Режим доступу: <http://ela.kpi.ua/handle/123456789/23638>
9. B. Demidovich Problems in Mathematical Analysis/ B. Demidovich – Mir Publisher – 1976 – 496 p.