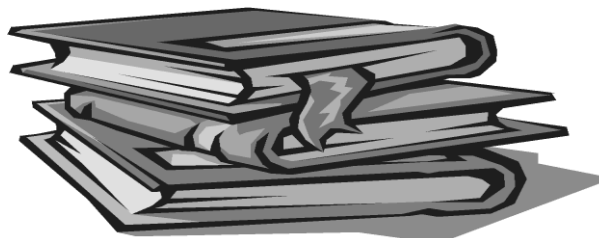


МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ імені Ігоря Сікорського»



ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ.
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК
для студентів технічних спеціальностей

Затверджено Методичною Радою НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського»

Київ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КПІ ім. Ігоря Сікорського»

2021

Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функцій однієї змінної. Навчально-методичний посібник/ Уклад. : Т.В.Авдєєва, О.В.Борисенко, О.Ю. Дюженкова, В.В.Листопадова.–К.: «КПІ ім.Ігоря Сікорського», 2021.–84с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 2 від 09.12.2021 р.) за поданням Вченої ради Фізико – математичного факультету (протокол № 1 від 23.09.2021 р.)

Навчальне видання

**ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ.
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ
НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК
для студентів технічних спеціальностей**

Укладачі: Авдєєва Тетяна Василівна, старший викладач
Борисенко Ольга Володимирівна, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Дюженкова Ольга Юріївна, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Листопадова Валентина Вікторівна, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Відповідальний редактор В.М.Горбачук, д-р фіз.-мат. наук

Рецензенти: М.Є.Дудкін, д-р фіз.-мат. наук, професор,
НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського»
Л.М.Іллічева, канд. фіз.-мат. наук., доцент кафедри
прикладної математики НАУ

Навчально-методичний посібник призначений для студентів першого курсу технічних спеціальностей. Містить основний теоретичний матеріал, велику кількість розв'язаних прикладів, тридцять варіантів індивідуальних типових завдань.

За редакцією укладачів

© Авдєєва Т.В., Борисенко О.В., Дюженкова О.Ю., Листопадова В.В.
© НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського»

ВСТУП

Математична освіта є важливою складовою в системі фундаментальної підготовки фахівця в будь-якій сфері сучасної діяльності. Очевидно, що значну роль при вивченні математики відіграє навчально-методична література, яку використовує в своїй роботі викладач.

На сьогоднішній день накопичено багаторічний досвід складання і використання типових індивідуальних робіт для студентів технічних спеціальностей. У результаті цього створено нову, зручну для використання, форму типового варіанта. Запропонований збірник містить 30 варіантів індивідуальних завдань за такими темами: границя числової послідовності, границя функції, нескінченно велика функція, нескінченно мала функція, знаходження границь функцій, перша визначна границя, друга визначна границя, порівняння нескінченно малих функцій, еквівалентні нескінченно малі функції, розкриття невизначеностей, неперервність функції, точки розриву, похідна функції, диференціювання функцій, заданих явно, неявно та параметрично, логарифмічне диференціювання, геометричний зміст похідної, правило Лопіталя, застосування диференціального числення до дослідження функцій.

Для виконання завдань розрахункової роботи студентам запропоновано ознайомитися з теоретичним матеріалом, який стисло наведено в методичній розробці. Вивчити більш детально теоретичний матеріал за відповідними темами можна за допомогою посібників зі списку рекомендованої літератури. У методичних вказівках наведено багато прикладів розв'язування типових завдань, що дає змогу студентам розібратися у відповідній темі та самостійно виконати свій варіант розрахункової роботи.

Розділ 1. ТЕОРІЯ ГРАНИЦЬ

1. Числова послідовність та її границя

Означення 1. Якщо будь-якому натуральному числу $n \in \mathbb{N}$ за певним законом ставиться у відповідність число x_n , то множину чисел $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\}$ називають **числовою послідовністю** і позначають $\{x_n\}$, де x_n – n -й або загальний член послідовності ($n=1,2,3,4,\dots$). Послідовність можна задати формулою загального члена, наприклад, $x_n = \frac{n}{n+1}$, тоді вона має вигляд: $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots\right\}$, $n=1,2,3,4,\dots$

Означення 2. Число x_0 називається **границею числової послідовності** $\{x_n\}$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N=N(\varepsilon)$, що при всіх $n > N$ виконується нерівність $|x_n - x_0| < \varepsilon$. Позначають границю $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

Якщо послідовність має границю, то ця границя – єдина.

Означення 3. Послідовність, яка має скінченну границю x_0 , називається **збіжною** (або збіжною до числа x_0).

Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ не існує або дорівнює $\pm\infty$, то послідовність називається **розбіжною**.

Приклад 1. Довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n-1} = \frac{2}{3}$ і знайти номер $N(\varepsilon)$ за заданим значенням ε .

Розв'язання. Розглянемо $|x_n - x_0| < \varepsilon$.

$$\left| \frac{2n+1}{3n-1} - \frac{2}{3} \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{6n+3-6n+2}{3n-1} \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{5}{3n-1} \right| < \varepsilon \Rightarrow |3n-1| > \frac{5}{\varepsilon} \Rightarrow$$

вибираємо нерівність $3n-1 > \frac{5}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{1}{3} \left(\frac{5}{\varepsilon} + 1 \right)$. Оскільки при заданому значенні $\varepsilon > 0$ число $\frac{1}{3} \left(\frac{5}{\varepsilon} + 1 \right)$ може бути з дробовою частиною, то за номер

$N(\varepsilon)$ будемо брати його цілу частину плюс одиниця: $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{3} \left(\frac{5}{\varepsilon} + 1 \right) \right] + 1$.

Таким чином, ми знайшли номер, починаючи з якого виконується нерівність $\left| \frac{2n+1}{3n-1} - \frac{2}{3} \right| < \varepsilon$, тому $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n-1} = \frac{2}{3}$. Зокрема, при $\varepsilon = 0,01$ маємо $N(0,01) = \left[\frac{1}{3} \left(\frac{5}{0,01} + 1 \right) \right] + 1 = 168$. ■

Означення 4. Послідовність $\{x_n\}$ називається **нескінченно малою**, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Нескінченно малі послідовності мають такі властивості:

1) алгебраїчна сума будь-якого скінченного числа нескінченно малих є нескінченно малою;

2) добуток обмеженої послідовності ($\{y_n\}$ є **обмеженою**, якщо існує така стала $M > 0$, що $|y_n| \leq M$ при всіх $n \geq 1$) на нескінченно малу послідовність є нескінченно малою.

Означення 5. Послідовність $\{x_n\}$ називається **нескінченно великою**, якщо для довільного $M > 0$ можна вказати номер N такий, що при $n > N$ маємо $|x_n| > M$, тому можна записати: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

Зауважимо, що сума нескінченно великої величини і величини обмеженої є величина нескінченно велика, символічно: $C + \infty = \infty$; сума двох нескінченно великих величин є нескінченно великою: $\infty + \infty = \infty$; частка сталої на нескінченно велику величину є нескінченно малою: $\frac{C}{\infty} = 0$; частка сталої на нескінченно малу величину є нескінченно великою: $\frac{C}{\rightarrow 0} = \pm \infty$; добуток двох нескінченно великих величин є нескінченно великою: $\infty \cdot \infty = \infty$.

Неозначені вирази. З символами ∞ , $-\infty$, $+\infty$ не можна поводитись як з числами. Коли говоримо про нескінченно велику величину, то маємо на увазі величину змінну, яка нескінченно зростає.

Частка та різниця двох нескінченно великих величин: $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, $[\infty - \infty]$, частка двох нескінченно малих $\left[\frac{0}{0}\right]$, добуток нескінченно великої величини на нескінченно малу $[0 \cdot \infty]$ задають **неозначені вирази** або **невизначеності** (тобто неможливо відразу визначити результат границі), існують способи усунення таких невизначеностей.

При розв'язанні використовуємо наступні **теореми про границі**:

Якщо існують $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ та $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, то існує

1) границя їх алгебраїчної суми $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$;

2) границя добутку $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$;

3) границя частки $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n / y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n / \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$ та $y_n \neq 0$;

Якщо $\{x_n\}$, де $x_n = C = \text{const}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} C = C$.

Приклад 2. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^4 + 8n^3}{n^5 - 3n}$.

Розв'язання.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^4 + 8n^3}{n^5 - 3n} = \left[\frac{\infty}{\infty - \infty} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5n^4}{n^5} + \frac{8n^3}{n^5}}{\frac{n^5}{n^5} - \frac{3n}{n^5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{n} + \frac{8}{n^2}}{1 - \frac{3}{n^4}} = \frac{0}{1} = 0$$

(виконали ділення чисельника та знаменника на найбільшу величину, яка прямує до ∞). ■

Приклад 3. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4 + n^3 - 7}{1 + 8n^4 - 3n}$.

Розв'язання.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4 + n^3 - 7}{1 + 8n^4 - 3n} = \left[\frac{\infty}{\infty - \infty} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3n^4}{n^4} + \frac{n^3}{n^4} - \frac{7}{n^4}}{\frac{1}{n^4} + \frac{8n^4}{n^4} - \frac{3n}{n^4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{n} - \frac{7}{n^4}}{\frac{1}{n^4} + 8 - \frac{3}{n^3}} = \frac{3}{8}. \blacksquare$$

Приклад 4. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^3 + 8n^2}{2n^2 + 3n - 6}$.

Розв'язання.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^3 + 8n^2}{2n^2 + 3n - 6} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{9n^3}{n^3} + \frac{8n^2}{n^3}}{\frac{2n^2}{n^3} + \frac{3n}{n^3} - \frac{6}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9 + \frac{8}{n}}{\frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} - \frac{6}{n^3}} = \frac{9}{\rightarrow 0} = \infty. \blacksquare$$

Звертаємо увагу на наступні **закономірності** (приклади 2, 3, 4):

якщо найвищий степінь n чисельника менший за найвищий степінь n знаменника, то границя відношення, коли $n \rightarrow \infty$, завжди дорівнює нулю;

якщо найвищий степінь n чисельника більший за найвищий степінь n знаменника, то границя відношення, коли $n \rightarrow \infty$, завжди дорівнює ∞ ;

якщо найвищі степені n чисельника і знаменника співпадають, то границя відношення, коли $n \rightarrow \infty$, дорівнює відношенню коефіцієнтів при найвищих степенях n .

Приклад 5. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{4^n}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}$.

Розв'язання.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{4^n}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1 - (1/4)^{n+1}}{1 - 1/4}}{1 - 1/4}}{\frac{1 - (1/2)^{n+1}}{1 - 1/2}}{1 - 1/2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3/4}{1/2} = \frac{3}{2}$$

(використали формулу суми членів геометричної прогресії $S_n = \frac{b_1 - q^n}{1 - q}$). ■

Приклад 6. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{7n} - \sqrt{3n + 2})$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{7n} - \sqrt{3n+2}) &= [\infty - \infty] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{7n} - \sqrt{3n+2})(\sqrt{7n} + \sqrt{3n+2})}{\sqrt{7n} + \sqrt{3n+2}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n - 2}{\sqrt{7n} + \sqrt{3n+2}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4n}{n} - \frac{2}{n}}{\sqrt{\frac{7n}{n^2}} + \sqrt{\frac{3n+2}{n^2}}} = \left[\frac{4}{0} \right] = \infty. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Приклад 7. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{8n} - \sqrt[4]{2n^8}}{\sqrt[3]{n^6 - 4n} + 3}$.

Розв'язання. Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{8n} - \sqrt[4]{2n^8}}{\sqrt[3]{n^6 - 4n} + 3} = \left[\frac{\infty - \infty}{\infty} \right]$, то поділимо чисельник і знаменник на n^2 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{8n}}{n^2} - \frac{\sqrt[4]{2n^8}}{n^2}}{\frac{\sqrt[3]{n^6 - 4n}}{n^2} + \frac{3}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{8n}{n^4}} - \sqrt[4]{\frac{2n^8}{n^8}}}{\sqrt[3]{\frac{n^6 - 4n}{n^6}} + \frac{3}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{8}{n^3}} - \sqrt[4]{2}}{\sqrt[3]{1 - \frac{4}{n^5}} + \frac{3}{n^2}} = \frac{-\sqrt[4]{2}}{1} = -\sqrt[4]{2}. \quad \blacksquare$$

Приклад 8. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^3 - n^2 + 4} - \sqrt[3]{5n^4}}{\sqrt[4]{16n^6 - 7n - 1} - \sqrt{n+4}}$.

Розв'язання. Маємо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^3 - n^2 + 4} - \sqrt[3]{5n^4}}{\sqrt[4]{16n^6 - 7n - 1} - \sqrt{n+4}} = \left[\frac{\infty - \infty}{\infty - \infty} \right]$.

Оскільки $\sqrt{2n^3 - n^2 + 4} \sim \sqrt{2}n^{3/2}$, $\sqrt[3]{5n^4} \sim \sqrt[3]{5}n^{4/3}$,

$\sqrt[4]{16n^6 - 7n - 1} \sim 2n^{3/2}$, $\sqrt{n+4} \sim n^{1/2}$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^3 - n^2 + 4} - \sqrt[3]{5n^4}}{\sqrt[4]{16n^6 - 7n - 1} - \sqrt{n+4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}n^{3/2} - \sqrt[3]{5}n^{4/3}}{2n^{3/2} - n^{1/2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

($n^{3/2}$ – степінь з найбільшим показником в чисельнику і в знаменнику). \blacksquare

Приклад 9. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 5^n + 3}{4 \cdot 5^n - 3^n - 7}$.

Розв'язання.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 5^n + 3}{4 \cdot 5^n - 3^n - 7} = \left[\frac{\infty - \infty}{\infty - \infty} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^n}{5^n} - \frac{5^n}{5^n} + \frac{3}{5^n}}{\frac{4 \cdot 5^n}{5^n} - \frac{3^n}{5^n} - \frac{7}{5^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n - 1 + \frac{3}{5^n}}{4 - \left(\frac{3}{5}\right)^n - \frac{7}{5^n}} = -\frac{1}{4}$$

(оскільки $\frac{2}{5} < 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$, аналогічно $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$). \blacksquare

Приклад 10. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n!}{(n+1)! - 8n!}$.

Розв'язання.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n!}{(n+1)! - 8n!} = \left[\frac{\infty}{\infty - \infty} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n!}{n!(n+1-8)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(n-7)} = 0$$

(використали $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)n$, $0! = 1$). ■

2. Границя функції неперервного аргумента

Розглянемо функцію $f(x)$, яка визначена в деякому околі X точки x_0 , крім, можливо, самої точки x_0 .

Означення 1 (означення за Коші мовою " $\varepsilon - \delta$ "). Число A називається **границею функції** $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх $x \in X$, які задовольняють нерівність $0 < |x - x_0| < \delta$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Позначають границю $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

Геометричний зміст границі функції $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ означає, що для всіх точок x , досить близьких до точки x_0 , відповідні значення функції як завгодно мало відрізняються від значення A .

В означенні границі $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ вважалось, що $x \rightarrow x_0$ довільним способом: залишаючись меншим за x_0 , (зліва від x_0) або більшим за x_0 (справа від x_0), або коливаючись навколо x_0 , набуваючи значень то менших, то більших від x_0 . Проте трапляється, що спосіб наближення аргументу x до x_0 суттєво впливає на значення границі функції, тому вводяться поняття **односторонніх границь**:

а) лівостороння границя: $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$;

б) правостороння границя: $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$;

для існування границі $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ потрібно, щоб $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$.

Означення 2. Число A називається **границею функції** $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $M(\varepsilon)$ таке, що для всіх $x > M(\varepsilon)$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Тобто $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

Аналогічно визначається $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$.

Означення 3. Функція $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ називається **нескінченно великою** (має нескінченну границю), якщо для довільного числа $M > 0$ існує число

$\delta = \delta(M) > 0$, що для всіх x , які задовольняють нерівність $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x)| > M$. Позначають $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

Означення 4. Функція $f(x)$, яка задана на всій числовій осі, при $x \rightarrow \infty$ називається **нескінченно великою**, якщо для довільного числа $M > 0$ існує число $N = N(M) > 0$, що для всіх x , які задовольняють нерівність $|x| > N$, виконується нерівність $|f(x)| > M$. Позначають $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

Зокрема, функція $f(x)$ є нескінченно великою, якщо $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$,
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$,

Приклад 1. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 3x}{4 - x}$.

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 3x}{4 - x} = \frac{16 - 6}{2} = 5$. ■

Приклад 2. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - x - 12}{2x^2 + 6x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - x - 12}{2x^2 + 6x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x + 3)(x - 4)}{2x(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x - 4)}{2x} = \frac{-7}{-6} = \frac{7}{6}. \quad \blacksquare$$

Приклад 3. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{5+x} - \sqrt[3]{5-x}}{3x}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{5+x} - \sqrt[3]{5-x}}{3x} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5+x - 5+x}{3x \left(\sqrt[3]{(5+x)^2} + \sqrt[3]{(5+x)(5-x)} + \sqrt[3]{(5-x)^2} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3 \left(\sqrt[3]{(5+x)^2} + \sqrt[3]{(5+x)(5-x)} + \sqrt[3]{(5-x)^2} \right)} = \frac{2}{9\sqrt[3]{25}}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Приклад 4. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 - 2x - 3}{1 - 5x^2}$.

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 - 2x - 3}{1 - 5x^2} = \left[\frac{\infty - \infty}{-\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x^2} - 5} = -\frac{7}{5}$. ■

Приклад 5. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3}{x^2 - 9}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3}{x^2 - 9} = \left[\frac{3}{0} \right] = \infty. \quad \blacksquare$$

Перша визначна границя $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Ця границя розкриває невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Наслідки:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{kx} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} = 1.$$

Приклад 6. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 6x}{x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 6x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \sin 6x}{6x \cos 6x} = 6. \quad \blacksquare$$

Приклад 7. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{4x^2}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{4x^2} = \left[\frac{0}{\rightarrow 0}\right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 3x}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2 \cdot \frac{9}{2} = \frac{9}{2}. \quad \blacksquare$$

Приклад 8. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\sin \pi x}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\sin \pi x} &= \left[\frac{0}{0}\right] = \left| \begin{array}{l} x-1=t \\ x=t+1 \\ x \rightarrow 1 \Rightarrow t \rightarrow 0 \end{array} \right| = \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t(t+2)}{\sin(\pi + \pi t)} &= \frac{1}{\pi} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\pi t(t+2)}{-\sin(\pi t)} = \frac{1}{\pi} \lim_{t \rightarrow 0} (t+2) = \frac{2}{\pi}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Приклад 9. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 6x - \cos 4x}{x^2}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 6x - \cos 4x}{x^2} &= \left[\frac{0}{0}\right] = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 5x \sin x}{x^2} = \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0} 5 \cdot 2 \left(\frac{\sin 5x}{5x}\right) \left(\frac{\sin x}{x}\right) = -10. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Приклад 10. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \arcsin 4x}{3x - \operatorname{tg} 2x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \arcsin 4x}{3x - \operatorname{tg} 2x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(3 - \frac{4 \arcsin 4x}{4x} \right)}{x \left(3 - \frac{2 \operatorname{tg} 2x}{2x} \right)} = \frac{3 - 4}{3 - 2} = -1. \quad \blacksquare$$

Означення 5. Функція $\alpha(x)$ називається **нескінченно малою** при $x \rightarrow x_0$, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$.

Означення 6. Дві **нескінченно малі** функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$ називаються **еквівалентними**, якщо границя їх відношення є одиницею: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. Позначається: $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$.

Тому $\sin x \sim x$, якщо $x \rightarrow 0$ (з першої визначної границі).

Друга визначна границя:

якщо задано числову послідовність $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}, n \in \mathbb{N}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$. Для функції дійсної змінної $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$, $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, де число e - ірраціональне, його наближене значення 2,718.

Ці границі розкривають невизначеність типу $[1^\infty]$.

Приклад 11. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8x^2 - 4x + 5}{8x^2 - 3x} \right)^{2x+7}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8x^2 - 4x + 5}{8x^2 - 3x} \right)^{2x+7} &= [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{8x^2 - 4x + 5}{8x^2 - 3x} - 1 \right)^{2x+7} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{8x^2 - 4x + 5 - 8x^2 + 3x}{8x^2 - 3x} \right)^{2x+7} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5-x}{8x^2 - 3x} \right)^{\frac{8x^2-3x}{5-x} \cdot \frac{5-x}{8x^2-3x} \cdot (2x+7)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{5-x}{8x^2 - 3x} \right)^{\frac{8x^2-3x}{5-x}} \right)^{\frac{5-x}{8x^2-3x} \cdot (2x+7)} = e \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(5-x)(2x+7)}{8x^2-3x} = \\ &= e \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-2x^2}{8x^2-3x} = e^{-\frac{1}{4}}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Приклад 12. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - 6x + 1}{9x^2 - 3} \right)^{2x+7}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - 6x + 1}{9x^2 - 3} \right)^{2x+7} = \left(\frac{1}{3} \right)^\infty = 0. \quad \blacksquare$$

Приклад 13. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8x^2 - 2x}{2x^2 - 1} \right)^{2x+7}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8x^2 - 2x}{2x^2 - 1} \right)^{2x+7} = (4)^\infty = \infty. \quad \blacksquare$$

Якщо в прикладах 12, 13 використати алгоритм розв'язування, аналогічний прикладу 11, то результат будемо мати той самий, тільки витратимо більше часу, тому цей алгоритм потрібно застосовувати тільки у випадку невизначеності типу $[1^\infty]$.

Приклад 14. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 3)^{\frac{3x}{x-2}}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 3)^{\frac{3x}{x-2}} = [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow 2} (1 + 2x - 4)^{\frac{1}{2x-4} \cdot \frac{2 \cdot 3x}{1}} = e^{12}. \quad \blacksquare$$

При розв'язуванні прикладів часто використовується заміна однієї нескінченно малої іншою з наступного ланцюжка еквівалентних нескінченно малих функцій при $x \rightarrow 0$:

$$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \operatorname{arcsin} x \sim \operatorname{arctg} x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1 \sim \frac{a^x - 1}{\ln a} \sim \frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu}$$

Наприклад, $\sin(x - 3) \sim x - 3$ при $x \rightarrow 3$; $(1+x)^4 - 1 \sim 4x$ при $x \rightarrow 0$;

$2^x - 1 \sim x \ln 2$ при $x \rightarrow 0$.

Приклад 15. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 5x}{(e^{3x} - 1) \ln(1+4x)}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 5x}{(e^{3x} - 1) \ln(1+4x)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 5x}{3x \cdot 4x} = \frac{5}{12}. \quad \blacksquare$$

Приклад 16. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x \operatorname{arcsin} 7x}{e^{x^2} - \cos 2x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x \operatorname{arcsin} 7x}{e^{x^2} - \cos 2x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x \cdot 7x}{(e^{x^2} - 1) + (1 - \cos 2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{35x^2}{x^2 + 2\sin^2 x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{35x^2}{x^2(1+2)} = \frac{35}{3}. \quad \blacksquare$$

Приклад 17. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{3x}-1)\sin 5x}{(1-\cos 4x)}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{3x}-1)\sin 5x}{(1-\cos 4x)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \cdot 5x}{2\sin^2 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{15x^2}{2 \cdot 4x^2} = \frac{15}{8}. \quad \blacksquare$$

Приклад 18. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+\operatorname{tg} x)^3-1}{\ln(1+\sin x)}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+\operatorname{tg} x)^3-1}{\ln(1+\sin x)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\operatorname{tg} x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x} = 3. \quad \blacksquare$$

Приклад 19. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x-2^x}{\ln(1+4x)}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x-2^x}{\ln(1+4x)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x-1-(2^x-1)}{\ln(1+4x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\ln 3-x\ln 2}{4x} = \frac{1}{4} \ln \frac{3}{2}. \quad \blacksquare$$

Приклад 20. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^2 \cdot (\sqrt[5]{1+\operatorname{arctg} 3x} - 1)}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^2 \cdot (\sqrt[5]{1+\operatorname{arctg} 3x} - 1)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^2 \cdot 3x \cdot \frac{1}{5}} =$$

(в даному випадку в чисельнику неможливо замінити $\operatorname{tg} x$ і $\sin x$ їм еквівалентним x , бо втрачається можливість знищення невизначеності $\frac{0}{0}$)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \frac{1-\cos x}{\cos x}}{\frac{3x^3}{5}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos x}}{\frac{3x^3}{5}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2}{\frac{3x^3}{5} \cdot \cos x} = \frac{5}{6}. \quad \blacksquare$$

Приклад 21. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 5x}{x^3+2x-1}$.

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 5x}{x^3+2x-1} = 0$ ($\sin 5x$ – обмежена функція, $\frac{1}{x^3+2x-1}$ –

нескінченно мала функція при $x \rightarrow \infty$, їх добуток є нескінченно малою). \blacksquare

Розділ 2. ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ГРАНИЦЬ

1. Нескінченно малі функції та їх властивості. Порівняння нескінченно малих функцій. Еквівалентність нескінченно малих функцій.

Означення 1. Функція $f(x)$ називається **нескінченно малою** при $x \rightarrow x_0$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх x , що задовольняють умову $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, буде виконуватися нерівність $|f(x)| < \varepsilon$. Цей факт можна було визначити так: функція $f(x)$ називається нескінченно малою при $x \rightarrow x_0$, якщо границя її дорівнює нулю

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0.$$

Розглянемо деякі **властивості нескінченно малих функцій**.

1. Для того щоб функція $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ мала границю A , необхідно і достатньо, щоб $f(x)$ можна було записати у вигляді: $f(x) = A + \alpha(x)$, де $\alpha(x)$ – нескінченно мала функція при $x \rightarrow x_0$.

2. Сума скінченної кількості нескінченно малих функцій є нескінченно малою функцією.

3. Добуток нескінченно малої при $x \rightarrow x_0$ функції на функцію, обмежену в околі точки x_0 , є нескінченно малою функцією.

4. Добуток двох нескінченно малих функцій при $x \rightarrow x_0$ є нескінченно малою функцією.

Дві нескінченно малі функції порівнюють між собою за допомогою дослідження їхнього відношення при однаковому значенні аргумента.

Розглянемо дві нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$, які є функціями одного й того самого аргумента x , причому

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0.$$

Якщо границя відношення цих двох функцій існує та є скінченною, тобто

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A, \quad A \neq 0, \quad A \neq \infty,$$

то нескінченно малі функції називаються **нескінченно малими одного (однакового) порядку малості**.

Приклад 1. Функції $\alpha(x) = \sin 2x$, $\beta(x) = \operatorname{arctg} 4x$ є нескінченно малими при $x \rightarrow 0$. Порівняти їх.

Розв'язання. Знайдемо границю відношення:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{arctg} 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2} \quad (\neq 0, \neq \infty),$$

тобто ці функції при $x \rightarrow 0$ є нескінченно малими одного порядку малості. ■

Якщо границя відношення двох нескінченно малих функцій дорівнює нулю

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0,$$

то нескінченно малу функцію $\alpha(x)$ називають **нескінченно малою вищого порядку малості**, ніж $\beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$.

Приклад 2. Функції $\alpha(x) = x^2 \sin 4x$, $\beta(x) = x \operatorname{arctg} 2x$ є нескінченно малими при $x \rightarrow 0$. Порівняти їх.

Розв'язання. Знайдемо границю відношення:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin 4x}{x \operatorname{arctg} 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 \cdot x}{x \cdot 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{2} = 0,$$

тобто $\alpha(x) = x^2 \sin 4x$ є нескінченно малою функцією вищого порядку малості при $x \rightarrow 0$, ніж $\beta(x) = x \operatorname{arctg} 2x$. ■

Якщо границя відношення двох нескінченно малих функцій дорівнює нескінченності

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty,$$

то нескінченно малу функцію $\alpha(x)$ при $x \rightarrow x_0$ називають **нескінченно малою нижчого порядку малості**, ніж $\beta(x)$.

Приклад 3. Функції $\alpha(x) = x^2$, $\beta(x) = x^3 \operatorname{tg} x$ є нескінченно малими при $x \rightarrow 0$. Порівняти їх.

Розв'язання. Знайдемо границю відношення

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^3 \operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^3 \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty,$$

тобто $\alpha(x) = x^2$ є нескінченно малою функцією нижчого порядку малості при $x \rightarrow 0$, ніж $\beta(x) = x^3 \operatorname{tg} x$. ■

Якщо $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – нескінченно малі функції при $x \rightarrow x_0$ та

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k} = A, \quad A \neq 0, \quad A \neq \infty,$$

то $\alpha(x)$ – нескінченно мала **k -го порядку малості по відношенню до $\beta(x)$** .

Приклад 4. Визначити порядок малості нескінченно малої функції $\alpha(x) = \sin 2x \cdot \operatorname{tg} 3x$ відносно нескінченно малої $\beta(x) = x$ при $x \rightarrow 0$.

Розв'язання. Потрібно знайти значення степеня k , при якому границя відношення функції $\alpha(x)$ та k -го степеня $\beta(x)$ при $x \rightarrow 0$ буде сталою, відмінною від нуля та нескінченності. Знайдемо границю

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \cdot \operatorname{tg} 3x}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot 3x}{x^k} = 6.$$

Зрозуміло, що скоротити x можна при $k = 2$.

Отже, порядок малості нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно нескінченно малої $\beta(x)$ при $x \rightarrow 0$ дорівнює двом. ■

Якщо границя відношення двох нескінченно малих функцій дорівнює одиниці

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1,$$

то нескінченно малі функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ називають **еквівалентними нескінченно малими** при $x \rightarrow x_0$. При цьому записують $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Приклад 5. Навести приклад еквівалентних нескінченно малих функцій.

Розв'язання. Функції $\alpha(x) = \sin 4x$, $\beta(x) = 4 \operatorname{arctg} x$ є еквівалентними нескінченно малими при $x \rightarrow 0$, оскільки границя відношення:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4 \operatorname{arctg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{4x} = 1.$$

Отже, $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \rightarrow 0$. ■

Нагадаємо ланцюжки еквівалентних нескінченно малих функцій:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \sin x \sim x;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 \quad \operatorname{tg} x \sim x;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 \quad \arcsin x \sim x;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1 \quad \operatorname{arctg} x \sim x;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \ln(1+x) \sim x;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a} \quad \log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$e^x - 1 \sim x;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^m - 1}{x} = m$$

$$(1+x)^m - 1 \sim m \cdot x;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{n}$$

$$\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}.$$

Приклад 6. Знайти границі функцій за допомогою еквівалентних нескінченно малих функцій.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 4x} = \left| \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ \sin 5x \sim 5x \\ \operatorname{tg} 4x \sim 4x \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{4x} = \frac{5}{4}.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-2x^3)}{(1-\cos 2x)\operatorname{tg} 3x} = \left| \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ \ln(1-2x^3) \sim -2x^3 \\ 1 - \cos 2x = 2(\sin x)^2 \sim 2x^2 \\ \operatorname{tg} 3x \sim 3x \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x^3}{2x^2 \cdot 3x} = -\frac{1}{3}.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\arcsin(x-2)}{x^2-2x} = \left| \begin{array}{l} x-2 = y \\ x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 0 \\ x = y+2 \end{array} \right| = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\arcsin y}{y(y+2)} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} y \rightarrow 0 \\ \arcsin y \sim y \end{array} \right| = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{y(y+2)} = \frac{1}{2}.$$

2. Неперервність функції в точці і на відрізку

Нехай функція $f(x)$ визначена в точці x_0 і в деякому околі цієї точки.

Означення 1. Функція $y = f(x)$ називається **неперервною в точці x_0** , якщо виконуються такі умови:

- 1) функція визначена в точці x_0 і в деякому околі цієї точки;
- 2) існує границя $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Якщо проаналізувати це означення неперервності функції в точці та означення границі функції в точці $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, то помічаємо, що при

означенні границі функції число x_0 могло й не належати області визначення функції, а якщо число x_0 належало б області визначення, то значення функції $f(x_0)$ в цій точці могло й не збігатися з границею a .

Означення 2. Функція $y = f(x)$ називається **неперервною в точці x_0** , якщо нескінченно малому приросту аргументу в цій точці відповідає нескінченно малий приріст функції, тобто

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x_0) = 0.$$

Означення 3. Функція $y = f(x)$ називається **неперервною в точці x_0** , якщо скінченні односторонні границі функції рівні між собою та дорівнюють значенню функції в цій точці, тобто

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Розглянемо поняття односторонньої неперервності. Функція $f(x)$ називається **неперервною в точці x_0 зліва**, якщо вона визначена на півінтервалі $(x_0 - \varepsilon; x_0]$, де $\varepsilon > 0$ і $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$; якщо функція $f(x)$ визначена на півінтервалі $[x_0; x_0 + \varepsilon)$ та $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$, то функція називається **неперервною в точці x_0 справа**. Таким чином, функція $y = f(x)$ буде неперервною в точці x_0 тоді і лише тоді, коли вона визначена в деякому околі точки x_0 і $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$.

Якщо порушується хоча б одна з умов неперервності, то функція є розривною в точці x_0 . Тоді x_0 називається **точкою розриву**. Розрив у точці визначається в залежності від того, які умови неперервності порушені.

3. Класифікація точок розриву

а) Якщо точка x_0 **не належить** області визначення та існують скінченні односторонні границі

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = B,$$

причому $A \neq B$, то в точці x_0 маємо скінченний **розрив I роду (усувний)**.

Усунути розрив можна довизначивши функцію в точці x_0 , а саме $f(x_0) = A$.

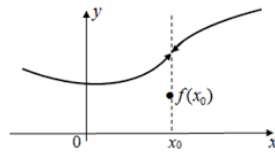
Якщо точка x_0 **належить** області визначення та існують скінченні односторонні границі

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = B,$$

Причому $A = B$, але значення функції $y = f(x)$ в точці x_0 відмінне від значення $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A$, тобто

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \neq f(x_0)$$

то в точці x_0 також маємо скінченний **розрив I роду усунний**.

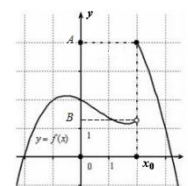
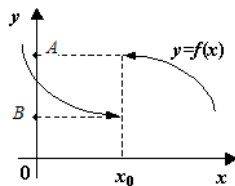


Для усунення такого розриву необхідно дозначити функцію в точці x_0 , а саме, покласти $f(x_0) = A$.

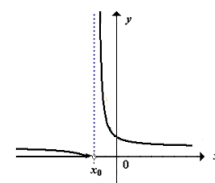
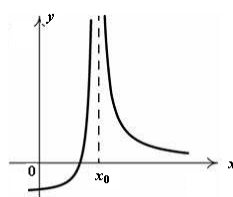
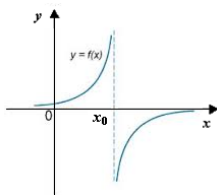
б) Якщо точка x_0 належить області визначення та існують скінченні односторонні границі

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = B,$$

але вони різні, тобто $A \neq B$, то в точці x_0 маємо скінченний **розрив I роду, типу стрибок**. Висота стрибка $h = |A - B|$.



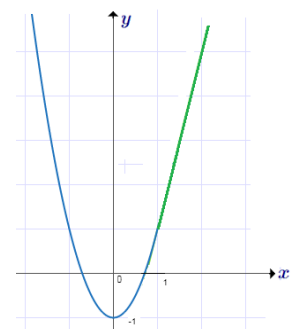
в) Якщо хоча б одна з односторонніх границь $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ не існує або дорівнює нескінченності, то розрив в точці x_0 називається **розривом II роду (нескінченний розрив)**.



Приклад 1. Дослідити функцію

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1, & x \leq 1, \\ 4x - 3, & x > 1 \end{cases} \text{ на неперервність.}$$

Розв'язання. Складові заданої функції є неперервними в області свого існування, тому досліджуємо функцію в точці $x = 1$ (точці стику). Знайдемо



$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (2x^2 - 1) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (4x - 3) = 1.$$

Оскільки $f(1) = 2 \cdot 1^2 - 1 = 1$, тому функція є неперервною скрізь. ■

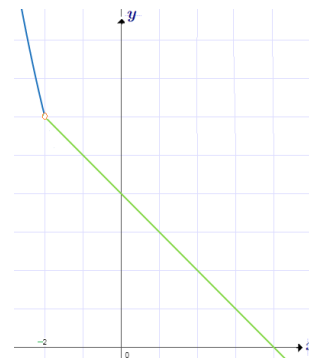
Приклад 2. Дослідити функцію $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x < -2, \\ 4 - x, & x > -2 \end{cases}$ на неперервність.

Розв'язання. Складові заданої функції є неперервними в області свого існування, тому досліджуємо функцію в точці $x = -2$.

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-0} x^2 + 2 = 6,$$

$$\lim_{x \rightarrow -2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2+0} 4 - x = 6,$$

Оскільки $f(-2)$ не існує, тому в точці $x_0 = -2$ функція має розрив першого роду, усунувий (односторонні границі однакові). Щоб функцію зробити неперервною, її потрібно довизначити в точці $x_0 = -2$, поклавши $f(-2) = 6$. ■



Приклад 3. Дослідити функцію $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ на неперервність.

Розв'язання. Функція $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ не визначена в точці $x = 0$, але має в цій точці скінченну границю, тому $x = 0$ – точка усунувного розриву I роду.



Досить покласти $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1$, щоб функція стала неперервною.

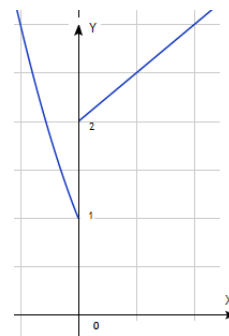
Тоді функція $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ є неперервною в точці $x = 0$. ■

Приклад 4. Дослідити функцію $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x + 1, & x < 0, \\ 2 + x, & x \geq 0 \end{cases}$ на неперервність.

Розв'язання. Функція в точці $x_0 = 0$ буде розривною, тому що односторонні границі різні:

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-0} (2x^2 - 3x + 1) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} (2 + x) = 2.$$



Таким чином, в точці $x_0 = 0$ функція має розрив першого роду, стрибкового типу (односторонні границі різні). Для знаходження висоти стрибка знайдемо модуль різниці односторонніх границь в точці $x_0 = -2$, тобто $h = |1 - 2| = 1$. ■

Приклад 5. Дослідити функцію $f(x) = 2^{\frac{3}{x+5}}$ на неперервність.

Розв'язання. Функція в точці $x = -5$ буде розривною, тому що функція НЕ визначена в цій точці. Знаходимо односторонні границі:

$$\lim_{x \rightarrow -5-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -5-0} 2^{\frac{3}{x+5}} = \left| \begin{array}{l} x \rightarrow -5-0, \\ x+5 \rightarrow -0, \\ \frac{3}{x+5} \rightarrow \frac{3}{-0} \rightarrow -\infty \\ 2^{-\infty} \rightarrow +0 \end{array} \right| = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -5+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -5+0} 2^{\frac{3}{x+5}} = \left| \begin{array}{l} x \rightarrow -5+0, \\ x+5 \rightarrow +0, \\ \frac{3}{x+5} \rightarrow \frac{3}{0} \rightarrow \infty \\ 2^{+\infty} \rightarrow +\infty \end{array} \right| = \infty.$$



Оскільки правостороння границя є нескінченною, то в точці $x = -5$ маємо розрив другого роду (нескінченний розрив). ■

Для неперервних функцій мають місце такі теореми.

Теорема 1 (про неперервність суми, різниці, добутку та частки неперервних в точці функцій). Якщо функція $f(x)$ і $g(x)$ неперервні в точці x_0 , то в цій точці неперервними є функції

$$f(x) \pm g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x_0) \neq 0.$$

Функція $f(x)$ неперервна на інтервалі $(a; b)$, якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу.

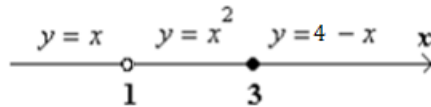
Функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, якщо вона неперервна на інтервалі $(a; b)$, в точці a має правосторонню неперервність, в точці b має лівосторонню неперервність.

Елементарною називають функцію, яку можна задати однією формулою, яка містить скінчене число арифметичних дій і суперпозицій основних елементарних функцій.

Теорема 2. Всі елементарні функції неперервні в області їх визначення.

Приклад 6. Дослідити на неперервність функцію $y = \begin{cases} x, & x < 1, \\ x^2, & 1 < x < 3. \\ 4 - x, & x \geq 3 \end{cases}$.

Розв'язання. Функції $y = x$, $y = x^2$, $y = 4 - x$ є неперервними скрізь, тому потрібно дослідити на розрив лише точки $x = 1$, $x = 3$.



Точка $x = 1$ буде точкою розриву, тому що функція визначена в будь-якому околі цієї точки, але не визначена в самій точці. Крім того,

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} y = \lim_{x \rightarrow 1-0} x = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} y = \lim_{x \rightarrow 1+0} x^2 = 1.$$

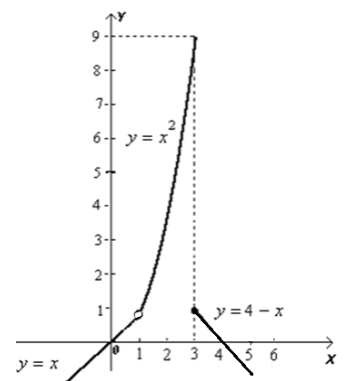
Таким чином, в точці $x = 1$ функція має розрив першого роду, усувний (односторонні границі однакові). Для усунення розриву функції потрібно довизначити функцію в точці $x = 1$, поклавши $f(1) = 1$.

Точка $x = 3$ буде точкою розриву, тому що функція визначена в будь-якому околі цієї точки та в самій точці, але

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} y = \lim_{x \rightarrow 3-0} x^2 = 9,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+0} y = \lim_{x \rightarrow 3+0} 4 - x = 1.$$

Таким чином, в точці $x = 3$ функція має розрив першого роду, стрибкового типу (односторонні границі різні). Висота стрибка функції $h = |9 - 1| = 8$. ■



Приклад 7. Дослідити на неперервність функцію $f(x) = \frac{1}{x+2}$.

Розв'язання. Функція визначена скрізь, крім точки $x_0 = -2$. Знаходимо односторонні границі.

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{1}{x+2} = \left[\frac{1}{-0} \right] = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{1}{x+2} = \left[\frac{1}{+0} \right] = +\infty.$$

Отже, в точці $x_0 = -2$ функція має нескінченний розрив (другого роду). ■

Розділ 3. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

1. Похідна функції. Основні правила та формули диференціювання

Означення 1. Похідною функції $y = f(x)$ в точці x називається скінченна границя відношення приросту функції $\Delta f(x)$ в цій точці до приросту аргументу Δx , якщо Δx прямує до нуля, тобто

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Похідну функції $y = f(x)$ позначають також $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$. Якщо границя $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ не існує або нескінченна, то похідна y' не існує.

Приклад 1. Для функції $y = x^2$ знайти похідну за означенням в точці $x = 3$.

Розв'язання. Надамо аргументу x приріст Δx , тоді приріст функції

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2 + x^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2.$$

Розглянемо відношення приросту функції до приросту аргументу $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$, знайдемо границю $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x$. Таким чином, $f'(x) = 2x$. Тоді похідна функції в точці $x = 3$ дорівнює $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$.

Розглянемо функції $u = u(x)$, $v = v(x)$.

Правила диференціювання

1. Похідна суми функцій u і v : $(u + v)' = u' + v'$.
2. Похідна добутку функцій u і v : $(uv)' = u'v + uv'$.
3. Сталий множник можна виносити за знак похідної: $(cv)' = cv'$.
4. Похідна частки функцій u і v : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, $v \neq 0$.

Зауважимо, що похідну від функції $y = \frac{u}{c}$ ($c = \text{const}$) зручно обчислювати як похідну від добутку сталої величини $\frac{1}{c}$ на функцію $u = u(x)$:

$$\left(\frac{u}{c}\right)' = \left(\frac{1}{c}u\right)' = \frac{1}{c}u'.$$

5. Похідна складеної функції. Якщо функція $t = \varphi(x)$ має похідну t'_x в точці x , а функція $y = f(t)$ має похідну y'_t в точці $t = \varphi(x)$, то складена функція $y = f(\varphi(x))$ має похідну в точці x , причому $y'_x = y'_t \cdot t'_x$.

Таблиця похідних

$$1. C' = 0, C = \text{const},$$

$$2. (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \alpha \in \mathbb{R},$$

$$2.1. x' = 1,$$

$$2.2. (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$2.3. \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2},$$

$$3. (a^x)' = a^x \cdot \ln a, a > 0, a \neq 1,$$

$$3.1. (e^x)' = e^x,$$

$$4. (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}, a > 0, a \neq 1,$$

$$4.1. (\ln x)' = \frac{1}{x},$$

$$5. (\sin x)' = \cos x,$$

$$6. (\cos x)' = -\sin x,$$

$$7. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$8. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$9. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$10. (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$11. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$12. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2},$$

$$13. (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x,$$

$$14. (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x,$$

$$15. (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},$$

$$16. (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Для диференціювання (знаходження похідної) функцій використовують правила і формули диференціювання (таблицю похідних).

Приклад 2. Знайти похідну функції $y = 4x^3 - \sqrt[3]{x^2} + 3$.

Розв'язання. Застосуємо правила та формули диференціювання. Враховуючи похідну суми функцій, винесення сталого множника за знак похідної та похідну степеневі функції, дістаємо

$$y' = (4x^3)' - \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' + 3' = 4 \cdot 3x^2 - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + 0 = 12x^2 - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}. \blacksquare$$

Приклад 3. Знайти похідну функції $y = 2x + \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{1}{3x\sqrt{x}}$.

Розв'язання. Запишемо функцію у вигляді $y = 2x + 4x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^{-\frac{3}{2}}$, скористаємось правилом диференціювання суми функцій і таблицею похідних, дістанемо

$$y' = 2 - \frac{4}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{5}{2}} = 2 - \frac{2}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{2x^2\sqrt{x}}. \blacksquare$$

Приклад 4. Знайти похідну функції $y = (x^2 + 1) \cdot \arctg x$.

Розв'язання. Маємо добуток двох функцій, тому за правилами диференціювання і таблицею похідних дістаємо

$$\begin{aligned} y' &= \left((x^2 + 1)\arctg x\right)' = (x^2 + 1)' \arctg x + (x^2 + 1)(\arctg x)' = \\ &= 2x \arctg x + (x^2 + 1) \cdot \frac{1}{x^2 + 1} = 2x \arctg x + 1. \blacksquare \end{aligned}$$

Приклад 5. Обчислити похідну функції $y = \frac{1 + 2x}{x - 1}$.

Розв'язання. Застосуємо правило диференціювання частки і похідну степеневій функції

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{1 + 2x}{x - 1}\right)' = \frac{(1 + 2x)'(x - 1) - (1 + 2x) \cdot (x - 1)'}{(x - 1)^2} = \\ &= \frac{2(x - 1) - (1 + 2x) \cdot 1}{(x - 1)^2} = \frac{2x - 2 - 1 - 2x}{(x - 1)^2} = -\frac{3}{(x - 1)^2}. \blacksquare \end{aligned}$$

Приклад 6. Знайти похідну функції $y = \frac{\arccos x}{x^3}$.

Розв'язання. Дана функція є часткою двох функцій, тому за правилами диференціювання і таблицею похідних маємо:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{\arccos x}{x^3}\right)' = \frac{(\arccos x)' x^3 - \arccos x \cdot (x^3)'}{(x^3)^2} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot x^3 - (\arccos x) \cdot 3x^2}{x^6} = \\ &= -\frac{x^3}{x^6 \sqrt{1-x^2}} - \frac{3x^2 \cdot \arccos x}{x^6} = -\frac{1}{x^3 \sqrt{1-x^2}} - \frac{3 \arccos x}{x^4}. \blacksquare \end{aligned}$$

Приклад 7. Знайти похідну функції $y = \sqrt[4]{(3 + 4x - 2x^2)^3}$.

Розв'язання. Задана функція є складеною степеневою функцією, а саме $y = t^{\frac{3}{4}}$, де $t = 3 + 4x - 2x^2$. Тому за правилом диференціювання складеної функції дістанемо

$$\begin{aligned} y' &= \left((3 + 4x - 2x^2)^{\frac{3}{4}} \right)' = \frac{3}{4} (3 + 4x - 2x^2)^{-\frac{1}{4}} \cdot (3 + 4x - 2x^2)' = \\ &= \frac{3}{4} (3 + 4x - 2x^2)^{-\frac{1}{4}} \cdot (4 - 4x) = \frac{3(1-x)}{\sqrt[4]{3+4x-2x^2}}. \blacksquare \end{aligned}$$

Приклад 8. Знайти похідну функції $y = \ln\left(\sin \frac{x}{3}\right)$.

Розв'язання. За правилом диференціювання складеної функції маємо

$$y' = \left(\ln\left(\sin \frac{x}{3}\right) \right)' = \frac{1}{\sin \frac{x}{3}} \cdot \left(\sin \frac{x}{3} \right)' = \frac{1}{\sin \frac{x}{3}} \cdot \left(\cos \frac{x}{3} \right) \cdot \left(\frac{x}{3} \right)' = \frac{1}{3} \operatorname{ctg} \frac{x}{3}. \blacksquare$$

Приклад 9. Знайти похідну функції $y = e^{\operatorname{tg} x} \cdot \sqrt{2x+1}$

Розв'язання. Задана функція є добутком двох складених функцій. За правилами та формулами диференціювання дістанемо

$$\begin{aligned} y' &= \left(e^{\operatorname{tg} x} \cdot \sqrt{2x+1} \right)' = \left(e^{\operatorname{tg} x} \right)' \cdot \sqrt{2x+1} + e^{\operatorname{tg} x} \left(\sqrt{2x+1} \right)' = \\ &= e^{\operatorname{tg} x} (\operatorname{tg} x)' \cdot \sqrt{2x+1} + e^{\operatorname{tg} x} \frac{(2x+1)'}{2\sqrt{2x+1}} = e^{\operatorname{tg} x} \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \sqrt{2x+1} + e^{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \\ &= e^{\operatorname{tg} x} \cdot \left(\frac{\sqrt{2x+1}}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \right) = e^{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{2x+1 + \cos^2 x}{\sqrt{2x+1} \cdot \cos^2 x}. \blacksquare \end{aligned}$$

Приклад 10. Знайти похідну функції $y = \log_2^5 x \cdot \cos x^5$.

Розв'язання. Скориставшись правилами диференціювання і таблицею похідних, дістанемо

$$\begin{aligned} y' &= \left(\log_2^5 x \right)' \cdot \cos x^5 + \log_2^5 x \cdot \left(\cos x^5 \right)' = \\ &= 5 \log_2^4 x (\log_2 x)' \cdot \cos x^5 - \log_2^5 x \cdot \sin x^5 \cdot (x^5)' = \\ &= 5 \log_2^4 x \cdot \frac{1}{x \ln 2} \cdot \cos x^5 - \log_2^5 x \cdot (\sin x^5) \cdot 5x^4 = \\ &= 5 \log_2^4 x \left(\frac{\cos x^5}{x \ln 2} - x^4 \log_2 x \cdot \sin x^5 \right). \blacksquare \end{aligned}$$

Приклад 11. Знайти похідну функції $y = 3^{\arccos x} \cdot \sin^3 \sqrt{1-x^2}$.

Розв'язання. Використовуючи правила та формули диференціювання, дістанемо

$$\begin{aligned} y' &= \left(3^{\arccos x}\right)' \cdot \sin^3 \sqrt{1-x^2} + 3^{\arccos x} \cdot \left(\sin^3 \sqrt{1-x^2}\right)' = \\ &= -\frac{3^{\arccos x} \ln 3}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sin^3 \sqrt{1-x^2} + 3^{\arccos x} \cdot 3 \sin^2 \sqrt{1-x^2} \cos \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \\ &= -3^{\arccos x} \ln 3 \frac{\sin^3 \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} - 3^{\arccos x} \cdot 3 \sin^2 \sqrt{1-x^2} \cos \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= -3^{\arccos x} \frac{\sin^3 \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \left(\ln 3 + 3x \operatorname{ctg} \sqrt{1-x^2}\right). \blacksquare \end{aligned}$$

Приклад 12. Знайти похідну функції $y = \left(\frac{x^2}{2-x}\right)^4$.

Розв'язання. За правилами диференціювання складеної функції та частки маємо

$$\begin{aligned} y' &= \left(\left(\frac{x^2}{2-x}\right)^4\right)' = 4 \left(\frac{x^2}{2-x}\right)^3 \left(\frac{x^2}{2-x}\right)' = 4 \left(\frac{x^2}{2-x}\right)^3 \frac{2x \cdot (2-x) - x^2 \cdot (-1)}{(2-x)^2} = \\ &= 4 \frac{x^6}{(2-x)^3} \cdot \frac{4x - 2x^2 + x^2}{(2-x)^2} = \frac{4x^6}{(2-x)^3} \cdot \frac{4x - x^2}{(2-x)^2} = \frac{4x^7(4-x)}{(2-x)^5}. \blacksquare \end{aligned}$$

Приклад 13. Знайти похідну функції $y = \frac{\operatorname{tg}(x^3 - 3x)}{x^2 + 2^{x+1}}$.

Розв'язання. Задана функція є часткою двох функцій, тому, скориставшись правилами диференціювання та тригонометричними формулами, дістанемо

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{\operatorname{tg}(x^3 - 3x)}{x^2 + 2^{x+1}}\right)' = \frac{\frac{3x^2 - 3}{\cos^2(x^3 - 3x)} \cdot (x^2 + 2^{x+1}) - \operatorname{tg}(x^3 - 3x) \cdot (2x + 2^{x+1} \ln 2)}{(x^2 + 2^{x+1})^2} = \\ &= \frac{3(x^2 - 1) \cdot (x^2 + 2^{x+1}) - \operatorname{tg}(x^3 - 3x) \cos^2(x^3 - 3x) \cdot 2(x + 2^x \ln 2)}{(x^2 + 2^{x+1})^2 \cos^2(x^3 - 3x)} = \\ &= \frac{3(x^2 - 1) \cdot (x^2 + 2^{x+1}) - 2 \sin(x^3 - 3x) \cos(x^3 - 3x) (x + 2^x \ln 2)}{(x^2 + 2^{x+1})^2 \cos^2(x^3 - 3x)} = \\ &= \frac{3(x^2 - 1) \cdot (x^2 + 2^{x+1}) - \sin(2x^3 - 6x) (x + 2^x \ln 2)}{(x^2 + 2^{x+1})^2 \cos^2(x^3 - 3x)}. \blacksquare \end{aligned}$$

Означення 2. Нехай функція $y = f(x)$ має в точці x похідну $f'(x)$. Якщо функція $f'(x)$ диференційовна в точці x , то її похідну називають **похідною другого порядку** функції $y = f(x)$, тобто $f''(x) = (f'(x))'$, яку позначають $f''(x)$, y'' , $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

Якщо функція $y = f(x)$ має в точці x похідну другого порядку (другу похідну), то вона є двічі диференційовною у цій точці. Аналогічно розглядають похідну третього порядку як похідну від другої похідної $f'''(x) = (f''(x))'$, ... **Похідною n -го порядку** функції $y = f(x)$ у точці x називається похідна (якщо вона існує) від її $(n-1)$ -ї похідної в цій точці, тобто $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$, яку позначають $f^{(n)}(x)$, $y^{(n)}$, $\frac{d^n y}{dx^n}$.

Приклад 14. Знайти похідну другого порядку функції $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$.

Розв'язання. Оскільки $y' = (\operatorname{arctg} \sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$, то

$$\begin{aligned} y'' &= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} \right)' = \left((2\sqrt{x}(1+x))^{-1} \right)' = -(2\sqrt{x}(1+x))^{-2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}}(1+x) + 2\sqrt{x} \right) = \\ &= -\frac{1}{(2\sqrt{x}(1+x))^2} \cdot \frac{1+x+2x}{\sqrt{x}} = -\frac{1+3x}{4x\sqrt{x}(1+x)^2}. \blacksquare \end{aligned}$$

2. Диференціювання функцій, заданих в неявному та параметричному вигляді. Логарифмічне диференціювання

Якщо функцію $y = y(x)$ задано в **неявному вигляді** рівнянням $F(x, y) = 0$, то для знаходження її похідної y' потрібно продиференціювати обидві частини цього рівняння за змінною x , після чого розв'язати рівняння відносно y' .

Приклад 1. Знайти похідну неявно заданої функції $y^2 - 4x - 2xy + 3 = 0$.

Розв'язання. Оскільки функцію $y = y(x)$ задано в неявному вигляді рівнянням $F(x, y) = 0$, то для знаходження її похідної потрібно продиференціювати обидві частини цього рівняння за змінною x , після чого отримане рівняння розв'язати відносно y' .

Знайдемо похідну від обох частин рівняння за змінною x , враховуючи, що $y = y(x)$. Дістанемо $2yy' - 4 - 2y - 2xy' = 0$, $y'(2y - 2x) = 4 + 2y$, звідки знаходимо похідну

$$y' = \frac{4 + 2y}{2y - 2x} = \frac{2 + y}{y - x}. \blacksquare$$

Приклад 2. Знайти похідну неявно заданої функції $x^2 + \sin y - e^{xy} = 0$.

Розв'язання. Продиференціюємо обидві частини рівняння, враховуючи, що y є функцією від x . Дістанемо

$$2x + \cos y \cdot y' - e^{xy}(y + xy') = 0,$$

звідки маємо

$$y' = \frac{ye^{xy} - 2x}{\cos y - xe^{xy}}. \blacksquare$$

Для знаходження похідної від степенево-показникової функції $y = u(x)^{v(x)}$ застосовують **логарифмічне диференціювання**. Спочатку логарифмують функцію, тобто знаходять $\ln y$, а потім диференціюють як неявно задану функцію. Враховуючи, що $(\ln y)' = \frac{y'}{y}$, визначають похідну функції y за формулою

$$y' = y \cdot (\ln y)'$$

Зазначимо, що логарифмічне диференціювання застосовують також для добутку складних степеневих виразів, оскільки в цьому випадку використання властивостей логарифма значно спрощує знаходження похідної.

Приклад 3. Знайти похідну функції $y = (\operatorname{tg} 3x)^{\sin 4x}$.

Розв'язання. Для заданої степенево-показникової функції застосуємо логарифмічне диференціювання. Прологарифмуємо функцію, тобто знайдемо

$\ln y$, і продиференціюємо одержану функцію. Враховуючи $(\ln y)' = \frac{y'}{y}$, знаходимо похідну $y' = y \cdot (\ln y)'$. Дістанемо

$$\ln y = \ln((\operatorname{tg} 3x)^{\sin 4x}) = \sin 4x \cdot \ln \operatorname{tg} 3x,$$

$$(\ln y)' = 4 \cos 4x \cdot \ln \operatorname{tg} 3x + \sin 4x \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 3x} \cdot \frac{3}{\cos^2 3x} = 4 \cos 4x \cdot \ln \operatorname{tg} 3x + \frac{3 \sin 4x}{\operatorname{tg} 3x \cdot \cos^2 3x},$$

$$y' = (\operatorname{tg} 3x)^{\sin 4x} \cdot \left(4 \cos 4x \cdot \ln \operatorname{tg} 3x + \frac{3 \sin 4x}{\operatorname{tg} 3x \cdot \cos^2 3x} \right). \blacksquare$$

Приклад 4. Знайти похідну функції $y = \frac{(x^2 - 1)\sqrt[4]{(x+2)^3} e^x}{(2x+1)^2}$.

Розв'язання. Оскільки задана функція містить добуток і частку складних степеневих виразів, то для неї доцільно застосувати логарифмічне диференціювання. Спочатку прологарифмуємо функцію, а потім продиференціюємо і знайдемо її похідну за формулою $y' = y \cdot (\ln y)'$. Скориставшись властивостями логарифма, дістанемо

$$\ln y = \ln \frac{(x^2 - 1)^4 \sqrt[4]{(x + 2)^3} e^x}{(2x + 1)^2} = \ln(x^2 - 1) + \frac{3}{4} \ln(x + 2) + x - 2 \ln(2x + 1).$$

Продиференціюємо одержану функцію:

$$(\ln y)' = \frac{2x}{x^2 - 1} + \frac{3}{4(x + 2)} + 1 - \frac{4}{2x + 1},$$

звідки знаходимо похідну

$$y' = y \cdot (\ln y)' = y \left(\frac{2x}{x^2 - 1} + \frac{3}{4(x + 2)} + 1 - \frac{4}{2x + 1} \right),$$

$$y' = \frac{(x^2 - 1)^4 \sqrt[4]{(x + 2)^3} e^x}{(2x + 1)^2} \left(\frac{2x}{x^2 - 1} + \frac{3}{4(x + 2)} - \frac{4}{2x + 1} + 1 \right).$$

Якщо дробові вирази звести до спільного знаменника і провести скорочення, то похідна даної функції запишеться у вигляді

$$y' = \frac{(8x^4 + 26x^3 + 11x^2 + 6x + 21)e^x}{4(2x + 1)^3 \sqrt[4]{x + 2}}. \blacksquare$$

Якщо функцію $y = y(x)$ задано в параметричному вигляді $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ то її

похідну знаходять за формулою $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

Приклад 5. Знайти похідну y'_x функції $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

Розв'язання. Маємо функцію, задану в параметричному вигляді, похідна y'_x якої визначається за формулою $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$. Дістаємо

$$y'_x = \frac{a(1 - \cos t)'}{a(t - \sin t)'} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}. \blacksquare$$

Для знаходження похідної другого порядку параметрично заданої функції застосовують формулу $y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$.

Приклад 6. Знайти похідну другого порядку y''_{xx} для функції $\begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = t^2 + 1. \end{cases}$

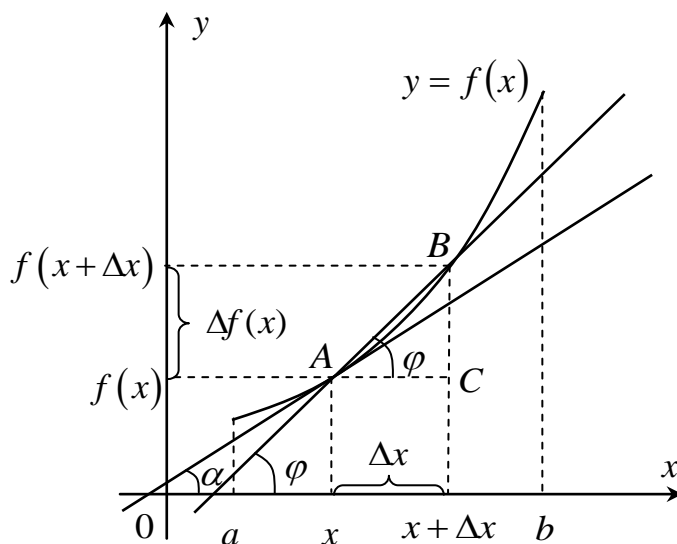
Розв'язання. Спочатку знайдемо першу похідну для заданої функції

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(t^2 + 1)'_t}{(\sin 2t)'_t} = \frac{2t}{2 \cos 2t} = \frac{t}{\cos 2t}.$$

Похідна другого порядку визначається за формулою $y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$, тоді

$$y''_{xx} = \frac{\left(\frac{t}{\cos 2t}\right)'_t}{(\sin 2t)'_t} = \frac{\cos 2t + 2t \sin 2t}{\cos^2 2t} = \frac{\cos 2t + 2t \sin 2t}{2 \cos^3 2t} = \frac{1 + 2t \cdot \operatorname{tg} 2t}{2 \cos^2 2t}. \blacksquare$$

3. Геометричний та фізичний зміст похідної. Рівняння дотичної та нормалі до кривої



Нехай на відрізку $[a; b]$ задана неперервна функція $y = f(x)$. Розглянемо на кривій $y = f(x)$ точки $A(x; f(x))$, $B(x + \Delta x; f(x + \Delta x))$ та проведемо січну AB . Переміщуємо точку B вздовж кривої до точки A .

Дотичною до кривої $y = f(x)$ в точці A називається граничне положення січної AB , якщо точка B наближається вздовж кривої до точки A .

Позначимо через φ кут нахилу до осі Ox січної AB , через α – кут нахилу до осі Ox дотичної, яка проведена до кривої $y = f(x)$ в точці A . Із $\triangle ABC$ маємо $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$. Якщо $\Delta x \rightarrow 0$, то $\varphi \rightarrow \alpha$. Тоді кутовий коефіцієнт

$$\text{дотичної } k = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Похідна $f'(x_0)$ функції $y = f(x)$ дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до її графіка у точці $(x_0; f(x_0))$ (**геометричний зміст похідної**). Тоді **рівняння дотичної** до кривої $y = f(x)$ в точці $(x_0; f(x_0))$ має вигляд

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Оскільки нормаль перпендикулярна до дотичної, то кутовий коефіцієнт нормалі до кривої $y = f(x)$ дорівнює $k_n = -\frac{1}{k_d} = -\frac{1}{f'(x_0)}$. Отже, **рівняння нормалі** до кривої $y = f(x)$ у точці $(x_0; f(x_0))$ має вигляд

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Якщо матеріальна точка рухається прямолінійно, то миттєва швидкість точки в момент часу t дорівнює похідній від пройденого шляху $S(t)$, тобто

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t) \text{ (механічний зміст похідної)}.$$

Зауважимо, що похідна функції $y = f(x)$ характеризує **швидкість зміни цієї функції** в точці x (**фізичний зміст похідної**).

Приклад 1. Знайти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції

$$f(x) = \frac{x^2 - 2}{3x - 4} \text{ у точці з абсцисою } x_0 = 2.$$

Розв'язання. Рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці $(x_0; y_0)$ має вигляд

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \text{ а рівняння нормалі } y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \text{ де } y_0 = f(x_0).$$

Знайдемо значення функції в заданій точці $y_0 = f(2) = \frac{2^2 - 2}{3 \cdot 2 - 4} = 1$. Оскільки похідна функції

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 - 2}{3x - 4} \right)' = \frac{2x(3x - 4) - 3(x^2 - 2)}{(3x - 4)^2} = \frac{3x^2 - 8x + 6}{(3x - 4)^2},$$

то $f'(x_0) = f'(2) = \frac{3 \cdot 4 - 8 \cdot 2 + 6}{(3 \cdot 2 - 4)^2} = \frac{1}{2}$. Підставивши значення y_0 і $f'(x_0)$ у рівняння дотичної та нормалі, дістанемо

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \text{рівняння дотичної};$$

$$y - 1 = -2(x - 2) \Rightarrow y = -2x + 5 - \text{рівняння нормалі. } \blacksquare$$

Приклад 2. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^2 - 6x + 8$, яка паралельна до прямої $4x + y = 2$.

Розв'язання. Нехай $k = f'(x_0)$ – кутовий коефіцієнт дотичної, а $(x_0; y_0)$ – точка дотику. Знайдемо похідну функції $f'(x) = (x^2 - 6x + 8)' = 2x - 6$, тоді $f'(x_0) = 2x_0 - 6$ дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної.

Для заданої прямої маємо $4x + y = 2 \Rightarrow y = -4x + 2$, тобто її кутовий коефіцієнт дорівнює $k = -4$. Оскільки паралельні прямі мають однакові кутові коефіцієнти, то $f'(x_0) = 2x_0 - 6 = -4$, звідки маємо $x_0 = 1$.

Знайдемо $y_0 = f(x_0) = 1 - 6 + 8 = 3$ і підставимо значення $f(x_0)$ і $f'(x_0)$ у рівняння дотичної:

$$y - 3 = -4(x - 1) \Rightarrow y = -4x + 7.$$

Приклад 3. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 і знайти кут між цією дотичною та прямою l , якщо $y = 3x + 6\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x^3} - 4$, $x_0 = 1$, $l: 5x + 3y - 14 = 0$.

Розв'язання. Знайдемо значення функції та її похідної в заданій точці $x_0 = 1$.

Маємо

$$y_0 = f(1) = 3 \cdot 1 + 6\sqrt[3]{1^2} - 2\sqrt{1^3} - 4 = 3,$$

$$f'(x) = (3x + 6x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{3}{2}} - 4)' = 3 + 4x^{-\frac{1}{3}} - 3x^{\frac{1}{2}} = 3 + \frac{4}{\sqrt[3]{x}} - 3\sqrt{x},$$

тоді $f'(x_0) = f'(1) = 3 + \frac{4}{\sqrt[3]{1}} - 3\sqrt{1} = 4$. Запишемо рівняння дотичної

$$y - 3 = 4(x - 1) \Rightarrow y = 4x - 1.$$

Оскільки рівняння дотичної записано у вигляді $y = kx + b$, то її кутовий коефіцієнт $k_1 = 4$. Знайдемо кутовий коефіцієнт прямої l :

$$5x + 3y - 14 = 0 \Rightarrow y = -\frac{5}{3}x + \frac{14}{3} \Rightarrow k_2 = -\frac{5}{3}.$$

Кут між прямими знайдемо за формулою $\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$. Дістаємо

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-\frac{5}{3} - 4}{1 - 4 \cdot \frac{5}{3}} = \frac{-\frac{17}{3}}{-\frac{17}{3}} = 1 \Rightarrow \varphi = 45^\circ.$$

Отже, кут між дотичною до кривої та заданою прямою l дорівнює 45° . ■

Розділ 4. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ

1. Правило Лопітала

Правило Лопітала застосовується для розкриття невизначеностей типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ і $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Нехай функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ неперервні та диференційовні при всіх $x \neq x_0$ в околі точки x_0 , $\varphi'(x) \neq 0$ в околі точки x_0 , за винятком, можливо, самої точки x_0 та $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$, тоді $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, якщо остання границя існує. Аналогічний результат доведено для випадку, коли $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty$.

Інші типи невизначеностей можна звести до $\left[\frac{0}{0}\right]$ і $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \varphi(x) = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\text{або } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \varphi(x) = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{\varphi(x)} = [0^0] = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \cdot \ln f(x)}, \text{ тобто звели до попереднього випадку.}$$

Аналогічно розкриваються невизначеності типу $[\infty^0]$ та $[1^\infty]$.

Приклад 1. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2}{3^x + 1}$.

Розв'язання. Застосуємо правило Лопітала для розкриття невизначеності $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2}{3^x + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - 2)'}{(3^x + 1)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{3^x \ln 3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x)'}{(3^x \ln 3)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3^x \ln^2 3} = 0.$$

Приклад 2. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2)^{\sin(x-2)}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (x - 2)^{\sin(x-2)} &= [0^0] = \lim_{x \rightarrow 2} e^{\ln(x-2)^{\sin(x-2)}} = \lim_{x \rightarrow 2} e^{(\sin(x-2)) \ln(x-2)} = \\ &= [e^{0 \cdot (-\infty)}] = \lim_{x \rightarrow 2} e^{\frac{\ln(x-2)}{(\sin)^{-1}(x-2)}} = \left[e^{\frac{-\infty}{\infty}}\right] = \lim_{x \rightarrow 2} e^{\frac{\frac{1}{x-2}}{-((\sin)^{-2}(x-2)) \cos(x-2)}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} e^{\frac{-(\sin(x-2))^2}{(x-2) \cos(x-2)}} = \lim_{x \rightarrow 2} e^{\frac{-(x-2)^2}{(x-2) \cos(x-2)}} = \lim_{x \rightarrow 2} e^{\frac{-(x-2)}{\cos(x-2)}} = [e^0] = 1 \end{aligned}$$

(використали еквівалентність $\sin(x-2) \sim x-2$ при $x \rightarrow 2$). ■

Приклад 3. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{e}{e^x - e} - \frac{1}{\ln x}\right)$.

Розв'язання.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{e}{e^x - e} - \frac{1}{\ln x}\right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{e}{e(e^{x-1} - 1)} - \frac{1}{\ln x}\right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln x - x + 1)'}{((x-1)\ln x)'} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{x \ln x + x - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)'}{(x \ln x + x - 1)'} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{-1}{\ln x + 1 + 1} \right) = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(використали еквівалентність $e^{x-1} - 1 \sim x - 1$ при $x \rightarrow 1$). ■

2. Монотонність функції. Екстремуми

Означення 1. Функція $f(x)$ називається **зростаючою на інтервалі (a,b)** , якщо для будь-яких точок x_1 та x_2 з цього інтервалу, таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$.

Означення 2. Функція $f(x)$ називається **спадною на інтервалі (a,b)** , якщо для будь-яких точок x_1 та x_2 з цього інтервалу, таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$.

Аналогічно, якщо з нерівності $x_1 < x_2$ випливає, що $f(x_1) \leq f(x_2)$, то функція називається **неспадною**, а якщо з нерівності $x_1 < x_2$ випливає, що $f(x_1) \geq f(x_2)$, то функція називається **незростаючою**.

Зростаючі, незростаючі, спадні й неспадні функції на інтервалі (a,b) називають **монотонними** на цьому інтервалі, а зростаючі і спадні функції називають **строго монотонними**.

Наприклад, функції $y = \ln x$ та $y = e^x$ є строго монотонними на всій області визначення. Нехай функція не є монотонною на всій області визначення, але цю область можна розбити на деяке число проміжків (яке може бути скінченним або нескінченним), так, щоб ці проміжки не перетиналися і на кожному з них функція була монотонна. Такі проміжки називаються **проміжками монотонності функції**.

Наприклад, функція $y = x^2$ має два проміжки монотонності: на проміжку $(-\infty; 0)$ вона спадає, а на проміжку $(0; +\infty)$ зростає. Функції $y = \sin x$, $y = \cos x$ мають нескінченну кількість проміжків монотонності.

Теорема 1 (необхідна умова монотонності). Якщо диференційовна на інтервалі (a,b) функція зростає, то $f'(x) \geq 0$ на (a,b) . Якщо диференційовна на інтервалі (a,b) функція спадає, то $f'(x) \leq 0$ на (a,b) .

Теорема 2 (достатні умови строгої монотонності). Якщо функція $f(x)$ диференційовна на інтервалі (a,b) і $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) всюди на інтервалі

(a,b) , крім, можливо, скінченного числа точок, в яких $f'(x) = 0$, то функція $f(x)$ зростає (спадає) на (a,b) .

З теореми 1 випливає, що інтервали монотонності можуть відділятися один від одного або точками, в яких похідна дорівнює нулю (їх називають **стаціонарними точками**), або точками, де похідна не існує. Точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує, називаються **критичними точками першого роду**.

Для того, щоб знайти інтервали монотонності функції $f(x)$, потрібно:

- 1) знайти область визначення функції;
- 2) знайти похідну $f'(x)$;
- 3) знайти критичні точки першого роду (точки, в яких $f'(x) = 0$ або $f'(x)$ не існує);
- 4) розділити критичними точками область визначення на інтервали і в кожному з них визначити знак похідної. Для цього всередині інтервалу треба вибрати конкретну точку (будь-яку), і визначити в цій точці знак похідної $f'(x)$. Такий самий знак похідна матиме і на всьому інтервалі. На тих інтервалах, де $f'(x) > 0$, функція зростає, а на тих інтервалах, де $f'(x) < 0$, функція спадає.

Означення 3. Точка x_0 називається точкою **локального максимуму** (або **локального мінімуму**) функції $f(x)$, якщо існує такий окіл $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 , який належить області визначення функції і для всіх $x \neq x_0$ з цього околу виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$ (відповідно $f(x) > f(x_0)$) – рис. 1.

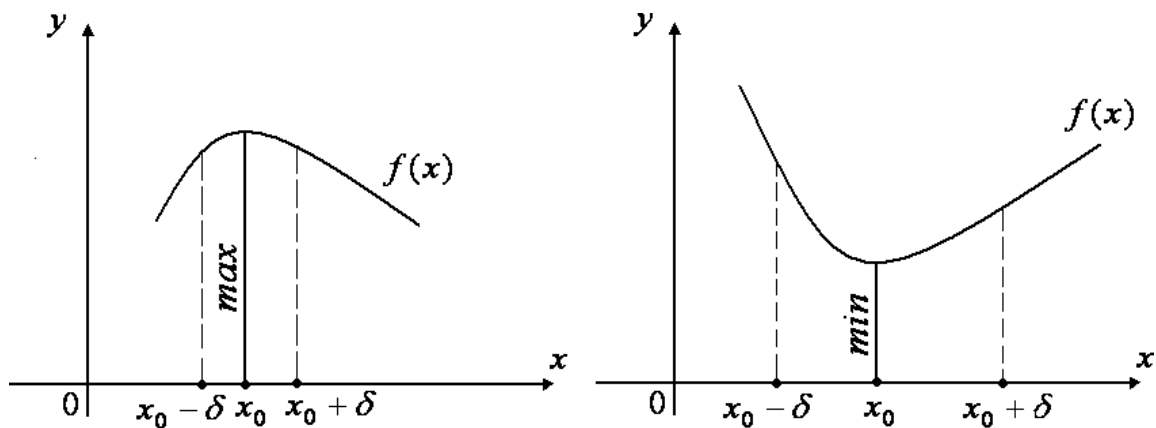


Рис. 1

Точки локального максимуму і локального мінімуму називають точками **локального екстремуму**, а значення функції в цих точках називаються відповідно **локальним максимумом і локальним мінімумом**.

Теорема 3 (необхідна умова екстремуму). Якщо функція $f(x)$ має локальний екстремум в точці x_0 і диференційовна в цій точці, то $f'(x_0) = 0$.

Геометрично це означає, що у точці локального екстремуму диференційовної функції дотична до графіка функції паралельна осі Ox .

Теорема 4 (перша достатня умова локального екстремуму). Нехай функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 , x_0 – критична точка першого роду функції $f(x)$, і в деякому околі $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (крім, можливо, самої точки x_0) функція $f(x)$ має похідну $f'(x)$. Тоді:

– якщо при переході зліва направо через критичну точку x_0 знак похідної $f'(x)$ змінюється з „+” на „-”, то x_0 є точкою локального максимуму функції $f(x)$;

– якщо при переході зліва направо через критичну точку x_0 знак похідної $f'(x)$ змінюється з „-” на „+”, то x_0 є точкою локального мінімуму функції $f(x)$;

– якщо при переході через критичну точку x_0 похідна $f'(x)$ не змінює знак, то в точці x_0 немає екстремуму.

Теорема 5 (друга достатня умова локального екстремуму). Нехай x_0 – стаціонарна точка функції $f(x)$, тобто $f'(x_0) = 0$, і в околі точки x_0 існує друга неперервна похідна $f''(x)$, причому $f''(x_0) \neq 0$. Тоді якщо $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка локального мінімуму, якщо $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка локального максимуму.

На практиці при дослідженні функції на монотонність результати дослідження доцільно записувати у вигляді таблиці, при цьому символами

та умовно позначається відповідно зростання і спадання функції на інтервалі.

Приклад. Знайти інтервали монотонності та локальні екстремуми функції $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

Розв’язання. Область визначення $(-\infty; +\infty)$. Знаходимо похідну

$$y' = (2x^3 - 3x^2 + 1)' = 6x^2 - 6x.$$

Визначаємо критичні точки першого роду (точки, в яких похідна не існує, або $y' = 0$). Точок, в яких похідна не існує, немає. Розв’язуємо рівняння $y' = 0$:

$$6x^2 - 6x = 0, \quad 6x(x - 1) = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1.$$




Отримуємо дві критичні точки $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Ці точки розбивають область визначення на інтервали $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$ та $(1; +\infty)$. Для визначення знаку похідної вибираємо довільну точку в кожному інтервалі.

При $x = -1$ $y'(-1) = 6 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) = 12 > 0$, отже, $y'(x) > 0$ на інтервалі $(-\infty; 0)$.

При $x = \frac{1}{2}$ $y'(\frac{1}{2}) = 6 \cdot (\frac{1}{2})^2 - 6 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - 3 < 0$, отже, $y'(x) < 0$ на інтервалі $(0; 1)$.

При $x = 2$ $y'(2) = 6 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 = 24 - 12 = 12 > 0$, отже, $y'(x) > 0$ на інтервалі $(1; +\infty)$.

Складемо таблицю зміни знаків похідної y' .

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y'	+	0	-	0	+
y		1		0	
		max		min	

Отже, функція зростає на інтервалах $(-\infty; 0)$, $(1; +\infty)$ і спадає на $(0; 1)$,

$x_1 = 0$ – точка локального максимуму

$$y_{max} = y(0) = 2 \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 1 = 1,$$

$x_2 = 1$ – точка локального мінімуму

$$y_{min} = y(1) = 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 1 = 0. \blacksquare$$

3. Найбільше і найменше значення функції на відрізку

Якщо функція $f(x)$ неперервна на замкненому відрізку $[a, b]$, то вона досягає найбільшого і найменшого значення на цьому відрізку. Найбільше і найменше значення функції на відрізку називають **абсолютними екстремумами** і позначають відповідно

$$M = \max_{a \leq x \leq b} f(x), \quad m = \min_{a \leq x \leq b} f(x).$$

Для того, щоб знайти найбільше і найменше значення функції $f(x)$, яка неперервна на відрізку $[a, b]$, треба:

- 1) знайти критичні точки першого роду функції $f(x)$, які належать інтервалу (a, b) ;
- 2) обчислити значення функції $f(x)$ у знайдених критичних точках і на кінцях проміжку в точках $x = a$ та $x = b$;
- 3) серед знайдених значень функції вибрати найбільше і найменше.

Приклад. Знайти найбільше і найменше значення функції

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 3 \text{ на відрізку } [-2; 0,5].$$

Розв'язання. 1) Знаходимо критичні точки першого роду функції $f(x)$ (точки, в яких похідна $f'(x)$ не існує або $f'(x) = 0$).

$$f'(x) = (x^4 - 2x^2 + 3)' = 4x^3 - 4x.$$

Точок, в яких похідна не існує, немає. Розв'язуємо рівняння $f'(x) = 0$:

$$4x^3 - 4x = 0, \quad 4x(x^2 - 1) = 0, \quad 4x(x - 1)(x + 1) = 0,$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -1.$$

Критичні точки $x_1 = 0$ та $x_3 = -1$ належать відріzkу $[-2; 0,5]$, а точку $x_2 = 1$ треба відкинути, тому що вона знаходиться за межами проміжку.

2) Обчислюємо значення функції у точках $x_1 = 0$ та $x_2 = -1$ і на кінцях проміжку

$$f(0) = 0^4 - 2 \cdot 0^2 + 3 = 3;$$

$$f(-1) = (-1)^4 - 2 \cdot (-1)^2 + 3 = 1 - 2 + 3 = 2;$$

$$f(-2) = (-2)^4 - 2 \cdot (-2)^2 + 3 = 16 - 8 + 3 = 11;$$

$$f(0,5) = (0,5)^4 - 2 \cdot (0,5)^2 + 3 = 0,0625 - 0,5 + 3 = 2,5625.$$

3) Вибираємо найбільше і найменше значення

$$M = \max_{-2 \leq x \leq 0,5} f(x) = f(-2) = 11,$$

$$m = \min_{-2 \leq x \leq 0,5} f(x) = f(-1) = 2. \blacksquare$$

4. Опуклість і вгнутість кривих. Точки перегину

Означення 1. Крива $y = f(x)$ називається **опуклою** на інтервалі, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать нижче довільної її дотичної на цьому інтервалі.

Означення 2. Крива $y = f(x)$ називається **вгнутою** на інтервалі, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать вище довільної її дотичної на цьому інтервалі.

Означення 3. **Точкою перегину** називається точка кривої, яка відокремлює її опуклу частину від вгнутої.

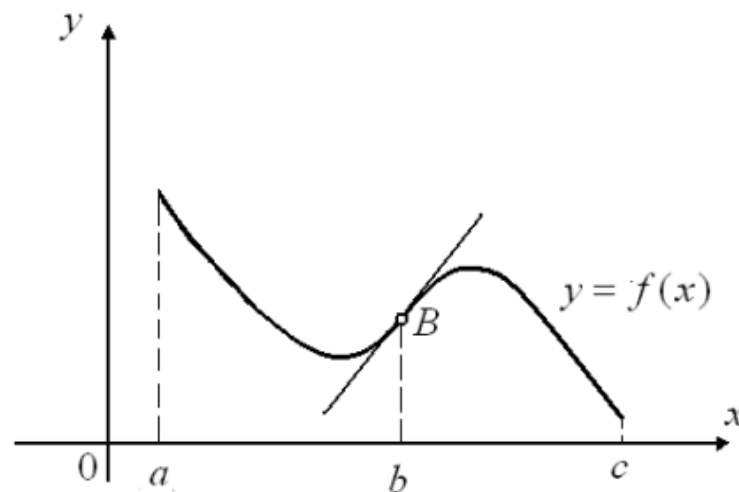


Рис. 2

На рисунку 2 крива $y = f(x)$ вгнута на інтервалі (a, b) , опукла на інтервалі (b, c) і точка $B(b, f(b))$ – точка перегину.

Інтервали опуклості і вгнутості знаходять за допомогою наступної теореми.

Теорема 1. Нехай функція $y = f(x)$ є двічі диференційовною на (a, b) , тоді 1) якщо $f''(x) < 0, x \in (a, b)$, то крива $y = f(x)$ опукла на (a, b) ;

2) якщо $f''(x) > 0, x \in (a, b)$, то крива $y = f(x)$ вгнута на (a, b) .

З теореми 1 випливає: якщо в точці перегину $x = x_0$ існує друга похідна, то $f''(x_0) = 0$. Точками перегину кривої $y = f(x)$ можуть бути також і точки, в яких друга похідна $f''(x)$ не існує. Точки, в яких друга похідна $f''(x)$ не існує або дорівнює нулю, називаються **критичними точками другого роду** функції $f(x)$.

Теорема 2. Нехай x_0 – критична точка другого роду функції $f(x)$. Якщо при переході через точку x_0 похідна $f''(x)$ змінює знак, то точка $(x_0, f(x_0))$ є точкою перегину кривої $f(x)$.

На практиці при знаходженні інтервалів опуклості, вгнутості та точок перегину кривих результати дослідження доцільно записувати у вигляді таблиці, при цьому символами \cup та \cap умовно позначається відповідно інтервал вгнутості та інтервал опуклості.

Для того, щоб знайти інтервали опуклості та вгнутості функції $f(x)$, потрібно:

- 1) знайти область визначення функції;
- 2) знайти другу похідну $f''(x)$;
- 3) знайти критичні точки другого роду (точки, в яких $f''(x) = 0$ або $f''(x)$ не існує);
- 4) розділити критичними точками область визначення на інтервали і у кожному з них визначити знак $f''(x)$. Для цього всередині інтервалу треба вибрати довільну конкретну точку і визначити в цій точці знак другої похідної $f''(x)$. Такий самий знак похідна матиме і на всьому інтервалі;
- 5) заповнити таблицю. На тих інтервалах, де $f''(x) > 0$, функція вгнута (\cup), а на тих інтервалах, де $f''(x) < 0$, функція опукла (\cap).

Приклад. Знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину кривої $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2$.

Розв'язання. Область визначення $(-\infty; +\infty)$.

Знаходимо другу похідну

$$f'(x) = (x^4 - 8x^3 + 24x^2)' = 4x^3 - 24x^2 + 48x,$$

$$f''(x) = (4x^3 - 24x^2 + 48x)' = 12x^2 - 48x + 48.$$

Визначаємо критичні точки другого роду (точки, в яких друга похідна не існує або $f''(x) = 0$). Точок, в яких похідна $f''(x)$ не існує, немає. Розв'яжемо рівняння $f''(x) = 0$:

$$12x^2 - 48x + 48 = 0, \quad 12(x^2 - 4x + 4) = 0, \quad x^2 - 4x + 4 = 0,$$

$$(x - 2)^2 = 0, \quad x_1 = 2.$$

Отримуємо єдину критичну точку $x_1 = 2$. Ця точка розбиває область визначення на інтервали $(-\infty; 2)$ та $(2; +\infty)$. Складемо таблицю зміни знаків другої похідної.

При $x = 0$: $f''(0) = 12 \cdot 0^2 - 48 \cdot 0 + 48 = 48 > 0$.

Отже, $f''(x) > 0$, тому крива вгнута на інтервалі $(-\infty; 2)$.

При $x = 3$: $f''(3) = 12 \cdot 3^2 - 48 \cdot 3 + 48 = 108 - 144 + 48 = 12 > 0$.

Отже, $f''(x) > 0$, тому крива вгнута на інтервалі $(2; +\infty)$.

$$f(2) = 2^4 - 8 \cdot 2^3 + 24 \cdot 2^2 = 16 - 64 + 96 = 48.$$

x	$(-\infty; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f''(x)$	+	0	+
$f(x)$	∪	48	∪

Точок перегину немає, тому що при переході через єдину критичну точку похідна не змінює знак.

5. Асимптоти кривої

Означення 1. Пряма l називається **асимптотою кривої**, якщо відстань від змінної точки M кривої до прямої l прямує до нуля, коли точка M , рухаючись по кривій, віддаляється на нескінченність.

Означення 2. Пряма $x = x_0$ називається **вертикальною асимптотою**, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \infty$ або $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \infty$.

Означення 3. Пряма $y = kx + b$ називається **похилою асимптотою** для кривої $y = f(x)$, якщо при $x \rightarrow +\infty$ існують скінченні границі

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad (1)$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx). \quad (2)$$

Аналогічно при $x \rightarrow -\infty$

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \quad (3)$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx). \quad (4)$$

Якщо хоча б одна з границь (1), (2) (або (3), (4)) не існує або дорівнює нескінченності, то крива $y = f(x)$ не має похилої асимптоти.

Асимптоти кривої $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ і $x \rightarrow -\infty$ можуть бути різними, тому границі при $x \rightarrow +\infty$ і при $x \rightarrow -\infty$ треба обчислювати окремо.

Зауважимо, що функція може мати не більше двох похилих асимптот, а вертикальних асимптот може бути безліч.

Якщо $k = 0$, то частинним випадком похилої асимптоти є **горизонтальна асимптота**.

На рис. 3–5 показані вертикальна, горизонтальна і похила асимптоти.

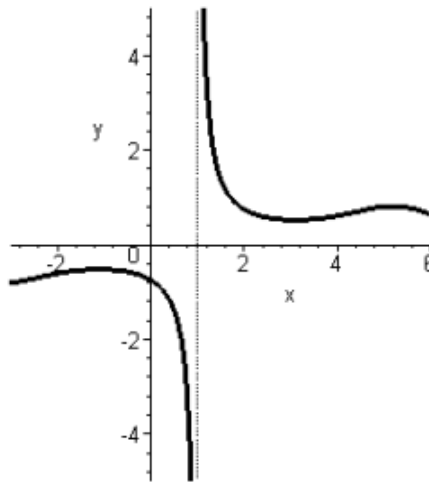


Рис. 3

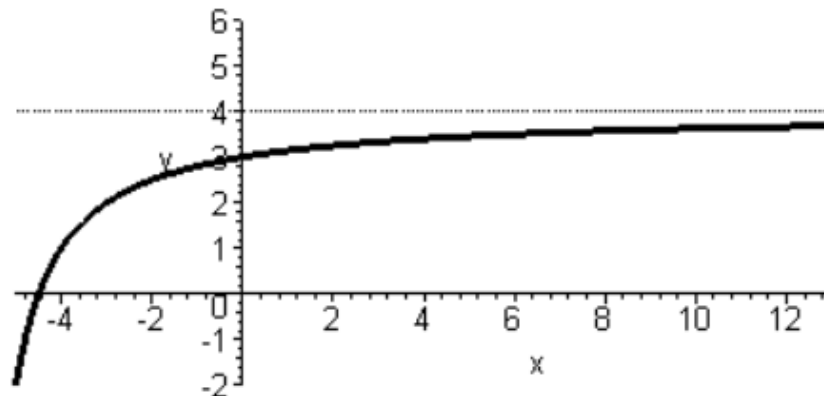


Рис. 4

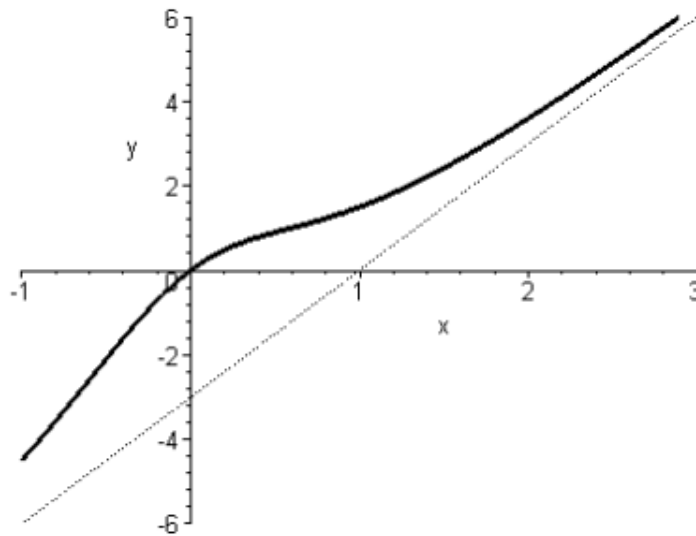


Рис. 5

Приклад 1. Знайти асимптоти кривої $y = \frac{1}{(x-1)^2}$.

Розв'язання. Задана функція має єдину точку розриву $x = 1$. Знаходимо односторонні границі

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{(x-1)^2} = \left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow 1-0 \\ x-1 \rightarrow -0 \\ (x-1)^2 \rightarrow +0 \end{array} \right\} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{(x-1)^2} = \left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow 1+0 \\ x-1 \rightarrow +0 \\ (x-1)^2 \rightarrow +0 \end{array} \right\} = +\infty.$$

Односторонні границі нескінченні, отже, пряма $x = 1$ є вертикальною асимптотою.

Знаходимо похилі асимптоти

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{(x-1)^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x(x-1)^2} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{1}{(x-1)^2} - 0 \cdot x \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{(x-1)^2} = 0,$$

$$y = 0 \cdot x + 0.$$

Отже, $y = 0$ – рівняння горизонтальної асимптоти.

6. Повне дослідження функції та побудова її графіка

Для дослідження функції та побудови її графіка використовується **схема дослідження функції**:

1. Знайти область визначення заданої функції.
2. Дослідити функцію на парність, непарність, періодичність.
3. Знайти точки перетину графіка функції з осями координат.
4. Знайти точки розриву функції (дослідження на неперервність).
5. Знайти асимптоти кривої, якщо вони існують.
6. Знайти інтервали монотонності функції та локальні екстремуми.
7. Знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину (т.п).
8. За результатами дослідження побудувати графік функції.

Для уточнення вигляду графіка можна додатково обчислити значення функції при декількох конкретних значеннях аргументу. Якщо дана функція є періодичною з періодом T , то досить побудувати її графік на періоді $[0, T]$, після чого повторити цей графік на проміжках $(nT, (n+1)T)$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$

Якщо задана функція є парною, то достатньо провести дослідження і побудувати графік для $x \geq 0$, а потім відобразити отриманий графік симетрично відносно осі Oy . Якщо задана функція є непарною, то треба дослідити її для $x \geq 0$, а потім відобразити отриманий графік симетрично відносно початку координат.

Якщо неможливо точно знайти локальні екстремуми або точки перегину, то обчислюють $f'(x)$ або $f''(x)$ у декількох конкретних точках, щоб з'ясувати у них поведінку функції.

Приклад 1. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік

$$y = \frac{x^3}{3-x^2}.$$

Розв'язання.

1. Область визначення: $3 - x^2 \neq 0$, $x^2 \neq 3$, $x \neq \pm\sqrt{3}$.
 $x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$.

2. Перетин з осями координат:

$$\text{з віссю } Ox: y = 0 \Rightarrow x^3 = 0, x = 0, (0,0),$$

$$\text{з віссю } Oy: x = 0 \Rightarrow y = 0, (0,0),$$

графік проходить через початок координат.

3. Парність, непарність:

$$y(x) = \frac{x^3}{3-x^2}, \quad y(-x) = -\frac{x^3}{3-x^2}, \quad y(-x) = -y(x),$$

функція непарна, графік симетричний відносно початку координат.

4. Точки розриву: $x = \pm\sqrt{3}$.

Враховуючи непарність функції, досліджуємо характер точки розриву $x = \sqrt{3}$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \sqrt{3}-\alpha \\ \alpha \rightarrow 0}} \frac{x^3}{3-x^2} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{3}-\alpha)^3}{3-(\sqrt{3}-\alpha)^2} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{3}-\alpha)^3}{3-3+2\sqrt{3}\alpha-\alpha^2} = +\infty,$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \sqrt{3}+\alpha \\ \alpha \rightarrow 0}} \frac{x^3}{3-x^2} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{3}+\alpha)^3}{3-(\sqrt{3}+\alpha)^2} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{3}+\alpha)^3}{3-3-2\sqrt{3}\alpha-\alpha^2} = -\infty.$$

Отже, $x = \pm\sqrt{3}$ – точки розриву 2 роду.

5. Асимптоти:

вертикальні $x = \pm\sqrt{3}$;

похила $y = kx + b$,

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{(3-x^2)x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{-x^3+3x} = -1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3}{3-x^2} + x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3+3x-x^3}{3-x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x}{3-x^2} = 0,$$

$y = -x$ – похила асимптота.

6. Інтервали монотонності та екстремуми функції:

$$y' = \frac{3x^2(3-x^2)-x^3(-2x)}{(3-x^2)^2} = \frac{x^2(9-3x^2+2x^2)}{(3-x^2)^2} = \frac{x^2(9-x^2)}{(3-x^2)^2},$$

$$y' = 0, \quad x = 0, \quad x = \pm 3.$$

x	$(-\infty; -3)$	-3	$(-3; -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}; 0)$	0	$(0; \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$
y'	$-$	0	$+$	не існує	$+$	0	$+$	не існує
y	\searrow	$\frac{9}{2}$	\nearrow	не існує	\nearrow	0	\nearrow	не існує
x	$(\sqrt{3}; 3)$	3	$(+3; +\infty)$	$y_{\max} = -\frac{9}{2}$ $y_{\min} = \frac{9}{2}$				
y'	$+$	0	$-$					
y	\nearrow	$-\frac{9}{2}$	\searrow					

7. Інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину:

$$y' = \frac{9x^2-x^4}{(3-x^2)^2},$$

$$y'' = \frac{(18x - 4x^3)(3 - x^2)^2 - (9x^2 - x^4)2(3 - x^2)(-2x)}{(3 - x^2)^4} =$$

$$= \frac{(18x - 4x^3)(3 - x^2) + 4x(9x^2 - x^4)}{(3 - x^2)^3} =$$

$$= \frac{54x - 12x^3 - 18x^3 + 4x^5 + 36x^3 - 4x^5}{(3 - x^2)^3} = \frac{6x^3 + 54x}{(3 - x^2)^3} = \frac{6x(x^2 + 9)}{(3 - x^2)^3}$$

$$y'' = 0, \quad 6x(x^2 + 9) = 0, \quad x = 0.$$

x	$(-\infty; -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}; 0)$	0	$(0; \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}; +\infty)$
y''	$+$	не існує	$-$	0	$+$	не існує	$-$
y	\cup	не існує	\cap	0	\cup	не існує	\cap

Отже, $(0; 0)$ – точка перегину.

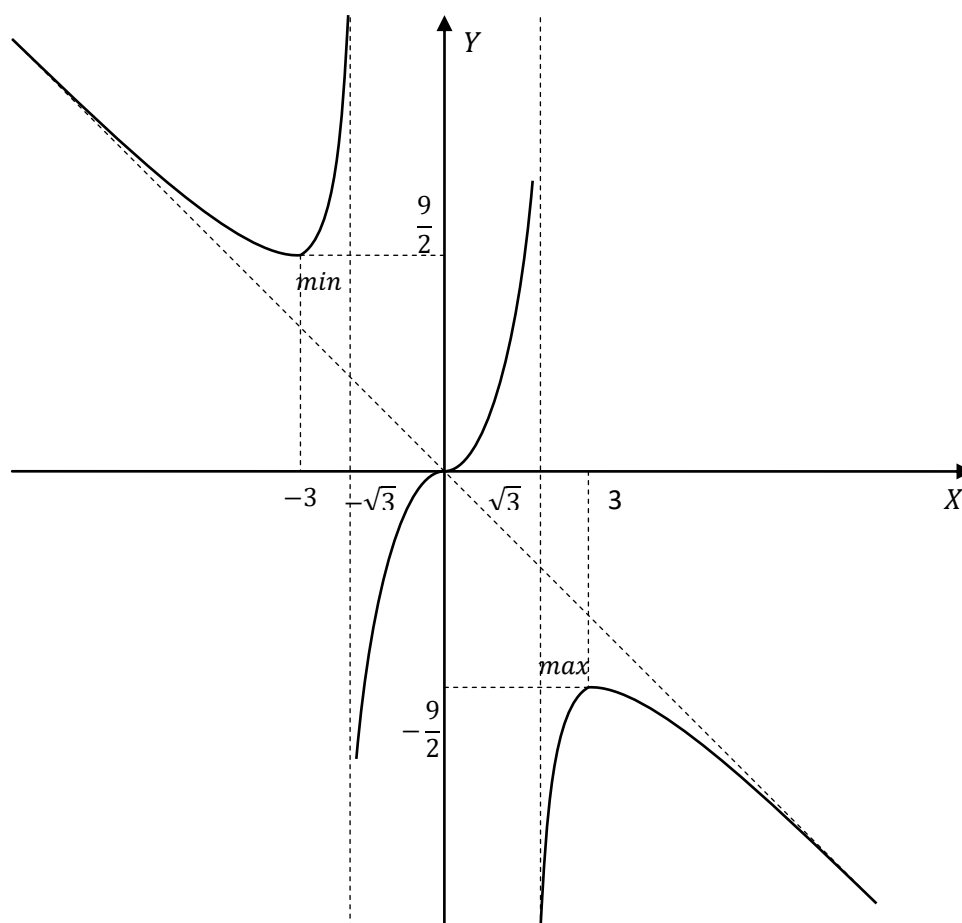


Рис. 1

Приклад 2. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік

$$y = \frac{1}{x} + 4x^2.$$

Розв'язання.

1. Область визначення: $x \neq 0$,

$$x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$

2. Перетин з осями координат:

$x \neq 0$, графік не перетинає вісь Oy ;

$$y = 0, \quad \frac{1}{x} + 4x^2 = 0, \quad 4x^3 + 1 = 0, \quad x = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2},$$

графік перетинає вісь Ox у точці $x = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2} \approx -0,63$.

3. Парність, непарність:

$$y(x) = \frac{1}{x} + 4x^2, \quad y(-x) = -\frac{1}{x} + 4x^2, \quad y(-x) \neq \pm y(x)$$

функція загального виду, тобто не є ні парною, ні непарною, графік симетрії не має.

4. Точка розриву $x = 0$.

Визначимо характер точки розриву

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0^- \\ \alpha \rightarrow 0}} \left(\frac{1}{x} + 4x^2 \right) = -\infty, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ \alpha \rightarrow 0}} \left(\frac{1}{x} + 4x^2 \right) = +\infty,$$

$x = 0$ – точка розриву 2-го роду.

5. Асимптоти:

вертикальна $x = 0$;

похила $y = kx + b$,

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x} + 4x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{x^2} + 4x \right) = \pm\infty,$$

похилих асимптот немає.

6. Інтервали монотонності та екстремуми функції:

$$y' = -\frac{1}{x^2} + 8x, \quad y' = 0, \quad \frac{8x^3 - 1}{x^2} = 0, \quad x = \frac{1}{2}.$$

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}; +\infty)$
y'	-	не існує	-	0	+
y	\searrow	не існує	\searrow	3 <i>min</i>	\nearrow

$$y_{\min} = 3.$$

$$x = \frac{1}{2}$$

7. Інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину:

$$y'' = \frac{2}{x^3} + 8, \quad y'' = 0, \quad \frac{2 + 8x^3}{x^3} = 0, \quad x^3 = -\frac{2}{8}, \quad x = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$$

x	$\left(-\infty; -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)$	$-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$	$\left(-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}; 0\right)$	0	$(0; +\infty)$
y''	$+$	0	$-$	не існує	$+$
y	\cup	0	\cap	не існує	\cup

$$y\left(-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right) = -\frac{2}{\sqrt[3]{2}} + 4\frac{\sqrt[3]{4}}{4} = 0, \quad \left(-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}; 0\right) - \text{точка перегину.}$$

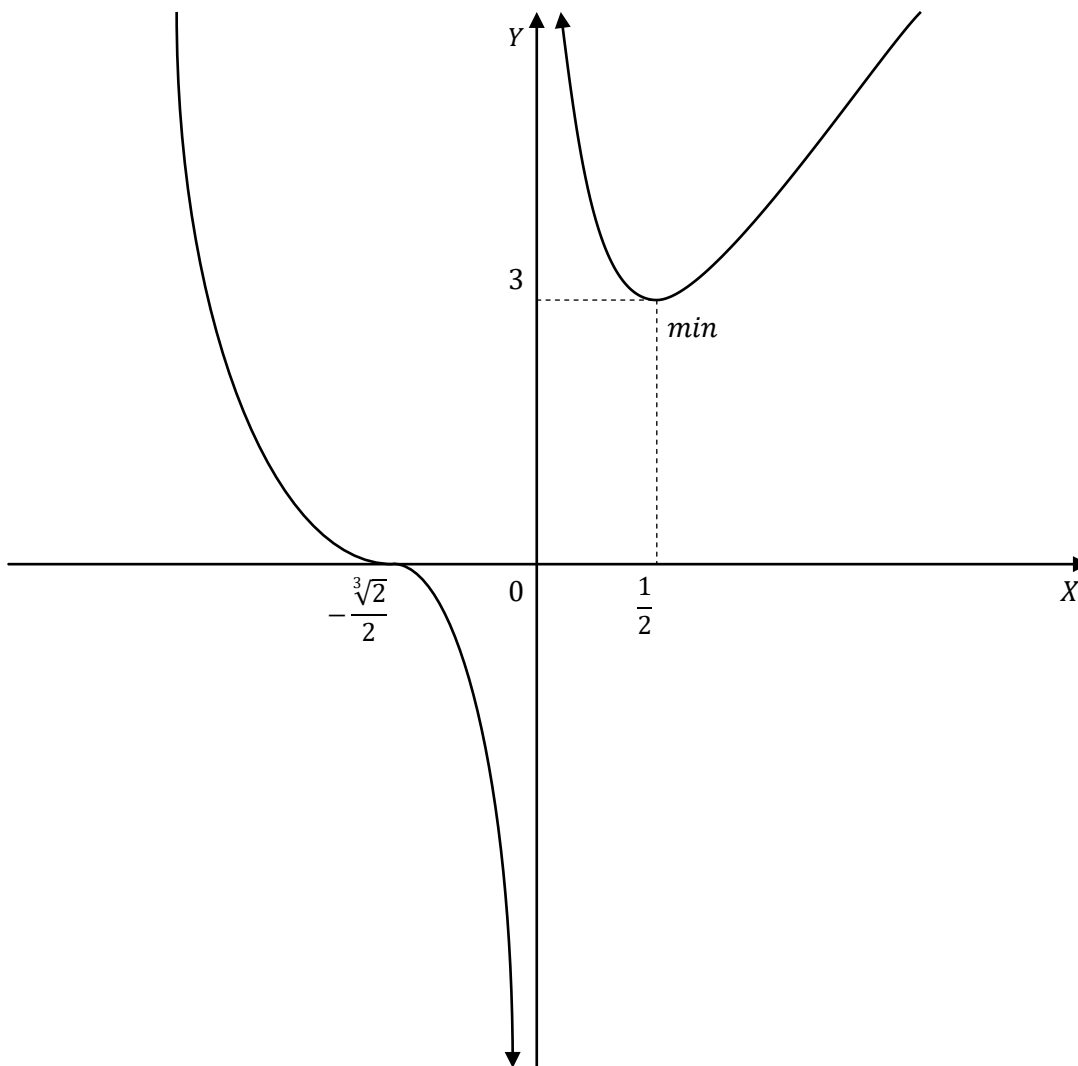


Рис. 2

Приклад 3. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік $y = x^2 e^{-x^2}$.

Розв'язання.

1. Область визначення: $x \in (-\infty; +\infty)$.

2. Перетин з осями координат:

$$\text{з віссю } Ox: y = 0 \Rightarrow x = 0, (0,0),$$

$$\text{з віссю } Oy: x = 0 \Rightarrow y = 0, (0,0),$$

графік проходить через початок координат.

3. Парність, непарність:

$$y(x) = x^2 e^{-x^2}, \quad y(-x) = x^2 e^{-x^2}, \quad y(-x) = y(x),$$

функція парна, графік симетричний відносно осі Oy .

4. Точок розриву немає,

функція неперервна на всій осі Ox .

5. Асимптоти:

вертикальних немає;

похилі $y = kx + b$,

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 e^{-x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2xe^{x^2}} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{2xe^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0,$$

$y = 0$ – горизонтальна асимптота, частинний випадок похилої.

6. Інтервали монотонності та екстремуми функції:

$$y' = 2xe^{-x^2} + x^2 e^{-x^2}(-2x) = 2xe^{-x^2}(1 - x^2), \quad y' = 0,$$

$$2xe^{-x^2}(1 - x^2) = 0, \quad \text{оскільки } 2e^{-x^2} \neq 0, \quad \text{то } x(1 - x^2) = 0,$$

звідси $x = 0, x = \pm 1$ – критичні точки.

Враховуючи парність функції, досліджуємо на екстремум критичні точки $x = 0, x = 1$.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	\nearrow	$\frac{1}{e}$	\searrow	0	\nearrow	$\frac{1}{e}$	\searrow

$$y_{\max}_{x=\pm 1} = \frac{1}{e} \approx 0,37,$$

$$y_{\min}_{x=0} = 0.$$

7. Інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину:

$$y' = 2e^{-x^2}(x - x^3),$$

$$y'' = 2(-2xe^{-x^2}(x - x^3) + e^{-x^2}(1 - 3x^2)) =$$

$$= 2e^{-x^2}(1 - 3x^2 - 2x^2 + 2x^4) = 2e^{-x^2}(1 - 5x^2 + 2x^4),$$

$$y'' = 0, 2e^{-x^2} \neq 0, 1 - 5x^2 + 2x^4 = 0,$$

$$x^2 = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}, \quad x = \pm \sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}}.$$

x	$\left(0; \sqrt{\frac{5 - \sqrt{17}}{4}}\right)$	$\sqrt{\frac{5 - \sqrt{17}}{4}}$	$\left(\sqrt{\frac{5 - \sqrt{17}}{4}}; \sqrt{\frac{5 + \sqrt{17}}{4}}\right)$	$\sqrt{\frac{5 + \sqrt{17}}{4}}$
y''	+	0	-	0
y	U	$\frac{5 - \sqrt{17}}{4} e^{-\frac{5 - \sqrt{17}}{4}}$	∩	$\frac{5 + \sqrt{17}}{4} e^{-\frac{5 + \sqrt{17}}{4}}$
x	$\left(\sqrt{\frac{5 + \sqrt{17}}{4}}; \infty\right)$			
y''	+			
y	U			

$x_{\text{т.п.}} = \pm \sqrt{\frac{5 - \sqrt{17}}{4}} \approx \pm 0,47, \quad x_{\text{т.п.}} = \pm \sqrt{\frac{5 + \sqrt{17}}{4}} \approx \pm 1,51,$
 $y_{\text{т.п.}} = \frac{5 - \sqrt{17}}{4} e^{-\frac{5 - \sqrt{17}}{4}} \approx 0,18, \quad y_{\text{т.п.}} = \frac{5 + \sqrt{17}}{4} e^{-\frac{5 + \sqrt{17}}{4}} \approx 0,23.$

Отже, $\left(\pm \sqrt{\frac{5 - \sqrt{17}}{4}}; \frac{5 - \sqrt{17}}{4} e^{-\frac{5 - \sqrt{17}}{4}}\right), \left(\pm \sqrt{\frac{5 + \sqrt{17}}{4}}; \frac{5 + \sqrt{17}}{4} e^{-\frac{5 + \sqrt{17}}{4}}\right)$ – точки перегибу.

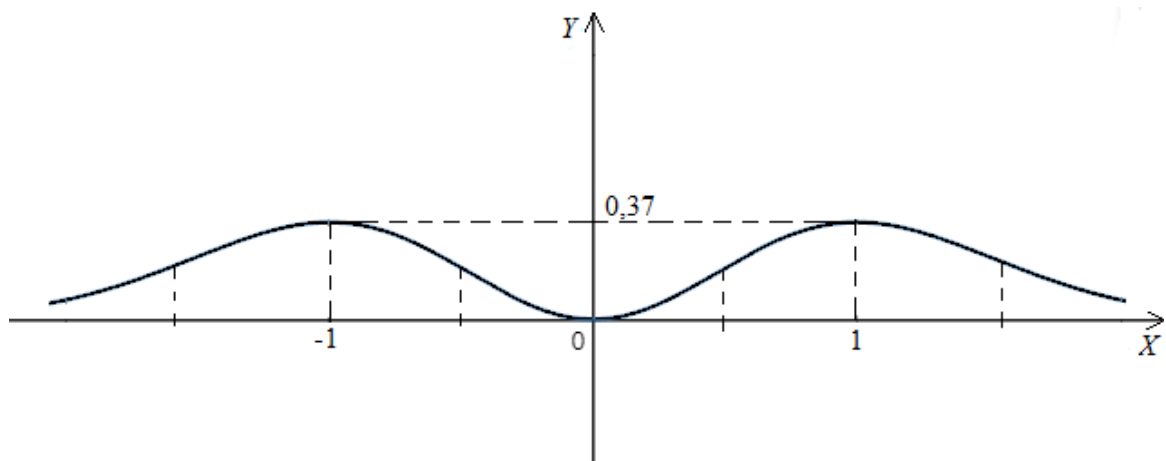


Рис. 3

Приклад 4. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік

$$y = x + \frac{\ln x}{x}.$$

Розв'язання.

1. Область визначення: $x > 0, x \in (0; \infty)$.

2. Перетин з осями координат:

$x \neq 0$, вісь Oy не перетинає,

$$y = 0, x + \frac{\ln x}{x} = 0, x^2 + \ln x = 0, \ln x = -x^2,$$

корінь розташований між 0 та 1 (див. рис.4).

3. Парність, непарність:

функція загального виду, симетрії немає

(з врахуванням області визначення).

4. Точки розриву:

$$x > 0, \lim_{x \rightarrow 0+0} \left(x + \frac{\ln x}{x} \right) = -\infty.$$

5. Асимптоти:

вертикальна $x = 0$;

похила $y = kx + b$,

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \frac{\ln x}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\ln x}{x^2} \right) = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{\ln x}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

$y = x$ – похила асимптота.

6. Інтервали монотонності та екстремуми функції:

$$y' = 1 + \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = 1 + \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 + 1 - \ln x}{x^2};$$

$$y' = \frac{x^2 + 1 - \ln x}{x^2} > 0, \text{ тому що } x^2 + 1 > \ln x, x^2 > 0;$$

$y' > 0$, функція зростає, екстремуму немає.

7. Інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину:

$$y' = 1 + \frac{1 - \ln x}{x^2};$$

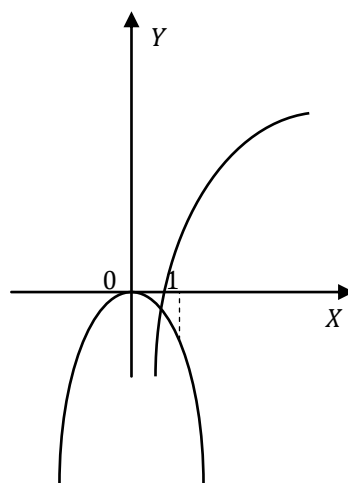


Рис. 4

$$y'' = \frac{-\frac{1}{x}x^2 - (1 - \ln x)2x}{x^4} = \frac{-x - 2x + 2x \ln x}{x^4} = \frac{2 \ln x - 3}{x^3};$$

$$y'' = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}, \quad y'' = 0, \quad 2 \ln x - 3 = 0, \quad \ln x = \frac{3}{2}, \quad x = e^{\frac{3}{2}} = \sqrt{e^3}.$$

$$y_{\text{т.п.}} = \left(\sqrt{e^3} \right) = \sqrt{e^3} + \frac{3}{2\sqrt{e^3}} \approx 4,81.$$

x	$(0; \sqrt{e^3})$	$\sqrt{e^3}$	$(\sqrt{e^3}; +\infty)$
y''	-	0	+
y	∩	$\sqrt{e^3} + \frac{3}{2\sqrt{e^3}}$	∪

Отже, $(\sqrt{e^3}; \sqrt{e^3} + \frac{3}{2\sqrt{e^3}})$ – точка перегибу.

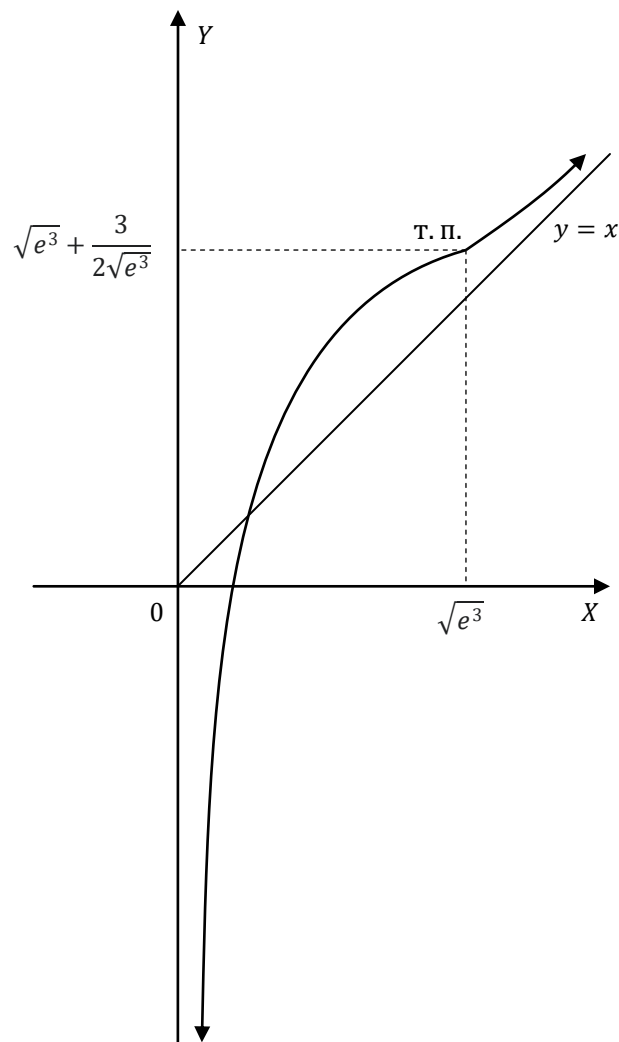


Рис. 5

ЗАВДАННЯ ТИПОВОГО РОЗРАХУНКУ

Варіант 1

1. Обчислити границі:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n - 3n^2 - 6n^3}{2n^2 + 4n}$;

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5(n-1)! + n!}{(n+1)!}$;

9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 2x}{3x^2}$;

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 6n^5}{2n^5 - 8n}$;

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + 4} - 2x)$;

10) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{3x+2}$;

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - 6n^2}{9n^3 + 2n^2}$;

7) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 4}$;

11) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{x}\right)^{\frac{x+4}{x^2}}$;

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{2n^3 - 3n - 3}}{\sqrt[3]{n^4 - 5n}}$;

8) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3 + 8}$;

12) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{tg x}$.

2. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x) = \cos 2x - \cos 5x$ відносно $\beta(x) = \sin^2 x$ при $x \rightarrow 0$.

3. Порівняти нескінченно малі функції $\alpha(x) = \ln(1 + \sqrt{x-1})$ та $\beta(x) = x - 1$ при $x \rightarrow 1$.

4. З'ясувати, які з нескінченно малих функцій $\alpha(x) = x^2 + x - 2$, $\beta(x) = -3 \ln(2 - x)$ та $\gamma(x) = x^2 - 1$ при $x \rightarrow 1$ будуть еквівалентними?

5. Дослідити на неперервність функцію, вказати характер точок розриву. Схематично побудувати графік функції $f(x)$.

$$1) f(x) = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} -2x - 2, & x \leq -1, \\ (x+1)^3, & -1 < x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

6. Знайти похідну y' функції у завданнях 1) – 6) та похідні першого і другого порядку в завданні 6).

1) $y = 6\sqrt[3]{x^2 - 3x^5 + \frac{1}{x^2}}$; 2) $y = \frac{\arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}}$; 3) $y = \cos x^3 \cdot e^{\sin^2 x}$;

4) $y = (tg 2x)^{\ln 4x}$; 5) $\ln\left(\frac{y}{x}\right) - 3xy^2 = 0$; 6) $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \arctg t. \end{cases}$

7. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 і знайти кут між цією дотичною та прямою l , якщо

$$y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2} - 1, \quad x_0 = 8, \quad l: x + y - 11 = 0.$$

8. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

1) $y = \frac{17-x^2}{4x-5}$; 2) $y = e^{2x-x^2}$.

Варіант 2

1. Обчислити границі:

- | | | |
|--|---|--|
| 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7-6n^4}{7n^2-2n}$ | 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)!-3n!}{(n+1)!+4n!}$ | 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x(\cos 3x-1)}{\operatorname{tg} x - \sin x}$ |
| 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-3n^2-5}{2n^2+4}$ | 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{1-n^3} + n)$ | 10) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{5x}$ |
| 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n-3n^2}{2n^3-n}$ | 7) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-6x+8}{x^2-7x+10}$ | 11) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{4x-1}\right)^{3x+2}$ |
| 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{5n^3-2n}-\sqrt[4]{5n^4}}{\sqrt[3]{n^4}-7n+3}$ | 8) $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$ | 12) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$ |

2. Визначити порядок малості нескінченно малої функції $f(x) = e^{2x} - e^{3x}$ відносно $g(x) = \sqrt{\sin x}$ при $x \rightarrow 0$.

3. Порівняти нескінченно малі функції $\alpha(x) = x^2 + x - 2$ та $\beta(x) = (1-x)^2$ при $x \rightarrow 1$.

4. З'ясувати, які з нескінченно малих функцій $\alpha(x) = x^3 - x^2 - x + 1$, $\beta(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ та $\gamma(x) = 2\sin(x-1)^2$ при $x \rightarrow 1$ будуть еквівалентними?

5. Дослідити на неперервність функцію, вказати характер точок розриву. Схематично побудувати графік функції $f(x)$.

$$1) f(x) = 10^{\frac{1}{5-x}}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} x, & x \leq -2, \\ 1-x, & -2 < x < 1, \\ x^2-1, & x \geq 1. \end{cases}$$

6. Знайти похідну y' функції у завданнях 1) – 6) та похідні першого і другого порядку в завданні 6).

$$1) y = \left(2x - 3\sqrt[3]{x} + \frac{4}{x}\right)^5; \quad 2) y = \frac{\sqrt{1-\cos x}}{2^x + x^2}; \quad 3) y = 2^{3x+1} \cdot \operatorname{tg}(1-x^2);$$

$$4) y = \frac{(x+1)^2 \sqrt{x-3}}{\sqrt[3]{(2x-1)^2}}; \quad 5) x - y^2 + \arcsin 2y = 0; \quad 6) \begin{cases} x = t + \ln \cos t, \\ y = t - \ln \sin t. \end{cases}$$

7. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 і знайти кут між цією дотичною та прямою l , якщо

$$y = \frac{3x-1}{x-3}, \quad x_0 = 5, \quad l: x - 2y + 9 = 0.$$

8. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

$$1) y = \frac{4x}{x^2+4}, \quad 2) y = 1 - \sqrt[3]{x^2 - 2x}.$$

Варіант 3

1. Обчислити границі:

- | | | |
|--|--|---|
| 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-9n^2-6n^4}{2n^4-14n}$ | 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!+4(n+1)!}{(n+1)!+7n!}$ | 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 3x}{\cos 3x - 1}$ |
| 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4-6n^3}{2n^5+5n}$ | 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n+1} - \sqrt{n})$ | 10) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{3x-1}\right)^{\frac{x}{3}}$ |
| 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-3n^3}{2n^2-7n}$ | 7) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2-6x}{x^2-2x-3}$ | 11) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x}{x-6}\right)^{\frac{x^3-3}{x^2}}$ |
| 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{2n^3} - \sqrt[3]{7n^4}}{\sqrt[3]{n^4} - n}$ | 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$ | 12) $\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x$ |

2. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x) = e^{3x} - 1$ відносно $\beta(x) = \sqrt[6]{x}$ при $x \rightarrow 0$.

3. Порівняти при $x \rightarrow 3$ нескінченно малі функції $\alpha(x) = x^2 - 3x$ та $\beta(x) = \sqrt{6+x} - 3$.

4. З'ясувати, які з нескінченно малих функцій $\alpha(x) = 2\operatorname{tg} \pi x$, $\beta(x) = \sin 2\pi x$ та $\gamma(x) = \pi x - \pi$ при $x \rightarrow 1$ будуть еквівалентними?

5. Дослідити на неперервність функцію, вказати характер точок розриву. Схематично побудувати графік функції $f(x)$.

$$1) f(x) = \frac{2x}{3^{3x+6}}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ -(x-1)^2, & 0 < x < 2, \\ x-3, & x \geq 2. \end{cases}$$

6. Знайти похідну y' функції у завданнях 1) – 6) та похідні першого і другого порядку в завданні 6).

$$1) y = 8\sqrt[4]{2x^4 - 4x^2 + \frac{6}{x}}; \quad 2) y = \frac{\operatorname{tg}(3x+2)}{3x^2 + e^x}; \quad 3) y = (4-x^2)\arccos\sqrt{x^2-3};$$

$$4) y = (\ln 4x)^{\cos x}; \quad 5) y \sin x - x^2 \cos y = 0; \quad 6) \begin{cases} x = e^{2t} + 2, \\ y = t(e^t + 1). \end{cases}$$

7. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 і знайти кут між цією дотичною та прямою l , якщо

$$y = x^2 - 8\sqrt{x} - 2, \quad x_0 = 4, \quad l: x + 6y + 8 = 0.$$

8. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

$$1) y = \frac{x^2-x+1}{x-1}, \quad 2) y = x + \ln(x^2 - 4).$$

Варіант 4

1. Обчислити границі:

- | | | |
|--|---|---|
| 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4n^2 + 2n^3}{2n^4 + 4}$ | 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! - 3n!}{3(n+1)! + 4n!}$ | 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{\cos 7x - \cos x}$ |
| 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - 7n^2 - 6n^3}{3n^2 + 4n}$ | 6) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}$ | 10) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 3x}{x^2 - 3} \right)^{\frac{x-3}{4}}$ |
| 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n + n^2 - 6n^3}{2n^3 + 9n^2}$ | 7) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{5n} - \sqrt{n-2})$ | 11) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x-1}{x} \right)^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}$ |
| 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 - \sqrt[4]{3n^5}}{\sqrt[3]{n^4 + 7n}}$ | 8) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 7x + 10}$ | 12) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctgx} - \frac{1}{x} \right)$ |

2. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x) = \sin 2x$ відносно $\beta(x) = \sqrt[3]{x}$ при $x \rightarrow 0$.

3. Порівняти нескінченно малі функції $\alpha(x) = \ln(1 + \sqrt[3]{x})$ та $\beta(x) = \sin \sqrt{x}$ при $x \rightarrow 0$.

4. З'ясувати, які з нескінченно малих функцій $\alpha(x) = 1 - x^2$, $\beta(x) = \sqrt[3]{x} - 1$ та $\gamma(x) = \operatorname{arctg}(\sqrt[3]{x} - 1)$ при $x \rightarrow 0$ будуть еквівалентними?

5. Дослідити на неперервність функцію, вказати характер точок розриву. Схематично побудувати графік функції $f(x)$.

$$1) f(x) = 5^{\frac{1-x}{1+2x}}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} x + 2, & x < -1, \\ x^2 + 1, & -1 < x \leq 1, \\ -x + 3, & x > 1. \end{cases}$$

6. Знайти похідну y' функції у завданнях 1) – 6) та похідні першого і другого порядку в завданні 6).

$$1) y = \left(3x^2 - \frac{4}{x^2} + 5\sqrt{x} \right)^3; \quad 2) y = \frac{\operatorname{ctg} 4x}{\sqrt{2x^2 - 1}}; \quad 3) y = e^{\sin 2x} \cdot \ln(\cos 2x);$$

$$4) y = \frac{(x-2)^3 \sqrt[4]{x+1}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}; \quad 5) \frac{y}{x} - \operatorname{arcsin}\left(\frac{x}{y}\right) = 0; \quad 6) \begin{cases} x = 3 \cos^2 t, \\ y = 2 \sin^3 t. \end{cases}$$

7. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 і знайти кут між цією дотичною та прямою l , якщо

$$y = \frac{x}{x^2 - x - 1}, \quad x_0 = 2, \quad l: x - 5y + 8 = 0.$$

8. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

$$1) y = \frac{2}{x^2 + 2x}, \quad 2) y = e^{\frac{1}{5+x}}.$$

Варіант 5

1. Обчислити границі:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-3n^6-6n^2}{2n^7+4n}$

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8(n-1)!n^2}{(n-2)!+4n!}$

9) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 3\pi x}{x^2-1}$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^2-6n^3}{5n^3-3n}$

6) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1-2x}$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-6n^2-6n^3}{2n^2-5n}$

7) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3n^2+1} - 2n)$

11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x-1}{\sin x}$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{2n^2}-\sqrt[3]{7n^5}}{\sqrt[3]{n^5-3n}-5}$

8) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x^2+2x-8}$

12) $\lim_{x \rightarrow 4\pi} (\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x \sin 2x}}$

2. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x) = \cos 4x - \cos 2x$ відносно $\beta(x) = x$ при $x \rightarrow 0$.

3. Порівняти при $x \rightarrow -1$ нескінченно малі функції $\alpha(x) = x^3 - 3x - 2$ та $\beta(x) = x^2 + x$.

4. З'ясувати, які з нескінченно малих функцій $\alpha(x) = e^{3x} - 1$, $\beta(x) = \ln(1 + 2x)$ та $\gamma(x) = \sin 3x$ при $x \rightarrow 0$ будуть еквівалентними?

5. Дослідити на неперервність функцію, вказати характер точок розриву. Схематично побудувати графік функції $f(x)$.

$$1) f(x) = 11^{\frac{-1}{2+x}}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x^2 + 1, & 0 \leq x < 1, \\ 1 + x, & x \geq 1. \end{cases}$$

6. Знайти похідну y' функції у завданнях 1) – 6) та похідні першого і другого порядку в завданні 6).

1) $y = 5\sqrt[5]{3x^4 + 2x^3 - \frac{4}{x}}$; 2) $y = \frac{\cos 3x}{x^3 + 5^x}$; 3) $y = 2^{\operatorname{ctg} x} \cdot \sin^2 3x$;

4) $y = (\arcsin 5x)^{2x}$; 5) $(e^{xy} - 1) \ln x - y = 0$; 6) $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 + 1}, \\ y = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}. \end{cases}$

7. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 і знайти кут між цією дотичною та прямою l , якщо

$$y = 2x - \ln(x+2), \quad x_0 = -1, \quad l: x + y + 3 = 0.$$

8. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

1) $y = \frac{4x^2+9}{4x+8}$,

2) $y = (3-x)e^{x-2}$.

Варіант 6

1. Обчислити границі:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n - 3n^5 - 2n^3}{7n^5 - 9n}$

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n-1)! - 4n!}{7n!(3n-5)}$

9) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 4x}{\operatorname{tg} 3x}$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - 8n^2 - 4n^3}{-2n + 2n^2 + 1}$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$

10) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2x^2}{2x^2-3} \right)^{4x-2}$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-3n^2+2n}{2n^4+101n}$

7) $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{5x^2-5x+1}{2x^2-5x+2}$

11) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3x+1}{7x-2} \right)^x$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{2n^3-1}}{\sqrt[3]{n^2-2}}$

8) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^3-1}$

12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

2. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$ відносно $\beta(x) = \sqrt[4]{x}$ при $x \rightarrow 0$.

3. Порівняти нескінченно малі функції $\alpha(x) = \ln(1 + x^2)$ та $\beta(x) = x\sqrt{x}$ при $x \rightarrow 0$.

4. З'ясувати, які з нескінченно малих функцій $\alpha(x) = e^{3x} - e^{-2x}$, $\beta(x) = \ln(1 + 5x)$ та $\gamma(x) = \sqrt{1 - x^2} - 1$ при $x \rightarrow 0$ будуть еквівалентними?

5. Дослідити на неперервність функцію, вказати характер точок розриву. Схематично побудувати графік функції $f(x)$.

$$1) f(x) = \frac{2x}{2^{3-x}}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} 3x + 4, & x \leq 0, \\ x^2 - 2, & 0 < x \leq 2, \\ x, & x > 2. \end{cases}$$

6. Знайти похідну y' функції у завданнях 1) – 6) та похідні першого і другого порядку в завданні 6).

1) $y = \left(2x^5 - \sqrt[3]{x^2} + \frac{3}{x^4} \right)^5$; 2) $y = \frac{\sin 5x}{\sqrt{x^2 + 1}}$; 3) $y = e^{x^2+1} \cdot \arccos^5 4x$;

4) $y = \frac{(3x+1)^2 \sqrt[4]{(x-1)^3}}{\sqrt{x-2}}$; 5) $\ln(x^2 y) - \frac{y}{x} = 0$; 6) $\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = \operatorname{ctg}^2 t. \end{cases}$

7. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 і знайти кут між цією дотичною та прямою l , якщо

$$y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x^2}, \quad x_0 = 1, \quad l: x - 9y + 35 = 0.$$

8. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

1) $y = \frac{4x - x^2 - 4}{x}$, 2) $y = 1 - \sqrt[3]{x^2 + 2x}$.

Варіант 7

1. Обчислити границі:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3-4n^2-7n^3}{n^2+2n}$

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n(n+1)!}{(n+1)!+4n!}$

9) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1+\cos 3x}{\operatorname{tg}^2 x}$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-3n^2-6n^4}{5n^4+43n}$

6) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2-1} - n)$

10) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-6n-3n^2}{3n^3+14n-3}$

7) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-2x-8}{x^2+7x+10}$

11) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{9}{x}\right)^{\frac{7x+4}{x}}$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{2+n^5} - \sqrt[3]{3n^2}}{\sqrt[3]{27n^3} - 5n}$

8) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x-2}}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2x}}$

12) $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} x)^{\sqrt{x}}$

2. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x) = \sin 5x - \sin 2x$

відносно $\beta(x) = \sin \sqrt{x}$ при $x \rightarrow 0$.

3. Порівняти при $x \rightarrow 0$ нескінченно малі функції $\alpha(x) = \cos 2x - \cos x$ та $\beta(x) = \sin 4x$.

4. З'ясувати, які з нескінченно малих функцій $\alpha(x) = x^2 - x^3$, $\beta(x) = x \sin x$ та $\gamma(x) = \sqrt{x^2 + 4} - 2$ при $x \rightarrow 0$ будуть еквівалентними?

5. Дослідити на неперервність функцію, вказати характер точок розриву. Схематично побудувати графік функції $f(x)$.

$$1) f(x) = \frac{1}{6^{x-3}}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} x-3, & x < 0, \\ x+1, & 0 \leq x \leq 4, \\ 3 + \sqrt{x}, & x > 4. \end{cases}$$

6. Знайти похідну y' функції у завданнях 1) – 6) та похідні першого і другого порядку в завданні 6).

1) $y = 4\sqrt[4]{x^3 + 3x} - \frac{4}{x^3}$; 2) $y = \frac{\arcsin 3x}{\sqrt{1-9x^2}}$; 3) $y = \sqrt{\ln x} \cdot \sin^3(2x+1)$;

4) $y = (\cos 4x)^{\ln 3x}$; 5) $x^3 y + y^2 - 2^y = 0$; 6) $\begin{cases} x = \frac{1}{1+t^2}, \\ y = \frac{t}{1+t^2}. \end{cases}$

7. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 і знайти кут між цією дотичною та прямою l , якщо

$$y = \sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 2x, \quad x_0 = 1, \quad l: 2x + 3y - 2 = 0.$$

8. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

1) $y = \frac{x^2}{4x^2-1}$, 2) $y = 4 - e^{-x^2}$.

Варіант 8

1. Обчислити границі:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3n^4}{2n^2+4n}$

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(n-1)!-9n!}{(n-1)!+4n!}$

9) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{\operatorname{tg} \pi x}$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{32n^2-6n^3}{2n^3+7n}$

6) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{5n+1} - \sqrt{n})$

10) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+2}{x^2-2} \right)^{x^2}$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-7n^2}{21n^3+4}$

7) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2-8x+7}{x^2-9x+14}$

11) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{8x+1}{4x} \right)^x$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3-3n-2}}{\sqrt[4]{16n^4-7n}}$

8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{16+x^2}-4}$

12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-\sin x}{\operatorname{tg} x - \sin x}$

2. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x) = x^2 + 3x$ відносно $\beta(x) = \lg(1 + \sqrt{x})$ при $x \rightarrow 0$.

3. Порівняти нескінченно малі функції $\alpha(x) = x^2 + x$ та $\beta(x) = \sqrt{x+9} - 3$ при $x \rightarrow 0$.

4. З'ясувати, які з нескінченно малих функцій $\alpha(x) = e^{2x} - 1$, $\beta(x) = \cos 2x - \cos x$ та $\gamma(x) = \arcsin 2x$ при $x \rightarrow 0$ будуть еквівалентними?

5. Дослідити на неперервність функцію, вказати характер точок розриву. Схематично побудувати графік функції $f(x)$.

$$1) f(x) = \frac{1}{3^{4-x}}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1, \\ x^2+2, & -1 \leq x < 1, \\ 2x, & x \geq 1. \end{cases}$$

6. Знайти похідну y' функції у завданнях 1) – 6) та похідні першого і другого порядку в завданні 6).

1) $y = \left(2x^4 - 4\sqrt{x} + \frac{3}{x^2} \right)^3$; 2) $y = \frac{\cos^2 3x}{\sqrt{1-3x^2}}$; 3) $y = 3^{\ln 2x} \cdot \arcsin x^3$;

4) $y = \frac{(x-3)^4 \sqrt[3]{(x+2)^2}}{\sqrt{2x-1}}$; 5) $x^2 - y^3 + \sin xy = 0$; 6) $\begin{cases} x = 2 + \cos^2 t, \\ y = 2 - \sin^2 t. \end{cases}$

7. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 і знайти кут між цією дотичною та прямою l , якщо

$$y = \frac{x^2 - 4x + 8}{x - 2}, \quad x_0 = 3, \quad l: x - 3y + 12 = 0.$$

8. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

1) $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$, 2) $y = x^2 e^{-x}$.

Варіант 9

1. Обчислити границі:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8-3n^2-n}{12n^2+6n}$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)!n}{7(n+1)!-n!}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 4x}{\cos 9x - \cos 3x}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n-3n^3}{2n^5+4n}$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^4+1} - n^2)$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{3+3x} \right)^{\frac{2x-3}{4}}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7-3n^5-6n^3}{3n^2-1}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{3x^2-6x}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\cos 3}{\cos x} \right)^{\frac{2}{x-3}}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{2n^3-1}-5n}{\sqrt[3]{8n^3-2}}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{\sqrt[100]{x}}$$

2. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x) = \arcsin 2x^3$ відносно $\beta(x) = \operatorname{tg} x$ при $x \rightarrow 0$.

3. Порівняти нескінченно малі функції $\alpha(x) = \sin 2x$ та $\beta(x) = \sqrt{9+x} - 3$ при $x \rightarrow 0$.

4. З'ясувати, які з нескінченно малих функцій $\alpha(x) = e^{3x^2} - 1$, $\beta(x) = x \sin 3x$ та $\gamma(x) = \sqrt{9+3x^2} - 3$ при $x \rightarrow 0$ будуть еквівалентними?

5. Дослідити на неперервність функцію, вказати характер точок розриву. Схематично побудувати графік функції $f(x)$.

$$1) f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x+1}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} x+2, & x < 1, \\ x^2+2, & 1 < x < 3, \\ 3-x, & x \geq 3. \end{cases}$$

6. Знайти похідну y' функції у завданнях 1) – 6) та похідні першого і другого порядку в завданні 6).

$$1) y = 3\sqrt[3]{5x^4 + 6x^2 - \frac{2}{x^2}}; \quad 2) y = \frac{\sin 2x}{\sqrt{4x^2+1}}; \quad 3) y = e^{\operatorname{tg} 5x} \cos(x-1)^2;$$

$$4) y = (\ln 5x)^{\sin 3x}; \quad 5) \ln y - \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{y} \right) = 0; \quad 6) \begin{cases} x = 2 \ln t - t^2, \\ y = \operatorname{arctg} t. \end{cases}$$

7. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 і знайти кут між цією дотичною та прямою l , якщо

$$y = (x+1) \cdot \sqrt[3]{7-x}, \quad x_0 = -1, \quad l: x+2y+1=0.$$

8. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

$$1) y = \frac{2x^2-6}{x-2},$$

$$2) y = (x-2)e^{3-x}.$$

Варіант 10

1. Обчислити границі:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-7}{2n^2+4n}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n-6n^3}{2n^3+4n}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-3n^2-6n^3}{2n^2-4}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{27n^6-1}+n^2}{\sqrt[4]{n^8-5n}}$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-2)!-3n!}{(n-1)!-n \cdot 2n!}$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{2-n^3} + n)$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-6x+8}{3x^2-12x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1+\cos 7x}{5\sin^2 x}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-3x+4}{x^2+2x} \right)^{5x}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \operatorname{tg} x)^{\frac{4}{5x}}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$$

2. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x) = \sin 5x - \sin 2x$ відносно $\beta(x) = \operatorname{tg} x$ при $x \rightarrow 0$.

3. Порівняти нескінченно малі функції $\alpha(x) = \cos 5x - \cos 2x$ та $\beta(x) = x \cdot \sin 3x$ при $x \rightarrow 0$.

4. З'ясувати, які з нескінченно малих функцій $\alpha(x) = \operatorname{tg} \sqrt{x}$, $\beta(x) = \sin x$ та $\gamma(x) = x + \sqrt{x}$ при $x \rightarrow 0$ будуть еквівалентними?

5. Дослідити на неперервність функцію, вказати характер точок розриву. Схематично побудувати графік функції $f(x)$.

$$1) f(x) = 10^{\frac{1}{2+x}}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1, \\ x^2+1, & -1 < x \leq 1, \\ 3-x, & x > 1. \end{cases}$$

6. Знайти похідну y' функції у завданнях 1) – 6) та похідні першого і другого порядку в завданні 6).

$$1) y = \left(5x^3 - 8\sqrt[4]{x^3} + \frac{3}{x^2} \right)^4; \quad 2) y = \frac{\sqrt{1-\ln x}}{3^x + x^3}; \quad 3) y = 4^{\cos x} \cdot \arcsin^3 2x;$$

$$4) y = \frac{(x+1)^5 \sqrt{x-3}}{(3x-1)^2}; \quad 5) xy^2 + e^y \operatorname{tg} x = 0; \quad 6) \begin{cases} x = \cos t + \sin t, \\ y = \sin t - t \cos t. \end{cases}$$

7. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 і знайти кут між цією дотичною та прямою l , якщо

$$y = \frac{x^3+2}{x^3-2}, \quad x_0 = 2, \quad l: 9x - 12y + 2 = 0.$$

8. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

$$1) y = \frac{x+2}{(x+1)^2}, \quad 2) y = x e^{\frac{1}{x}}.$$

Варіант 11

1. Обчислити границі:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6-6n^3}{2n^3+n}$

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)!-5n!}{(n+1)!}$

9) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\pi-4x}{\sqrt{2}-2\cos x}$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-6n^3}{4n^4+n}$

6) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{1+n^3} - n)$

10) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x^2-3x-4} \right)^{-5x}$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7-6n^3}{5n^2+4n}$

7) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2-10x}{x^2-4x-5}$

11) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^{\frac{3}{x}}$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{5n^3-n^2}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^5}-5}$

8) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

12) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \arcsin \frac{2}{x} \right)$

2. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x) = \sqrt{x^2+4} - 2$ відносно $\beta(x) = \operatorname{tg} x$ при $x \rightarrow 0$.

3. Порівняти нескінченно малі функції $\alpha(x) = x - 6$ та $\beta(x) = \sqrt{x-2} - 2$ при $x \rightarrow 6$.

4. З'ясувати, які з нескінченно малих функцій $\alpha(x) = e^{2x} - e^{3x^2}$, $\beta(x) = \sin 2x$ та $\gamma(x) = \sqrt{3x^2+1} - 1$ при $x \rightarrow 0$ будуть еквівалентними?

5. Дослідити на неперервність функцію, вказати характер точок розриву. Схематично побудувати графік функції $f(x)$.

$$1) f(x) = \frac{2}{3^{2+x}}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 2, \\ x+1, & x > 2. \end{cases}$$

6. Знайти похідну y' функції у завданнях 1) – 6) та похідні першого і другого порядку в завданні 6).

$$1) y = 8\sqrt[4]{2x^3+5x^2-\frac{4}{x^3}}; \quad 2) y = \frac{\ln(3x+2)}{\operatorname{tg}^3 x}; \quad 3) y = e^{\sin x} \arctg^3 \sqrt{x+2};$$

$$4) y = (\operatorname{ctg} 3x)^{\ln 5x}; \quad 5) 2xy + \ln(x^3 y) = 0; \quad 6) \begin{cases} x = \arcsin 2t, \\ y = \sqrt{1-4t^2}. \end{cases}$$

7. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 і знайти кут між цією дотичною та прямою l , якщо

$$y = 3\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x} + 3x, \quad x_0 = 1, \quad l: x + 3y - 13 = 0.$$

8. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

$$1) y = \frac{x^2-4x+1}{x-4}, \quad 2) y = x^3 e^{-x}.$$

Варіант 12

1. Обчислити границі:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-3n^2}{7n^2+5n}$	5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)!}{(n+1)!-7n!}$	9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 5x}{1-\cos 6x}$
2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2-6n^4}{n^2-2n}$	6) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{7n} - \sqrt{3n-1})$	10) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)^{7x}$
3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-3n^5-6n^2}{2n^6+4n}$	7) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3-4x}{x^2+5x+6}$	11) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (tg x)^{tg 2x}$
4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3-2n^2-7n}}{\sqrt[6]{2n^6-2}}$	8) $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x-3}}{2+\sqrt[3]{x}}$	12) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$

2. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x) = \arcsin x^2$ відносно $\beta(x) = \operatorname{tg} \sqrt{x}$ при $x \rightarrow 0$.

3. Порівняти нескінченно малі функції $\alpha(x) = 2x^2 + 3x$ та $\beta(x) = \arcsin x^2$ при $x \rightarrow 0$.

4. З'ясувати, які з нескінченно малих функцій $\alpha(x) = e^{3x} - e^{2x}$,

$\beta(x) = \ln(1-x)$ та $\gamma(x) = \sin x$ при $x \rightarrow 0$ будуть еквівалентними?

5. Дослідити на неперервність функцію, вказати характер точок розриву. Схематично побудувати графік функції $f(x)$.

$$1) f(x) = 3^{\frac{3x}{4-x}}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} 1-x, & x < 0, \\ x+1, & 0 \leq x \leq 4, \\ x+3, & x > 4. \end{cases}$$

6. Знайти похідну y' функції у завданнях 1) – 6) та похідні першого і другого порядку в завданні 6).

$$1) y = \left(4x^5 - 5\sqrt{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)^6; \quad 2) y = \frac{\cos 3x^2}{\sqrt{1-9x^2}}; \quad 3) y = 4^{\ln 2x} \cdot \operatorname{ctg}(x^3 - 3x);$$

$$4) y = \frac{(3x-1)^3 \sqrt[3]{x-2}}{\sqrt{x^2+1}}; \quad 5) x^2 y - \arcsin(xy) = 0; \quad 6) \begin{cases} x = 1 + \sin 3t, \\ y = t + \cos 3t. \end{cases}$$

7. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 і знайти кут між цією дотичною та прямою l , якщо

$$y = \frac{x^5+1}{x^4+1}, \quad x_0 = 1, \quad l: 2x + y - 3 = 0.$$

8. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

$$1) y = \frac{x^3-5x}{5-3x^2}, \quad 2) y = \frac{e^{2x-2}}{2x-2}.$$

Варіант 13

1. Обчислити границі:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7-3n^4-5n^3}{2n^3+4n}$

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)!-3n!}{(n+1)!n}$

9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^5 x}{x \sin x}$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-3n^2-6n^3}{2n^3+3}$

6) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} - \sqrt{5n+2})$

10) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x}{2+4x} \right)^{\frac{x^2}{x-2}}$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-3n^2}{2n^3+4n+5}$

7) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{16x-4}}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}$

11) $\lim_{x \rightarrow \pi} \left(\operatorname{ctg} \frac{x}{4} \right)^{\frac{1}{\cos \frac{x}{2}}}$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt[4]{5n^3-n^2}}{\sqrt[3]{n}-\sqrt[8]{n^6}}$

8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 6x}{\cos 4x - \cos 2x}$

12) $\lim_{x \rightarrow 0} (x)^x$

2. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x) = \ln(1+x^2)$ відносно $\beta(x) = \sqrt[3]{x}$ при $x \rightarrow 0$.

3. Порівняти нескінченно малі функції $\alpha(x) = e^{3x} - 1$ та $\beta(x) = \sqrt{x}$ при $x \rightarrow 0$.

4. З'ясувати, які з нескінченно малих функцій $\alpha(x) = e^{\sqrt{x}} - 1$, $\beta(x) = 2\sqrt{x}$ та $\gamma(x) = \sin \sqrt{x}$ при $x \rightarrow 0$ будуть еквівалентними?

5. Дослідити на неперервність функцію, вказати характер точок розриву. Схематично побудувати графік функції $f(x)$.

$$1) f(x) = 3^{\frac{x+3}{x-2}}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \leq 0, \\ x, & 0 < x \leq 1, \\ 2+x, & x > 1. \end{cases}$$

6. Знайти похідну y' функції у завданнях 1) – 6) та похідні першого і другого порядку в завданні 6).

1) $y = 10\sqrt[5]{3x^4 + 5x^2 - \frac{4}{x^4}}$; 2) $y = \frac{(x - \sin x)^4}{2^x + x^2}$; 3) $y = e^{\operatorname{ctg} 2x} \cos^2(3x-4)$;

4) $y = (\arcsin 2x)^{3x^2}$; 5) $\ln(xy) + e^x y^2 = 0$; 6) $\begin{cases} x = \sqrt{t+2}, \\ y = \frac{1}{\sqrt{t+2}}. \end{cases}$

7. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 і знайти кут між цією дотичною та прямою l , якщо

$$y = x + \sqrt[3]{(3x-2)^2}, \quad x_0 = 1, \quad l: x + 3y - 7 = 0.$$

8. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

1) $y = \frac{2x+1}{x^2}$, 2) $y = x - \ln(1+x^2)$.

Варіант 14

1. Обчислити границі:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n - 3n^5 - 33n^3}{27n^5 + n}$

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n! - (n-1)!}{4n!}$

9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \sin 3x}$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - 3n^2 - 6n^3}{2n^2 - 2}$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} (4x - \sqrt{x-3})$

10) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^2 - 3}{2 + 5x^2} \right)^{3x-1}$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n - 7n^2}{2n^3 + 4n - 7}$

7) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x + 5}{x^2 + 8x - 9}$

11) $\lim_{x \rightarrow 2\pi} (\cos x)^{\frac{1}{\sin 3x}}$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{5n-1} - 2\sqrt[3]{n}}{\sqrt[6]{n^2+4}}$

8) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 - x}$

12) $\lim_{x \rightarrow 1} (x)^{\frac{1}{1-x}}$

2. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x) = x \cdot \sin 5x$ відносно $\beta(x) = \sqrt{x}$ при $x \rightarrow 0$.

3. Порівняти нескінченно малі функції $\alpha(x) = \ln(1 - \sin x)$ та $\beta(x) = \operatorname{arctg} 4x$ при $x \rightarrow 0$.

4. З'ясувати, які з нескінченно малих функцій $\alpha(x) = e^{2x} - e^{3x}$, $\beta(x) = \ln(1 - x)$ та $\gamma(x) = \sin x$ при $x \rightarrow 0$ будуть еквівалентними?

5. Дослідити на неперервність функцію, вказати характер точок розриву. Схематично побудувати графік функції $f(x)$.

$$1) f(x) = \frac{1}{5^{x-2}} ; \quad 2) f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 0, \\ (x + 1)^2, & 0 < x \leq 2, \\ 4 - x, & x > 2. \end{cases}$$

6. Знайти похідну y' функції у завданнях 1) – 6) та похідні першого і другого порядку в завданні 6).

1) $y = \left(3x^4 - 2\sqrt[4]{x^3} + \frac{4}{x^2} \right)^8$; 2) $y = \frac{\sqrt{3x^2 + x}}{\cos(2x+1)}$; 3) $y = 5^{\sin 5x} \operatorname{tg} \sqrt{x + x^2}$;

4) $y = \frac{(x+5)^2 \sqrt[4]{x-3}}{\sqrt{3x+1}}$; 5) $3^{xy} - \arccos(x^2 y) = 0$; 6) $\begin{cases} x = 1 - ctgt, \\ y = 1 + \cos^3 t. \end{cases}$

7. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 і знайти кут між цією дотичною та прямою l , якщо

$$y = \frac{4x^2}{x^2 + 3}, \quad x_0 = -1, \quad l: 2x - 3y + 5 = 0.$$

8. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

1) $y = \frac{x^2 - 6x + 4}{3x - 2}$,

2) $y = 3\sqrt[3]{(x-3)^2}$.

Варіант 15

1. Обчислити границі:

- | | | |
|---|--|--|
| 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2n^4-6n^3}{-2n^4-3n}$ | 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!-9n!}{(n+1)!+4n!}$ | 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{(\sin x) \ln(3x+1)}$ |
| 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-3n^2-6n^5}{2n^4+7}$ | 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3-1} - n)$ | 10) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-x-1}{x^2-2} \right)^{7x}$ |
| 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n-3n^2+2}{2n^3+4n}$ | 7) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-6x+4}{x^2-7x+10}$ | 11) $\lim_{x \rightarrow a} \left(2 - \frac{x}{a} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a}}$ |
| 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^6-5n^2-n}}{3n^2+3n-5}$ | 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$ | 12) $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$ |

2. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x) = x + \sqrt{x}$ відносно $\beta(x) = \sqrt[6]{x}$ при $x \rightarrow 0$.

3. Порівняти нескінченно малі функції $\alpha(x) = \operatorname{arctg} 4x$ та $\beta(x) = \ln(1 + 4 \sin x)$ при $x \rightarrow 0$.

4. З'ясувати, які з нескінченно малих функцій $\alpha(x) = e^{2x} - 1$, $\beta(x) = \ln(1 + 2x)$ та $\gamma(x) = \sin^2 x$ при $x \rightarrow 0$ будуть еквівалентними?

5. Дослідити на неперервність функцію, вказати характер точок розриву. Схематично побудувати графік функції $f(x)$.

$$1) f(x) = e^{\frac{-1}{2+x}}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi, \\ 2, & x \geq \pi. \end{cases}$$

6. Знайти похідну y' функції у завданнях 1) – 6) та похідні першого і другого порядку в завданні 6).

$$1) y = 4\sqrt{3x^3 + 2x^2 - \frac{6}{x}}; \quad 2) y = \frac{\operatorname{tg} 4x - x^2}{\sin^2 x}; \quad 3) y = 3^{\arcsin x} \ln^3(2x+1);$$

$$4) y = (\cos 6x)^{\operatorname{ctg} 3x}; \quad 5) x^2 y^3 + e^{x+y^2} = 0; \quad 6) \begin{cases} x = \frac{1}{t^2 + 1}, \\ y = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}. \end{cases}$$

7. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 і знайти кут між цією дотичною та прямою l , якщо

$$y = \frac{2}{x} \cdot \ln 2x, \quad x_0 = \frac{1}{2}, \quad l: 2x + 16y - 1 = 0.$$

8. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

$$1) y = \frac{x^3}{x^2-x+1}, \quad 2) y = -(2x+1)e^{2x+2}.$$

Варіант 16

1. Обчислити границі:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{13n^2 - 4n^3}{2n^2 + 4n + 5}$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n(n-1)!}{(n-1)! + 2n!}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{-2x}}{2 \arcsin x - x}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n - 8n^2 - n^3}{2n^4 + 5}$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{1 - n^6} + n^2)$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2 - x}{5 + 4x^2} \right)^{4x}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8 - 3n^2}{2n^2 + 4n}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 3x + 45}{x^2 - 8x + 15}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{4x}}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{5 + 3n^8} - \sqrt[3]{n}}{2 - 7n^2}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\ln \cos x}{\sin x}$$

2. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x) = 2^{\sin x} - 1$ відносно $\beta(x) = \sqrt{x}$ при $x \rightarrow 0$.
3. Порівняти нескінченно малі функції $\alpha(x) = x^2 - x - 2$ та $\beta(x) = x^2 - 1$ при $x \rightarrow -1$.
4. З'ясувати, які з нескінченно малих функцій $\alpha(x) = x^2 + 3x$, $\beta(x) = \ln(1 + x)$ та $\gamma(x) = \sin 3x$ при $x \rightarrow 0$ будуть еквівалентними?
5. Дослідити на неперервність функцію, вказати характер точок розриву. Схематично побудувати графік функції $f(x)$.

$$1) f(x) = \frac{2x}{2x+3}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 0, \\ x^2 + 1, & 0 \leq x < 1, \\ -x, & x \geq 1. \end{cases}$$

6. Знайти похідну y' функції у завданнях 1) – 6) та похідні першого і другого порядку в завданні 6).

$$1) y = \left(\frac{1}{x^3} - 2x^3 - 3\sqrt[5]{x^4} \right)^2; \quad 2) y = \frac{x^3 + \operatorname{tg} x}{\sqrt{3x^2 + 4}}; \quad 3) y = 2^{\sin x} \cdot \arccos 2x;$$

$$4) y = \frac{(x-1)^2 \sqrt[3]{x-3}}{(2x+4)^3}; \quad 5) x^3 y + \ln \left(\frac{y}{x^2} \right) = 0; \quad 6) \begin{cases} x = \cos 3t, \\ y = \ln \sin 3t. \end{cases}$$

7. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 і знайти кут між цією дотичною та прямою l , якщо

$$y = \frac{x^2 - 3}{2x}, \quad x_0 = 1, \quad l: x + 2y + 1 = 0.$$

8. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

$$1) y = \frac{3x-2}{x^3}, \quad 2) y = x^2 - 2 \ln x.$$

Варіант 17

1. Обчислити границі:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-4n^3-4}{2n^3+6n}$

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)!-5n!}{3n(n-1)!}$

9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x-2^{-5x}}{2 \ln(\sin 4x+1)}$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-3n^2-6n^5}{5n^3+4}$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1}-x)$

10) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{3x+4}\right)^{-2x}$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3-3n^2}{2n^3-7n}$

7) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2-6x-24}{3x^3-12x}$

11) $\lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{\sin x}{\sin 5x}\right)^{\frac{2}{2x-10}}$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8n^3-5n^2-3n}}{\sqrt[5]{32n^5-1}}$

8) $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$

12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

2. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x) = \sqrt{x^2+9} - 3$ відносно $\beta(x) = x$ при $x \rightarrow 0$.

3. Порівняти нескінченно малі функції $\alpha(x) = \sqrt{1+2x} - 3$ та $\beta(x) = 2 - \sqrt{x}$ при $x \rightarrow 4$.

4. З'ясувати, які з нескінченно малих функцій $\alpha(x) = e^{x^2} - 1$, $\beta(x) = x \ln(1+x)$ та $\gamma(x) = x \cdot \sin 2x$ при $x \rightarrow 0$ будуть еквівалентними?

5. Дослідити на неперервність функцію, вказати характер точок розриву. Схематично побудувати графік функції $f(x)$.

$$1) f(x) = \frac{1}{3^{1+x}}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} x-2, & x \leq 1, \\ x^2-1, & 1 < x \leq 2, \\ 5-x, & x > 2. \end{cases}$$

6. Знайти похідну y' функції у завданнях 1) – 6) та похідні першого і другого порядку в завданні 6).

1) $y = 15\sqrt[5]{x^4 - 2x^3 - \frac{3}{x^2}}$; 2) $y = \frac{x^3 + 3^x}{\sqrt{\sin 3x}}$; 3) $y = e^{\arcsin x} \cdot \ln^4(2x-1)$;

4) $y = (\cos 3x)^{x^2+4}$; 5) $\sqrt{x-y^2} + \operatorname{tg}(xy) = 0$; 6) $\begin{cases} x = \sqrt{t-2}, \\ y = \ln(t-2). \end{cases}$

7. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 і знайти кут між цією дотичною та прямою l , якщо

$$y = \sqrt[3]{6x-5} + 2x, \quad x_0 = 1, \quad l: x + 4y - 13 = 0.$$

8. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

1) $y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$, 2) $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

Варіант 18

1. Обчислити границі:

- | | | |
|---|--|---|
| 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^2 - 16n^3}{2n^3 + 4n} + 1$ | 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! - 6n!}{(n+1)!n}$ | 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2+x)^{\sqrt{2}} - 2^{\sqrt{2}}}{(3+x)^{\sqrt{3}} - 3^{\sqrt{3}}}$ |
| 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n - 3n^2 - 6n^6}{2n^2 + 4n - 3}$ | 6) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x - \sqrt{x^2 - 1})$ | 10) $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 5)^{\frac{1}{x-2}}$ |
| 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n - 3n^2 - 5}{2n^4 + 4n}$ | 7) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^4 - 6x - 11}{x^2 - 6x - 7}$ | 11) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{9-2x}{3}\right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{6}}$ |
| 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - \sqrt[3]{8n}}{\sqrt[6]{n^2 - 2} + 5}$ | 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$ | 12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arcsin} x}$ |

2. Визначити порядок малості нескінченно малої функції $f(x) = \sin \sqrt{x}$ відносно $g(x) = \ln(1 + \sqrt[3]{x})$ при $x \rightarrow 0$.

3. Порівняти нескінченно малі функції $\alpha(x) = x^2 - 3x$ та $\beta(x) = \sqrt{x+6} - 3$ при $x \rightarrow 3$.

4. З'ясувати, які з нескінченно малих функцій $\alpha(x) = \arcsin 2x^3$, $\beta(x) = x^2 \cdot \operatorname{tg} x$ та $\gamma(x) = \sqrt{2x^2 + 1} - 1$ при $x \rightarrow 0$ будуть еквівалентними?

5. Дослідити на неперервність функцію, вказати характер точок розриву. Схематично побудувати графік функції $f(x)$.

$$1) f(x) = e^{\frac{2}{x}}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq 2, \\ x-2, & x > 2. \end{cases}$$

6. Знайти похідну y' функції у завданнях 1) – 6) та похідні першого і другого порядку в завданні 6).

$$1) y = \left(x^3 - 6\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{x^2}\right)^4; \quad 2) y = \frac{\sqrt{2-3x^5}}{\cos 2x}; \quad 3) y = 4^{\operatorname{arctg} x} \cdot \sin^2 4x;$$

$$4) y = \frac{(2x+1)^3 \sqrt[4]{x-3}}{(x^2+1)^2}; \quad 5) xy^3 + \sqrt{x^2+y^2} = 0; \quad 6) \begin{cases} x = e^t \sin 2t, \\ y = e^t \cos 2t. \end{cases}$$

7. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 і знайти кут між цією дотичною та прямою l , якщо

$$y = \frac{x^3}{x^2+1}, \quad x_0 = -1, \quad l: 2x + 2y + 3 = 0.$$

8. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

$$1) y = \frac{4x^3 - 3x}{4x^2 - 1}, \quad 2) y = x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Варіант 19

1. Обчислити границі:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8-5n^3-n^7}{2n^7+4n}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3-3n^2}{2n^3+4n}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-6n^3}{2n^2+4n+5}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{27n^3-7n^2}}{4-8n}$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)!-(n)!}{n^2(n-2)!}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^3+1}-x)$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4-8x}{x^2-7x+10}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+xtgx}-1}{1-\cos 6x}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-4x}{x^2-6}\right)^{8x}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{3x}\right)^{-2x}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-2^x}{1-3^x}$$

2. Визначити порядок малості нескінченно малої функції $f(x) = \ln(1+x^2)$ відносно $g(x) = \sqrt[3]{x}$ при $x \rightarrow 0$.

3. Порівняти нескінченно малі функції $\alpha(x) = 2\operatorname{tg} \pi x$ та $\beta(x) = \sin 2\pi x$ при $x \rightarrow 1$.

4. З'ясувати, які з нескінченно малих функцій $\alpha(x) = \operatorname{tg}^2 x$, $\beta(x) = x \ln(1+x)$ та $\gamma(x) = \sin x \arcsin 2x$ при $x \rightarrow 0$ будуть еквівалентними?

5. Дослідити на неперервність функцію, вказати характер точок розриву. Схематично побудувати графік функції $f(x)$.

$$1) f(x) = \frac{1}{2^{4x+1}}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1, \\ (x-2)^2, & 1 < x \leq 4, \\ 3-x, & x > 4. \end{cases}$$

6. Знайти похідну y' функції у завданнях 1) – 6) та похідні першого і другого порядку в завданні 6).

$$1) y = 9\sqrt[3]{2x^3 - 5x + \frac{4}{x^3}}; \quad 2) y = \frac{\cos^3 x - x}{2x^3 + 2^x}; \quad 3) y = e^{x^3} \cdot \arcsin \sqrt{x+1};$$

$$4) y = (\operatorname{tg} 3x)^{\ln 5x+1}; \quad 5) y^2 - \ln(y + \sqrt{x}) = 0; \quad 6) \begin{cases} x = \sqrt{t-1}, \\ y = \frac{2t}{\sqrt{t-1}}. \end{cases}$$

7. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 і знайти кут між цією дотичною та прямою l , якщо

$$y = (x+3) \cdot \sqrt[3]{5-x}, \quad x_0 = -3, \quad l: x+2y+3=0.$$

8. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

$$1) y = \frac{x^2-x-1}{x^2-2x}, \quad 2) y = \sqrt[3]{x(x+2)}.$$

Варіант 20

1. Обчислити границі:

- | | | |
|---|---|--|
| 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-7n^3+5}{7n^4-9n}$ | 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)!-9n!}{(n+2)!}$ | 9) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x^2-5}{1+7x^2} \right)^{\frac{4x-1}{5}}$ |
| 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6-4n^5-2n^3}{7n^5-9n}$ | 6) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^5-1} - \sqrt{x^5+1})$ | 10) $\lim_{x \rightarrow 2} (2x-4)^{\frac{1}{x-2}}$ |
| 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4+n-2n^3}{3n^2-9}$ | 7) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$ | 11) $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\ln \cos x}{\sin x}$ |
| 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^6-6n^2-7}}{\sqrt[6]{2n^9-5n}}$ | 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^3}-1}{(e^{7x}-1)x^2}$ | 12) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x^2}{x-1}$ |

2. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x) = \cos 2x - \cos 6x$ відносно $\beta(x) = \sqrt[3]{x}$ при $x \rightarrow 0$.

3. Порівняти нескінченно малі функції $\alpha(x) = 2x^2 + x$ та $\beta(x) = \sqrt{x+9} - 3$ при $x \rightarrow 0$.

4. З'ясувати, які з нескінченно малих функцій $\alpha(x) = x^2 + \sqrt{x}$, $\beta(x) = tg\sqrt{x}$ та $\gamma(x) = 2 \sin x$ при $x \rightarrow 0$ будуть еквівалентними?

5. Дослідити на неперервність функцію, вказати характер точок розриву. Схематично побудувати графік функції $f(x)$.

$$1) f(x) = \frac{5-5^{\frac{1}{x}}}{5+5^{\frac{1}{x}}}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} x+3, & x \leq 0, \\ 4-x, & 0 < x \leq 2, \\ x^2-2, & x > 2. \end{cases}$$

6. Знайти похідну y' функції у завданнях 1) – 6) та похідні першого і другого порядку в завданні 6).

$$1) y = \left(\frac{2}{x} + 4x^3 - 6\sqrt[3]{x^2} \right)^4; \quad 2) y = \frac{3^x + tg 2x}{\sqrt{4+3x^2}}; \quad 3) y = \ln^3 2x \cdot \arccos x^3;$$

$$4) y = \frac{(x+4)^5 \sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x-2}}; \quad 5) y^2 x + \sin \frac{y}{x} = 0; \quad 6) \begin{cases} x = 1 - \sin 2t, \\ y = t - \cos 2t. \end{cases}$$

7. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 і знайти кут між цією дотичною та прямою l , якщо

$$y = \frac{1-2x}{3-x}, \quad x_0 = 2, \quad l: x-5y-17=0.$$

8. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

$$1) y = \frac{3x^2-7}{2x+1}, \quad 2) y = (2x+5)e^{-2(x+2)}.$$

Варіант 21

1. Обчислити границі:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n - n^5 - 2}{7n^5 - 9n}$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! - 5n!}{(n-1)! + 7n!}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-8}{1+3x} \right)^{\frac{x^2}{x-1}}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n - 2n^3}{8n^5 - 3n}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 3})$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+2x)}{2x} \right)^{\frac{x}{5x-1}}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - 3n^5}{7n^3 - n}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^4 - n} - 3n^2}{\sqrt[3]{n^6} - 2n}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{\ln(x \operatorname{tg} 6x + 1)}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{ctg} x \ln(\cos x)}$$

2. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x) = \sin 5x - \sin 2x$ відносно $\beta(x) = \operatorname{tg} x$ при $x \rightarrow 0$.

3. Порівняти нескінченно малі функції $\alpha(x) = \sin(x - 1)$ та $\beta(x) = 1 - x^3$ при $x \rightarrow 1$.

4. З'ясувати, які з нескінченно малих функцій $\alpha(x) = x \operatorname{tg} 8x$, $\beta(x) = 1 - \cos 4x$ та $\gamma(x) = e^{4x} - e^{2x}$ при $x \rightarrow 0$ будуть еквівалентними?

5. Дослідити на неперервність функцію, вказати характер точок розриву. Схематично побудувати графік функції $f(x)$.

$$1) f(x) = \frac{1}{2 + 2^{\frac{1}{x-3}}}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ x, & 0 < x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

6. Знайти похідну y' функції у завданнях 1) – 6) та похідні першого і другого порядку в завданні 6).

$$1) y = 12\sqrt[4]{6x^3 - 4x^2 + \frac{3}{x^2}}; \quad 2) y = \frac{\sqrt{1-5x^4}}{\sin^5 x}; \quad 3) y = 4^{\operatorname{tg} x} \cdot \ln^5(3x+2);$$

$$4) y = (2x + x^2)^{\arcsin x}; \quad 5) \cos(xy) + x^2 y^2 = 0; \quad 6) \begin{cases} x = \sqrt[3]{t+1}, \\ y = \ln(t+1). \end{cases}$$

7. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 і знайти кут між цією дотичною та прямою l , якщо

$$y = 6\sqrt[3]{x} - 4\sqrt{x} + 2x, \quad x_0 = 1, \quad l: x + 2y - 9 = 0.$$

8. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

$$1) y = \frac{(x-2)^2}{x+1}, \quad 2) y = \sqrt[3]{x^2 + 4x + 3}.$$

Варіант 22

1. Обчислити границі:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7-3n^2-2n^3}{3-23n}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-27n^3}{5+3n^3-n}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{49-4n^3}{7n^4-19n}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{16n^3-2}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt[8]{n^6-3n-5}}$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n(n-1)!}{(n-1)!-6n!}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^3} - \sqrt{x^2-1})$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{1-\cos 2x}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{9x-2}{5+9x}\right)^{-3x}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 2\pi} (\cos x)^{\frac{3}{\sin^2 2x}}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1/x}}{\ln x}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x \ln(\sin x)$$

2. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x) = \sin 7x$ відносно $\beta(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$ при $x \rightarrow +0$.

3. Порівняти нескінченно малі функції $\alpha(x) = \ln(1 + \sin x)$ та $\beta(x) = \operatorname{arctg} 2x$ при $x \rightarrow 0$.

4. З'ясувати, які з нескінченно малих функцій $\alpha(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$, $\beta(x) = \sin 2x$ та $\gamma(x) = x + \sqrt{x}$ при $x \rightarrow 0$ будуть еквівалентними?

5. Дослідити на неперервність функцію, вказати характер точок розриву. Схематично побудувати графік функції $f(x)$.

$$1) f(x) = \frac{x+3}{7^{x-2}}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x^3, & 0 < x \leq 2, \\ 4+x, & x > 2. \end{cases}$$

6. Знайти похідну y' функції у завданнях 1) – 6) та похідні першого і другого порядку в завданні 6).

$$1) y = \left(4x^2 - \frac{5}{x^3} + 3\sqrt[3]{x^2}\right)^4; \quad 2) y = \frac{x^2 - \operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{3x^2 + 1}}; \quad 3) y = e^{\sin x} \cdot \arccos x^3;$$

$$4) y = \frac{(3x-1)^5 \sqrt[3]{x+2}}{\sqrt{x+1}}; \quad 5) xy^2 + \operatorname{ctg}(x^2 y) = 0; \quad 6) \begin{cases} x = e^t \sin t + t, \\ y = e^t \cos t - t. \end{cases}$$

7. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 і знайти кут між цією дотичною та прямою l , якщо

$$y = \frac{(x+1)^2}{x-2}, \quad x_0 = 1, \quad l: x - 8y - 33 = 0.$$

8. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

$$1) y = -\frac{8x}{x^2+4},$$

$$2) y = \frac{e^{3-x}}{3-x}.$$

Варіант 23

1. Обчислити границі:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4-2n^6-n^3}{7n^5-9n}$

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n!+(n-1)!}{(n-1)!+2n!}$

9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+6x^2}-1}{\ln(1-\cos 9x)}$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-3n^5}{n^5+9n}$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+5} - \sqrt{x-6})$

10) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(x+3) - \ln x)$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5+4n}{32n^3-9n}$

7) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-9x+20}{x^3-25x}$

11) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x^2}\right)^{\frac{5x^2}{x-1}}$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{8n^3-3n}}$

8) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right)$

12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$

2. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x) = \sqrt{x-3} - 1$ відносно $\beta(x) = x^2 - 16$ при $x \rightarrow 4$.

3. Порівняти нескінченно малі функції $\alpha(x) = e^{x^2} - 1$ та $\beta(x) = \sqrt{x}$ при $x \rightarrow 0$.

4. З'ясувати, які з нескінченно малих функцій $\alpha(x) = x^2 + 2x$, $\beta(x) = \ln(1 + 2x)$ та $\gamma(x) = \sqrt{7-x} - \sqrt{x+11}$ при $x \rightarrow -2$ будуть еквівалентними?

5. Дослідити на неперервність функцію, вказати характер точок розриву. Схематично побудувати графік функції $f(x)$.

$$1) f(x) = \frac{1}{2^{4-x}}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} \cos x, & x < \frac{\pi}{4}, \\ 1, & \frac{\pi}{4} < x < 3, \\ 2x - 5, & x \geq 3. \end{cases}$$

6. Знайти похідну y' функції у завданнях 1) – 6) та похідні першого і другого порядку в завданні 6).

1) $y = 6\sqrt{x^5 - 3x^3 + \frac{4}{x^4}}$; 2) $y = \frac{\sqrt{1-4x^2}}{\cos^3 2x}$; 3) $y = 3^{x^2+1} \cdot \operatorname{arctg} 3x$;

4) $y = (\sin 5x)^{\ln 2x}$; 5) $e^{\sqrt{xy}} - \ln(x+y^2) = 0$; 6) $\begin{cases} x = \sqrt{t-1}, \\ y = \sqrt[3]{t} + 1. \end{cases}$

7. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 і знайти кут між цією дотичною та прямою l , якщо

$$y = 14\sqrt{x} - 15\sqrt[3]{x} + 3, \quad x_0 = 1, \quad l: x + 2y - 5 = 0.$$

8. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

1) $y = \frac{8x}{(x-2)^2}$,

2) $y = (4-x)e^{x-3}$.

Варіант 24

1. Обчислити границі:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 2n^3}{7n^3 - n}$

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5(n+1)!}{(n-1)!n^2}$

9) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+5}\right)^{6x}$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n-3-2n^3}{2n^5-2n}$

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\ln(x \operatorname{tg} 2x + 1)}$

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{2x} + 1}{\ln(1+2x)}\right)^{\frac{x^2}{x-1}}$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-2n^3}{7n^4-9n+3}$

7) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+x-2}{x^3-x^2+x-1}$

11) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2-4}}{2x+4}$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n-2} - \sqrt{n})$

8) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\sin \pi x}$

12) $\lim_{x \rightarrow -2-0} \cos \frac{\pi x}{4} \ln(2-x)$

2. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x) = 1 - \cos 2x$ відносно $\beta(x) = \operatorname{tg} x$ при $x \rightarrow 0$.

3. Порівняти нескінченно малі функції $\alpha(x) = x - 3$ та $\beta(x) = \sqrt{13+x} - 2\sqrt{x+1}$ при $x \rightarrow 3$.

4. З'ясувати, які з нескінченно малих функцій $\alpha(x) = e^{3x} - e^{2x}$, $\beta(x) = \ln(1-x)$ та $\gamma(x) = \sin x$ при $x \rightarrow 0$ будуть еквівалентними?

5. Дослідити на неперервність функцію, вказати характер точок розриву. Схематично побудувати графік функції $f(x)$.

$$1) f(x) = 8^{\frac{2}{7-x}}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ x^2 - 1, & -1 < x \leq 2, \\ 2x, & x > 2. \end{cases}$$

6. Знайти похідну y' функції у завданнях 1) – 6) та похідні першого і другого порядку в завданні 6).

1) $y = \left(\frac{3}{x^2} + 2x^4 - 4\sqrt{x^3}\right)^5$; 2) $y = \frac{\sin^2(1-x)}{\sqrt{x^3+2}}$; 3) $y = e^{\arcsin 2x} \cdot \ln^4 2x$;

4) $y = \frac{(x-1)^2 \sqrt[4]{x+1}}{\sqrt{x+2}}$; 5) $\operatorname{tg}(xy) + 3^x y^3 = 0$; 6) $\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = \cos^3 t. \end{cases}$

7. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 і знайти кут між цією дотичною та прямою l , якщо

$$y = \frac{1+3x^2}{3+x^2}, \quad x_0 = -1, \quad l: x - y + 2 = 0.$$

8. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

1) $y = \frac{x^2+6}{x^2+1}$,

2) $y = (x+1)e^{2x}$.

Варіант 25

1. Обчислити границі:

- | | | |
|--|--|---|
| 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-3n^3+7}{9n^5-9}$ | 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n!-(n-1)!}{(n-1)!+3n!}$ | 9) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg} px}{x+2}$ |
| 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-3n^2-2n^3}{7n^3-19n}$ | 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{6n-1})$ | 10) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-x}{1-\sqrt{x}}}$ |
| 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-7n^2-27n^3}{5n^2-3n}$ | 7) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5-2x-1}{x^3-x}$ | 11) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 3x)^{\frac{3}{\operatorname{tg} 4x}}$ |
| 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^4-2n^2-3n}}{\sqrt[3]{8n^3+3n-2}}$ | 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{16+x^2}-4}$ | 12) $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} x)^{\sin x}$ |

2. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x) = \sin 5x - \sin 3x$ відносно $\beta(x) = \sin \sqrt{2x}$ при $x \rightarrow 0$.

3. Порівняти при $x \rightarrow 1$ нескінченно малі функції $\alpha(x) = x^2 + x - 2$ та $\beta(x) = \sqrt{x+3} - 2$.

4. З'ясувати, які з нескінченно малих функцій $\alpha(x) = e^{3x} - e^{-x}$, $\beta(x) = \cos 2x - \cos 4x$ та $\gamma(x) = \sin 3x + \operatorname{tg} x$ при $x \rightarrow 0$ будуть еквівалентними?

5. Дослідити на неперервність функцію, вказати характер точок розриву. Схематично побудувати графік функції $f(x)$.

$$1) f(x) = 5^{\frac{2x+5}{2x+1}}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x < 2, \\ 2x, & x \geq 2. \end{cases}$$

6. Знайти похідну y' функції у завданнях 1) – 6) та похідні першого і другого порядку в завданні 6).

$$1) y = 5\sqrt{x^4 - 2x^2 + \frac{3}{x^3}}; \quad 2) y = \frac{2 - \ln^3 x}{e^x + x^3}; \quad 3) y = 5^{\operatorname{arctg} x} \cdot \sin(x+5)^2;$$

$$4) y = (x + \sqrt{x})^{\cos 4x}; \quad 5) \cos(x^2 y) + \sqrt{xy} = 0; \quad 6) \begin{cases} x = e^t + t, \\ y = \operatorname{arcsin} t. \end{cases}$$

7. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 і знайти кут між цією дотичною та прямою l , якщо

$$y = \frac{\ln x}{1+x^2}, \quad x_0 = 1, \quad l: 2x + y - 2 = 0.$$

8. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

$$1) y = \frac{4x}{4+x^2}, \quad 2) y = \frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-2}}.$$

Варіант 26

1. Обчислити границі:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{14 - n^4 - 6n^3}{5n^5 - 10n}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8 - 3n^2 - 2n^3}{2n^3 - 2}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - 2n^2}{1 + 7n^3 - 9n}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^3 - \sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{8n^9 - 4} - 1}$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9(n-2)!}{(n-1)! + 2n!}$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} - \sqrt{4n+1})$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 4x - 12}{x^3 - 36x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{1+x} - \sqrt{2x})$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 4x}{\operatorname{tg} 3x}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-8}{7+x} \right)^{\frac{2x^2}{x-4}}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x}$$

2. Визначити порядок малості нескінченно малої функції $f(x) = e^{x^2} - 1$ відносно $g(x) = \sqrt[4]{x}$ при $x \rightarrow 0$.

3. Порівняти нескінченно малі функції $\alpha(x) = \arcsin x^2$ та $\beta(x) = \operatorname{tg} \sqrt{x}$ при $x \rightarrow 0$.

4. З'ясувати, які з нескінченно малих функцій $\alpha(x) = 2 \sin 2x$, $\beta(x) = 1 - \cos 2x$ та $\gamma(x) = 2x^2$ при $x \rightarrow 0$ будуть еквівалентними?

5. Дослідити на неперервність функцію, вказати характер точок розриву. Схематично побудувати графік функції $f(x)$.

$$1) f(x) = \frac{1}{1+3^{\frac{1}{x}}}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ \cos x, & 0 \leq x < \pi, \\ 1-x, & x > \pi. \end{cases}$$

6. Знайти похідну y' функції у завданнях 1) – 6) та похідні першого і другого порядку в завданні б).

$$1) y = \left(x^2 - \frac{4}{\sqrt{x}} + 3\sqrt[3]{x} \right)^6; \quad 2) y = \frac{x - \cos^3 x}{\sqrt{x^2 + 1}}; \quad 3) y = e^{\sin 2x} \cdot \operatorname{arctg} x^2;$$

$$4) y = \frac{(2x-3)^2 \sqrt[3]{x+3}}{(x+1)^4}; \quad 5) xy^3 + \ln \frac{y}{x} = 0; \quad 6) \begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = \ln \cos 2t. \end{cases}$$

7. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 і знайти кут між цією дотичною та прямою l , якщо

$$y = \frac{x+3}{\sqrt{x-2}}, \quad x_0 = 3, \quad l: x - 2y + 9 = 0.$$

8. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

$$1) y = \frac{x^2 - 11}{4x - 3}, \quad 2) y = (x - 1)e^{3x+1}.$$

Варіант 27

1. Обчислити границі:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+7n^2-2n^3}{4n^5-9n+6}$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n(n-1)!}{7(n-1)!-4n!}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x(1 - \cos 2x)}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8-3n^4-2n^3}{9-5n}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{7x^2+2} - 2x)$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2-4x}{3x^2-1} \right)^{-7x}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-4n-2n^3}{5n^3-9n}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+4x-5}{x^3-x}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{4x}}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{1+2n} - \sqrt{2n})$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x}{x^2}$$

2. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x) = x - 6$ відносно $\beta(x) = \sqrt{x-2} - 2$ при $x \rightarrow 6$.

3. Порівняти при $x \rightarrow 0$ нескінченно малі функції $\alpha(x) = x^2 - x^3$ та $\beta(x) = \sqrt{4+x^2} - 2$.

4. З'ясувати, які з нескінченно малих функцій $\alpha(x) = 2 \sin 4x$, $\beta(x) = 1 - \cos 2x$ та $\gamma(x) = 2x^2 + 8x$ при $x \rightarrow 0$ будуть еквівалентними?

5. Дослідити на неперервність функцію, вказати характер точок розриву. Схематично побудувати графік функції $f(x)$.

$$1) f(x) = \frac{5^{1/x}-1}{5^{1/x}+1}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1, \\ (x-2)^2, & 1 < x \leq 3, \\ 6-x, & x > 3. \end{cases}$$

6. Знайти похідну y' функції у завданнях 1) – 6) та похідні першого і другого порядку в завданні 6).

$$1) y = 6\sqrt[3]{4x^2 - 5x + \frac{3}{x^4}}; \quad 2) y = \frac{\arcsin 2x}{1-4x^2}; \quad 3) y = 3^{\ln 2x} \cdot \operatorname{ctg}^3(2x-1);$$

$$1) y = (\sin 5x)^{x^3-3x}; \quad 5) \cos(y^2x) + \frac{y}{x^2} = 0; \quad 6) \begin{cases} x = \sqrt{1+t}, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$$

7. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 і знайти кут між цією дотичною та прямою l , якщо

$$y = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}, \quad x_0 = 4, \quad l: 2x - y - 5 = 0.$$

8. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

$$1) y = \frac{x^2-3x+2}{x+1}, \quad 2) y = \sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}.$$

Варіант 28

1. Обчислити границі:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^5 - 5n^3 + 6}{4n^5 - 8n}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 + 7n^5 - 2n^7}{7n^5 - 9n}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n - 3n^5 - 9}{4n^2 - n - 7}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^4} - 5n^2}{\sqrt[3]{n^6} - 4n + 3}$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^2(n-1)!}{(n+1)! + n!}$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 2} - 5n)$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - 2x - 21}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3+x^2}{x^2-4x} \right)^{3x-2}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \pi} \left(\operatorname{ctg} \frac{x}{4} \right)^{\frac{1}{\cos \frac{x}{2}}}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow -\pi/2} \frac{1 + \sec x}{1 + \operatorname{tg} x}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^x$$

2. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x) = \ln(1 + 5x)$

відносно $\beta(x) = \sqrt{1 - x^2} - 1$ при $x \rightarrow 0$.

3. Порівняти нескінченно малі функції $\alpha(x) = x^2 - 1$ та

$\beta(x) = \arcsin(\sqrt{x} - 1)$ при $x \rightarrow 1$.

4. З'ясувати, які з нескінченно малих функцій $\alpha(x) = 2^x - 1$,

$\beta(x) = \ln(1 + 2x)$ та $\gamma(x) = \sin 2x$ при $x \rightarrow 0$ будуть еквівалентними?

5. Дослідити на неперервність функцію, вказати характер точок розриву.

Схематично побудувати графік функції $f(x)$.

$$1) f(x) = \frac{2 - 2^{\frac{1}{x}}}{2 + 2^{\frac{1}{x}}}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

6. Знайти похідну y' функції у завданнях 1) – 6) та похідні першого і другого порядку в завданні 6).

$$1) y = \left(\frac{1}{x^5} + 3x^5 - 6\sqrt[3]{x^2} \right)^4; \quad 2) y = \frac{\sin(x^4 + 2)}{\sqrt{2x + 4}}; \quad 3) y = \cos^5(1 - x) \cdot \ln 5^x;$$

$$4) y = \frac{(x + 3)^5 \sqrt[4]{x + 1}}{(2x - 4)^3}; \quad 5) \operatorname{arctg}(xy) + xe^y = 0; \quad 6) \begin{cases} x = t \sin t + \cos t, \\ y = \sin t - \cos t. \end{cases}$$

7. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 і

знайти кут між цією дотичною та прямою l , якщо

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}, \quad x_0 = -1, \quad l: 3x + 2y + 3 = 0.$$

8. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

$$1) y = \frac{1 - 2x^3}{x^2};$$

$$2) y = \ln \left(2 - \frac{1}{x^2} \right).$$

Варіант 29

1. Обчислити границі:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n-3n^5-5}{7n^2-4}$

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n!+2(n-1)!}{(n-1)!+5n!}$

9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^{4x}-e^{2x})}{\sqrt{16+x^2}-4}$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7-8n^3-2n^2}{19n^3-9n+5}$

6) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{9n^2+2}-n)$

10) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x}{6+4x}\right)^{-x+5}$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2-2n^4}{7n^5-9n-6}$

7) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^3-x-4}{x^4-x}$

11) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{x-2}\right)^{\frac{x^3-3}{x^4}}$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{3n^3-n^5-7n}}{\sqrt[3]{27n^3-n}}$

8) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2-x}(1-x)}{x^2-1}$

12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+1/x}{1-1/x}$

2. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x) = \sin 4x \cdot \sin 2x$ відносно $\beta(x) = x$ при $x \rightarrow 0$.

3. Порівняти нескінченно малі функції $\alpha(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ та $\beta(x) = \sqrt[3]{x+7} - 2$ при $x \rightarrow 1$.

4. З'ясувати, які з нескінченно малих функцій $\alpha(x) = e^{2x} - e^{5x}$,

$\beta(x) = \ln(1-3x)$ та $\gamma(x) = \arctg 2x$ при $x \rightarrow 0$ будуть еквівалентними?

5. Дослідити на неперервність функцію, вказати характер точок розриву. Схематично побудувати графік функції $f(x)$.

$$1) f(x) = \frac{2-3x}{3^{1+5x}}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 2^x, & 0 < x \leq 2, \\ x+3, & x > 2. \end{cases}$$

6. Знайти похідну y' функції у завданнях 1) – 6) та похідні першого і другого порядку в завданні б).

1) $y = 8\sqrt[4]{5x^3 - 4x^2 - \frac{2}{x^3}}$; 2) $y = \frac{x^2 + 3^x}{\cos^3 2x}$; 3) $y = e^{ctg 2x} \cdot \sin^2(3x-4)$;

4) $y = (\arctg 2x)^{\ln 4x+1}$; 5) $\sqrt{x+y^2} + \ln y = 0$; 6) $\begin{cases} x = \sqrt[3]{t+1}, \\ y = \sqrt[3]{1-t}. \end{cases}$

7. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 і знайти кут між цією дотичною та прямою l , якщо

$$y = 3\sqrt[4]{x} - 2\sqrt{x} + x, \quad x_0 = 1, \quad l: 4x + 3y - 10 = 0.$$

8. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

1) $y = \frac{x^5}{x^4-1}$,

2) $y = \sqrt[3]{4x(x-1)}$.

Варіант 30

1. Обчислити границі:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3-2n^6-2n^5}{23n^5-5n+3}$

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(n+1)}{(n+1)!+2n!}$

9) $\lim_{x \rightarrow 3} (3x-8)^{\frac{1}{x-3}}$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^5-4n^3}{2-9n^5-9n}$

6) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^3} - 2n)$

10) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x}{x-3}\right)^{\frac{x^3-4}{x^2}}$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-2n^3}{5n^4-n-3}$

7) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2-5x+2}{x^3-4x}$

11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-tgx}{x^2}$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n-3} - \sqrt[3]{n})$

8) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sqrt{2}-2\cos x}{\pi-4x}$

12) $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\ln \cos x}{\sin x}$

2. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x) = x^2 - x^4$ відносно $\beta(x) = \operatorname{tg} x$ при $x \rightarrow 0$.

3. Порівняти при $x \rightarrow -1$ нескінченно малі функції $\alpha(x) = x^3 - 3x - 2$ та $\beta(x) = x^2 + x$.

4. З'ясувати, які з нескінченно малих функцій $\alpha(x) = x^2 - 1$, $\beta(x) = 7\pi \operatorname{arctg}(x - 1)$ та $\gamma(x) = \sin 7\pi x$ при $x \rightarrow 1$ будуть еквівалентними?

5. Дослідити на неперервність функцію, вказати характер точок розриву. Схематично побудувати графік функції $f(x)$.

$$1) f(x) = 2^{\frac{x-1}{x+1}}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1, \\ 1-x, & -1 < x \leq 1, \\ \ln x, & x > 1. \end{cases}$$

6. Знайти похідну y' функції у завданнях 1) – 6) та похідні першого і другого порядку в завданні 6).

1) $y = \left(4x^3 - \frac{3}{x^2} - 2\sqrt[4]{x^3}\right)^5$; 2) $y = \frac{\operatorname{tg}^3(x+1)}{\sqrt{3x^2+2}}$; 3) $y = 3^{\arccos x} \cdot \ln^4(1-2x)$;

4) $y = \frac{(2x+1)^3 \sqrt{x-3}}{(x+5)^2}$; 5) $\sin \frac{x}{y} - x^2 y^2 = 0$; 6) $\begin{cases} x = \sin t + \cos t, \\ y = \cos 2t. \end{cases}$

7. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 і знайти кут між цією дотичною та прямою l , якщо

$$y = \frac{2x+1}{\sqrt{x-3}}, \quad x_0 = 4, \quad l: 2x - 5y + 37 = 0.$$

8. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

1) $y = \frac{x^3+4}{x^2}$,

2) $y = (x-1)e^{4x+2}$.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
2. Бугров Я. С., Никольский С. М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1988. – 431 с.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для студентов вузов. В 2-х ч. Ч.1. – М.: Высш. школа, 1986. – 304 с.
4. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2003. – 648 с.
5. Давидов М. О. Курс математичного аналізу. В 3 ч.– Ч. 1 –. К.: Вища школа, 1990. —383 с.
6. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: підручник у двох частинах. Ч.1 – К. Либідь, 1993. – 320 с.
7. Запорожец Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу. . – М.: Высш. шк., 1966. – 464 с.
8. Кудрявцев В. А., Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1989. – 656 с.
9. Ляшко И. И., Боярчук А. К., Гай Я. Г., Головач Г. П. Математический анализ в примерах и задачах, ч. 1. Введение в анализ, производная, интеграл. – К.: Вища шк., 1975. – 680 с.
10. Овчинников П. П. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 1. /П.П.Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко. – К.: Техніка, 2007. – 600 с.
11. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для вузов. В 3 т. – М.: Наука, т. 1, 2001. – 415 с.
12. Сборник задач по математике для вузов / под ред. Ефимова А.В., Демидовича Б.П.. – М.: Наука, 1981. – 464 с.
13. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Наука. – Т. 1, 1970. – 607 с.
14. Шунда Н.М., Томусьяк А.А. Практикум з математичного аналізу: Навч. посібник. – К.: Вища школа, 1993. – 375 с.
15. Герасимчук В.С., Васильченко Г.С., Кравцов В.І. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах: У 3 т. – К.: Книги України ЛТД, 2009-2010.
16. Герасимчук В.С., Васильченко Г.С., Кравцов В.І. Курс классической математики в примерах и задачах: В 3 ч. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008-2009.

ЗМІСТ

ВСТУП	3
Розділ 1. ТЕОРІЯ ГРАНИЦЬ	4
1. Числова послідовність та її границя.	4
2. Границя функції неперервного аргумента	8
Розділ 2. ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ГРАНИЦЬ	14
1. Нескінченно малі функції та їх властивості. Порівняння нескінченно малих функцій. Еквівалентність нескінченно малих функцій	14
2. Неперервність функції в точці та на відрізку	17
3. Класифікація точок розриву	18
Розділ 3. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ	23
1. Похідна функції. Основні правила та формули диференціювання	23
2. Диференціювання функцій, заданих в неявному та параметричному вигляді. Логарифмічна похідна	28
3. Геометричний зміст похідної. Рівняння дотичної та нормалі до кривої	31
Розділ 4. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ	34
1. Правило Лопіталя	34
2. Монотонність функції. Екстремуми	35
3. Найбільше і найменше значення функції на відрізку	38
4. Опуклість і вгнутість кривих. Точки перегину	39
5. Асимптоти кривої	41
6. Повне дослідження функції та побудова її графіка	44
ЗАВДАННЯ ТИПОВОГО РОЗРАХУНКУ	53
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	83
ЗМІСТ	84