МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

ЧАСТИНА 2

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ КІЛЬКОХ ДІЙСНИХ ЗМІННИХ

ІНТЕГРАЛИ, ЩО ЗАЛЕЖАТЬ ВІД ПАРАМЕТРА

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступенябакалавра
за освітньою програмою «Інтелектуальні сервіс-орієнтовані розподілені обчислення»
спеціальності 122 «Комп’ютерні науки»

Укладач: Ю. Є. Бохонов

Електронне мережне навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського

2023

Рецензент *Жук П.Ф.*, д-р ф-м.н., проф.. каф. прикладної математики Національної авіаційної академії України

Відповідальний редактор *Подколзін Г.Б.*, к. ф.-м.н., доцент

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 8 від 02.06.2023 р.)
за поданням Вченої ради Навчально-наукового інституту прикладного системного аналізу
(протокол № 5 від 29.05.2023 р.)

У посібнику викладено розділи математичного аналізу – диференціальне числення функцій багатьох змінних, теорію числових і функціональних рядів, інтегралів, що залежать від параметра. Він містить повні доведення теорем і інших положень. Наведено багато різноманітних прикладів, які допомагають краще оволодіти методами аналізу. Запропоновано уніфіковану методику, особливо при використанні матричного підходу при викладенні диференціального числення. Навчальний посібник призначений для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» і буде також корисний тим, хто поглиблено вивчає математичний аналіз, зокрема, за спеціальністю 124 «Системний аналіз».

Посібник є продовженням посібників автора: «Математичний аналіз: диференціальне числення функцій однієї змінної» Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 164 с. https://ela.kpi.ua/handle/123456789/42337 та «Диференціальне числення функцій кількох дійсних змінних. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Частина I» – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 83 с. https://ela.kpi.ua/handle/123456789/42338

Навчальний посібник призначений для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» і буде також корисний тим, хто поглиблено вивчає математичний аналіз, зокрема, за спеціальністю 124 «Системний аналіз».

Реєстр. № НП 22/23-741. Обсяг 3,7 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056
https://kpi.ua
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

ЗМІСТ

Скорочення та умовні позначення

$\lim\limits_{x \to x_0}$ - границя,

$df\left(x_0\right)$ - диференціал функції,

$\dfrac{\partial}{\partial x}$ - частинна похідна

$grad\ f$ - градієнт функції,

$\left(g \circ f\right)\left(x\right) \triangleq g\left(f\left(x\right)\right) : \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^k$ - композиція функцій (відображень):

$L(E,F)$ - лінійний простір операторів, що діють з лінійного простору E у лінійний простір F,

$\left(\mathbb{R}^n\right)^*$ - n-вимірний простір дійсних векторів-рядків,

$\mathbb{R}^n$ - n-вимірний простір дійсних векторів-стовпчиків,

$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \ldots \\ x^n \end{pmatrix}$ - вектор-стовпчик,

$x = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)^T \in \mathbb{R}^n$ - вектор-стовпчик,

$\left(\mathbb{R}^n\right)*$ - n-вимірний простір дійсних векторів-рядків,

$\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ - вектор-рядок,

$\|h\|$ - норма вектора, а також оператора,

$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1\left(x_0\right)}{\partial x_1} \cdots \dfrac{\partial f_1\left(x_0\right)}{\partial x_n} \\ \cdots \\ \dfrac{\partial f_k\left(x_0\right)}{\partial x_1} \cdots \dfrac{\partial f_m\left(x_0\right)}{\partial x_n} \\ \ldots \\ \dfrac{\partial f_m\left(x_0\right)}{\partial x_1} \cdots \dfrac{\partial f_m\left(x_0\right)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ - матриця Якобі відображення,

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 (x)}{\partial x_2^2} & \dots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ . & . & \dots & . \\ \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$ - матриця Гессе відображення,

$\dfrac{D(y_1, \ldots, y_m)}{D(x_1, \ldots, x_n)}$ - похідна за Лейбницем,

$\int\limits_a^b f(x)dx$ - визначений інтеграл,

$\int\limits_a^\infty f(x)dx$ - невласний інтеграл,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - числовий ряд,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ - функціональний ряд,

B, Γ - бета і гама-функції Ейлера.

Передмова

Математичний аналіз є важливою складовою математики взагалі і математичної програми у вищих навчальних закладах зокрема. Він тісно пов'язаний з іншими математичними дисциплінами – аналітичною геометрією та алгеброю, теорією ймовірностей та дискретною математикою.

Пропонований посібник створено на основі програми навчальної дисципліни (силабусу) для спеціальності 122 «Компьютерні науки», але може бути використаний для інших спеціальностей, що потребують поглибленого вивчення предмету. Вміщено також додатки для тих, хто цікавиться математикою.

Посібник містить три великі теми: диференціальне числення функцій від багатьох змінних, числові та функціональні ряди, інтеграли, що залежать від параметра, і є продовженням посібників автора:
«Математичний аналіз: диференціальне числення функцій однієї змінної» Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 164 с.
https://ela.kpi.ua/handle/123456789/42337
і
«Диференціальне числення функцій кількох дійсних змінних. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Частина І» – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 83 с.
https://ela.kpi.ua/handle/123456789/42338

Матеріал, викладений у посібнику, дозволить активізувати пізнавальну діяльність при вивченні математичного аналізу, вивільнити час для практичної підготовки.

Вступ

Посібник «Математичний аналіз, частина 2. Диференціальне числення функцій кількох дійсних змінних. Інтеграли, що залежать від параметра» призначено для вивчення диференціального числення функцій кількох дійсних змінних студентами спеціальності 122 «Комп'ютерні науки». Містить основні положення теорії з повними доведеннями. Теорія ілюструється на багатьох прикладах, які охоплюють основні теми розділу, диференціального числення функцій багатьох змінних, зокрема, диференціювання складених функцій з широким застосуванням матриці

Якобі багатовимірних відображень, диференціювання функцій та відображень, що задані неявно, а також задачі на знаходження локального і умовного екстремуму.

Наступна глава присвячена теорії числових та функціональних рядів. Разом зі стандартними ознаками додатних числових рядів приводяться ознаки Куммера, Бертрана, Гауса. Розглядаються також незнакосталі ряди та їхні загальні властивості. В Доповненні приводиться задача Ейлера, з якої робиться висновок про необмеженість множини простих чисел.

В останній главі викладено теорію власних та невласних інтегралів, що залежать від параметра з доведенням властивостей диференційовності і інтегрованості їх за параметром. Теорія застосовується для знаходження класичних інтегралів Діріхлє, Ейлера-Пуасона, Френеля, Фрулані. Особливе місце займає теорія B і Γ-функцій Ейлера з розглядом важливих задач з цієї тематики. Також пропонується підхід до цих функцій з точки зору нескінченних добутків (6. Додаток).

В главі 6. Додаток наводяться різні форми теореми про середнє у диференціальному численні та теореми про існування, єдиність і диференційовність неявної функції.

В главі 8. Додаток викладено перетворення Лежандра.

1. ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

1.1. Множини і функції в багатовимірних просторах

Нагадаємо деякі поняття лінійної алгебри.

Нехай E - лінійний простір. Це означає, що разом з двома його елементами, які ще називаються векторами, $x, y \in E, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha x + \beta y \in E$.

$\alpha x + \beta y$ називається лінійною комбінацією векторів x і y. При цьому справджується ряд аксіом що до додавання і множення векторів на числа (скаляри), які можна знайти в будь-якому підручнику з лінійної алгебри.

Нехай E, F - лінійні простори. Відображення $A: E \to F$ називається лінійним оператором, якщо воно переводить лінійну комбінацію $\alpha x + \beta y$ в лінійну комбінацію образів цих векторів: $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$. Множина таких лінійних операторів позначається $L(E, F)$. Легко бачити, що лінійні оператори утворюють лінійний простір, тобто, лінійна комбінація лінійних операторів – теж лінійний оператор.

Лінійний оператор v, що діє в таких просторах: $v: E \to \mathbb{R}^1$, називається лінійним функціоналом. Тобто, образ кожного вектора з E - це число. Простір лінійних функціоналів, що визначені на E, називається спряженим до E простором і позначається E^*.

Далі ми будемо розглядати, як правило, лінійні простори векторів-стовпчиків і будемо його позначати $\mathbb{R}^n$. Елементи цього простору – вектори-стовпчики:

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Для зручності запису часто такий вектор будемо позначати

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$.

Тут позначення «*T*» означає транспонування.

Легко бачити, лінійний функціонал $v^* \in (\mathbb{R}^n)^*$ може бути записано в такій формі: $v^* = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in (\mathbb{R}^n)^*$. Тобто, це матриця, що складається з одного рядка і n стовпчиків. Його дія на вектор $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ може бути записана,

якщо користуватись відомими правилами множення матриці на вектор, таким чином: $v^*(x) = (v_1, v_2, \dots, v_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} v_k x_k \in \mathbb{R}^1.$

Зауваження. В диференціальній геометрії використовують дещо інші позначення для векторів з $\mathbb{R}^n$ і з спряженого простру:

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, v^* = (v_1, v_2, \dots, v_n), v^*(x) = \sum_{k=1}^{n} v_k x^k \in \mathbb{R}^1.$$

Зверніть увагу на розташування індексів! Тоді для суми добутків, що складається з множників, у одного з яких індекс унизу, а другий угорі, використовують позначення без знаку суми:

$$\sum_{k=1}^{n} v_k x^k \equiv v_k x^k.$$

Це так зване правило Ейнштейна, але ми, усвідомлюючи перевагу такого підходу, все ж таки не будемо використовувати ці конструкції.

У просторі $\mathbb{R}^n$ можна визначити скалярний добуток:

$$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \; (x, y) = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \right) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \in \mathbb{R}^1.$$

Нагадаємо, що в абстрактному просторі скалярний добуток $(x,y)\in\mathbb{R}$ вводиться системою аксіом:

1). $(x,x)\geq 0,(x,x)=0\Leftrightarrow x=0$,
2). $(y,x)=(x,y)$,
3). $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}\ (\alpha x+\beta y,z)=\alpha\left(x,z\right)+\beta\left(y,z\right)$.

Лінійний простір, на якому визначено скалярний добуток, називається евклідовим.

В лінійній алгебрі доводиться теорема Ріса, що стверджує, що в евклідовому просторі кожному лінійному функціоналу $v^*\in\left(\mathbb{R}^n\right)^*$ взаємно-однозначно відповідає вектор $v\in\mathbb{R}^n$ такий, що $v^*(x)=(v,x)$.

Для функціоналів з $v^*=\left(v_1,v_1,...,v_n\right)\in\left(\mathbb{R}^n\right)^*$ цей факт тривіальний:

$$v^*=\left(v_1,v_2,...,v_n\right)\in\left(\mathbb{R}^n\right)^*\Leftrightarrow v=\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ \dots\\ v_n\end{pmatrix};v^*(x)=(v,x)=\sum_{k=1}^{n}v_kx_k\ .$$

За допомогою скалярного добутку можна визначити норму вектора $x:\|x\|\geq 0$ як узагальнення модуля вектора, відоме з аналітичної геометрії. Нагадаємо, що норма вводиться системою аксіом:

1). $\|x\|\geq 0,\|x\|=0\Leftrightarrow x=0,$
2). $\forall\alpha\in\mathbb{R}\ \|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|,\ .\ h$ на
3). $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$.

Властивість 3) називається нерівністю трикутника.

У евклідовому просторі норму можна ввести за формулою:

$$\|x\|=\sqrt{(x,x)}$$

Доведення перших двох властивостей норми з очевидністю випливає з властивостей скалярного добутку. Доведемо справедливість третьої властивості. Спочатку доведемо нерівність Коші-Буняковського:

$$|(x,y)|\leq\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}\ .$$

Доведення. $\forall t\in\mathbb{R}\ \left(x+ty,x+ty\right)=\left(x,x\right)+2\left(x,y\right)t+\left(y,y\right)t^2\geq 0$.

Оскільки коефіцієнт при t^2 додатний, нерівність виконується тоді і тільки тоді, коли дискримінант квадратного тричлена недодатний: $\frac{D}{4} = (x,y)^2 - (x,x)(y,y) \le 0$. Це й доводить нерівність. Зауважимо, що рівність в нерівності має місце тоді і тільки тоді, коли при деякому значенні t квадратний тричлен, а значить і скалярний добуток буде дорівнювати нулю, звідки випливає, що $x + ty = 0$, тобто вектори колінеарні.

Доведемо тепер нерівність трикутника. Маємо:

$(x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) \le (x,x) + 2\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)} + (y,y) =$

$= \left(\sqrt{(x,x)} + \sqrt{(y,y)}\right)^2$. Тобто, $\sqrt{(x+y,x+y)} \le \sqrt{(x,x)} + \sqrt{(y,y)}$, що й треба було довести.

Відстань між двома векторами нормованого простору визначається формулою:

$$\rho(x,y) = \|x - y\|.$$

Відкритою кулею в нормованому просторі з центром в точці x_0 радіуса *R* називається множина точок *x*, що визначаються умовою: $B_R(x_0) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < R\right\}$; $B_R^a(x_0) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \le R\right\}$ - замкнена куля, $S_R(x_0) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| = R\right\}$ - сфера з центром в точці x_0 радіуса *R*. Відкрита куля $B_\delta(x_0)$ називається δ - околом точки x_0.

Множина $M \subset \mathbb{R}^n$ називається відкритою, якщо кожна точка входить в неї з деяким відкритим δ-околом. Множина називається замкненою, якщо доповнення до неї – відкрита множина.

Нехай $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. $A \in \mathbb{R}^m$ називається границею функції, якщо її аргумент прямує до $a \in \mathbb{R}^n$, $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall 0 < \|x - a\| < \delta \|f(x) - A\| < \varepsilon.$$

Якщо $x_0 \in D(f)$ і $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ функція називається неперервною в точці x_0.

Якщо функція неперервна в кожній точці множини *M* , то кажуть, що функція неперервна на множині *M*. Цей факт позначається так: $f \in C^0(M)$.

Застосовуючи техніку, як і для функцій однієї змінної (лему про покриття), можна довести наступний факт:

Теорема Вейерштраса. Функція, неперервна на обмеженій замкненій множині, досягає на ній значення своїх супремуму і інфімуму.

Контрольні питання.

Наступні конструкції і факти переносяться з одновимірного випадку.

1). Дати означення границі функції мовою околів.

2). Дати означення границі функції за Гейне.

3). Сформулювати теорему Кантора про рівномірну неперервність.

2. Диференціальне числення функцій багатьох змінних

2. 1. Диференційовність функцій багатьох змінних. Поняття диференціала

Починаємо вивчати диференціальне числення функцій багатьох змінних. Ці функції можуть приймати як скалярні, так і векторні значення. Безумовно, ми будемо використовувати факти з відповідної теми з одновимірного аналізу, але будуть з'являтись якісно нові конструкції і властивості.

Нехай функція визначена на відкритій множині D області у багатовимірному просторі $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \cdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$.

Нехай $x_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ \dots \\ x_{0n} \end{pmatrix} \in D, h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, x = x_0 + h = \begin{pmatrix} x_{01} + h_1 \\ x_{02} + h_2 \\ \dots \\ x_{0n} + h_n \end{pmatrix}$. h називається приростом аргументу,

$$\Delta f\left(x_0\right)=f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)=\begin{pmatrix} f_1\left(x_{01}+h_1,x_{02}+h_2,\ldots,x_{0n}+h_n\right)-f_1\left(x_{01},x_{02},\ldots,x_{0n}\right) \\ \cdots \\ f_m\left(x_{01}+h_1,x_{02}+h_2,\ldots,x_{0n}+h_n\right)-f_m\left(x_{01},x_{02},\ldots,x_{0n}\right) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \Delta f_1\left(x_{01},x_{02},\ldots,x_{0n}\right) \\ \cdots \\ \Delta f_m\left(x_{01},x_{02},\ldots,x_{0n}\right) \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^m \text{ -}$$

приростом функції.

Означення диференційовності функції в точці. Функція називається диференційовною в точці x_0, якщо в її прирості в цій точці можна виділити лінійну частину відносно приросту аргументу:

$$\Delta f\left(x_0\right)=f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)=Ah+\alpha\left(x_0,h\right),$$

де $\alpha\left(x_0,h\right)=o\left(h\right):\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left\|\alpha\left(x_0,h\right)\right\|}{\|h\|}=0,$

A – лінійний оператор з $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$: $A\in L\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m\right)$. Відомо, що такий оператор – це матриця розмірності $m\times n$ (m рядків, n стовпчиків) .

$$A=A\left(m\times n\right)=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$\mathbb{R}^m\ni y=f\left(x\right)$ – вектор функція $\begin{pmatrix} f_1\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right) \\ \cdots \\ f_m\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right) \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^m, h=\begin{pmatrix} h_1 \\ \cdots \\ h_n \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n,$

$$\Delta f\left(x_0\right)=\begin{pmatrix} f_1\left(x_{01}+h_1,\ldots,x_{0n}+h_n\right)-f_1\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right) \\ \cdots \\ f_m\left(x_{01}+h_1,\ldots,x_{0n}+h_n\right)-f_m\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right) \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^m.$$

Довільна k-та $(k=1,...,m)$ координата цього вектора має приріст

$$f_k\left(x_{01}+h_1,\ldots,x_{0n}+h_n\right)-f_k\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=\left(a_{k1}h_1+\ldots+a_{kn}h_n\right)+\alpha_k.$$

Візьмемо вектор приросту аргументу

$$h_j=\left(0,...,0,h_j,0,...,0\right)^T.$$

Тоді приріст функції запишеться у вигляді

$$f_k\left(x_{01},\ldots,x_{0\,j-1},x_{0\,j}+h_j,x_{0\,j+1},...,x_{0n}\right)-f_k\left(x_{01},x_{02},\ldots,x_{0n}\right)=a_{k\,j}h_j+\alpha_k.$$

Поділимо обидві частини цієї рівності на h_j:

$$\frac{f_k\left(x_{01},\ldots,x_{0\,j-1},x_{0\,j}+h_j,x_{0\,j+1},...,x_{0n}\right)-f_k\left(x_{01},x_{02},\ldots,x_{0n}\right)}{h_j}=a_{kj}+\frac{\alpha_k}{h_j}\ .$$

З умови диференційовності випливає, що права частина цієї рівності має границю, якщо $h_j\to 0$ $\left(\alpha_k=o\left(\tilde{h}_j\right)\right)$, а саме, a_{kj}, отже, таку ж границю має і ліва частина. Її називають частинною похідною функції f_k в точці x_0 по аргументу x_j і позначають $\frac{\partial f_k\left(x_0\right)}{\partial x_j}$.

Отже,

$$\frac{\partial f_k\left(x_0\right)}{\partial x_j}=\lim_{h_j\to 0}\frac{f_k\left(x_{01},\ldots,x_{0\,j-1},x_{0\,j}+h_j,x_{0\,j+1},...,x_{0n}\right)-f_k\left(x_{01},x_{02},\ldots,x_{0n}\right)}{h_j}=a_{kj}.$$

Таким чином, елементи матриці A мають зміст частинних похідних функції. Ця матриця називається похідною функції - $f'\left(x_0\right)$ (позначення Лагранжа), а також її матрицею Якобі - $J\left(f\left(x_0\right)\right)$:

$$A=f'\left(x_0\right)=J\left(f\left(x_0\right)\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1\left(x_0\right)}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial f_1\left(x_0\right)}{\partial x_n}\\ \cdots\\ \frac{\partial f_m\left(x_0\right)}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial f_m\left(x_0\right)}{\partial x_n}\end{pmatrix}.$$

Також для похідної вживається позначення Лейбниця:

$$\frac{Dcol\left(f_1,\ldots,f_m\right)}{\left(x_1,\ldots,x_n\right)} = f'(x).$$

Визначник матриці Якобі називається якобіаном.

Зауваження. Підкреслимо, що ми диференціюємо функцію, значення якої мають вигляд вектора-стовпчика, по аргументу, який теж є вектором-стовпчиком, і саме в такому випадку вживається це позначення. Пізніше буде розглянуто випадок диференціювання функції $f^T(x) = \left(f_1(x),..., f_m(x)\right) \in \left(\mathbb{R}^m\right)^*$, яка приймає значення у просторі лінійних функціоналів над $\mathbb{R}^m$, тобто, є матрицею, що складається з одного рядка. При цьому, нагадаємо, вживається позначення $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$

Інколи, щоб уникнути плутанини, будемо вектор стовпичик позначати

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} = col\left(f_1(x),..., f_m(x)\right) = \left(f_1(x),..., f_m(x)\right)^T \in \mathbb{R}^m.$$

Підіб'ємо підсумки: **з диференційовності функції в точці випливає існування в цій точці усіх її частинних похідних. Обернене твердження, взагалі кажучи, не є справедливим.** Пізніше ми наведемо контрприклад.

Означення диференціала функції в точці. Лінійна частина приросту в точці називається її диференціалом і позначається $df\left(x_0\right)$.

Якщо ввести позначення $dx = h$, будемо мати: $df\left(x_0\right) = f'\left(x_0\right)dx$.

Нехай $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1, y = f\left(x_1,\ldots,x_n\right) \in \mathbb{R}^1$, тобто, функція приймає числові або скалярні значення. Тоді $f'(x) \in L\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1\right)$. Нагадаємо, що такий лінійний оператор називається лінійним функціоналом,

$$f'(x)=\frac{\mathcal{D}(f)}{\mathcal{D}(x_1,\ldots,x_n)}=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Як вже відзначалось, за теоремою Ріса про зображення лінійного функціонала у евклідовому просторі (у ньому визначено поняття скалярного добутку) дію лінійного функціоналу на довільний вектор $h\in\mathbb{R}^n$ можна подати у вигляді скалярного добутку деякого вектора з $\mathbb{R}^n$ на цей вектор h. Очевидно,

$$\Delta f(x)=f'(x)h+\alpha(x,h)=\sum_{j=1}^{h}\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}h_j+\alpha(x,h)=\left(\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1}\\ \vdots\\ \frac{\partial f}{\partial x_n}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_n\end{pmatrix}\right)+\alpha(x,h)$$

Вектор-стовпчик в правій частині цієї рівності називається вектором-градієнтом функції і позначається

$$grad\ f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^T$$

Твердження: Функція, диференційовна в точці, неперервна в цій точці.

Маємо:

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\alpha(x,h)\qquad \alpha(x,h)=o(h)$$

Отже, оскільки права частина має границю при $h\to 0$, то її має і ліва частина,

$\xi=x+h\to x$ і тоді $\lim\limits_{\xi\to x}f(\xi)=f(x)$.

Нехай f,g - диференційовні в точці x функції. Доведемо деякі властивості їхніх похідних.

1. $\left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right)'=\alpha f'(x)+\beta g'(x)\ \ (\alpha,\beta\in\mathbb{R})$

Доведення.

Позначимо $s(x)=\alpha f(x)+\beta g(x)$. З умови диференційовності кожної функції маємо:

$$s(x+h)-s(x)=\alpha\big(f(x+h)-f(x)\big)+\beta\big(g(x+h)-g(x)\big)=$$
$$=\alpha f'(x)h+\beta g'(x)h+o(h)=\big(\alpha f'(x)+\beta g'(x)\big)h+o(h).$$

Коефіцієнт при h – це і є похідна. Також

$$d\big(\alpha f(x)+\beta g(x)\big)=\alpha df(x)+\beta dg(x).$$

2. $s(x)=f(x)g(x),\ f(x),g(x)\in\mathbb{R}^1$

Тоді

$$s'(x)=\big(f(x)g(x)\big)'=g(x)f'(x)+f(x)g'(x)$$

Доведення.

$$s(x+h)-s(x)=f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)=f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+$$
$$f(x)g(x+h)-f(x)g(x)=$$
$$=\big(f(x+h)-f(x)\big)g(x+h)+f(x)\big(g(x+h)-g(x)\big)=$$
$$=\big(f'(x)h+\alpha(h)\big)\big(g(x)+\beta(h)\big)+f(x)\big(g'(x)h+\gamma(h)\big)=$$
$$=\big(f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\big)h+\big(g(x)\alpha(h)+\big(f'(x)h+\alpha(h)\big)\beta(h)+f(x)\gamma(h)\big)=$$
$$\big(f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\big)h+o(h).$$

Тут $\alpha,\beta=o(h),\gamma=o(1)$.

Коефіцієнт при h – це похідна. Також

$$d\big(f(x)g(x)\big)=g(x)df(x)+f(x)dg(x).$$

3. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Доведення.

$$\Delta\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{f}{g}(x+h)-\frac{f}{g}(x)=\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x)g(x+h)}=$$

$$=\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x)\big(g(x)+\gamma\big)}=\frac{\big(f(x+h)-f(x)\big)g(x)-f(x)\big(g(x+h)-g(x)\big)}{g^2(x)+\gamma g(x)}=$$

$$=\frac{g(x)\big(f'(x)h+\alpha(h)\big)-f(x)\big(g'(x)+\beta(h)\big)h}{g^2(x)\left(1+\dfrac{\gamma}{g(x)}\right)}.$$

Тут $\alpha,\beta=o(h),\gamma=o(1)$.

Оцінимо різницю $\dfrac{1}{1+\dfrac{\gamma}{g(x)}}-1=\dfrac{1-1-\dfrac{\gamma}{g(x)}}{1+\dfrac{\gamma}{g(x)}}=-\dfrac{\gamma}{g(x)+\gamma}=o(1)$.

$$=\frac{\big(g(x)f'(x)-f(x)g'(x)\big)h+g(x)\alpha(h)-f(x)\beta(h)}{g^2(x)\left(1+\dfrac{\gamma}{g(x)}\right)}=$$

Маємо:

$$\Delta\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\left(\frac{\big(g(x)f'(x)-f(x)g'(x)\big)h}{g^2(x)}+\frac{g(x)\alpha(h)-f(x)\beta(h)}{g^2(x)}\right)\big(1+o(1)\big)=$$

$$=\frac{\big(g(x)f'(x)-f(x)g'(x)\big)h}{g^2(x)}+o(h).$$

Коефіцієнт при h – це похідна. Також

$$d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(x)df(x)-f(x)dg(x)}{g^2(x)}.$$

Приклад. Виявляється, що існують функції, не диференційовні в деякій точці, але вони мають в цій точці частинні похідні. Розглянемо функцію

$$f(x_1,x_2)=\left[\begin{array}{l}0;\ x_1x_2=0,\\ 1;\ x_1x_2\neq 0.\end{array}\right.$$

Вона не є неперервною в нулі, отже, як вже відомо, не є диференційовною в цій точці. Покажемо, що її частинні похідні в нулі існують.

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x_1}=\lim_{h_1\to 0}\frac{f(h_1,0)-f(0,0)}{h_1}=\lim_{h_1\to 0}\frac{0-0}{h_1}=0.$$

Аналогічно $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x_2}=0$.

І все ж таки хочеться виділити клас функцій (якщо він існує), в якому б диференційовність і існування частинних похідних були більш тісно пов'язані. Це буде зроблено трохи пізніше.

Контрольні питання.

1). Дати означення диференційовності у точці функції, що переводить один лінійний простір в інший.

2). Дати означення частинної похідної.

3). В чому відміна в поняттях диференційовності і існування частинних похідних багатовимірного у багатовимірному аналізі в порівнянні з одновимірним?

2. 2. Диференційовність композиції відображень (складеної функції)

Теорема. Нехай маємо ланцюг диференційовних у відповідних точках відображень:

$$\mathbb{R}^n\xrightarrow{f}\mathbb{R}^m\xrightarrow{g}\mathbb{R}^k$$

$$x\to y=f(x)\to z=g(y)=g\big(f(x)\big)=(g\circ f)(x)=h(x)$$

Тоді функція $h(x)=g\big(f(x)\big)\equiv(g\circ f)(x)$, що називається композицією функцій f і g, диференційовна в точці x і для її похідної справджується формула

$$h'(x)=g'_x\big(f(x)\big)=g'_y\big(f(x)\big)\,f'(x)$$

Доведення. Використовуючи диференційовність відображень f і g в точках x і $y=f(x)$, а також лінійність відображення $g'(x)\in L\left(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^k\right)$, можна написати, що

$(g\circ f)(x+h)-(g\circ f)(x)=$

$=g\left(f(x+h)\right)-g\left(f(x)\right)=g\left(f(x)+f'(x)h+o(h)\right)-g\left(f(x)\right)=$

$=g'\left(f(x)\right)\left(f'(x)h+o(h)\right)+o\left(f'(x)h+o(h)\right)=$

$g'\left(f(x)\right)f'(x)h+g'\left(f(x)\right)o(h)+o\left(f'(x)h+o(h)\right)=g'\left(f(x)\right)f'(x)h+o(h)$,

де $g'(y)\,f'(x)$ є лінійне відображення (як добуток лінійних відображень, а $\alpha(x;h)=g'\left(f(x)\right)o(h)+o\left(f'(x)h+o(h)\right)=o(h).$

Застосуємо доведений факт у випадку

$$\mathbb{R}^n\xrightarrow{f}\mathbb{R}^m\xrightarrow{g}\mathbb{R}^k.$$

Тоді

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n\to y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}=f(x)=\begin{pmatrix}f_1(x)\\ \vdots\\ f_m(x)\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^m\to$$

$$\to z=\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g_1(y)\\ \vdots\\ g_k(y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g_1\left(f(x)\right)\\ \vdots\\ g_k\left(f(x)\right)\end{pmatrix}=g(y)=g\left(f(x)\right)\in\mathbb{R}^k.$$

Знайдемо похідні z по x.

Цю формулу особливо зручно записувати, користуючись позначеннями Лейбниця. Вона зовнішньо нагадує правило множення дробів:

$$\frac{D(h_1,\ldots,h_k)}{D(x_1,\ldots,x_n)}=\frac{D(h_1,\ldots,h_k)}{D(y_1,\ldots,y_m)}\frac{D(y_1,\ldots,y_m)}{D(x_1,\ldots,x_n)}.$$

Запишемо окремо цю формулу у випадку скалярнозначної функції g.

Тоді $y=f(x), x\in\mathbb{R}^n, y\in\mathbb{R}^m, z=g(y), z\in\mathbb{R}^1$. Маємо:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial z}{\partial x_k},\ldots,\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)=\frac{D(z)}{D(x_1,\ldots,x_n)}=$$

$$=\frac{D(z)}{D(y_1,\ldots,y_m)}\frac{D(y_1,\ldots,y_m)}{D(x_1,\ldots,x_n)}=\left(\frac{\partial z}{\partial y_1},\ldots,\frac{\partial z}{\partial y_j}\ldots,\frac{\partial z}{\partial y_m}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial y_1}{\partial x_k} & \ldots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ . & \ldots & . & \ldots & .\\ \frac{\partial y_j}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial y_j}{\partial x_k} & \ldots & \frac{\partial y_j}{\partial x_n}\\ . & \ldots & . & \ldots & .\\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial y_m}{\partial x_k} & \ldots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}=$$

$$=\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial z}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_1}\quad\ldots\quad\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial z}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_k}\quad\ldots\quad\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial z}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_n}\right).$$

У координатному вигляді це запишеться так:

$$\frac{\partial z}{\partial x_k}=\frac{\partial g(f(x))}{\partial x_k}=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial z}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_k}=\frac{\partial z}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_k}+\ldots+\frac{\partial z}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_k}+\ldots+\frac{\partial z}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_k}.$$

Розглянемо кілька прикладів, в яких треба використовувати правила диференціювання функцій.

Приклад. Нехай $u=f(\xi,\eta)$ і $\xi=x-y, \eta=y-z$. Доведемо, що ця функція задовольняє рівняння $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$.

За доведеною формулою

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta},$$
$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial z}=-\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

Звідси й випливає: $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0.$

Приклад. Функція $f(x_1,...,x_n)$ називається однорідною степені α , якщо для $t\in\mathbb{R}^1$ виконується умова: $f\left(tx_1,...,tx_n\right)=t^{\alpha} f\left(x_1,...,x_n\right)$. Доведемо, що вона задовольняє наступному рівнянню з частинними похідними (рівнянню Ейлера):

$$x_1\frac{\partial f\left(x_1,...,x_n\right)}{\partial x_1}+...+x_n\frac{\partial f\left(x_1,...,x_n\right)}{\partial x_n}=\alpha f\left(x_1,...,x_n\right)$$

Продиференціюємо по t тотожність з умови задачі:

$$x_1\frac{\partial f\left(x_1,...,x_n\right)}{\partial\left(tx_1\right)}+...+x_n\frac{\partial f\left(x_1,...,x_n\right)}{\partial\left(tx_n\right)}=\alpha t^{\alpha-1} f\left(x_1,...,x_n\right).$$

Після підстановки $t=1$ приходимо до рівняння Ейлера.
Можна довести зворотній факт: якщо функція задовольняє рівнянню Ейлера, то вона однорідна степені α .

Розглянемо функцію $F(t)=\frac{f\left(tx_{01},...,tx_{0n}\right)}{t^{\alpha}}$. Після її диференціювання одержимо:

$$F'(t)=\frac{t^{\alpha}\left(x_{01}f_1'\left(tx_{01},...,tx_{0n}\right)+...+x_{0n}f_n'\left(tx_{01},...,tx_{0n}\right)\right)-\alpha t^{\alpha-1} f\left(tx_{01},...,tx_{0n}\right)}{t^{2\alpha}}=$$

$$=\frac{t\left(x_{01}f_1'\left(tx_{01},...,tx_{0n}\right)+...+x_{0n}f_n'\left(tx_{01},...,tx_{0n}\right)\right)-\alpha f\left(tx_{01},...,tx_{0n}\right)}{t^{\alpha+1}}.$$

Позначивши $x_1=tx_{01},...,x_n=tx_{0n}$, прийдемо до наступного виразу у чисельнику: $x_1f_1'\left(x_1,...,x_n\right)+...+x_nf_n'\left(x_1,...,x_n\right)-\alpha f\left(x_1,...,x_n\right)$, який дорівнює нулю, що випливає з рівняння Ейлера. Отже, $F'(t)=0$, звідки

$F(t) = C = const$. Для визначення цієї константи покладемо $t = 1$ в рівності $F(t) = \dfrac{f\left(tx_{01},...,tx_{0n}\right)}{t^{\alpha}}$. В результаті одержимо: $C = f\left(x_{01},...,x_{0n}\right)$. Отже, $\dfrac{f\left(tx_{01},...,tx_{0n}\right)}{t^{\alpha}} = f\left(x_{01},...,x_{0n}\right)$, звідки і випливає $f\left(tx_{01},...,tx_{0n}\right) = t^{\alpha} f\left(x_{01},...,x_{0n}\right)$, що й треба було довести.

2. 3. Похідна функції за напрямком

Цілком зрозуміло, що для функцій однієї змінної, знаходячи приріст функції, можна було зсувати аргумент від даної точки вздовж однієї прямої. Для функцій, що залежать від багатьох змінних, таких напрямків безліч. Виявляється, можна дослідити, як змінюється значення функції при зміні аргумента вздовж векторів ортонормованого базису, і цього буде достатньо для знаходження приросту в будь-якому напрямку і подальшому диференціювання вздовж нього.

Означення. Нехай скалярнозначна диференційовна функція f визначена у області, яка містить внутрішню точку x_0,

$$e \in \mathbb{R}^n, \|e\| = 1, e = \left(\alpha_1,...,\alpha_1\right), \left(\alpha_1\right)^2 + ... + \left(\alpha_n\right)^2 = 1.$$

Якщо існує границя

$$\lim_{t \to 0} \frac{f\left(x_0 + te\right) - f\left(x_0\right)}{t}$$

то вона називається похідною функції за напрямком. Напрямок визначається ортом e. Будемо позначати її $\dfrac{\partial f\left(x_0\right)}{\partial e}$.

За правилом диференціювання складеної функції

$$\frac{\partial f\left(x_0\right)}{\partial e} = f'\left(x_0\right)e = \left(grad\ f\left(x_0\right), e\right)$$

З нерівності Коші-Буняковського випливає:

$$\left|\frac{\partial f\left(x_0\right)}{\partial e}\right| = \left|\left(grad\ f\left(x_0\right), e\right)\right| \le \left\|grad\ f\left(x_0\right)\right\| \left\|e\right\| = \left\|grad\ f\left(x_0\right)\right\|$$

Як відомо, рівність має місце тоді і тільки тоді, коли вектори $grad\ f\left(x_0\right)$ і e колінеарні. Найбільше значення похідної за напрямком буде досягатись, якщо напрямок e співпадає з напрямком $grad\ f\left(x_0\right)$.

Нехай $x = \varphi(t), \varphi(0) = x_0, \varphi \in C^1$. Інакше кажучи, x бігає по гладкій кривій. $\Delta x = x - x_0 = \varphi(t) - \varphi(0) = \varphi'(0)\Delta t + o\left(\Delta t\right)$, а лінійна частина приросту $dx = \varphi'(0)\Delta t$ відповідає відрізку прямої, що з'єднує точки x_0 і x. При цьому його граничне положення при прямуванні Δt до нуля є дотичний вектор, який, зрозуміло, знаходиться як похідна: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\varphi(t) - \varphi(0)}{\Delta t} = \varphi'(0)$.

Нехай ця крива входить в область визначення диференційовної функції $\psi'(t) = f_t'\left(\varphi\left(t\right)\right) = f_x'\left(\varphi\left(t\right)\right)\varphi'\left(t\right)$. Зрозуміло, що $y = f(\varphi(t)) = \psi(t)$ визначає криву в просторі $\mathbb{R}^m$. Тоді $\psi'(t) = f_t'\left(\varphi\left(t\right)\right) = f_x'\left(\varphi\left(t\right)\right)\varphi'\left(t\right)$ і $\psi'(0) = f_x'\left(x_0\right)\varphi'\left(0\right)$. Цю рівність можна інтерпретувати так: похідна функції, її матриця Якобі, переводить дотичні до кривих вектори у дотичні вектори до кривих, що є образами цих кривих.

Дамо тепер сучасне тлумачення викладених понять ([7]).

Розглянемо функцію f, що здійснює відображення абстрактних лінійних просторів: $f : E \to F$. Тобто $\forall x \in E\ f : x \to f(x) \in F$. Її похідна в кожній точці $x \in E$ за означенням – це лінійний оператор, що діє в тих самих просторах: $\forall x \in E\ f' : x \to f'(x) \in L(E, F)$. $f'(x)$ лінійно діє на прирости $h \in E$:

$$f'(x) : h \in E \to f'(x)h \in F.$$

Знову звернемось до тільки що введеного поняття похідної функції у конкретних просторах $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \to f(x)=\begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$. Її похідна $f'(x)$ – лінійний оператор, що діє з $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$:

$$f'(x)\in L\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m\right),\ f'(x)h=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_1}\dots\frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_n} \\ \dots \\ \frac{\partial f_k(x_0)}{\partial x_1}\dots\frac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_n} \\ \dots \\ \frac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_1}\dots\frac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ . \\ . \\ . \\ h_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_1}h_1+\dots+\frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_n}h_n \\ \dots \\ \frac{\partial f_k(x_0)}{\partial x_1}h_1+\dots+\frac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_n}h_n \\ \dots \\ \frac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_1}h_1+\dots+\frac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_n}h_n \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^m$$

Окремо розглянемо випадок $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$. $\forall x\in E\ f:x\to f(x)\in\mathbb{R}^1$. Її похідна $f'(x)$ – лінійний оператор, що діє з $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^1$: $\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\dots\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)$, тобто, матриця з одного рядка і n стовпчиків:

$$\forall h=\begin{pmatrix} h_1 \\ \cdots \\ h_n \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n\ \ f'(x)h=\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\dots\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)\begin{pmatrix} h_1 \\ \cdots \\ h_n \end{pmatrix}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}h_j\in\mathbb{R}^1.$$

Отже, $f'(x)\in L\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^1\right)=\left(\mathbb{R}^n\right)^*$. Тут $\left(\mathbb{R}^n\right)^*$ - спряжений до $\mathbb{R}^n$ простір, тобто, простір лінійних функціоналів, $\forall g\in\left(\mathbb{R}^n\right)^*\Rightarrow g=(g_1,g_2,...,g_n)$,

$$\forall g\in\left(\mathbb{R}^n\right)^*,h=\begin{pmatrix} h_1 \\ \cdots \\ h_n \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n\Rightarrow g(h)=(g_1\dots g_n)\begin{pmatrix} h_1 \\ \cdots \\ h_n \end{pmatrix}=\sum_{j=1}^{n}g_jh_j\in\mathbb{R}^1.$$

Забігаючи вперед, визначимо другу похідну функції $f:E\to F$ як першу похідну від її першої похідної при умові її існування: $f''(x)=\left(f'(x)\right)'$.

Нехай існує частинна похідна від частинної похідної цієї функції :

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}\right)=\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_k}\equiv f''_{kj}(x),\ j,k:1,...,n.$$

Вона називається другою частинною похідною функції.

Похідна називається немішаною, якщо $j=k$:

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k^2}=\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k \partial x_k}=f''_{(x_k)^2}(x),$$

і мішаною, якщо $j\neq k$.

За означенням $x\to f'(x)\in L(E,F)$, тому f'' здійснює лінійне відображення

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)':h\in E\to f''(x)h\in L(E,F)\Rightarrow f''(x)\in L\left(E,L(E,F)\right).$$

Якщо $f:E\to\mathbb{R}^1$, $f''(x)\in L\left(E,L\left(E,\mathbb{R}^1\right)\right)=L\left(E,E^*\right)$.

У частинному випадку $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^1$. $f'(x)\in\left(\mathbb{R}^n\right)^*$, $f'(x)=\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\dots\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)\in\left(\mathbb{R}^n\right)^*$.

Тоді $f''(x)=\left(f'(x)\right)'\in L\left(\mathbb{R}^n,\left(\mathbb{R}^n\right)^*\right)$. В термінах матриць це означає, що матриця другої похідної є матриця Якобі від матриці Якобі $f'(x)=\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\dots\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)\in\left(\mathbb{R}^n\right)^*$.

Контрольні запитання.

1). У чому полягає екстремальна властивість похідної за напрямком?

2). Як знайти один з векторів-нормалей до поверхні?

3). За яким правилом записується матриця Гессе?

Похідна вектора-рядка

Тільки що було пояснено правило написання матриці Якобі від функції, значення якої є вектор-стовпчик. Зараз нам треба записати матрицю Якобі від матриці , що складається з одного рядка або, можна сказати, вектора-рядка

$$g^T(x)=\left(g_1(x),g_2(x),...,g_m(x)\right)\in\left(\mathbb{R}^m\right)^*,$$

де $g(x)=\begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_m(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$, $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Візьмемо вектор $dx=\left(dx_1, dx_2, ..., dx_n\right)^T=\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ – приріст аргументу. При цьому $dx^T=\left(dx_1, dx_2, ..., dx_n\right) \in \left(\mathbb{R}^n\right)^*$. Знайдемо диференціал g^T:

$$dg^T(x)=\left(dg_1(x), dg_2(x), ..., dg_m(x)\right)=\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_k} dx_k, \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_k} dx_k, ..., \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_k} dx_k\right).$$

Очевидно, якщо помножити вектор-стовпчик $dx=col\left(dx_1, dx_2, ..., dx_n\right)$ зліва на матрицю Якобі вектора-стовпчика

$g(x)$, тобто, на $g'(x)=\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_n} \\ \cdots \\ \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$, одержимо вектор-стовпчик

$$g'(x)dx=\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} dx_1+\frac{\partial g_1(x)}{\partial x_2} dx_2+...+\frac{\partial g_1(x)}{\partial x_n} dx_n \\ \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_1} dx_1+\frac{\partial g_2(x)}{\partial x_2} dx_2+...+\frac{\partial g_2(x)}{\partial x_n} dx_n \\ \vdots \\ \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_1} dx_1+\frac{\partial g_m(x)}{\partial x_2} dx_2+...+\frac{\partial g_m(x)}{\partial x_n} dx_n \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$dg^T(x)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1(x)}{\partial x_1}dx_1+\dfrac{\partial g_1(x)}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\dfrac{\partial g_1(x)}{\partial x_n}dx_n \\ \dfrac{\partial g_2(x)}{\partial x_1}dx_1+\dfrac{\partial g_2(x)}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\dfrac{\partial g_2(x)}{\partial x_n}dx_n \\ \vdots \\ \dfrac{\partial g_m(x)}{\partial x_1}dx_1+\dfrac{\partial g_m(x)}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\dfrac{\partial g_m(x)}{\partial x_n}dx_n \end{pmatrix}^T=\left(\frac{D\left(g_1,g_2,\ldots,g_m\right)}{D\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)}\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}\right)^T=$$

$$=\left(dx\right)^T\left(\frac{D\left(g_1,g_2,\ldots,g_m\right)}{D\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)}\right)^T=\begin{pmatrix} dx_1 & dx_2 & \ldots & dx_n \end{pmatrix}\left(\frac{D\left(g_1,g_2,\ldots,g_m\right)}{D\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)}\right)^T=$$

$$=\begin{pmatrix} dx_1 & dx_2 & \ldots & dx_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_2(x)}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial g_m(x)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial g_1(x)}{\partial x_2} & \dfrac{\partial g_2(x)}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial g_m(x)}{\partial x_2} \\ . & . & \ldots & . \\ \dfrac{\partial g_1(x)}{\partial x_n} & \dfrac{\partial g_2(x)}{\partial x_n} & \ldots & \dfrac{\partial g_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Одержану формулу можна інтерпретувати таким чином:

$$dg^T(x)=\left(dx\right)^T\left(\frac{Dcol\left(g_1(x),g_2(x),\ldots,g_m(x)\right)}{D\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)}\right)^T=\left(dx\right)^T\left(g^T(x)\right)'.$$

Іншими словами,

$$\left(g^T(x)\right)' = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_2} \\ . & . & \dots & . \\ \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_n} & \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Запишемо формулу для похідної від складеної функції, яка є матрицею, що складається з одного рядка.

Нехай

$$z \in \left(\mathbb{R}^k\right)^*, z = g^T(y) = \begin{pmatrix} z_1 & \dots & z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(y) & \dots & g_k(y) \end{pmatrix},$$

$$y = y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_m(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Запишемо диференціал dz спочатку в старих, а потім у нових змінних:

$$dz = \begin{pmatrix} dz_1 & dz_2 & \dots & dz_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dy_1 & dy_2 & \dots & dy_m \end{pmatrix} \left(\frac{D(g_1, g_2, \dots, g_k)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)} \right)^T =$$

$$= \begin{pmatrix} dy_1 & dy_2 & \dots & dy_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(y)}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2(y)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial g_k(y)}{\partial y_1} \\ \frac{\partial g_1(y)}{\partial y_2} & \frac{\partial g_2(y)}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial g_k(y)}{\partial y_2} \\ . & . & \dots & . \\ \frac{\partial g_1(y)}{\partial y_m} & \frac{\partial g_2(y)}{\partial y_m} & \dots & \frac{\partial g_m(y)}{\partial y_m} \end{pmatrix} =$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_i}dx_i,\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f_2(x)}{\partial x_i}dx_i,\dots,\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f_m(x)}{\partial x_i}dx_i\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1(y)}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2(y)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial g_k(y)}{\partial y_1}\\ \frac{\partial g_1(y)}{\partial y_2} & \frac{\partial g_2(y)}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial g_k(y)}{\partial y_2}\\ . & . & \dots & .\\ \frac{\partial g_1(y)}{\partial y_m} & \frac{\partial g_2(y)}{\partial y_m} & \dots & \frac{\partial g_k(y)}{\partial y_m}\end{pmatrix}=$$

$$=\left(dy_1 \quad dy_2 \quad \dots \quad dy_m\right)\times$$

$$\times\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1}\\ \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_2}\\ . & . & \dots & .\\ \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1(y)}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2(y)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial g_k(y)}{\partial y_1}\\ \frac{\partial g_1(y)}{\partial y_2} & \frac{\partial g_2(y)}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial g_k(y)}{\partial y_2}\\ . & . & \dots & .\\ \frac{\partial g_1(y)}{\partial y_m} & \frac{\partial g_2(y)}{\partial y_m} & \dots & \frac{\partial g_k(y)}{\partial y_m}\end{pmatrix}=$$

В результаті одержали формулу:

$$\frac{D\left(z^T\right)}{D(x)}=\left(\frac{D(y)}{D(x)}\right)^T\left(\frac{D(z)}{D(y)}\right)^T$$

або

$$\frac{D\left(z_1,z_2,\dots,z_k\right)}{D\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)}=\left(\frac{Dcol\left(y_1,y_2,\dots,y_m\right)}{D\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)}\right)^T\left(\frac{Dcol\left(z_1,z_2,\dots,z_k\right)}{D\left(y_1,y_2,\dots,y_m\right)}\right)^T=$$

$$=\left(\frac{Dcol\left(z_1,z_2,\dots,z_k\right)}{D\left(y_1,y_2,\dots,y_m\right)}\frac{Dcol\left(y_1,y_2,\dots,y_m\right)}{D\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)}\right)^T.$$

Застосуємо одержаний результат до похідної скалярної функції $g^T(x) = f'(x)$:

$$g^T(x) = \left(g_1(x), g_2(x), ..., g_n(x)\right) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right) = \frac{D(f)}{D\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)} = f'(x):$$

Скористаємось формулою

$$\left(g^T(x)\right)' = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_2(x)}{\partial x_1} & ... & \dfrac{\partial g_m(x)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial g_1(x)}{\partial x_2} & \dfrac{\partial g_2(x)}{\partial x_2} & ... & \dfrac{\partial g_m(x)}{\partial x_2} \\ . & . & ... & . \\ \dfrac{\partial g_1(x)}{\partial x_n} & \dfrac{\partial g_2(x)}{\partial x_n} & ... & \dfrac{\partial g_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}:$$

З урахуванням попередніх позначень звідси випливає:

$$f''(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & ... & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & ... & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ . & . & ... & . \\ \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & ... & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Означення.

$$H(x) \equiv f''(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 (x)}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ . & . & \cdots & . \\ \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

називається матрицею Гессе $\left(Hesse\,Ludwig\,Otto, 22/04/1811 - 4/08/1874\right)$, а її визначник - гессіаном.

Запишемо другий диференціал скалярнозначної функції. Тут можна вважати, що $m = n, \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix} = dx.$

$$g^T(x) = \left(g_1(x), g_2(x), ..., g_n(x)\right) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right) = f'(x).$$

Тоді

$$d^2 f(x) = \left(\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ . & . & \cdots & . \\ \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ . \\ . \\ . \\ dx_m \end{pmatrix} \right)^T \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ . \\ . \\ . \\ dx_m \end{pmatrix} =$$

$$
=\begin{pmatrix} dx_1 & dx_2 & \dots & dx_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} \\ . & . & \dots & . \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ . \\ . \\ . \\ dx_m \end{pmatrix} =
$$

$$
= x^T \left(f''(x) \right)^T x = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_k} dx_k dx_j .
$$

Зрозуміло, що, застосовуючи скалярний добуток, останню суму можна записати у вигляді

$$
\left(f''(x)h, h \right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_k} h_k h_j = \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ . & . & \dots & . \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_n \end{pmatrix} \right).
$$

Запишемо формулу для похідної від складеної функції, яка є матрицею, що складається з одного рядка.

Нехай

$$
z \in \left(\mathbb{R}^k \right)^*, z = g^T(y) = \begin{pmatrix} z_1 & \dots & z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(y) & \dots & g_k(y) \end{pmatrix},
$$

$$
y = y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_m(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n .
$$

Запишемо диференціал dz спочатку в старих, а потім у нових змінних:

$$dz = \begin{pmatrix} dz_1 & dz_2 & \dots & dz_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dy_1 & dy_2 & \dots & dy_m \end{pmatrix} \left(\frac{D(g_1, g_2, \dots, g_k)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)} \right)^T =$$

$$= \begin{pmatrix} dy_1 & dy_2 & \dots & dy_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(y)}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2(y)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial g_k(y)}{\partial y_1} \\ \frac{\partial g_1(y)}{\partial y_2} & \frac{\partial g_2(y)}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial g_k(y)}{\partial y_2} \\ . & . & \dots & . \\ \frac{\partial g_1(y)}{\partial y_m} & \frac{\partial g_2(y)}{\partial y_m} & \dots & \frac{\partial g_m(y)}{\partial y_m} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_i} dx_i, \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_i} dx_i, \dots, \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_i} dx_i \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(y)}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2(y)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial g_k(y)}{\partial y_1} \\ \frac{\partial g_1(y)}{\partial y_2} & \frac{\partial g_2(y)}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial g_k(y)}{\partial y_2} \\ . & . & \dots & . \\ \frac{\partial g_1(y)}{\partial y_m} & \frac{\partial g_2(y)}{\partial y_m} & \dots & \frac{\partial g_k(y)}{\partial y_m} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} dy_1 & dy_2 & \dots & dy_m \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(y)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1(y)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_2} \\ . & . & \dots & . \\ \frac{\partial f_1(y)}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(y)}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2(y)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial g_k(y)}{\partial y_1} \\ \frac{\partial g_1(y)}{\partial y_2} & \frac{\partial g_2(y)}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial g_k(y)}{\partial y_2} \\ . & . & \dots & . \\ \frac{\partial g_1(y)}{\partial y_m} & \frac{\partial g_2(y)}{\partial y_m} & \dots & \frac{\partial g_k(y)}{\partial y_m} \end{pmatrix} =$$

В результаті одержали формулу:

$$\frac{D(z^T)}{D(x)} = \left(\frac{D(y)}{D(x)} \right)^T \left(\frac{D(z)}{D(y)} \right)^T = \left(\frac{D(z)}{D(y)} \cdot \frac{D(y)}{D(x)} \right)^T .$$

або

$$\frac{D(z_1,z_2,...,z_k)}{D(x_1,x_2,...,x_n)}=\left(\frac{Dcol(y_1,y_2,...,y_m)}{D(x_1,x_2,...,x_n)}\right)^T\left(\frac{Dcol(z_1,z_2,...,z_k)}{D(y_1,y_2,...,y_m)}\right)^T=$$

$$=\left(\frac{Dcol(z_1,z_2,...,z_k)}{D(y_1,y_2,...,y_m)}\frac{Dcol(y_1,y_2,...,y_m)}{D(x_1,x_2,...,x_n)}\right)^T.$$

Похідна від скалярного добутку двох вектор-функцій

Нехай

$$u(x)=\begin{pmatrix}u_1(x)\\ \vdots\\ u_m(x)\end{pmatrix},v(x)=\begin{pmatrix}v_1(x)\\ \vdots\\ v_m(x)\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^m,x\in\mathbb{R}^n,u^T(x)=\begin{pmatrix}u_1(x) & \dots & u_m(x)\end{pmatrix}\in\left(\mathbb{R}^m\right)^*.$$

Знайдемо похідну скалярної функції $u^T(x)v(x)=u_1(x)v_1(x)+...+u_1(x)v_1(x).$

$$\Delta u^T(x)v(x)=u^T(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u^T(x)v(x)=$$

$$=\left(u^T(x+\Delta x)-u^T(x)\right)v(x)+u^T(x)\left(v(x+\Delta x)-v(x)\right)+o\left(\|\Delta x\|\right)=$$

$$=\Delta x\left(u'(x)\right)^T v(x)+u^T(x)v'(x)\Delta x+o\left(\|\Delta x\|\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}\Delta x_1 & ... & \Delta x_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_m(x)}{\partial x_1}\\ . & \cdots & .\\ \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial u_m(x)}{\partial x_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1(x)\\ \vdots\\ v_m(x)\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix} u_1(x) & \dots & u_m(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial v_1(x)}{\partial x_n} \\ . & \cdots & . \\ \dfrac{\partial v_m(x)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial v_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix}+o\left(\|\Delta x\|\right).$$

Звідси випливає формула для похідної добутку:

$$\left(u^T\left(x\right)v(x)\right)' = \left(u'(x)\right)^T v\left(x\right)+u^T\left(x\right)v'(x).$$

Приклад. Виписати матриці Якобі для вектор-функцій

$$col\left(u_1(x)v_1(x),...,u_m(x)v_m(x)\right), x\in\mathbb{R}^n \text{ і } \left(u_1(x)v_1(x),...,u_m(x)v_m(x)\right).$$

Зауважимо, що для матриць $\left(u_1(x),...,u_m(x)\right),\left(v_1(x),...,v_m(x)\right)$ матриця $\left(u_1(x)v_1(x),...,u_m(x)v_m(x)\right)$ є результатом їхнього покомпонентного множення. Таке множення можна ввести для двох довільних матриць однакової розмірності, і воно називається добутком Адамара або Шура. Отже, нам доведеться знайти матриці Якобі від добутків Адамара (або Шура) векторів-стовпчиків і рядків двох матриць.

Розв’язання. Маємо:

$$\frac{D\left(col\left(u_1(x)v_1(x),...,u_m(x)v_m(x)\right)\right)}{D\left(x_1,...,x_n\right)}=$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\left(u_1(x)v_1(x)\right)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\left(u_1(x)v_1(x)\right)}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial\left(u_1(x)v_1(x)\right)}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial\left(u_2(x)v_2(x)\right)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\left(u_2(x)v_2(x)\right)}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial\left(u_2(x)v_2(x)\right)}{\partial x_n} \\ . & . & \dots & . \\ \dfrac{\partial\left(u_m(x)v_m(x)\right)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\left(u_m(x)v_m(x)\right)}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial\left(u_m(x)v_m(x)\right)}{\partial x_n} \end{pmatrix}=$$

$$
=\begin{pmatrix}
v_1(x)\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_1} & v_1(x)\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_2} & \dots & v_1(x)\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_n} \\
v_2(x)\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_1} & v_2(x)\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_2} & \dots & v_2(x)\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_n} \\
. & . & \dots & . \\
v_m(x)\frac{\partial u_m(x)}{\partial x_1} & v_m(x)\frac{\partial u_m(x)}{\partial x_2} & \dots & v_m(x)\frac{\partial u_m(x)}{\partial x_n}
\end{pmatrix}+
$$

$$
+\begin{pmatrix}
u_1(x)\frac{\partial v_1(x)}{\partial x_1} & u_1(x)\frac{\partial v_1(x)}{\partial x_2} & \dots & u_1(x)\frac{\partial v_1(x)}{\partial x_n} \\
u_2(x)\frac{\partial v_2(x)}{\partial x_1} & u_2(x)\frac{\partial v_2(x)}{\partial x_2} & \dots & u_2(x)\frac{\partial v_2(x)}{\partial x_n} \\
. & . & \dots & . \\
u_m(x)\frac{\partial v_m(x)}{\partial x_1} & u_m(x)\frac{\partial v_m(x)}{\partial x_2} & \dots & u_m(x)\frac{\partial v_m(x)}{\partial x_n}
\end{pmatrix}=
$$

$$
=\begin{pmatrix}
v_1(x) & 0 & \dots & 0 \\
0 & v_2(x) & \dots & 0 \\
. & . & \dots & . \\
0 & 0 & \dots & v_m(x)
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_n} \\
\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_2(x)}{\partial x_n} \\
. & . & \dots & . \\
\frac{\partial u_m(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial u_m(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_m(x)}{\partial x_n}
\end{pmatrix}+
$$

$$=\begin{pmatrix} u_1(x) & 0 & ... & 0 \\ 0 & u_2(x) & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & u_m(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial v_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1(x)}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial v_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial v_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2(x)}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial v_2(x)}{\partial x_n} \\ . & . & ... & . \\ \frac{\partial v_m(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial v_m(x)}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial v_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}=$$

$$=diag\left(v_1(x),v_2(x),...,v_m(x)\right)\frac{D\left(u_1(x),u_2(x),...,u_m(x)\right)}{D\left(x_1,...,x_n\right)}+$$

$$diag\left(u_1(x),u_2(x),...,u_m(x)\right)\frac{D\left(v_1(x),v_2(x),...,v_m(x)\right)}{D\left(x_1,...,x_n\right)},$$

де

$$diag\left(u_1(x),u_2(x),...,u_m(x)\right)=\begin{pmatrix} u_1(x) & 0 & ... & 0 \\ 0 & u_2(x) & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & u_m(x) \end{pmatrix},$$ аналогічно

$diag\left(v_1(x),v_2(x),...,v_m(x)\right)$.

Читач самостійно знайде матрицю Якобі для

$$\left(u(x)\times v(x)\right)^T=u^T(x)\times v^T(x)=$$

$$=\left(u_1(x),..,u_m(x)\right)\times\left(v_1(x),..,v_m(x)\right)=\left(u_1(x)v_1(x),..,u_m(x)v_m(x)\right).$$

Ще раз нагадаємо, що в наших позначеннях

$$\left(u_1(x),..,u_m(x)\right)=\begin{pmatrix} u_1(x) \\ ... \\ u_m(x) \end{pmatrix}^T=u^T(x),\left(v_1(x),..,v_m(x)\right)=\begin{pmatrix} v_1(x) \\ ... \\ v_m(x) \end{pmatrix}^T=v^T(x).$$

Відповідь:

$$\frac{D\left(u_1(x)v_1(x),...,u_m(x)v_m(x)\right)}{D\left(x_1,...,x_n\right)}=\frac{D\left(\left(u(x)\times v(x)\right)^T\right)}{D\left(x_1,...,x_n\right)}=\frac{D\left(u^T(x)\times v^T(x)\right)}{D\left(x_1,...,x_n\right)}=$$

$$=\frac{D\left(u_1(x),u_2(x),...,u_m(x)\right)}{D\left(x_1,...,x_n\right)}diag\left(v_1(x),v_2(x),...,v_m(x)\right)+$$

$$+\frac{D\left(v_1(x),v_2(x),...,v_m(x)\right)}{D\left(x_1,...,x_n\right)}diag\left(u_1(x),u_2(x),...,u_m(x)\right).$$

Для цього в одержаній формулі досить перейти до транспонованих виразів або, щоб краще усвідомити ситуацію, пробобити аналогічні дії самостійно. Також радимо виписати матриці Якобі для

$$col\left(\left(u_{11}(x)u_{12}(x)...u_{1k}(x)\right),...,\left(u_{m1}(x)u_{m2}(x)...u_{mk}(x)\right)\right), x\in\mathbb{R}^n,$$

і

$$\left(\left(u_{11}(x)u_{12}(x)...u_{1k}(x)\right),...,\left(u_{m1}(x)u_{m2}(x)...u_{mk}(x)\right)\right)$$

Похідна від добутку вектора-рядка на матрицю

Нехай тепер

$$u^T(x)=\begin{pmatrix}u_1(x) & \dots & u_m(x)\end{pmatrix}\in\left(\mathbb{R}^m\right)^*, A(x)=\begin{pmatrix}a_{11}(x) & \cdots & a_{1n}(x)\\ . & \cdots & .\\ a_{m1}(x) & \cdots & a_{mn}(x)\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}^n.$$

Знайдемо похідну $\left(u^T(x)A(x)\right)'$.

$$\left(u^T(x)A(x)\right)' = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{m} u_k(x)a_{k1}(x) & \cdots & \sum_{k=1}^{m} u_k(x)a_{kn}(x) \end{pmatrix}' =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial\left(u_k(x)a_{k1}(x)\right)}{\partial x_1} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial\left(u_k(x)a_{kn}(x)\right)}{\partial x_1} \\ . & \cdots & . \\ \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial\left(u_k(x)a_{k1}(x)\right)}{\partial x_n} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial\left(u_k(x)a_{kn}(x)\right)}{\partial x_n} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u_k(x)}{\partial x_1} a_{k1}(x) & \cdots & \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u_k(x)}{\partial x_1} a_{kn}(x) \\ . & \cdots & . \\ \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u_k(x)}{\partial x_n} a_{k1}(x) & \cdots & \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u_k(x)}{\partial x_n} a_{kn}(x) \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{m} u_k(x) \frac{\partial a_{k1}(x)}{\partial x_1} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} u_k(x) \frac{\partial a_{kn}(x)}{\partial x_1} \\ . & \cdots & . \\ \sum_{k=1}^{m} u_k(x) \frac{\partial a_{k1}(x)}{\partial x_n} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} u_k(x) \frac{\partial a_{kn}(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(u'(x)\right)^T A(x) +$$

$$+ \begin{pmatrix} \left(u_1(x),\ldots,u_m(x)\right) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \left(u_1(x),\ldots,u_m(x)\right) & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & \left(u_1(x),\ldots,u_m(x)\right) \end{pmatrix} \times$$

$$\times\begin{pmatrix} col\left(\frac{\partial a_{11}(x)}{\partial x_1},...,\frac{\partial a_{m1}(x)}{\partial x_1}\right) & col\left(\frac{\partial a_{12}(x)}{\partial x_1},...,\frac{\partial a_{m2}(x)}{\partial x_1}\right) & ... & col\left(\frac{\partial a_{1n}(x)}{\partial x_1},...,\frac{\partial a_{mn}(x)}{\partial x_1}\right) \\ col\left(\frac{\partial a_{11}(x)}{\partial x_2},...,\frac{\partial a_{m1}(x)}{\partial x_2}\right) & col\left(\frac{\partial a_{12}(x)}{\partial x_2},...,\frac{\partial a_{m2}(x)}{\partial x_2}\right) & ... & col\left(\frac{\partial a_{1n}(x)}{\partial x_2},...,\frac{\partial a_{mn}(x)}{\partial x_2}\right) \\ . & . & ... & . \\ col\left(\frac{\partial a_{11}(x)}{\partial x_n},...,\frac{\partial a_{m1}(x)}{\partial x_n}\right) & col\left(\frac{\partial a_{12}(x)}{\partial x_n},...,\frac{\partial a_{m2}(x)}{\partial x_n}\right) & ... & col\left(\frac{\partial a_{1n}(x)}{\partial x_n},...,\frac{\partial a_{mn}(x)}{\partial x_n}\right) \end{pmatrix} =$$

Зауважимо, що в останньому доданку елементи матриць – це вектори-рядки і стовпчики. При множенні її елементів, тобто, рядка на стовпчик треба діяти звичайним чином за правилом множення матриць.

Якщо ввести позначення $\vec{A}_j(x) = col\left(a_{1j}(x),...a_{mj}(x)\right), j = 1,...,n,$ одержану формулу можна переписати таким чином:

$$\left(u^T(x)A(x)\right)' = \left(u'(x)\right)^T A(x) + diag\left(u_1(x),...,u_m(x)\right)\left(\frac{D\left(\vec{A}_1(x),...,\vec{A}_n(x)\right)}{D\left(x_1,...,x_n\right)}\right)^T.$$

У наступних прикладах знайдемо матрицю Якобі при переході до деяких класичних змінних.

Приклад. Полярні координати.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

$\varphi \in [0, 2\pi)$.

$$J = \frac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}, \ \det(J) = \rho.$$

Приклад. Циліндричні координати.

$$x=\rho\cos\varphi,$$
$$y=\rho\sin\varphi.$$
$$z=z.$$
$$\varphi\in[0,2\pi).$$

$$J=\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,z)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial x}{\partial z}\\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial z}\\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\det(J)=\rho.$$

Приклад. Сферичні координати.

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi,$$
$$y=\rho\sin\theta\sin\varphi.$$
$$z=\rho\cos\theta.$$
$$\theta\in[0,\pi],\ \varphi\in[0,2\pi).$$

$$J=\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,z)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\varphi}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0\end{pmatrix},$$

$$\det(J)=\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0\end{vmatrix}=\rho^2\sin\theta\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi\\ \cos\theta & -\sin\theta & 0\end{vmatrix}=$$

$$=\rho^2\sin\theta\left(\cos\theta\begin{vmatrix}\cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi\end{vmatrix}+\sin\theta\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\varphi\end{vmatrix}\right)=$$

$$\rho^2\sin\theta\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)=\rho^2\sin\theta$$

Приклад. Узагальнені сферичні координати у трьохвимірному просторі.

$$x=a\rho\sin^{\beta}\theta\cos^{\alpha}\varphi, y=b\rho\sin^{\beta}\theta\sin^{\alpha}\varphi, z=c\rho\cos^{\beta}\theta\,.$$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)}=abc\begin{vmatrix}\sin^{\beta}\theta\cos^{\alpha}\varphi & \beta\rho\sin^{\beta-1}\theta\cos\theta\cos^{\alpha}\varphi & -\alpha\rho\sin^{\beta}\theta\cos^{\alpha-1}\varphi\sin\varphi\\ \sin^{\beta}\theta\sin^{\alpha}\varphi & \rho\beta\sin^{\beta-1}\theta\cos\theta\sin^{\alpha}\varphi & \alpha\rho\sin^{\beta}\theta\sin^{\alpha-1}\varphi\cos\varphi\\ \cos^{\beta}\theta & -\rho\beta\cos^{\beta-1}\theta\sin\theta & 0\end{vmatrix}=$$

$$=\alpha\beta abc\rho^2\sin^{2\beta-1}\theta\cos^{\beta-1}\theta\sin^{\alpha-1}\varphi\cos^{\alpha-1}\varphi\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi\\ \cos\theta & -\sin\theta & 0\end{vmatrix}=$$

$$=\alpha\beta abc\rho^2\sin^{2\beta-1}\theta\cos^{\beta-1}\theta\sin^{\alpha-1}\varphi\cos^{\alpha-1}\varphi\Big(\cos\theta\Big(\cos\theta\cos^2\varphi+\cos\theta\sin^2\varphi\Big)+$$

$$+\sin\theta\Big(\sin\theta\cos^2\varphi+\sin\theta\sin^2\varphi\Big)\Big)= =\alpha\beta abc\rho^2\sin^{2\beta-1}\theta\cos^{\beta-1}\theta\sin^{\alpha-1}\varphi\cos^{\alpha-1}\varphi\,.$$

Остаточно:

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)}=\alpha\beta abc\rho^2\sin^{2\beta-1}\theta\cos^{\beta-1}\theta\sin^{\alpha-1}\varphi\cos^{\alpha-1}\varphi.$$

Контрольні запитання.

1). Сформулювати правило, за яким виписується матриця Якобі.

2). Сформулювати правило, за яким виписується матриця Гессе.

2. 4. Дотична площина та нормаль до поверхні

Нехай у n-вимірному просторі задано поверхню: $F\left(x_1,...,x_n\right)=0$, де F – диференційовна функція. Нехай $x(t)=\left(x_1(t),...,x_n(t)\right),t\in(\alpha,\beta),x(\alpha)=x_0$ - гладка крива, що лежить на цій поверхні, тобто, $F\left(x_1(t),...,x_n(t)\right)=0$. Диференціюючи по t цю тотожність, будемо мати: $F'_x\left(x_1(t),...,x_n(t)\right)\left(x'_1(t),...,x'_n(t)\right)=0$. Підставимо сюди $t=\alpha$ і перепишемо цю рівність в такий спосіб:

$$\left(gradF\left(x_1(\alpha),...,x_n(\alpha)\right),\left(x'_1(\alpha),...,x'_n(\alpha)\right)\right)=0$$

Інакше кажучи, вектор-градієнт функції F в точці $x_0 = x(\alpha) = \left(x_1(\alpha),\ldots,x_n(\alpha)\right)$

ортогональний до дотичного вектора довільної кривої, що проходить через точку x_0 на поверхні. Зрозуміло, що всі вектори простору, що мають спільний початок, в даному випадку точку x_0, ортогональні до деякого вектора, утворюють площину, яка і є дотичною площиною до поверхні. Тоді, як відомо з аналітичної геометрії, рівняння цієї площини можна записати у вигляді

$$F'_{x_1}\left(x_{01},\ldots,x_{0n}\right)\left(x_1 - x_{01}\right) + \ldots + F'_{x_n}\left(x_{01},\ldots,x_{0n}\right)\left(x_n - x_{0n}\right) = 0$$

Для нормалі до поверхні вектор-градієнт є напрямним вектором, тому канонічне рівняння нормалі запишеться у вигляді

$$\frac{x_1 - x_{01}}{F'_{x_1}\left(x_{01},\ldots,x_{0n}\right)} = \ldots = \frac{x_n - x_{0n}}{F'_{x_n}\left(x_{01},\ldots,x_{0n}\right)}.$$

Розглянемо приклад, в якому суттєво використовується вектор нормалі.

Задача. Нехай $F(x,y,z) = 0$ - рівняння замкненої поверхні, $u = F(x,y,z)$ - неперервно диференційовна функція. Знайти рівняння границі проекції поверхні на площину xOy.

Очевидно, в точках на поверхні, які проектуються в границю проекції на координатній площині xOy, нормаль горизонтальна, оскільки дотичні в таких точках вертикальні. Отже, рівняння проекції знаходиться як розв’язок системи рівнянь

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ F'_z(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

Приклад. Знайти рівняння границі проекції замкненої кривої

$x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx=a^2$.

Рівняння знайдемо з системи

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx=a^2, \\ 2z+x+y=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2+xy-\dfrac{(x+y)^2}{2}=a^2, \\ z=-\dfrac{x+y}{2}. \end{cases}$$

Відповідь: $3x^2+3y^2+2xy=4a^2$.

Дослідження методами аналітичної геометрії показує, що ця крива – еліпс.

Контрольні запитання.

1). Написати рівняння дотичної площини у точці гладкої поверхні.

2). Написати рівняння нормалі у точці до гладкої поверхні.

3). Сформулювати правило, за яким знаходиться проекція поверхні на координатні площини.

2. 5. Теорема про середнє в диференціальному численні багатьох змінних

Зразу зазначимо, що на відміну від теорії функцій однієї змінної тут виникають свої особливості.

Означення. Множина D в лінійному просторі називається опуклою, якщо разом з двома точками $x_1, x_2 \in D$ їй належить відрізок $[x_1, x_2] \ni x(t) = x_1 + t(x_2 - x_1) \in D \, \forall t \in [0,1]$ з кінцями у цих точках.

Відповідний інтервал будемо позначати $(x_1, x_2) \ni x(t) = x_1 + t(x_2 - x_1) \in D \, \forall t \in (0,1)$.

Теорема про середнє. Нехай $D \subset \mathbb{R}^n$ - опукла множина, $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ неперервна на відрізку $[x_1, x_2]$ і диференційовна на інтервалі (x_1, x_2). Тоді існує точка $\xi \in [x_1, x_2]$ така, що $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$.

Доведення. Розглянемо скалярнозначну функцію скалярного аргументу $F(t) = f\left(x_1 + t(x_2 - x_1)\right)$. Зауважимо, що $F(0) = f(x_1)$, $F(1) = f(x_2)$. За формулою диференціювання складеної функції маємо: $F'(t) = f'_x\left(x_1 + t(x_2 - x_1)\right)(x_2 - x_1)$.

Отже, за теорему про середнє у одновимірному аналізі знайдеться таке $\theta \in (0,1)$ і відповідно $\xi = x_1 + \theta(x_2 - x_1) \in (x_1, x_2)$, що

$$F(1) - F(0) = F'(\theta)(1-0) = F'(\theta) = f_x'\left(x_1 + \theta(x_2 - x_1)\right)(x_2 - x_1) = f_x'(\xi)(x_2 - x_1).$$

Підставляючи сюди значення функції F у граничних точках, маємо формулу:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

Доведене співвідношення називається формулою скінченних приростів.

Наслідок. При виконанні умов теореми про середнє, якщо похідна функції скрізь дорівнює нулю, то функція є тотожною константою. Зауваження. Область визначення не обов’язково повинна бути опуклою, досить вважати її відкритою. Тоді кожна точка входить до неї з деяким досить малим околом, кулькою, а вона опукла.

Ідея доведення. Для двох досить близьких точок, які лежать в кулі, що входить в область, маємо: $f(x_2) = f(x_1)$. Зафіксуємо точку x_1, а x_2 нехай бігає по кулі. Тоді в цій кулі $f(x_2) = const = f(x_1)$. Якщо x - довільна точка області, з’єднаємо її з точкою x_1 ламаною, в кожному з кінців якої за доведеним функція приймає однакові значення, отже, на всій області функція стала.

Зауваження. Нехай у відкритій області функція має обмежену похідну: $|f'(x)| \le L$. Тоді вона задовольняє умову Ліпшиця: $|f(x_2) - f(x_1)| \le L\|x_2 - x_1\|$.

Дійсно, застосовуючи формулу скінченних приростів, будемо мати:

$|f(x_2) - f(x_1)| = \|f'(\xi)\| \|x_2 - x_1\| \le L\|x_2 - x_1\|$.

Зауважимо, що для функцій, що здійснюють відображення у простір розмірності більшої ніж одиниця, аналогічна ф рмула скінченних приростів (у формі рівності), взагалі кажучи, несправедлива.

Приклад. Розглянемо функцію $f(t)=\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}, t\in[0,2\pi]$. Її похідна має вигляд $f'(t)=\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}, \|f'(t)\|=1$. Її приріст на відрізку $[0,2\pi]$ дорівнює $f(2\pi)-f(0)=\begin{pmatrix}\cos 2\pi\\ \sin 2\pi\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\cos 0\\ \sin 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$. Очевидно, не існує такого значення $\xi\in(0,2\pi)$, при якому $2\pi\begin{pmatrix}-\sin\xi\\ \cos\xi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$.

Одне з застосувань обмеженості в області визначення похідної функції – виконання умови Ліпшиця, яка має форму нерівності. Виявляється, для довільних багатовимірних відображень можна довести теорему про середнє, але у формі нерівності. Будемо вважати, що функція має обмежену похідну у області визначення. Нехай дві точки області можна з’єднати кривою (довжину її позначимо через *L*), яка задається неперервно диференційовною фунцією

$$\varphi: t\in[\alpha,\beta]\to x(t)\in[x_1,x_2], \varphi(\alpha)=x_1,\ \varphi(\beta)=x_2.$$

Тоді $f_t'(\varphi(t))=f_x'(\varphi(t))\varphi'(t)$. Проінтегрувавши обидві частини цієї рівності, будемо мати:

$$f(x_2)-f(x_1)=\int_\alpha^\beta f_x'(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Це, так би мовити, теорема про середнє у інтегральному вигляді для відображень багатовимірних просторів.

Звідси

$$\|f(x_2)-f(x_1)\|=\left\|\int_\alpha^\beta f_x'(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right\|\le L\sup_{x\in D}\|f'(x)\|\left\|\int_\alpha^\beta \varphi'(t)dt\right\|\le$$

$$\le L\sup_{x\in D}\|f'(x)\|.$$

В частинному випадку, якщо точки з'єднуються відрізком прямої, будемо мати нерівність:

$$\left\| f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)\right\| \le \left(\sup_{x\in D}\left\| f'(x)\right\|\right)\left\| x_2-x_1\right\| .$$

Повернемось до питання зв'язку існування частинних похідних і диференційовності функції.

Контрольні питання

1). Сформулювати теорему про середнє для скалярнозначної функції кількох змінніх.

2). Чи має місце теорема про середнє у вигляді рівності для векторнозначної функції кількох змінніх?

3). Сформулювати теорему про середнє у вигляді нерівності для векторнозначної функції кількох змінніх.

4). Сформулювати теорему про середнє у інтегральному вигляді для векторнозначної функції кількох змінніх.

2. 6. Достатні умови диференційовності функції багатьох змінних

Раніше було показано, що з існування частинних похідних по всім змінним ще не достатньо для диференційовності багатовимірного відображення, тобто, взагалі кажучи, буває неможливо виділення лінійної частині у його прирості. І все-таки, при додаткових умовах диференційовність у точці довести можна при наґвності всіх частинних похідних.

Теорема. Нехай скалярнозначна функція має неперервні частинні похідні в околі деякої точки. Тоді ця функція диференційовна в цій точці.

Доведення. Без обмеження загальності можна вважати окіл опуклою відкритою множиною. Тоді разом з точками $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $x+h=(x_1+h_1,x_2+h_2,...,x_n+h_n)$ до околу повинні належати точки відрізку, що їх з'єднує: $x+th=(x_1+th_1,x_2+th_2,...,x_n+th_n),t\in[0,1]$. Перетворимо приріст функції наступним чином:

$$f(x+h)-f(x)=f(x_1+h_1,x_2+h_2,...,x_n+h_n)-f(x_1,x_2,...,x_n)=$$
$$f(x_1+h_1,x_2+h_2,...,x_n+h_n)-f(x_1,x_2+h_2,...,x_n+h_n)+$$
$$+f(x_1,x_2+h_2,x_3+h_3,...,x_n+h_n)-f(x_1,x_2,x_3+h_3,...,x_n+h_n)+\dots$$
$$\dots+f(x_1,x_2,...x_{n-1},x_n+h_n)-f(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_n+h_n).$$

Для кожного скінченного приросту – приросту лише по одній змінній - застосуємо теорему Ланранжа:

$$f(x+h)-f(x)=\frac{\partial}{\partial x_1}f(x_1+\theta_1 h_1,x_2+h_2,...,x_n)h_1+\frac{\partial}{\partial x_2}f(x_1,x_2+\theta_2 h_2,x_3,...,x_n)h_2+$$
$$+...+\frac{\partial}{\partial x_n}f(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_n+\theta_n h_n)h_n.$$

Використаємо неперервність кожної частинної похідної:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}f(x_1,...,x_{k-1},x_k+\theta_k h_1,x_{k+1},...,x_n)=\frac{\partial}{\partial x_k}f(x_1,...,x_{k-1},x_k+\theta_k h_1,x_{k+1},...,x_n)+\gamma_k, k=1,...,n,$$

де величина $\gamma_k=o(1)$, нескінченно мала, що прямує до нуля, якщо h_k прямує до нуля. Отже, $\gamma_k h_k=o(h_k)$. Звідси випливає, що

$$f(x+h)-f(x)=f'(x)h+o(h),$$

Тобто, функція f диференційовна у точці x.

Тільки що доведена теорема свідчить, що неперервності в точці частинних похідних функції достатньо для її диференційовності в цій точці. Треба підкреслити, що ця умова не є, взагалі кажучи, необхідною. Проілюструємо це на прикладі.

Приклад. $f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

Очевидно, останній запис означає, що $f(0,0)=0.$

Знайдемо частинні похідні функції при умові $x^2+y^2>0$:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=2y\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}.$$

В точці $(0,0)$ похідні треба шукати, виходячи з означення:

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\Delta x\right)^2\sin\dfrac{1}{\left(\Delta x\right)^2}}{\Delta x}=0.$$

Аналогічно $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0.$

Виберемо тепер послідовність точок $\left(x_n,y_n\right)\to(0,0),\, n\to\infty,$ для якої $\cos\dfrac{1}{x_n^2+y_n^2}=1\Rightarrow\dfrac{1}{x_n^2+y_n^2}=2\pi n.$ Можна, наприклад, взяти

$$x_n=y_n=\frac{1}{2\sqrt{\pi n}},n\in\mathbb{N}.$$

Обчислимо частинні похідні в цих точках:

$$\frac{\partial f\left(x_n,y_n\right)}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\sin 2\pi n-\frac{2\pi n}{\sqrt{\pi n}}=-2\sqrt{\pi n}\to-\infty,\ n\to\infty.$$

Аналогічно $\frac{\partial f\left(x_n, y_n\right)}{\partial x} \to -\infty, n \to \infty.$ Отже, частинні похідні необмежені в околі $(0,0)$, тобто, вони розривні в цій точці. Доведемо диференційовність цієї функції в точці $(0,0).$ Приріст аргументу в цій точці зручно записувати у полярних координатах: $\sqrt{\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta y\right)^2} = \rho.$ Нагадаємо, що частинні похідні в цій точці дорівнюють нулю. Це означає, що лінійна частина приросту дорівнює нулю. Знайдемо його залишковий член. Маємо:

$$\Delta f(0,0) = \left(\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta y\right)^2\right)\sin\frac{1}{\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta y\right)^2} = \rho^2 \sin\frac{1}{\rho^2}.$$

Звідси $=\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\rho^2\sin\frac{1}{\rho^2}}{\rho} = \lim\limits_{\rho\to 0}\rho\sin\frac{1}{\rho^2} = 0 \Rightarrow \rho^2\sin\frac{1}{\rho^2} = o\left(\rho\right),$ що й треба було довести.

Контрольне запитання.

1). Сформулювати достатні умови диференційовності функцій багатьох змінних.

2). Чи є мова неперервності частинних похідних необхідною для диференційовності функцій багатьох змінних?

2. 7. Похідні вищих порядків, умова комутативності для мішаних похідних вищих порядків

Розглянемо скалярнозначну функцію $f\left(x\right) \in \mathbb{R}^1, x \in \mathbb{R}^n$

Нагадаємо означення других похідних:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f\left(x\right)}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial^2 f\left(x\right)}{\partial x_j \partial x_k}, \; j,k:1,\ldots,n.$$

Похідна називається немішаною, якщо $j = k$:

$$\frac{\partial^2 f\left(x\right)}{\partial x_k^2} = \frac{\partial^2 f\left(x\right)}{\partial x_k \partial x_k},$$

і мішаною, якщо $j \neq k$.

За індукцією визначаються похідні вищих порядків:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial^{m-1} f\left(x\right)}{\left(\partial x_{k_1}\right)^{r_1}\ldots\left(\partial x_{k_l}\right)^{r_l}}\right)=\frac{\partial^m f\left(x\right)}{\partial x_j\left(\partial x_{k_1}\right)^{r_1}\ldots\left(\partial x_{k_l}\right)^{r_l}}, r_1+\ldots+r_l=m-1.$$

Взагалі кажучи,

$$\frac{\partial^2 f\left(x\right)}{\partial x_j \partial x_k} \neq \frac{\partial^2 f\left(x\right)}{\partial x_k \partial x_j}.$$

Покажемо це на прикладі. Розглянемо функцію:

$$f(x,y)=\left[\begin{array}{ll} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0, \\ 0, & x^2+y^2=0. \end{array}\right.$$

Очевидно, при $x=0, y\neq 0$ маємо: $f(0,y)=0\cdot y\dfrac{-y^2}{y^2}=0.$ Аналогічно, при $x\neq 0, y=0$ $f(x,0)=x\cdot 0\cdot\dfrac{x^2}{x^2}=0.$

Знайдемо перші похідні функції в точці $(0,0)$:

$\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(\Delta x,0\right)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0-0}{\Delta x}=0$ і так само $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0.$

При $x^2+y^2>0$ $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=y\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\dfrac{2x\left(x^2+y^2\right)-2x\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=$

$$=y\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right).$$

Якщо $x=0, y\neq 0,$ то $\dfrac{\partial f(0,y)}{\partial x}=-y.$ Але за цією формулою можна підрахувати і $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\partial f(0,y)}{\partial x}=\lim\limits_{y\to 0}\left(-y\right)=0=\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}.$

Продиференціювавши за змінною y рівність $\dfrac{\partial f(0,y)}{\partial x}=-y,$ одержимо:

$$\frac{\partial^2 f(0,y)}{\partial y\partial x}=-1.$$

Звідси $\dfrac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\partial x}=-1.$ В цьому можна переконатись і безпосередньо:

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\partial x}=\lim_{y\to 0}\frac{\dfrac{\partial f(0,y)}{\partial x}-\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{y}=-1.$$

Далі, при $x^2+y^2>0$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=x\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-\frac{4x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right).$$

Тоді при $x\neq 0, y=0$ одержимо: $\dfrac{\partial f(x,0)}{\partial y}=x.$ Звідси, як і в попередньому випадку, $\dfrac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}=1.$ Отже, $1=\dfrac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}\neq\dfrac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\partial x}=-1.$

І все ж таки при деяких умовах другі мішані похідні не залежать від порядку диференціювання.

Теорема. Нехай другі похідні неперервні, тоді $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j\partial x_k}=\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k\partial x_j}.$

Доведення. Зрозуміло, що досить довести формулу для функції двох змінних. Отже, нехай $y=f\left(x_1,x_2\right),h=\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\end{pmatrix}.$ Розглянемо дві допоміжні функції скалярного аргументу:

$$t\in\mathbb{R}^1,\varphi(t)=f\left(x_1+th_1,x_2+h_2\right)-f\left(x_1+th_1,x_2\right),$$

$$\psi(\tau)=f\left(x_1+h_1,x_2+\tau h_2\right)-f\left(x_1,x_2+\tau h_2\right).$$

$$\varphi(1)-\varphi(0)=f(x_1+h_1,x_2+h_2)-f(x_1+h_1,x_2)-f(x_1,x_2+h_2)+f(x_1,x_2)=F(h_1,h_2),$$

$$\psi(1)-\psi(0)=f(x_1+h_1,x_2+h_2)-f(x_1+h_1,x_2)-f(x_1,x_2+h_2)+f(x_1,x_2)=F(h_1,h_2).$$

Застосуємо двічи формулу середнього в диференціальному численні:

$$F(h_1,h_2)=\varphi_t^{'}(\theta_1)(1-0)=\left(\frac{\partial f(x_1+\theta_1 h_1,x_2+h_2)}{\partial x_1}-\frac{\partial f(x_1+\theta_1 h_1,x_2)}{\partial x_1}\right)h_1=$$

$$=\frac{\partial^2 f(x_1+\theta_1 h_1,x_2+\theta_2 h_2)}{\partial x_1\partial x_2}h_1h_2,\ \theta_1,\theta_2\in(0,1).$$

Аналогічно

$$F(h_1,h_2)=\frac{\partial^2 f\left(x_1+\tilde{\theta}_1 h_1,x_2+\tilde{\theta}_2 h_2\right)}{\partial x_1\partial x_2}h_1h_2.$$

Перехід до границі при $h_1,h_2\to 0$ з урахуванням неперервності других похідних завершує доведення.

Зосередимо увагу на других похідних скалярнозначних функцій.
Нехай $f\in C^2\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^1\right)$. Її матриця Якобі має вигляд

$$f'(x)=\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\dots\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)\in\left(\mathbb{R}^n\right)^*$$

Раніше було ретельно досліджено вигляд матриці другої похідної скалярнозначної функції $u:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^1$, її матрицю Гессе $H(f)$

$$H(f)\equiv f''(x)=\frac{D^2(u)}{D(x_1,x_2,...,x_n)^2}=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1{}^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1\partial x_2} & ... & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1\partial x_n}\\ . & . & ... & .\\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n\partial x_2} & ... & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n{}^2}\end{pmatrix}.$$

Визначник матриці Гессе називається гессіаном.

Якщо всі другі частинні похідні неперервні, то матриця Гессе симетрична.

Нехай є матриця $A(n,n)$. Вектор $h\left(h\neq 0\right)$ називається власним, відповідним власному числу λ, якщо $Ah=\lambda h$. У симетричній матриці в дійсному просторі все власні числа дійсні.

$$Ah-\lambda Ih=0\Rightarrow\left(A-\lambda I\right)h=0.$$

Отже, власні числа матриці Гессе дійсні. Цей факт буде використовуватись в задачі про екстремум.

Диференціал функції можна записати, використовуючи символічну операцію:

$$df\left(x\right)=\frac{\partial f(x)}{\partial x}h_1+\ldots+\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}h_n=\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\ldots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)f(x).$$

Аналогічно

$$d^2f\left(x\right)=d\left(df\left(x\right)\right)=\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\ldots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 f\left(x\right)$$

За індукцією $d^m f\left(x\right)=\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^m f\left(x\right).$

Приклад. Записати матрицю Гессе для, принаймні, двічи неперервно диференційовної функції скалярнозначної функції $z=f\left(x+y,xy\right).$

Розв'язання. Введемо позначення: $\xi=x+y,\eta=xy.$ Знайдемо спочатку матрицю Якобі:

$$\frac{D(z)}{D(x,y)}=\frac{D(z)}{D(\xi,\eta)}\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial\xi} & \frac{\partial z}{\partial\eta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y}\\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial\xi} & \frac{\partial z}{\partial\eta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ y & x\end{pmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\partial z}{\partial\xi}+y\frac{\partial z}{\partial\eta},\quad\frac{\partial z}{\partial\xi}+x\frac{\partial z}{\partial\eta}\right)=\left(\frac{\partial z}{\partial\xi},\quad\frac{\partial z}{\partial\xi}\right)+\left(y\frac{\partial z}{\partial\eta},\quad x\frac{\partial z}{\partial\eta}\right).$$

Знайдемо похідну $\dfrac{D}{D(x,y)}$ від кожного доданку окремо.

$$\frac{D}{D(x,y)}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial \xi}, & \dfrac{\partial z}{\partial \xi}\end{pmatrix}=\left(\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}\right)^{T}\left(\frac{Dcol\begin{pmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial \xi}, & \dfrac{\partial z}{\partial \xi}\end{pmatrix}}{D(\xi,\eta)}\right)^{T}=\begin{pmatrix}1 & y\\ 1 & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial \xi\partial\eta} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial \xi\partial\eta}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}+y\dfrac{\partial^2 z}{\partial \xi\partial\eta} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}+y\dfrac{\partial^2 z}{\partial \xi\partial\eta}\\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}+x\dfrac{\partial^2 z}{\partial \xi\partial\eta} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}+x\dfrac{\partial^2 z}{\partial \xi\partial\eta}\end{pmatrix}.$$

$$\frac{D\begin{pmatrix}y\dfrac{\partial z}{\partial \eta}, & x\dfrac{\partial z}{\partial \eta}\end{pmatrix}}{D(x,y)}=\left(\begin{pmatrix}y & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}\frac{D\begin{pmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial \eta}, & \dfrac{\partial z}{\partial \eta}\end{pmatrix}}{D(x,y)}+\begin{pmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial \eta} & 0\\ 0 & \dfrac{\partial z}{\partial \eta}\end{pmatrix}\frac{D\begin{pmatrix}y, & x\end{pmatrix}}{D(x,y)}\right)^{T}=$$

$$=\left(\begin{pmatrix}y & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}\frac{D\begin{pmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial \eta}, & \dfrac{\partial z}{\partial \eta}\end{pmatrix}}{D(\xi,\eta)}\begin{pmatrix}1 & 1\\ y & x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial \eta} & 0\\ 0 & \dfrac{\partial z}{\partial \eta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)^{T}=$$

$$=\left(\begin{pmatrix}y & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 z}{\partial \xi\partial\eta} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial \xi\partial\eta} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ y & x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \dfrac{\partial z}{\partial \eta}\\ \dfrac{\partial z}{\partial \eta} & 0\end{pmatrix}\right)^{T}=$$

$$=\begin{pmatrix} y\dfrac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial\eta^2} & y\dfrac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}+xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial\eta^2} \\ x\dfrac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}+xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial\eta^2} & x\dfrac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}+x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial\eta^2} \end{pmatrix}^T+\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\partial z}{\partial\eta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial\eta} & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} y\dfrac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial\eta^2} & x\dfrac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}+xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial\eta^2} \\ y\dfrac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}+xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial\eta^2} & x\dfrac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}+x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial\eta^2} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\partial z}{\partial\eta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial\eta} & 0 \end{pmatrix}.$$

Остаточно

$$f''(x+y,xy)=\frac{D^2(z)}{D(x,y)}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+y\dfrac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+y\dfrac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+x\dfrac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+x\dfrac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta} \end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix} y\dfrac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial\eta^2} & x\dfrac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}+xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial\eta^2} \\ y\dfrac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}+xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial\eta^2} & x\dfrac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}+x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial\eta^2} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\partial z}{\partial\eta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial\eta} & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+2y\dfrac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial\eta^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+\left(x+y\right)\dfrac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}+xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}+\dfrac{\partial z}{\partial\eta} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+\left(x+y\right)\dfrac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}+xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}+\dfrac{\partial z}{\partial\eta} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+2x\dfrac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}+x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial\eta^2} \end{pmatrix}.$$

Контрольні запитання

1). Чи завжди комутують частинні похідні за різними змінними?

2) Навести приклад відсутності комутування частинних похідних за різними змінними.

2. 8. Теорема про диференційовність неявної функції. Застосування до оберненої функції

Можливість розв’язати рівняння або систему рівнянь відносно невідомої функції або, у більш загальному випадку, багатовимірного відображення, - одне з центральних питань математичного аналізу. Також постає проблема дослідження похідних такої функції у разі її існування. Доведення відповідних теорем досить нелегке. Для тих, хто хоче розібратись у таких складних питаннях, ми наводимо відповідні факти у Доповненні.

Теорема. Нехай $F(x,y)\in\mathbb{R}^m, x\in\mathbb{R}^n, y\in\mathbb{R}^m$, $\exists(a,b)\in\mathbb{R}^{n+m}: F(a,b)=0$, $F\in C^1$, $\det\left(\frac{D(F(a,b))}{D(y)}\right)\neq 0.$ Тоді $\exists!\varphi$, існує $B_\delta(a)$ – область визначення φ, $\varphi(x)\in B_\varepsilon(b)$, $F(x,\varphi(x))=0$ $x\in B_\delta(a)$.

Приклад:

$$F(x,y)=y^2-x,\ F(x,y)=0, y^2-x=0 \Leftrightarrow y^2=x.\ \ y=\pm\sqrt{x}$$

Якщо $x>0,\ y^2=x$, в досить малому околі точки $(x,y): x>0,\ y>0$ існує єдина функція $y=\sqrt{x}$, яка задовольняє рівнянню. Аналогічно при $x>0,\ y<0$ існує єдина функція $y=-\sqrt{x}$, яка теж задовольняє рівнянню. При цьому $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=2y\neq 0.$

В як завгодно малому околі точки (0,0) існує дві функції $y=\pm\sqrt{x}$, які задовольняють рівняння При цьому $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=2y=0$, тобто, умови теореми не виконуються.

Теорема про диференційовність неявної функції.

Нехай виконано умови теореми про наявну функцію, для $x \in B_\delta(a), y \in \mathrm{B}_\varepsilon(\mathrm{b})$,

$\det\left(\frac{D(F(x,y))}{D(y)}\right) \neq 0.$ Тоді функція φ диференційовна в цьому околі і її частинні похідні знаходяться за формулою:

$$\frac{D(y(x))}{D(x)} = \left(\frac{D(F(x,y))}{D(y)}\right)^{-1} \frac{D(F(x,y))}{D(x)}.$$

Пояснення. В рамках даного курсу не вдається довести існування похідної неявної функції. Будемо вважати, що цей факт доведено. Покажемо, як на формальному рівні довести формулу для цієї похідної. Знайдемо повну похідну по *x* від обох частин рівності $F(x, y(x)) = 0$:

$$\left(F(x,y(x))\right)'_x = \frac{D(F(x,y))}{D(x)} + \frac{D(F(x,y))}{D(y)} \frac{D(y(x))}{D(x)} = 0.$$

$$\frac{D(y(x))}{D(x)} = -\left(\frac{D(F(x,y))}{D(y)}\right)^{-1} \frac{D(F(x,y))}{D(x)}.$$

Легко бачити, що в координатному вигляді для скалярнозначного випадку функції *F* будемо мати:

$$\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{x_k}} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = -\frac{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x_k}}{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}}.$$

Розглянем частинний випадок $F(\mathrm{x,y}) = x - f(y) = 0$, тобто $x = f(y)$, і будемо вважати, що виконуються умови диференційовності неявної функції, тобто, $f'(y) \neq 0$. Тоді, по-перше, існує і диференційовна обернена функція $y = f^{-1}(x)$ і її похідна знаходиться за формулою

$$y'_x = \left(f^{-1}(x)\right)'_x = \left(\frac{D(y)}{D(x)}\right) = \left(\frac{D(x)}{D(\mathrm{y})}\right)^{-1} = \left(f'(y)\right)^{-1}.$$

Доведення миттєво випливає з загальної формули.

Розв'яжемо кілька задач на знаходження частинних похідних від неявних функцій.

Задача. Нехай $z = z(x, y)$ - неявна функція, що визначається з рівняння $z^3 - 3xyz = a^3$. Знайти її частинні похідні і диференціал.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial\left(z^3 - 3xyz\right)}{\partial x}}{\dfrac{\partial\left(z^3 - 3xyz\right)}{\partial z}} = -\frac{-3yz}{3z^2 - 3xy} = \frac{yz}{z^2 - xy},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{z^2 - xy}.$$

$$dz = \left(\frac{yz}{z^2 - xy}\right)dx + \left(\frac{xz}{z^2 - xy}\right)dy = \left(\frac{z}{z^2 - xy}\right)\left(ydx + xdy\right).$$

Задача. Нехай $z = z(x, y)$ - неявна функція, що визначається з рівняння $F\left(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2\right) = 0$. Знайти її частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ і перший диференціал.

Зауважимо, що можна використати позначення $\xi = x + y + z, \eta = x^2 + y^2 + z^2$ і похідну $\frac{\partial F}{\partial \xi}$ позначати як F_1'. Аналогічно $F_2' = \frac{\partial F}{\partial \eta}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F\left(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2\right)}{\partial x}}{\dfrac{\partial F\left(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2\right)}{\partial z}} = -\frac{F_1' + 2xF_2'}{F_1' + 2zF_2'}.$$

Радимо читачу самостійно знайти $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_1' + 2yF_2'}{F_1' + 2zF'}$. Звідси перший диференціал дорівнює $dz = \left(-\frac{F_1' + 2xF_2'}{F_1' + 2zF'}\right)dx + \left(-\frac{F_1' + 2yF_2'}{F_1' + 2zF'}\right)dy = -\frac{\left(F_1' + 2xF_2'\right)dx + \left(F_1' + 2yF_2'\right)dy}{F_1' + 2zF'}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{F_1'+2xF_2'}{F_1'+2zF_2'}\right)=-\frac{\left(F_1'+2zF_2'\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(F_1'+2xF_2'\right)-\left(F_1'+2xF_2'\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(F_1'+2zF_2'\right)}{\left(F_1'+2zF_2'\right)^2}$$

Покажемо, як брати похідну від однієї з дужок, все інше робиться за тією самою схемою.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(F_1'+2zF_2'\right)=\frac{\partial F_1'}{\partial x}+2z\frac{\partial F_2'}{\partial x}+2\frac{\partial z}{\partial x}F_2'=$$

$$=F_{11}''\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)+2F_{21}''\left(x+z\frac{\partial z}{\partial x}\right)+2zF_{12}''\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)+4zF_{22}''\left(x+z\frac{\partial z}{\partial x}\right)+2F_2'\frac{\partial z}{\partial x}=$$

$$=F_{11}''+2\left(x+z\right)F_{12}''+2xF_{22}''+\left(F_{11}''+4z\left(1+z\right)F_{12}''+2F_2'\right)\frac{\partial z}{\partial x}=$$

$$=F_{11}''+2\left(x+z\right)F_{12}''+2xF_{22}''-\left(F_{11}''+4z\left(1+z\right)F_{12}''+2F_2'\right)\frac{F_1'+2xF_2'}{F_1'+2zF_2'}.$$

Задача. Нехай рівняння $x=\varphi(u,v),\ y=\psi(u,v), z=\chi(u,v)$ визначають z як функцію від x і y. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

Розв'язання. Використаємо формулу диференціювання складеної функції:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left(\frac{D(z)}{D(x,y)}\right)=\left(\frac{D(\chi)}{D(u,v)}\right)\left(\frac{D(u,v)}{D(x,y)}\right)=\left(\frac{D(\chi)}{D(u,v)}\right)\left(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{\partial \chi}{\partial u},\frac{\partial \chi}{\partial v}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v}\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{|J|}\left(\frac{\partial \chi}{\partial u},\frac{\partial \chi}{\partial v}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial\psi}{\partial v} & -\frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ -\frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial u}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{|J|}\left(\frac{\partial\chi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u}-\frac{\partial\chi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u},-\frac{\partial\chi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\chi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right).$$

Тут було використано позначення: $|J|=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v}\end{vmatrix}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}$.

Отже, $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{|J|}\left(\frac{\partial\chi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u}-\frac{\partial\chi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right),\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{|J|}\left(-\frac{\partial\chi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\chi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right).$

Опишемо тепер процедуру знаходження других частинним похідних $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$. Скористаємось тим фактом, що матриця Гессе других похідних – це матриця Якобі для матриці перших похідних скалярнозначної функції. Для більшої зручності, ввівши позначення

$$\Phi(u,v)=\frac{1}{|J|}\left(\frac{\partial\chi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u}-\frac{\partial\chi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right),\Psi(u,v)=\frac{1}{|J|}\left(-\frac{\partial\chi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\chi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right),$$

перепишемо в такий спосіб матрицю перших похідних:

$$\frac{D(z)}{D(x,y)}=\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left(\Phi(u,v),\Psi(u,v)\right).$$

Продиференціюємо обидві частини по x,y , використавши формулу диференціювання складеної функції з урахуванням того, що матрицю $\frac{D(u,v)}{D(x,y)}$ $=\left(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^{-1}$ вже знайдено.

$$\frac{D}{D(x,y)}\left(\frac{D(z)}{D(x,y)}\right)=\frac{D^2(z)}{\left(D(x,y)\right)^2}=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\end{pmatrix}=\frac{D\left(\Phi(u,v),\Psi(u,v)\right)}{D(u,v)}\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=$$

$$=\frac{1}{|J|}\begin{pmatrix}\frac{\partial\Phi(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial\Phi(u,v)}{\partial v}\\ \frac{\partial\Psi(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial\Psi(u,v)}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial\psi}{\partial u} & -\frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ -\frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\end{pmatrix}.$$

Приклад. Нехай z визначається з рівняння $xe^x+ye^y-ze^z=0$. Знайти $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$ при $u=\frac{x+z}{y+z}$.

Зауважимо, що функцію можна переписати у більш зручному вигляді:

$$u=\frac{y+z+x-y}{y+z}=1+\frac{x-y}{y+z}.$$

Знайдемо частинні похідні неявної функції z:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial\left(xe^x+ye^y-ze^z\right)}{\partial x}}{\dfrac{\partial\left(xe^x+ye^y-ze^z\right)}{\partial z}}=-\frac{(1+x)e^x}{-(1+z)e^z}=\frac{(1+x)e^{x-z}}{(1+z)}.$$

З урахуванням цього значення знайдемо тепер $\dfrac{\partial u}{\partial x}$. Маємо:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(1+\frac{x-y}{y+z}\right)=\frac{y+z-(x-y)\dfrac{\partial z}{\partial x}}{(y+z)^2}=\frac{1}{y+z}+\frac{(y-x)(1+x)}{(y+z)^2(1+z)}e^{x-z}.$$

Радимо читачу самостійно знайти $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Задача. Нехай $z=z(x,y)$ функція визначається з системи рівнянь $f(x,y,z,t)=0, g(x,y,z,t)=0.$ Знайти $dz.$

Розв'язання. Вважаючи, що в дані рівняння підставлено функцію $z=z(x,y)$, диференціюємо кожне з них:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}dy+\dfrac{\partial f}{\partial z}dz+\dfrac{\partial f}{\partial t}dt=0,\\ \dfrac{\partial g}{\partial x}dx+\dfrac{\partial g}{\partial y}dy+\dfrac{\partial g}{\partial z}dz+\dfrac{\partial g}{\partial t}dt=0.\end{cases}$$

Перепишемо їх як лінійну систему відносно dz, dt, вважаючи, що її визначник не дорівнює нулю:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial z}dz+\dfrac{\partial f}{\partial t}dt=-\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}dy\right),\\ \dfrac{\partial g}{\partial z}dz+\dfrac{\partial g}{\partial t}dt=-\left(\dfrac{\partial g}{\partial x}dx+\dfrac{\partial g}{\partial y}dy\right).\end{cases}$$

Нехай

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial g}{\partial z} & \frac{\partial g}{\partial t} \end{vmatrix} \neq 0, \Delta_z = -\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy & \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy & \frac{\partial g}{\partial t} \end{vmatrix}$$

Тоді $dz = \frac{\Delta_z}{\Delta}$.

Задача. Нехай $x = u\cos v, y = u\sin v, z = v$. Знайти похідні

$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial x}$.

Розв'язання. Для знаходження перших похідних використаємо формулу:

$$\frac{D(z)}{D(x,y)} = \frac{D(z)}{D(u,v)}\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\left(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^{-1}.$$

Маємо: $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{pmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{pmatrix}, \det\left(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right) = u,$

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \left(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{u}\begin{pmatrix} u\cos v & u\sin v \\ -\sin v & \cos v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos v & \sin v \\ -\frac{\sin v}{u} & \frac{\cos v}{u} \end{pmatrix}.$$

Звідси $\frac{D(z)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos v & \sin v \\ -\frac{\sin v}{u} & \frac{\cos v}{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sin v}{u} & \frac{\cos v}{u} \end{pmatrix}.$

Згідно з формулою диференціювання матричної функції, що складається з одного рядка, одержимо:

$$\frac{D^2(z)}{D(x,y)^2}=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\end{pmatrix}=\left(\frac{Dcol\begin{pmatrix}-\frac{\sin v}{u} & \frac{\cos v}{u}\end{pmatrix}}{D(u,v)}\left(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^{-1}\right)^T=$$

$$=\left(\begin{pmatrix}\frac{\sin v}{u^2} & -\frac{\cos v}{u}\\ -\frac{\cos v}{u^2} & -\frac{\sin v}{u}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos v & \sin v\\ -\frac{\sin v}{u} & \frac{\cos v}{u}\end{pmatrix}\right)^T=\begin{pmatrix}\frac{\sin 2v}{u^2} & -\frac{\cos 2v}{u}\\ -\frac{\cos 2v}{u^2} & -\frac{\sin 2v}{u^2}\end{pmatrix}^T=$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\sin 2v}{u^2} & -\frac{\cos 2v}{u}\\ -\frac{\cos 2v}{u^2} & -\frac{\sin 2v}{u^2}\end{pmatrix}.$$

Зауваження. З точки зору практичних обчислень матриці Гессе, коли, як правило, доводиться працювати з гладкими функціями (елементарні функції нескінченно диференційовні), можна не замислюватись з приводу транспонування матриці.

Відповідь: $\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sin 2v}{u^2} & -\frac{\cos 2v}{u}\\ -\frac{\cos 2v}{u^2} & -\frac{\sin 2v}{u^2}\end{pmatrix}.$

Задача. Нехай змінні x, y, u, v пов’язані співвідношеннями:

$$\begin{cases}F(x,y,u,v)=xv-yv=0,\\ G(x,y,u,v)=yu+xv=1.\end{cases}$$

Вважаючи, що u, v є функціями x, y, знайти похідні $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}.$

Розв’язання. Продиференціюємо тотожність

$$\begin{cases} F\left(x, y, u(x,y), v(x,y)\right) \equiv 0, \\ G\left(x, y, u(x,y), v(x,y)\right) \equiv 1. \end{cases}$$

$$\frac{D\left(F,G\right)}{D(x,y)} + \frac{D\left(F,G\right)}{D(u,v)}\frac{D\left(u,v\right)}{D(x,y)} = 0 \Rightarrow \frac{D\left(u,v\right)}{D(x,y)} = -\left(\frac{D\left(F,G\right)}{D(u,v)}\right)^{-1}\frac{D\left(F,G\right)}{D(x,y)}.$$

Звідси одержимо:

$$\frac{D\left(u,v\right)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} = -\frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{xu+yv}{x^2+y^2} & \frac{xv-yu}{x^2+y^2} \\ \frac{-xv+yu}{x^2+y^2} & -\frac{xu+yv}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Зауваження. Можна було б використати формули для похідних неявного відображення.

Задача. Нехай функція $z = z(x,y)$ визначається за формулою

$z = \alpha(x,y)x + \dfrac{y}{\alpha(x,y)} + f\left(\alpha(x,y)\right)$ при виконанні умови

$$x - \frac{y}{\alpha^2(x,y)} + f'_\alpha\left(\alpha(x,y)\right) = 0.$$

Підрахувати значення добутку $\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Розв'язання. Маємо:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + x\dfrac{\partial \alpha}{\partial x} - \dfrac{y}{\alpha^2}\dfrac{\partial \alpha}{\partial x} + f'_\alpha(\alpha)\dfrac{\partial \alpha}{\partial x} & x\dfrac{\partial \alpha}{\partial y} + \dfrac{\alpha - y\dfrac{\partial \alpha}{\partial y}}{\alpha^2} + f'_\alpha(\alpha)\dfrac{\partial \alpha}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

З урахуванням умови одержимо:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \dfrac{1}{\alpha} \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1.$$

Приклад. Знайти похідну неявної функції $\dfrac{dy(0)}{dx}$, якщо $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right)$. Зрозуміло, що в околі точки $O(0,0)$ біквадратне відносно y рівняння має неєдиний розв'язок, тому значення похідної може бути неєдиним, геометрично це будуть тангенси кутів дотичних до різних гілок розв'язків цього рівняння.

Зазначимо, що знаходження за загальною формулою похідної неявної функції, що виражається з рівняння $F(x,y) = \left(x^2 + y^2\right)^2 - a^2\left(x^2 - y^2\right) = 0$, неможливе, оскільки, як легко бачити, $F'_y(0,0) = 0$.

Ми не будемо знаходити чотири розв'язки даного рівняння і підемо іншим шляхом. Перейдемо до полярних координат:

$$x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi \Rightarrow x^2 + y^2 = \rho^2, x^2 - y^2 = \rho^2\cos 2\varphi.$$

В результаті рівняння запишеться таким чином: $\rho^4 = a^2\rho^2\cos 2\varphi.$ Звідси $\rho = 0$ або $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$. Область визначення знайдемо, розв'язавши нерівність $\cos 2\varphi \geq 0.$ В першій від'ємній та першій додатній чвертях дузі кривої відповідає проміжок значень кутів $-\dfrac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{4}$, в другій і третій чвертях – проміжок $\dfrac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \dfrac{5\pi}{4}.$ Шукана похідна в точці $x = 0$

відповідатиме похідній у нових координатах при $\rho = 0$. В результаті крива, що за умовою задачі визначалася рівнянням у декартових координатах, буде мати параметричне зображення $x = a\sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi, y = a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi.$

Знайдемо спочатку похідну $\dfrac{dy(x)}{dx}$ при $x \neq 0$:

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{y'(\varphi)}{x'(\varphi)} = \frac{a\left(\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi\right)'}{a\left(\sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi\right)'} = \frac{-\dfrac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\sin\varphi + \sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi}{-\dfrac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\cos\varphi - \sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi} =$$

$$= \frac{\sin 2\varphi \sin\varphi - \cos 2\varphi \cos\varphi}{\sin 2\varphi \cos\varphi + \cos 2\varphi \sin\varphi} = -ctg 3\varphi.$$

При $\varphi = \dfrac{\pi}{4}, \varphi = \dfrac{5\pi}{4}$ маємо:

$$x = a\sqrt{\cos\frac{3\pi}{2}}\cos\frac{3\pi}{4} = 0, y = \sqrt{\cos\frac{3\pi}{2}}\sin\frac{3\pi}{4} = 0 \Rightarrow y = \frac{dy(0,0)}{dx} = 1.$$

Очевидно, таке ж саме значення одержимо при $\varphi = \dfrac{5\pi}{4}$. Це геометрично відповідає тангенсу кутів дотичних до двох гілок кривої. Аналогічно при $\varphi = -\dfrac{\pi}{4}, \varphi = \dfrac{3\pi}{4}$ маємо:

$$y = \frac{dy(0,0)}{dx} = -1.$$

Підіб'ємо підсумки. В досить малому околі початку координат $O(0,0)$ маємо чотири розв'язки даного рівняння, що геометрично відповідає чотирьом гілкам кривої, що визначається рівнянням з умови задачі. При переході до полярної системи маємо чотири області існування цих гілок:

$$\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right], \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \varphi \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right], \varphi \in \left[\pi, \frac{5\pi}{4}\right].$$

В граничних точках цих областей, що відповідають точці $O(0.0)$ на координатній площині маємо дотичні промені: $\varphi=-\frac{\pi}{4}, \varphi=\frac{\pi}{4}, \varphi=\frac{3\pi}{4}, \varphi=\frac{5\pi}{4}$.

З них перший і третій та другий і четвертий утворюють прямі. Їхні кутові коефіцієнти, відповідно, $-1;1$ і є шукані похідні кожної з чотирьох неявних функцій, що визначаються даним в умові задачі рівнянням.

Контрольні питання.

1). Як знаходити кожну частинну похідну від функції, що задана неявно?

2). Як знаходити у векторному вигляді похідну функції, що задана неявно?

2. 9. Формула Тейлора для функцій багатьох змінних

Розглянемо скалярнозначну функцію $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, яка має достатню кількість неперервних похідних. Нехай $x_0, \Delta x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^1, x = x_0 + \Delta x$, $F(t) = f\left(x_0 + t\Delta x\right) \in \mathbb{R}^1$. При цьому $F(0) = f\left(x_0\right)$, $F(1) = F\left(x_0 + \Delta x\right) = F(x)$.

Використовуючи формулу диференціювання складеної функції, одержимо:

$F'(t) = f'\left(x_0 + t\Delta x\right)\Delta x$. Звідси

$$F'(0) = f'\left(x_0\right)\Delta x = \left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \Delta x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right) f\left(x_0\right) = df\left(x_0\right),$$

Аналогічно

$$F''(0) = \left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \Delta x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 f\left(x_0\right) = d^2 f\left(x_0\right),$$

$$F^{(k)}(0) = \left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \Delta x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k f\left(x_0\right) = d^n f\left(x_0\right).$$

Застосовуючи для скалярнозначної функції F скалярного аргументу формулу Тейлора з залишковим членом у формі Пеано, будемо мати

$$f\left(x_0+\Delta x\right)=F(1)=F(0)+\frac{1}{1!}F'(0)+\frac{1}{2!}F''(0)+...+\frac{1}{m!}F^{(m)}(0)+o\left(\left\|\Delta x\right\|^m\right).$$

Враховуючи одержані раніше вирази для похідних функції F, перепишемо останню рівність у вигляді

$$f(x)=f\left(x_0+\Delta x\right)=f\left(x_0\right)+\frac{1}{1!}\left(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\Delta x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\ldots+\Delta x_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)f\left(x_0\right)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\Delta x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\ldots+\Delta x_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 f\left(x_0\right)+...+$$

$$+\frac{1}{m!}\left(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\Delta x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\ldots+\Delta x_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^m f\left(x_0\right)+o\left(\left\|\Delta x\right\|^m\right)$$

Це і є формула Тейлора для скалярнозначної функції n змінних при умові існування і неперервності у неї m похідних і існуванні (m +1) –ї похідної.

Контрольні питання.

1). Записати формулу Тейлора для функції від двох змінних.

2. 10. Екстремум функцій багатьох змінних. Локальний екстремум. Необхідна умова екстремуму.

Нехай x_0 - точка локального екстремуму функції $f\in C^1$. Позначимо $u=f(x), u_0=f(x_0)$ Через точку (x_0,u_0), проведемо криву, яка задається неперервно диференційовною функцією:

$\forall t\in\mathbb{R}, x=\varphi(t), x_0=\varphi(t_0), u=f\left(\varphi(t)\right), u_0=f\left(\varphi(t_0)\right)$. Для скалярнозначної функції $u=f\circ\varphi$ скалярного аргументу в точці екстремуму t_0 маємо необхідну умову екстремуму: $f'_x\left(\varphi(t_0)\right)\varphi'(t_0)=0$. Інакше кажучи,

$\left(grad\left(f\left(\varphi(t_0)\right)\right), \varphi'(t_0)\right)=0$. Оскільки $\varphi'(t_0)$ - будь-який вектор простору $\mathbb{R}^n$, то $f_x'\left(\varphi(t_0)\right)=0$ або у координатній формі $\dfrac{\partial f\left(x_0\right)}{\partial x_k}=0, k=1,...,n$.

Достатня умова екстремуму

Нехай в точці x_0 виконуються необхідні умови екстремуму. Введемо позначення, як завжди, $x=x_0+\Delta x$. Використовуючи формулу Тейлора з урахуванням других похідних, маємо:

$$f(x)-f\left(x_0\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f\left(x_0\right)}{\partial x_j \partial x_k}\Delta x_j \Delta x_k+o\left(\|\Delta x\|^2\right)=\frac{1}{2}\left(f''\left(x_0\right)\Delta x,\Delta x\right)+o\left(\|\Delta x\|^2\right)$$

Як відомо, при досить малому відхиленні Δx точки x від точки x_0 залишковий член не впливає на знак суми в правій частині рівності, якщо значення квадратичної форми в точці x_0 не дорівнює нулю. Отже, якщо при всіх досить малих відхиленнях квадратична форма додатна (використовується також термін «додатно визначена»), то $f(x)>f\left(x_0\right)$ і x_0 - точка локального мінімуму, якщо вона від'ємна (від'ємно визначена), то x_0 - точка локального максимуму. Може так статись, що при деяких відхиленнях значення квадратичної форми має один знак, а при інших – протилежний. Тоді досліджувана точка не є точкою екстремуму.

Ще одне термінологічне зауваження. Нехай у евклідовому просторі E_n задано симетричний лінійний оператор і $\forall h\in E_n, h\neq 0 \left(Ah,h\right)>0$. Тоді квадратична форма $\left(Ah,h\right)$ називається додатно визначеною, а оператор A - додатним, і цей факт позначається $A>0$. Аналогічно вводиться від'ємно визначеної квадратичної форми і від'ємного оператора. В лінійній алгебрі існує просте правило дослідження лінійного оператора і відповідної квадратичної форми на знаковизначеність. Воно базується на критерії Сільвестра. Дамо спочатку важливі означення. Нехай є квадратна матриця

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & . & . & a_{3n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Головним називається мінор, який можна одержати, взявши її елементи на перетинах рядків і стовпчиків з однаковими номерами. Очевидно, діагональ головного мінора лежить на діагоналі матриці.

Кутовими називаються такі головні мінори цієї матриці:

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots,\ \Delta_n = \det(A).$$

Критерій Сільвестра. Квадратична форма додатно визначена тоді і тільки тоді, коли її кутові мінори додатні. Квадратична форма від'ємно визначена тоді і тільки тоді, коли знаки її кутових мінорів чергуються таким чином: -,+, -, +,… . При інших поведінка знаків кутових мінорів квадратична форма не є знаковизначеною.

Критерій невід'ємної визначеності. Для того, щоб квадратична форма була невід'ємно визначеною, необхідно і достатньо, щоб усі головні мінори її матриці були невід'ємними.

Наслідок. Для того, щоб квадратична форма (Ax,x) була недодатно визначеною, необхідно і достатньо, щоб форма $((-A)x,x)$ була невід'ємно визначеною.

Повернемось тепер до нашої задачі про локальний екстремум скалярнозначної функції багатьох змінних, перші похідні якої в деякій точці дорівнюють нулю. В разі неперервності її другої похідної і хоча б існування третьої в разі додатності кутових мінорів її матриці Гессе функція в данній точці має локальний мінімум; якщо знаки кутових мінорів чергуються, як тільки що було вказано, функція в цій точці має локальний максимум. При інших поведінках знаків кутових мінорів функція в досліджуваній точці екстремуму не має.

Задача. При $a>0$ дослідити на екстремум функцію $u = xy^2z^3\left(a - x - 2y - 3z\right)$ в області $x, y, z > 0.$

Випишемо необхідні умови екстремума функції:

$$
\begin{aligned}
&u'_x = y^2z^3\left(a - 2x - 2y - 3z\right) = 0,\\
&u'_y = 2xyz^3\left(a - x - 3y - 3z\right) = 0, \ .\\
&u'_z = 3xy^2z^2\left(a - x - 2y - 4z\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Її розв'язок в даній області – стаціонарна точка M_0, що має координати $x_0 = y_0 = z_0 = \dfrac{a}{7}$. Перевіримо, чи виконуються у цій точці достатні умови екстремуму.

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2y^2z^3, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2yz^3\left(a - 2x - 3y - 3z\right), \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 3y^2z^2\left(a - 2x - 2y - 4z\right),
$$

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2xz^3\left(a - x - 6y - 3z\right), \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 6xyz^2\left(a - x - 3y - 4z\right), \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 6xy^2z\left(a - x - 2y - 6z\right)
$$

Підставляючи координати стаціонарної точки, виписуємо матрицю Гессе:

$$
u''\left(\frac{a}{7}, \frac{a}{7}, \frac{a}{7}\right) = \left(\frac{a}{7}\right)^5 \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -2 & -6 & -6 \\ -3 & -6 & -12 \end{pmatrix}.
$$

Зрозуміло, що додатний скалярний коефіцієнт перед матрицею не впливає на її знаковизначеність. Знаки її кутових мінорів:

$$\Delta_1 = -2 < 0, \Delta_2 = 8 > 0, \Delta_3 = -42 < 0.$$

Висновок: в точці $M_0\left(\frac{a}{7}, \frac{a}{7}, \frac{a}{7}\right)$ функція має локальний максимум. Обчислюючи значення функції в цій точці, знаходимо: $u_{\max} = \left(\frac{a}{7}\right)^7$.

Контрольні питання.

1). Який зв'язок існує між існуванням мінімуму функції багатьох змінних і додатністю її матриці Гессе?

2). Який зв'язок існує між існуванням максимуму функції багатьох змінних і від'ємністю її матриці Гессе?

2. 11. Умовний екстремум

Розглянемо скалярнозначну функцію, яка має хоча б другу неперервну похідну і у якої існує третя похідна:

$$y = f\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right) \in \mathbb{R}^1;$$

Будемо шукати її екстремум при умові, що точка, підозрювана на екстремум, задовольняє додатковим умовам (умовам зв'зку):

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n) = 0; \\ \dots \\ g_r(x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Що до цих умов будемо вважати, що

$$\det \left.\frac{D(g_1, g_2, \dots, g_r)}{D(x_1, x_2, \dots, x_r)}\right|_{x=x_0} \neq 0.$$

З теореми про неявну функцію випливає, що в такому разі перші r змінних можна виразити через інші:

$$\begin{cases} x_1 = u_1(x_{r+1}, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r = u_r(x_{r+1}, \dots, x_n) \end{cases}$$

Підставивши ці вирази в умови зв'язку, будемо мати тотожності:

$$g_k(u_1(x_{r+1}, \dots, x_n), \dots, u_r(x_{r+1}, \dots, x_n), x_{r+1}, \dots, x_n) \equiv 0;$$

$k = 1, ..., r.$

Нехай $p \in \{r+1, ..., n\}$. Продиференціюємо по x_p кожну з цих тотожностей:

$$\frac{\partial g_k}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_p} + \dots + \frac{\partial g_k}{\partial x_r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial x_p} + \frac{\partial g_k}{\partial x_p} = 0 \Rightarrow (D_p g_k, D_p u) = 0,$$

$k \in \{1, ..., r\}$.

де введено позначення

$$D_p g_k = \left(\frac{\partial g_k}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g_k}{\partial x_r}, \frac{\partial g_k}{\partial x_p} \right)^T,$$

$$D_p u = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_p}, \dots, \frac{\partial u_r}{\partial x_p}, 1 \right)^T.$$

З умови випливає, що вектори $D_p g_k$ в лінійному просторі $\mathbb{R}^{r+1}$ утворюють базис підпростору розмірності *r*. Вектор $D_p u$ ортогональний до всіх цих базисних векторів.

Після тієї самої підстановки розглянемо функцію *f:*

$$y = f(u_1(x_{r+1}, \dots, x_n), \dots, u_r(x_{r+1}, \dots, x_n), x_{r+1}, \dots, x_n) = \tilde{f}(x_{r+1}, \dots, x_n)$$

Цілком очевидно, що якщо в деякій точці $x=\left(x_1,...,x_n\right)$ функція f має умовний екстремум, то $\tilde{f}$ у відповідній точці $\left(x_{r+1},...,x_n\right)$ має локальний екстремум, отже, в цій точці всі її перші похідні дорівнюють нулю (необхідна умова):

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_p}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_r}\cdot\frac{\partial u_r}{\partial x_p}+\frac{\partial f}{\partial x_p}=0$$

Після позначення

$$D_p f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_r},\frac{\partial f}{\partial x_p}\right)$$

останню рівність перепишемо у вигляді

$$(D_p f, D_p u)=0\,.$$

Це свідчить, що вектор $D_p f$ ортогональний до $D_p u$, до якого ортогональні вектори $D_p g_k$. Отже, $D_p f$ лежить в підпросторі, в якому ці вектори утворюють базис, а значить, його можна виразити як їхню лінійну комбінацію:

$$D_p f=\sum_{k=1}^{r}\lambda_k D_p g_k \Rightarrow D_p f-\sum_{k=1}^{r}\lambda_k D_p g_k=0.$$

Звідси $D_p\left(f-\sum_{k=1}^{r}\lambda_k g_k\right)=0,\ p=r+1,...,n.$

Для функції в дужках введемо позначення:

$$L(x,\lambda)=f(x)-\sum_{k=1}^{r}\lambda_k g_k(x), \lambda=\left(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_r\right).$$

Вона називається функцією Лагранжа функції f. Зауважимо, що кожну з умов зв'язку можна інтерпретувати як рівність нулю похідної по параметра λ_k:

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda_k} = 0 \Rightarrow g_k(x) = 0 \ .$$

Оскільки від перших *r* координат функція Лагранжа не залежить, то її похідні по цих координатах дорівнюють нулю. Отже, маємо квадратну систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_i} = 0, \\ \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda_k} = 0, \end{cases}$$
$$i = 1,\dots,n, k = 1,\dots,r.$$

Таким чином, одержано необхідні умови умовного екстремуму.

З системи знаходимо підозрювані на екстремум точки x_0 (така точка називається стаціонарною) і відповідне їй значення λ_0 (насправді, таких x_0 може бути багато).

Теорема. Нехай тричі диференційовна функція в деякій точці досягає умовного екстремуму з вказаними умовами зв'язку. Тоді в цій точці виконуються умови, що визначаються попередньою системою рівнянь.

Зробимо зауваження, що оскільки умови зв'язку справджуються не тільки в точці x_0, що визначається як розв'язок виписаної системи, а в деякому її околі, то приріст по x функції f у цій точці співпадає з приростом по x її функції Лагранжа: $\Delta f\left(x_0\right) = \Delta L\left(x_0, \lambda_0\right)$. При цьому значення λ_0 фіксоване. Дослідження достатніх умов умовного екстремуму дещо відрізняється від дослідження локального екстремуму. Там можна було зсуватись в будь-якому напрямку від точки, підозрюваної на екстремум. Тобто, зсуви були незалежними. При наявності ж умов зв'язку вони залежні. Дійсно, знайдемо повні диференціали від кожної рівності зв'язку і залишимо зліва тільки вираз, що містять диференціали $dx_1,...,dx_r$, всі інші перенесемо у праву частину:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g_1(x)}{\partial x_1}dx_1 + \ \ ... \ \ + \dfrac{\partial g_1(x)}{\partial x_r}dx_r = -\dfrac{\partial g_1(x)}{\partial x_{r+1}}dx_{r+1} - \ \ ... \ \ - \dfrac{\partial g_1(x)}{\partial x_n}dx_n \\ \quad . \qquad ... \qquad . \qquad . \qquad . \qquad ... \qquad . \\ \dfrac{\partial g_r(x)}{\partial x_1}dx_1 + \ \ ... \ \ + \dfrac{\partial g_r(x)}{\partial x_r}dx_r = -\dfrac{\partial g_r(x)}{\partial x_{r+1}}dx_{r+1} - \ \ ... \ \ - \dfrac{\partial g_r(x)}{\partial x_n}dx_n \end{cases}$$

Контрольні питання.

1). Сформулювати метод множників Лагранжа в задачі про знаходження необхідної умови наявності умовного екстремуму функції багатьох змінних.

2). Пояснити причину лінійної залежності диференціалів від кожної змінної в задачі про умовний екстремум функції багатьох змінних.

2. 12. Знаходження глобального екстремуму функції багатьох змінних

Нехай скалярнозначну функцію задано в обмеженій області багатовимірного простору. Будемо вважати, що її границя гладка, тобто, описується рівнянням з гладкою функцією:

$$y = f\left(x_1,...,x_n\right),$$
$$g\left(x_1,...,x_n\right) = 0.$$

Цілком очевидно, що рівняння границі області можна вважати умовою зв'язку в задачі на умовний екстремум. Отже, розв'язання розбивається на два етапи: пошук екстремуму на границі (задача на умовний екстремум) і задача на знаходженні локальних екстремумів у відкритій області без границі.

Задача. Дослідити на екстремум функцію трьох змінних $f(x,y,z) = xy + yz$,

$x > 0, y > 0, z > 0,$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ y + z = 2. \end{cases}$$

Функцію задано на замкненій множині.

Розв'язання. Утвориму функцію Лагранжа:

$$L\left(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2\right) = xy + yz - \lambda_1\left(x^2 + y^2 - 2\right) - \lambda_2\left(y + z - 2\right).$$

Підозрювані на умовний екстремум точки знаходимо з системи (необхідні умови умовного екстремуму)

$$\begin{cases} L'_x = y - 2\lambda_1 x = 0, \\ L'_y = x + z - 2\lambda_1 y - \lambda_2 = 0, \\ L'_z = y - \lambda_2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 2, \\ y + z = 2. \end{cases}$$

Не вдаючись у подробиці, знайдемо розв'язок цієї системи:

$$x = y = z = 1, \lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = 1.$$

Дослідимо на знакосталість другий диференціал функції Лагранжа при умові зв'язків:

$$d^2L = -2\lambda_1\left(\left(dx\right)^2 + \left(dy\right)^2\right) + 2dx\,dy + 2dy\,dz = -\left(dx\right)^2 - \left(dy\right)^2 + 2dx\,dy + 2dy\,dz\,.$$

Продиференціювавши рівняння зв'язку, матимемо:

$xdx + ydy = 0, dy + dz = 0.$ Підставляючи координати стаціонарної точки, одержимо: $dy = -dx, dz = dx.$ Отже,

$$d^2L\left(1,1,1,\frac{1}{2},1\right) = -\left(dx\right)^2 - \left(dx\right)^2 - 2\left(dx\right)^2 - 2\left(dx\right)^2 = -6\left(dx\right)^2 < 0\,.$$

Навіть без критерію Сільвестра вдається зробити висновок, що другий диференціал – від'ємно визначена форма, тому в точці $(1,1,1)$ функція має умовний максимум, і він дорівнює 2.

Контрольні запитання

1). Як звести задачу на пошук екстремуму функції, що задана на замненій множині, до задачі на умовний кустремум?

2). З яких пунктів складається методика знаходження екстремуму функції, що задана на замненій множині?

2. 13. Заміна змінних у диференціальних виразах

Часто виникає ситуація, коли, наприклад, диференціальне рівняння з частинними похідними має досить громіздкий вигляд і його важко розв'язувати. Але при цьому вдається перейти до нових змінних і навіть до нової функції, і тоді методика розв'язання стає зрозумілою.

Зробимо методологічне зауваження. Нехай $z = z(y), y \in \mathbb{R}^m, z \in \mathbb{R}^1$. Перейдемо до нових координат: $y = y(x), x \in \mathbb{R}^n$. Тоді $z = z\big(y(x)\big) = \tilde{z}(x)$. При диференціюванні нової функції по, скажімо, x_k правильніше було б писати $\frac{\partial \tilde{z}(x)}{\partial x_k}$, але, зважаючи на попередній ланцюг рівностей, будемо писати похідну від величини z, що знаходиться зліва: $\frac{\partial z(x)}{\partial x_k}$. При диференціюванні складеної функції будемо широко використовують позначення похідної за Лейбніцем, яке є найбільш вдалим в подібних задачах:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x_1},...,\frac{\partial z}{\partial x_k},...,\frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = \frac{D(z)}{D(x_1,\ldots,x_n)} =$$

$$= \frac{D(z)}{D(y_1,\ldots,y_m)}\frac{D(y_1,\ldots,y_m)}{D(x_1,\ldots,x_n)} = \left(\frac{\partial z}{\partial y_1},...,\frac{\partial z}{\partial y_j}...,\frac{\partial z}{\partial y_m}\right)\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_k} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ . & \cdots & . & \cdots & . \\ \frac{\partial y_j}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_j}{\partial x_k} & \cdots & \frac{\partial y_j}{\partial x_n} \\ . & \cdots & . & \cdots & . \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_k} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} =$$

$$=\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial z}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_1}\quad\ldots\quad\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial z}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_k}\quad\ldots\quad\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial z}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_n}\right).$$

Про цю формулу вже говорилось раніше, але вона виписана тому, що до неї будемо ще не раз звертатись.

Приклад. Записати у полярних координатах наступне диференціальне рівняння з частинними похідними: $y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=0$. Нагадаємо: $x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi.$ Скористаємось відомою формулою, яка є частинний випадок попередньої:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial u}{\partial \rho},\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial \rho}{\partial x} & \frac{\partial \rho}{\partial y}\\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y}\end{pmatrix}$$

. Для знаходження елементів матриці в правій частині цієї рівності категорично не рекомендується розв’язувати попередню систему, тобто, виражати ρ,φ через x,y. Треба скористатись відомою формулою для похідної оберненого відображення:

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial \rho}{\partial x} & \frac{\partial \rho}{\partial y}\\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi}\end{pmatrix}^{-1}.$$

Знаходження оберненої матриці – стандартна задача лінійної алгебри, і вона ідейно значно легша розв’язання нелінійної системи рівнянь. Отже,

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial \rho}{\partial x} & \frac{\partial \rho}{\partial y}\\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{\rho}\begin{pmatrix}\rho\cos\varphi & \rho\sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\frac{\sin\varphi}{\rho} & \frac{\cos\varphi}{\rho}\end{pmatrix}.$$

Звідси одержуємо:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial u}{\partial \rho},\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\dfrac{\sin\varphi}{\rho} & \dfrac{\cos\varphi}{\rho}\end{pmatrix}=\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\cos\varphi-\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{\rho},\quad \frac{\partial u}{\partial \rho}\sin\varphi+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{\rho}\right).$$

Підставивши знайдені значення похідних, будемо мати:

$$\rho\sin\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\cos\varphi-\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{\rho}\right)-\rho\cos\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\sin\varphi+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{\rho}\right)=0$$

Після елементарних перетворень приходимо до еквівалентного рівняння:

$\rho\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}=0$. Якщо $\rho\neq 0$ маємо рівняння $\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}=0$, яке легко розв'язати: ця рівність нулю частинної похідної свідчить про те, що функція не залежить від змінної φ, отже це є довільна неперервно диференційовна функція від $\rho: z=f(\rho)$, тобто, рівняння має безліч розв'язків. Переходячи до старих змінних, маємо загальний розв'язок у такій формі: $z=f(x^2+y^2)$.

Розглянемо більш складні задачі, де в диференціальному рівнянні треба перейти до нових незалежних змінних і до нової невідомої функції. Розглянемо два випадки: 1) старі змінні виражаються через нові, 2) нові змінні виражаються через старі.

1) Старі змінні x, y, z виражаються через нові u, v, w:

$$\begin{cases} x=\varphi(u,v,w),\\ y=\psi(u,v,w),\\ z=\chi(u,v,w).\end{cases}$$

Від невідомої функції $z=z(x,y)$ треба перейти до нової невідомої функції $w=w(u,v)$. Зауважимо, що вираз $\dfrac{D\chi(u,v,w)}{D(u,v)}$ далі будемо розуміти як похідні по (u,v) функції χ, від яких вона залежить явним чином, не беручи до уваги залежність від цих змінних функції w, тобто саме частинні похідні. Маємо:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{D(z)}{D(x,y)}=\frac{D(z)}{D(u,v)}\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=\left(\frac{D\chi(u,v,w)}{D(u,v)}+\frac{D\chi(u,v,w)}{D(w)}\frac{D(w)}{D(u,v)}\right)\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=$$

$$=\left(\frac{D\chi(u,v,w)}{D(u,v)}+\frac{D\chi(u,v,w)}{D(w)}\frac{D(w)}{D(u,v)}\right)\left(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\left(\frac{\partial\chi}{\partial u},\frac{\partial\chi}{\partial v}\right)+\frac{\partial\chi}{\partial w}\left(\frac{\partial w}{\partial u},\frac{\partial w}{\partial v}\right)\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}^{-1}.$$

Приклад. Перетворити диференціальне рівняння з частинними похідними $\left(x\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(y\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=z^2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}$, ввівши заміну: $x=ue^w, y=ve^w, z=we^w$.

Використовуючи тільки що одержану формулу, маємо:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)=(1+w)e^w\left(\frac{\partial w}{\partial u},\frac{\partial w}{\partial v}\right)\begin{pmatrix}e^w & 0\\ 0 & e^w\end{pmatrix}^{-1}=\left((1+w)\frac{\partial w}{\partial u},(1+w)\frac{\partial w}{\partial v}\right).$$

Підставляючи знайдені вирази для частинних похідних, одержимо:

$$\left(ue^w(1+w)\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+\left(ve^w(1+w)\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2=\left(we^w\right)^2(1+w)\frac{\partial w}{\partial u}(1+w)\frac{\partial w}{\partial v}$$

Після елементарних спрощень маємо:

$$\left(u\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+\left(v\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2=w^2\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v}.$$

Як бачимо, рівняння не змінило форми запису. В такій ситуації кажуть, що рівняння інваріантне відносно заміни.

2) Нові змінні ξ,η,ζ виражаються через старі x,y,z. $z=z(x,y)$, $\zeta=\zeta(\xi,\eta)$.

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y, z), \\ \eta = \psi(x, y, z), \\ \zeta = \chi(x, y, z). \end{cases}$$

Запишемо тотожність:

$$\zeta\left(\varphi(x, y, z(x, y)), \psi(x, y, z(x, y))\right) = \chi(x, y, z(x, y))$$

І продиференціюємо її по змінним x і y:

$$\frac{D(\zeta)}{D(\xi,\eta)}\left(\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} + \frac{D(\xi,\eta)}{D(z)}\frac{D(z)}{D(x,y)}\right) = \frac{D(\chi)}{D(x,y)} + \frac{D(\chi)}{D(z)}\frac{D(z)}{D(x,y)}$$

Звідси

$$\left(\frac{D(\zeta)}{D(\xi,\eta)}\frac{D(\xi,\eta)}{D(z)} - \frac{D(\chi)}{D(z)}\right)\frac{D(z)}{D(x,y)} = \frac{D(\chi)}{D(x,y)} - \frac{D(\zeta)}{D(\xi,\eta)}\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}.$$

Відзначимо, що вираз у дужках в лівій частині – скаляр. Якщо він не дорівнює нулю, на нього можна поділити і отримати вираз для частинних похідних старої невідомої функції по старим змінним:

$$\frac{D(z)}{D(x,y)} = \left(\frac{D(\zeta)}{D(\xi,\eta)}\frac{D(\xi,\eta)}{D(z)} - \frac{D(\chi)}{D(z)}\right)^{-1}\left(\frac{D(\chi)}{D(x,y)} - \frac{D(\zeta)}{D(\xi,\eta)}\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}\right)$$

В координатній формі перепишемо цю рівність в такий спосіб:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}, \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right)\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial z} \end{pmatrix} - \frac{\partial \chi}{\partial z}\right)^{-1}\left(\left(\frac{\partial \chi}{\partial x}, \frac{\partial \chi}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}, \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right)\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix}\right).$$

Приклад. Перетворити диференціальне рівняння з частинними похідними відносно $z = z(x, y)$

$$(xy + z)\frac{\partial z}{\partial x} + \left(1 - y^2\right)\frac{\partial z}{\partial y} = x + yz,$$

ввівши заміну і одержавши рівняння відносно нової функції $\zeta = w(\xi, \eta)$, якщо

$$\begin{cases} \xi = yz - x, \\ \eta = xz - y, \\ \zeta = xy - z. \end{cases}$$

Застосуємо тільки що одержану формулу:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}, \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right)\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} + 1\right)^{-1}\left((y, x) - \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}, \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right)\begin{pmatrix} -1 & z \\ z & -1 \end{pmatrix}\right) =,$$

$$= \left(y\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + x\frac{\partial \zeta}{\partial \eta} + 1\right)^{-1}\left((y, x) + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} - z\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}, -z\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right)\right) =$$

$$= \left(y\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + x\frac{\partial \zeta}{\partial \eta} + 1\right)^{-1}\left(y + \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} - z\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}, x - z\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right)$$

Підставимо знайдені значення частинних похідних у рівняння:

$$(xy + z)\left(y + \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} - z\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right) + \left(1 - y^2\right)\left(x - z\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right) = \left(x + yz\right)\left(y\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + x\frac{\partial \zeta}{\partial \eta} + 1\right)$$

і після перетворень: $\left(1 - x^2 - y^2 - z^2 - 2xyz\right)\frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = 0$. Якщо вираз у дужках не дорівнює нулю, прийдемо до рівняння $\frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = 0.$ Це рівняння можна розв'язати у неявному вигляді: $\zeta = f(\xi),$ де f - довільна неперервно диференційовна функція. Повертаючись до старих змінних, будемо мати: $xy - z = f\left(yz - x\right)$.

Висновок: цей приклад ще раз демонструє перевагу застосування матриці Якобі при розв'язанні прикладів подібного характеру.

Приклад. Записати матрицю Гессе у полярних координатах.

Раніше було знайдено матрицю Якобі у полярних координатах:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial u}{\partial \rho},\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\dfrac{\sin\varphi}{\rho} & \dfrac{\cos\varphi}{\rho}\end{pmatrix}=\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\cos\varphi-\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{\rho},\quad \frac{\partial u}{\partial \rho}\sin\varphi+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{\rho}\right).$$

Тут $\dfrac{D(\rho,\varphi)}{D(x,y)}=\left(\dfrac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\dfrac{\sin\varphi}{\rho} & \dfrac{\cos\varphi}{\rho}\end{pmatrix}.$

Тоді матрицю Гессе шукаємо за правилом:

$$u''=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{D\left(\dfrac{\partial u}{\partial \rho}\cos\varphi-\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\dfrac{\sin\varphi}{\rho},\quad \dfrac{\partial u}{\partial \rho}\sin\varphi+\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\dfrac{\cos\varphi}{\rho}\right)}{D(u,v)}\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\dfrac{\sin\varphi}{\rho} & \dfrac{\cos\varphi}{\rho}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\cos\varphi-\dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho\partial \varphi}\dfrac{\sin\varphi}{\rho}+\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\dfrac{\sin\varphi}{\rho^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho\partial \varphi}\cos\varphi-\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\dfrac{\sin\varphi}{\rho}-\dfrac{\partial u}{\partial \rho}\sin\varphi-\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\dfrac{\cos\varphi}{\rho}\\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\sin\varphi+\dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho\partial \varphi}\dfrac{\cos\varphi}{\rho}-\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\dfrac{\cos\varphi}{\rho^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho\partial \varphi}\sin\varphi+\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\dfrac{\cos\varphi}{\rho}+\dfrac{\partial u}{\partial \rho}\cos\varphi-\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\dfrac{\sin\varphi}{\rho}\end{pmatrix}\times$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\dfrac{\sin\varphi}{\rho} & \dfrac{\cos\varphi}{\rho}\end{pmatrix}.$$

Випишемо окремо елементи матриці Гессе у полярних координатах:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\cos^2\varphi-2\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho}+\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\frac{\sin^2\varphi}{\rho^2}+\frac{\partial u}{\partial\rho}\frac{\sin^2\varphi}{\rho}+2\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\sin\varphi\cos\varphi+\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\varphi}\frac{\cos 2\varphi}{\rho}-\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2}-\frac{\partial u}{\partial\rho}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho}-\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\cos 2\varphi}{\rho^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\sin^2\varphi+2\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho}+\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\frac{\cos^2\varphi}{\rho^2}+\frac{\partial u}{\partial\rho}\frac{\cos^2\varphi}{\rho}-2\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi}{\rho^2}.$$

Запишемо тепер рівняння Лапласа у полярних координатах:

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}=0.$$

Контрольні запитання

1). Як треба діяти, використовуючи матриці Якобі у випадку, коли у диференціальному виразі чи рівняння старі змінні x, y, z виражаються через нові u,v,w?

1). Як треба діяти, використовуючи матриці Якобі у випадку, коли у диференціальному виразі чи рівняння старі змінні x, y, z виражаються через нові u,v,w? При цьому

$$\begin{cases} x=\varphi(u,v,w), \\ y=\psi(u,v,w), \\ z=\chi(u,v,w). \end{cases}$$

2). Нові змінні ξ,η,ζ виражаються через старі x, y, z. $z=z(x,y)$, $\zeta=\zeta(\xi,\eta)$? При цьому

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y, z), \\ \eta = \psi(x, y, z), \\ \zeta = \chi(x, y, z). \end{cases}$$

3. Числові і функціональні ряди

3. 1. Числові ряди

Починаємо вивчати велике узагальнення поняття суми чисел, переносячи його на нескінченну кількість доданків.

Нехай є числова послідовність $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Означення. Формальна сума

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

називається рядом (числовим рядом).

Слід зауважити, що у аксіоматиці дійсних числе немає поняття суми нескінченної кількості доданків, тому тут запис треба вважати формальним. Але в багатьох випадках таку, хоч і формальну суму можна підрахувати.

Означення. Вираз $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ називається частинною сумою ряду.

Означення. Границя послідовності частинних сум (якщо вона існує) називається сумою ряду.

Тепер для суми ряду будемо вживати те ж саме позначення і

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \triangleq S .$$

Якщо така границя існує, кажуть, що ряд збігається. Якщо границя не існує або дорівнює нескінченності, кажуть, що ряд розбігається. a_n називається загальним членом ряду. Позначимо $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$. Ця сума називається залишком ряду. Цілком очевидно, що $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = S_n + r_n$.

Теорема. Ряд збігається тоді і тільки тоді, колі його залишок прямує до нуля при $n \to \infty$.

Доведення очевидне – воно випливає з означення границі послідовності.

Приклад. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. $\forall k \in \mathbb{N}\ \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Звідси

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$ Отже, виходячи з означення, робимо висновок, що ряд збігається. До того ж нам вдалось знайти його суму.

Зауважимо, що далеко не в усіх прикладах вдається знайти суму ряду, хоча вдається дослідити його на збіжність.

Зазначимо, що з очевидного співвідношення $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_n = S_{n-1} + a_n$ випливає: $a_n = S_n - S_{n-1}$. Отже, у випадку збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1}$.

З цих міркувань випливає важливе твердження:

Теорема (необхідна умова збіжності ряду). Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається. Тоді його загальний член прямує до нуля: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Зауважимо, що ця умова не є достатньою. Можна привести приклади розбіжних рядів, для яких необхідна умова збіжності виконується. Згадаємо приклад, який розглядався при вивченні границь послідовностей. Було доведено, що $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} = C + \ln n + \alpha_n$, де C – стала Ейлера, α_n - нескінченно мала послідовність. Звідси випливає, що $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} S_n = \infty$. При цьому загальний член $\frac{1}{n}$ цього ряду прямує до нуля, якщо $n \to \infty$. Розглянутий ряд дуже важливий у математиці, він називається гармонічним. Отже, гармонічний ряд розбігається.

Приклад. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$. Дослідимо поведінку загального члену ряду: $\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{n^{\frac{1}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n} \to 1,\ n \to \infty$. З невиконання необхідної ознаки збіжності ряду робимо висновок, що він розбігається.

Означення. Якщо ряд з модулів даного ряду збігається, то про сам цей ряд кажуть, що він збігається абсолютно.

Теорема. Нехай ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збіжні, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha a_n + \beta b_n\right)$ збіжний і $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha a_n + \beta b_n\right) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Доведення випливає з відповідного факту з теорії границь послідовностей, якщо його застосувати до частинних сум цих рядів.

Критерій Коші для числового ряду

Теорема. Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається тоді і тільки тоді, коли $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N, p \in \mathbb{N}\ \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon$.

Зауваження. Будемо таку умову називати умовою фундаментальності для ряду.

Доведення миттєво випливає з критерію Коші для послідовностей, якщо його застосувати до послідовності частинних сум ряду.

Теорема. З абсолютної збіжності числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ випливає його збіжність.

Доведення Застосуємо критерій Коші для ряду з модулів даного ряду:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N, p \in \mathbb{N}\ \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon$. Збіжність даного ряду (без модулів) випливає з критерію Коші з використанням нерівності трикутника:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N, p \in \mathbb{N}\ \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon$.

Зауваження. Обернене твердження не є, взагалі кажучи справедливим.

Означення. Ряд називається збіжним умовно, якщо він збіжний, але розбіжний абсолютно.

Зауваження. Необхідну умова збіжності ряду можна також довести, використовуючи критерій Коші, якщо в умові фундаментальності покласти $p = 1$.

Необхідна умова збіжності для рядів з невід'ємними монотонно спадними до нуля членами.

Теорема. Нехай $0 \le a_{n+1} \le a_n, a_n \to 0, n \to \infty$. Якщо ряд збігається, то виконується умова: $\lim_{n\to\infty} na_n = 0.$

Візьмемо в умові фундаментальності $p = n$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N \ 0 \le \sum_{k=n+1}^{2n} a_k \le na_n < \varepsilon \ ,$$

а це й доводить твердження.

Ще раз звернемось до прикладу гармонічного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Його члени утворюють монотонно спадну до нуля додатну послідовність. Обчислення границі, про яку йшлось в попередній теоремі, $\lim_{n\to\infty} na_n = \lim_{n\to\infty} n\frac{1}{n} = 1 \ne 0$. З невиконання необхідної умови збіжності такого ряду випливає його розбіжність, що було одержано завдяки іншому підходу.

Ряди з невід'ємними членами

Зробимо важливе зауваження. При невід'ємності членів ряду його частинні суми $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ утворюють неспадну послідовність, а як відомо, при обмеженості зверху всіх членів цієї послідовності одним числом її границя буде існувати і буде скінченною, інакше вони будуть прямувати до нескінченності. Для монотонної послідовності не може не існувати границі – скінченної чи нескінченної.

Теорема порівняння (Вейєрштраса). Нехай члени рядів $(A): \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $(B): \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ невід'ємні і $0 \le a_n \le b_n \ \forall n \ge n_0 \ge 1$. Тоді

a) якщо ряд (B) збігається, то ряд (A) теж збігається;

b) якщо ряд (A) розбігається, то ряд (B) теж розбігається.

Доведення. a) якщо ряд (B) збігається, то для нього виконується умова критерію Коші:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N, p \in \mathbb{N} \ 0 \le \sum_{k=n+1}^{n+p} b_n < \varepsilon$. З умови випливає, що умова фундаментальності також справджується до першого ряду, і його збіжність тоді випливатиме з критерію Коші:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N, p \in \mathbb{N} \ 0 \le \sum_{k=n+1}^{n+p} a_n \le \sum_{k=n+1}^{n+p} b_n < \varepsilon .$$

b) якщо ряд (A) розбігається, то його частинні суми прямують до нескінченності, отже частинні суми другого ряду також будуть прямувати до нескінченності: $\sum_{k=1}^{n} b_n \ge \sum_{k=1}^{n} a_n \to \infty, n \to \infty.$

Означення. Нехай $0 \le a_n \le b_n \ \forall n \ge n_0 \ge 1$. Тоді ряд $(A): \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ для ряду $(B): \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ називається міноруючим або мінорантою, а ряд $(B): \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ для ряду $(A): \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається мажоруючим або мажорантою.

Теорема порівняння в граничній формі. Нехай $a_n, b_n > 0$, існує границя $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K, \ 0 < K < \infty.$

Тоді обидва ряди водночас або збігаються, або розбігаються.

Доведення. З існування границі випливає:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ K - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < K + \varepsilon$$

Візьмемо $\varepsilon = \frac{K}{2}$. Тоді $\frac{K}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3K}{2}, \frac{K}{2} b_n < a_n < \frac{3K}{2} b_n$. Тепер досить застосувати теорему порівняння.

Зауваження. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K = 0$, то зрозуміло, що із збіжності ряду (B) випливає збіжність ряду (A), але, взагалі кажучи, не навпаки.

Приклад. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\ln \frac{1}{n^\alpha} - \ln\left(\sin \frac{1}{n^\alpha} \right) \right), \alpha > 0$ Зробимо оцінку загального члену ряду. Нагадаємо, що якщо $\alpha(n) \to 0, n \to \infty$, тобто α, нескінченно мала, то $\beta(n) = O^*\left(\alpha(n)\right)$, якщо $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\beta(n)}{\alpha(n)} = A,\ 0 < |A| < \infty$.

$$\ln \frac{1}{n^\alpha} - \ln\left(\sin \frac{1}{n^\alpha} \right) = -\ln\left(n^\alpha \sin \frac{1}{n^\alpha} \right) = -\ln\left(n^\alpha \left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{6n^{3\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{5\alpha}} \right) \right) \right) =$$

$= -\ln\left(1 - \frac{1}{6n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{3\alpha}} \right) \right) = O^*\left(\frac{1}{n^{2\alpha}} \right)$. Отже, за граничною ознакою порівняння ряд збігається при $\alpha > \frac{1}{2}$.

Доведемо ще одну **теорему порівняння**.

Теорема. Нехай $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n} \forall n > n_0$. Тоді

а) якщо ряд (B) збігається, то ряд (A) теж збігається;

b) якщо ряд (A) розбігається, то ряд (B) теж розбігається.

Не буде обмеженням загальності, якщо вважати, що $n_0 = 1$. Перемноживши ланцюг нерівностей $\frac{a_2}{a_1} \le \frac{b_2}{b_1}, \frac{a_3}{a_2} \le \frac{b_3}{b_2}, ..., \frac{a_n}{a_{n-1}} \le \frac{b_n}{b_{n-1}}$, одержимо:

$\frac{a_n}{a_1} \le \frac{b_n}{b_1} \Rightarrow a_n \le \frac{a_1}{b_1} b_n$. Тепер досить застосувати теорему порівняння.

Зауваження. Ознаки порівняння не можна застосовувати для незнакосталих рядів. За допомогою ознак порівняння можна досліджувати їх лише на абсолютну збіжність.

Приклад. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Зробимо оцінку його загального члену: $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}, n \ge 2$. Оскільки мажоруючий ряд збігається, як уже було доведено, то даний ряд також збігається за ознакою порівняння.

Наслідок. При $\alpha > 2$ збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$. Дійсно, при цих умовах $\frac{1}{n^{\alpha}} < \frac{1}{n^2}$ і досить застосувати теорему порівняння.

Критерій Коші для додатних рядів з монотонними членами

Теорема. Нехай члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ утворюють монотонно спадну до нуля послідовність. Тоді цей ряд збігається тоді і тільки тоді, коли збігається ряд $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$.

Доведення. Запишемо ланцюг очевидних нерівностей:

$$2^0 a_{2^1} \le a_2 \le 2^0 a_1,$$
$$2^1 a_{2^2} \le a_3 + a_4 \le 2^1 a_{2^1},$$
$$2^2 a_{2^3} \le a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \le 2^2 a_{2^2},$$
....
$$2^n a_{2^{n+1}} \le a_{2^n+1} + \ldots + a_{2^{n+1}} \le 2^n a_{2^n}.$$

Позначимо: $S_m = \sum_{k=1}^{m} a_k, \sigma_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k}$ і після додавання виписаних нерівностей, одержимо:

$$\frac{1}{2}\left(\sigma_{n+1} - a_1\right) \le S_{2^{n+1}} - a_1 \le \sigma_n.$$

Послідовності неспадні. З цієї двосторонньої оцінки випливає, що вони одночасно або обмежені зверху, або необмежені. З зауваження про монотонні послідовності частинних сум ряду робимо висновок, що ряди водночас або збігаються, або розбігаються.

Приклад. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$. Розглянемо, згідно з доведеним критерієм, допоміжний ряд $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{\left(2^k\right)^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(1-\alpha)k}$. Цей допоміжний ряд – геометрична прогресія, яка збігається тоді і тільки тоді, коли $2^{(1-\alpha)} < 1 \Leftrightarrow \alpha > 1$. Отже, робимо важливий висновок: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ збігається, якщо $\alpha > 1$, і розбігається, якщо $\alpha \le 1$.

Зауваження, сума розглянутого ряду, що залежить від z: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ визначає славнозвісну функцію Рімана, яка позначається $\zeta(z)$. Ця функція знаходить широке застосування у теорії чисел.

Ту ж саму ситуацію можна проаналізувати за допомогою дослідження деякого невласного інтегралу. Нехай є додатна функція, визначена на $x \geq 1$, і її значення в натуральних точках співпадать з членами ряду: $f(n) = a_n$.

Інтегральна ознака Коші. Теорема. Нехай додатна функція f визначена при $x \geq 1$, монотонно не зростаюча і $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0,\ f(n) = a_n$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається тоді і тільки тоді, коли збігається інтеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$.

Доведення. Виходячи з умови, запишемо ланцюг нерівностей:

$$a_{n+1} \leq f(x) \leq a_n, x \in [n, n+1], n \in \mathbb{N}.$$

Після їхнього інтегрування одержимо:

$$a_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq a_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Після додавання всіх цих нерівностей будемо мати:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} \leq \int_1^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Отже, як видно з цієї двосторонньої оцінки для ряду, із збіжності інтегралу випливає збіжність ряду, і із збіжності ряду випливає збіжність інтегралу.

Приклад. Читачу пропонується, користуючись інтегральною ознакою, дослідити відомий степеневий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}.$

Приклад. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$. Розглянемо, згідно з доведеною інтегральною ознакою невласний інтеграл

$$(p \neq 1):\ \int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^p x} dx = \lim_{A\to\infty} \int_2^{A} \frac{1}{x \ln^p x} dx = \lim_{A\to\infty} \int_{\ln 2}^{\ln A} t^{-p} dt = \frac{1}{p-1} \lim_{A\to\infty} \left((\ln 2)^{1-p} - (\ln A)^{1-p} \right)$$

Очевидно, він збігається при $p>1$ і розбігається при $p<1$.

При $p=1$ маємо інтеграл $\int\limits_2^{\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=\lim\limits_{A\to\infty}\left(\ln\left(\ln A\right)-\ln\left(\ln 2\right)\right)=\infty$.

Остаточна відповідь: ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p n}$ збігається при $p>1$ і розбігається при $p\le 1$.

Ознаки збіжності рядів з додатними членами.

Теорема (ознака Даламбера). Нехай існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$. Тоді, якщо $q<1$, ряд збігається, якщо $q>1$, ряд розбігається; в разі $q=1$ ситуація невизначена, тобто, при цій умові існують як збіжні, так і розбіжні ряди.

Доведення. Візьмемо мале $\varepsilon>0$, що $q+\varepsilon=l<1, \forall\varepsilon>0 \exists N\ \forall n>N\ \frac{a_{n+1}}{a_n}<l$.

Тоді справджуються нерівності:

$a_{N+1}<la_N$,
$a_{N+2}<la_{N+1}<l^2a_N$,
....
$a_{N+p}<l^pa_N$.

Отже, при $n>N$ для нашого ряду побудовано мажоруючий ряд, збіжну геометричну прогресію із знаменником, що менший за одиницю, і за теоремою порівняння досліджуваний ряд збігається.

Якщо $q>1$, то з деякого номера члени ряду утворять неспадну послідовність: $a_{n+1}\ge a_n$, а значить, не буде виконуватись необхідна умова збіжності ряду.

Нехай $q=1$. На прикладі розглянутого степеневого ряду, для якого як раз $q=1$ ми бачили, що при деяких степенях цей ряд збігається, а при деяких розбігається.

Зауваження. Перша умова в ознаці Даламбера може бути послаблена, а саме, нехай $\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q<1$. Тоді ряд збігається.

Очевидно, і при цій умові $\exists N\ \forall n>N\ \frac{a_{n+1}}{a_n}<l<1$, що, як ми бачили, забезпечує збіжність ряду.

Зауваження. В другому випадку умови Даламбера границю не можна замінити верхньою границею. Розглянемо приклад:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{3^{n-1}}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\ldots$$

Знайдемо границі відношення двох пар послідовних членів ряду: $\frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{2^n}}=\left(\frac{2}{3}\right)^n\to 0, n\to\infty$, $\frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{3^{n-1}}}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\to\infty, n\to\infty$. Зрозуміло, що верхня границя таких відношень є нескінченність, але ряд збігається, оскільки він є сумою двох збіжних рядів – нескінченно спадних геометричних прогресій.

Приклад. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^x}$. Застосуємо ознаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n n^x}{2^{n+1}(n+1)^x}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}=\frac{1}{2}<1.$$

Отже, ряд збігається при довільному $x\in(-\infty,\infty)$.

Приклад. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^x}$. Застосуємо ознаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}n^x}{2^n\left(n+1\right)^x}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}=2>1.$$

Отже, ряд роззбігається при довільному $x\in(-\infty,\infty)$.

Ознака Коші. Нехай існує верхня границя $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=q$. Тоді, якщо $q<1,$ ряд збігається, якщо $q>1$, ряд розбігається; в разі $q=1$ ситуація невизначена, тобто, при цій умові існують як збіжні, так і розбіжні ряди.

Доведення. Доведення. $q<1$. Візьмемо мале $\varepsilon>0$, що $q+\varepsilon=l<1$. Завдяки існуванню верхньої межі і тому, що вона менша за одиницю $\exists N\ \forall n>N\ \sqrt[n]{a_n}<l\Rightarrow a_n<l^n$. Отже, ряд збігається за теоремою порівняння (мажоруючий ряд – нескінченно спадна геометрична прогресія).

Розглянемо випадок $q>1$. З умови випливає, що існує підпослідовність a_{n_k} така, що $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n_k\to\infty}\sqrt[n_k]{a_{n_k}}=q>1$. Можна взяти настільки мале $\varepsilon>0$, що $q-\varepsilon=l>1$ і $\exists K\ \forall k>K\ a_{n_k}>l^{n_k}\to\infty, n_k\to\infty$. Тоді за теоремою порівняння ряд буде розбігатись.

Випадку $q=1$ задовольняє той самий степеневий ряд, і різні варіанти було обговорено при його аналізі з застосуванням методу Даламбера.

Нагадаємо відомий факт. Нехай для додатної послідовності існує $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$. Тоді існує границя $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ і вони рівні.

Отже, якщо за допомогою ознаки Даламбера ряд вдається дослідити, то його обов'язково можна дослідити і за допомогою ознаки Коші (хоча, технічно це може бути досить важко).

Обернене твердження, взагалі кажучи, не є справедливим. Досить згадати ряд, який вже було досліджено: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{3^{n-1}}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+...$ Було показано, що границі відношення, яка фігурує в ознаці Даламбера, не існує, тоді як верхня границя для коренів з членів ряду, які фігурують в ознаці Коші, дорівнює $\frac{1}{2}$, і тому ряд збігається.

Приклад. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^{\ln n}}{\ln^n n}$ застосуємо ознаку Коші: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^{\ln n}}{\ln^n n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{\ln n}{n}}}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{\ln^2 n}{n}}}{\ln n}=0,$

оскільки, як відомо, $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^\alpha n}{n}=0\ \forall\alpha\in\mathbb{R}$ і чисельник прямує до одиниці.

Ознака Раабе. Нехай для членів додатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ існує границя $\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=R.$ Тоді при $R>1$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ збігається, а при $R<1$ - розбігається.

Доведення. Нехай $R>1$ і $r:1<r<R$. Тоді, починаючи з деякого номера, буде виконуватись нерівність: $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>r$. Звідси $\frac{a_n}{a_{n+1}}>1+\frac{r}{n}$.

Виберемо тепер $s:1<s<r$. Як відомо, $\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^s-1}{\left(\frac{1}{n}\right)}=s.$ Тому для досить великих номерів буде виконуватись нерівність $\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^s-1}{\left(\frac{1}{n}\right)}<r$. Звідки

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^s < 1+\frac{r}{n}$. Отже, з деякого номера буде виконуватись умова для членів ряду: $\frac{a_n}{a_{n+1}} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^s = \frac{(n+1)^s}{n^s}$. Перепишемо цю нерівність у вигляді:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{n^s}{(n+1)^s} = \frac{\frac{1}{(n+1)^s}}{\frac{1}{n^s}}.$$

Тоді з варіанту ознаки порівняння досліджуваний ряд збігається оскільки при $s > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ збігається.

Розглянемо тепер випадок $R < 1$. Тоді з деяких номерів $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \le 1$. Звідси $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge \frac{n}{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}$. Знову застосовуючи ознаку порівняння (з гармонічним рядом), робимо висновок, що досліджуваний ряд розбігається.

Приклад. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+p}}$. Застосуємо ознаку Раабе. Дослідимо спочатку

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!e^n(n+1)^{n+p+1}}{n^{n+p}(n+1)!e^{n+1}} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+p} = \frac{1}{e}e^{(n+p)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{-1+(n+p)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} =$$

$$= e^{\frac{p-0,5}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} = 1+\frac{p-0,5}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(p-\frac{1}{2}+o(1)\right) = p-\frac{1}{2}.$$

Отже, при $p-\frac{1}{2} > 1 \Rightarrow p > \frac{3}{2}$ ряд збігається.

Приклад. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p(p+1)...(p+n-1)}{n!}\frac{1}{n^q}$. Будемо вважати, що p не дорівнює нулю і не є цілим від'ємним числом. Зауважимо, що при від'ємному значенні p, починаючи з якогось номера, всі члени будуть мати один і той же знак. Отже, для дослідження такого ряду можна застосовувати ознаки для додатних рядів. Застосуємо ознаку Раабе. Дослідимо спочатку

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{n!e^n(n+1)^{n+p+1}}{n^{n+p}(n+1)!e^{n+1}}=\frac{n+1}{n+p}\left(1+\frac{1}{n}\right)^q=\left(1+\frac{p}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{q+1}=$$

$$=\left(1-\frac{p}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+\frac{q+1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=1+\frac{q-p+1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\left(q-p+1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=q-p+1.$$

Отже, ряд збігається при $q>p$.

Ознаки Куммера, Бертрана і Гауса

Теорема. Ознака Куммера. Нехай для ряду $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ з додатними членами існує послідовність $\{b_n>0, n\in\mathbb{N}\}$, для якої виконуються умови:

1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}$ розбігається,

2) числа $v_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}b_n-b_{n+1}$ одного знаку.

Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ при $v_n>l>0$ збігається, при $v_n\le 0$ розбігається.

Доведення. Нехай $v_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} b_n - b_{n+1} > l > 0$. Звідси $l a_{n+1} < a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1}$. Запишемо ланцюг таких нерівностей при різних значеннях $n \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
& l a_2 < a_1 b_1 - a_2 b_2, \\
& l a_3 < a_2 b_2 - a_3 b_3, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& l a_{n+1} < a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1}.
\end{aligned}
$$

Додамо всі ці нерівності і одержимо:

$$l\left(a_2 + a_3 + \ldots + a_{n+1}\right) < a_1 b_1 - a_{n+1} b_{n+1} < a_1 b_1.$$

Звідси одержимо $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n+1} < \frac{a_1 b_1}{l} + a_1$. Отже, частинні суми додатного ряду рівномірно обмежені, тому він збігається.

Нехай тепер $v_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} b_n - b_{n+1} \le 0 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \ge \frac{\left(\frac{1}{b_{n+1}}\right)}{\left(\frac{1}{b_n}\right)}$. Тоді за ознакою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається.

Ознака Куммера в граничній формі. Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ існує послідовність $\left\{b_n > 0, n \in \mathbb{N}\right\}$, для якої виконуються умови:

1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ розбігається,

2) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} b_n - b_{n+1} \right) = l$,

тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ при $l > 0$ збігається, при $l < 0$ розбігається.

Доведення. Нехай $l>0$. $\exists N\,\forall n>N\, v_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}b_n-b_{n+1}>\frac{l}{2}>0$ і за ознакою Куммера ряд збігається. Нехай $l<0$. Тоді $\exists N\,\forall n>N\ v_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}b_n-b_{n+1}<\frac{l}{2}<0$, а тоді за ознакою Куммера ряд розбігається.

Наслідки з ознаки Куммера

Покажемо спочатку, як деякі відомі ознаки збіжності можна одержати з ознаки Куммера.

Ознака Даламбера. Візьмемо в ознаці Куммера в граничній формі послідовність $b_n=1$. Тоді $v_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}b_n-b_{n+1}=\frac{a_n}{a_{n+1}}-1$. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q<1$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}-1=\frac{1}{q}-1>0$ і ряд збігається. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q>1$, $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=\frac{1}{q}-1<0$ і ряд розбігається.

Таким чином однака Даламбера є частиннь випадком ознаки Куммера.

Ознака Раабе. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=R.$ Тоді при $R>1$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ збігається, а при $R<1$ - розбігається.

Доведення. Візьмемо в ознаці Куммера в граничній формі послідовність $b_n=n$ (ряд з обернених її значень розбігається). Розглянемо $v_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}b_n-b_{n+1}=$

$=\frac{a_n}{a_{n+1}}n-(n+1)=n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1$ і $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1=R-1=l.$ Якщо $R>1\Rightarrow l>0$, тоді ряд збігається; якщо $R<1\Rightarrow l<0$, ряд розбігається.

Доведемо тепер дві нові ознаки збіжності.

Ознака Бертрана. Виберемо тепер $b_n = n\ln n$. Знайдемо $v_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} b_n - b_{n+1} =$

$$= \frac{a_n}{a_{n+1}} n\ln n - (n+1)\ln(n+1) = \frac{a_n}{a_{n+1}} n\ln n - n\ln n - \ln n - (n+1)\ln(n+1) + (n+1)\ln n =$$

$$= \ln n\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}.$$

Теорема (ознака Бертрана). Нехай $\ln n\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) = \beta$. Тоді при $\beta > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, при $\beta < 1$ - розбігається.

Доведення. Застосуємо ознаку Куммера. Тоді $\lim_{n\to\infty} v_n$ =

$$\lim_{n\to\infty}\left(\ln n\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \right) = \lim_{n\to\infty}\left(\ln n\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) \right) - 1 = \beta - 1.$$

Справедливість ознаки Бертрана тепер з очевидністю випливає з ознаки Куммера.

Ознака Гауса. Нехай відношення двох послідовних членів додатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ може бути подане у вигляді:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma_n}{n^{1+\varepsilon}},$$

де $\alpha, \beta, \varepsilon$ - сталі числа, $\varepsilon > 0$, а $|\gamma_n| \le M$.

Тоді

1). При $\alpha > 1$ рід збігається.

2). При $\alpha = 1, \beta > 1$ ряд збігається.

3). При $\alpha < 1$ рід розбігається.

4). При $\alpha = 1, \beta \le 1$ ряд розбігається.

Доведення.

1), 3). З умови $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha$. Ряд збігається за ознакою Даламбера при $\alpha > 1$ і розбігається при $\alpha < 1$.

2), 4). Нехай $\alpha = 1$. Тоді

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma_n}{n^{1+\varepsilon}} \Rightarrow n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \beta + \frac{\gamma_n}{n^{\varepsilon}} \to \beta,\ n \to \infty.$$

Отже, за ознакою Раабе при $\beta > 1$ ряд збігається, при $\beta < 1$ ряд розбігається.

Залишається розглянути випадок $\alpha = 1, \beta = 1$. Тоді умова запишеться у вигляді

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\gamma_n}{n^{1+\varepsilon}}$$

Застосуємо ознаку Бертрана. Розглянемо послідовність

$$\ln n\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right) = \ln n\left(n\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{\gamma_n}{n^{1+\varepsilon}} - 1\right) - 1\right) = \frac{\ln n}{n^{\varepsilon}}\gamma_n .$$

Послідовність γ_n обмежена, як відомо, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n^{\varepsilon}} = 0$. Тому, як відомо, і $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n^{\varepsilon}}\gamma_n = 0$. За ознакою Бертрана ряд розбігається.

Приклад. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$.

Дослідимо відношення

$$\frac{a_{n-1}}{a_n}=\frac{\left(\dfrac{(2n-3)!!}{\left(2(n-1)\right)!!}\right)^p}{\left(\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p}=\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^p=\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{-p}=1+\frac{p}{2n}+\frac{p(p+1)}{2}\frac{1}{\left(2n\right)^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$$\frac{a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{\frac{p}{2}}{n}+\frac{p(p+1)}{8}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)=1+\frac{\left(\frac{p}{2}\right)}{n}+\frac{\gamma_n}{n^2}.$$

З ознаки Гауса випливає, що при $p>2$ ряд збігається, а при $p\le 2$ розбігається.

Лема ($*$). Нехай члени ряду строго додатні $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ і виконується умова

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{p}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

1). Тоді для деякого досить малого $\varepsilon>0$ $a_n=o\left(\dfrac{1}{n^{p-\varepsilon}}\right)$;

2). Якщо $p>0$, $a_n\downarrow 0, n\to\infty$.

Доведемо спочатку друге твердження, тобто, розглянемо випадок $p>0$. Для досить великих n буде мати місце $\dfrac{p}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)>0$. Тоді $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}>1$ і послідовність a_n монотонно спадна. Виберемо досить мале $\varepsilon: p>\varepsilon>0$. З умови випливає існування границі:

$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=p$. Значить, $\exists N\,\forall k\ge N$ будуть справедливі оцінки:

$$1+\frac{p-\varepsilon}{k}<\frac{a_k}{a_{k+1}}<1+\frac{p+\varepsilon}{k}.$$

Будемо використовувати їх при $k=N,N+1,...,n-1.$

Перемноживши всі такі нерівності, будемо мати:

$$\left(1+\frac{p-\varepsilon}{N}\right)\left(1+\frac{p-\varepsilon}{N+1}\right)...\left(1+\frac{p-\varepsilon}{n-1}\right)<\frac{a_N}{a_{N+1}}\frac{a_{N+1}}{a_{N+2}}...\frac{a_{n-1}}{a_n}=\frac{a_N}{a_n}<$$

$$<\left(1+\frac{p+\varepsilon}{N}\right)\left(1+\frac{p+\varepsilon}{N+1}\right)...\left(1+\frac{p+\varepsilon}{n-1}\right).$$

Використовуючи ліву нерівність, будемо мати:

$$0<a_n<\frac{a_N}{\left(1+\frac{p-\varepsilon}{N}\right)\left(1+\frac{p-\varepsilon}{N+1}\right)...\left(1+\frac{p-\varepsilon}{n-1}\right)}.$$

Оскільки $p-\varepsilon>0$, то $\frac{p-\varepsilon}{N},\frac{p-\varepsilon}{N+1},...,\frac{p-\varepsilon}{n-1}>0$. Застосувавши до знаменника нерівність Бернуллі, отримаємо оцінку:

$$0<a_n<\frac{a_N}{1+(p-\varepsilon)\left(\frac{1}{N}+\frac{1}{N+1}+...+\frac{1}{n-1}\right)}.$$

$\frac{1}{N}+\frac{1}{N+1}+...+\frac{1}{n-1}\to\infty,n\to\infty$. Отже, $a_n\to 0,n\to\infty$. Монотонне спадання було доведено раніше.

Доведення першої частини твердження.

Нехай $p \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Доведемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{\left(\dfrac{1}{n^{p-\varepsilon}}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n n^{p-\varepsilon}\right) = 0$.

Позначимо: $\alpha_n = a_n n^{p-\varepsilon}$. Оцінимо відношення:

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} = \frac{a_n n^{p-\varepsilon}}{a_{n+1}(n+1)^{p-\varepsilon}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\varepsilon-p}\left(1+\frac{p}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \left(1+\frac{\varepsilon-p}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+\frac{p}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1+\frac{\varepsilon}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Отже, для відношення $\dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}$ одержали таку саму асимптотичну формулу, що й для $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$. З доведеного раніше приходимо до висновку, що $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$

Контрольні питання

1). Сформулювати ознаки збіжності знакосталих рядів: Даламбера, Коші, Раабе.

2). Яка ознака «сильніша» - Даламбера чи Коші?

3). Чи можна використовувати названі ознаки для незнакосталих рядів?

3. 2. Ряди з довільними членами

Теорема Лейбниця. Нехай $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n, a_n > 0$ - ряд з членами, знаки яких чергуються, і послідовність a_n монотонно прямує до нуля. Тоді цей ряд збігається (взагалі кажучи, не абсолютно).

Доведення. Розглянемо частинну суму ряду з парною кількістю членів: $S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + a_{2n-1} - a_{2n}$. Перепишемо її у вигляді

$S_{2n}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+...+(a_{2n-1}-a_{2n})$. З умови випливає, що вираз в кожній дужці додатний, тому $S_{2n}>0$ і підпослідовність з парними номерами послідовності частинних сум ряду монотонно зростає. Доведемо її обмеженість. Для цього перепишемо цю частинну суму таким чином: $S_{2n}=a_1-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)...-(a_{2n-2}-a_{2n-1})-a_{2n}<a_1$, оскільки вираз в кожній дужці додатний. Отже, така послідовність монотонно зростаюча і обмежена зверху, тому вона має границю, яку позначимо S.

$$S_{2n+1}=S_{2n}+a_{2n+1}\to S, n\to\infty,$$

оскільки загальний член ряду прямує до нуля. Таким чином, ряд збігається.

Зауваження. Умова монотонного спадання a_n до нуля в ознаці Лейбниця дуже суттєва. Розглянемо приклад:

$$S=\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+...+\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+....$$

Очевидно, його загальний член прямує до нуля, але монотонність порушується, коли від члена $-\frac{1}{\sqrt{n}+1}$ переходимо до наступного $\frac{1}{\sqrt{n+1}-1}$:

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}=\frac{2-\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}-1\right)\left(\sqrt{n}+1\right)}=\frac{2-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}{\left(\sqrt{n+1}-1\right)\left(\sqrt{n}+1\right)}>0\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{n+1}-1}>\frac{1}{\sqrt{n}+1}.$$

Приклад. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}, 0<\alpha\le 1$. Умови теореми Лейбниця виконано, тому ряд збігається, але, як вже було доведено, абсолютно він розбігається. Таким чином, ряд збігається умовно.

Узагальнення теореми Лейбниця. Нехай члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n, a_n>0$ мають властивість: $\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{p}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right), n\to\infty, p>0.$ Тоді цей ряд збігається (взагалі кажучи, не абсолютно).

Доведення. Як випливає з Леми($*$), при $p>0$ послідовність a_n монотонно спадаючи прямує до нуля. Тому виконано умови ознаки Лейбниця, і ряд збігається.

Приклад. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$.

Раніше було зроблено висновок, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$ збігається при $p>2$, тобто даний ряд при $p>2$ збігається абсолютно. Дослідимо його при $0<p\le 2$.

Згідно з лемою($*$) дослідимо відношення $\frac{a_n}{a_{n+1}}$:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p\left(\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right)^{-p}=\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^p=$$

$$=1+\frac{\left(\frac{p}{2}\right)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

За лемою($*$) рід збігається умовно при $p>0$. Раніше було показано на основі ознаки Гауса, що при $0<p\le 2$ ряд розбігається абсолютно. Зауважимо, що при $p\le 0$ загальний член ряду не прямує до нулі (доведення очевидне), тому ряд розбігається.

Приклад. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right)$.

Перетворимо загальний член ряду таким чином:

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right)=(-1)^n\sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}-\pi n\right)=(-1)^n\sin\left(\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}\right).$$

Очевидно, при $n>a^2\Rightarrow\sin\left(\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}\right)>0,\ \sin\left(\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}\right)\downarrow 0,\ n\to\infty.$

Отже, виконано умови ознаки Лейбниця, і ряд збігається.

Дослідимо його на абсолютну збіжність.

$\sin\left(\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}\right)=\sin\left(\frac{\pi a^2}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{n}\right)^2}+1}\frac{1}{n}\right)$. Порівняння з гармонічним рядом (розбіжним) дає:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi a^2}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{n}\right)^2}+1}\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)}=\frac{\pi a^2}{2}.$$

Отже, ряд з модулів даного ряду розбігається і він збігається умовно.

Приклад. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\left[\sqrt{n}\right]}}{n}$.

Розглянемо ряд, утворений з даного шляхом групування членів з однаковими знаками. Більш детально про такі ряди див. далі, в пункті «Властивості збіжних рядів».

Маємо:

$$-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+...+\frac{1}{15}\right)+...+$$

$$+(-1)^k\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+...+\frac{1}{(k+1)^2-1}\right)+...$$

Оцінимо суму членів ряду в останніх дужках (їхня кількість дорівнює $(k+1)^2-1-(k^2-1)=2k+1$):

$$\sigma_k=\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+...+\frac{1}{(k+1)^2-1}<\frac{2k+1}{k^2}=\frac{2}{k}+\frac{1}{k^2}\to 0, k\to\infty.$$

Дослідимо послідовність σ_k на монотонність, зауваживши, що знаменник останнього дробу в сумі σ_k дорівнює $(k+1)^2-1=k^2+2k$:

$$\sigma_k-\sigma_{k+1}=\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+...+\frac{1}{(k+1)^2-1}-\left(\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{(k+1)^2+1}+...+\frac{1}{(k+2)^2-1}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)+\left(\frac{1}{k^2+1}-\frac{1}{(k+1)^2+1}\right)+...+\left(\frac{1}{k^2+m}-\frac{1}{(k+1)^2+m}\right)+...+$$

$$+\left(\frac{1}{k^2+2k}-\frac{1}{(k+1)^2+2k}\right)-\frac{1}{k^2+2k+2}-\frac{1}{k^2+2k+3}=$$

$$=\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}+\frac{2k+1}{(k^2+1)\left((k+1)^2+1\right)}+...+\frac{2k+1}{(k^2+m)\left((k+1)^2+m\right)}+...+$$

$$+\frac{2k+1}{(k^2+2k)\left((k+1)^2+2k\right)}-\frac{1}{k^2+4k+2}-\frac{1}{k^2+4k+3}=$$

$$=\left(2k+1\right)\sum_{m=0}^{2k}\frac{1}{\left(k^2+m\right)\left(\left(k+1\right)^2+m\right)}-\frac{1}{k^2+4k+2}-\frac{1}{k^2+4k+3}>$$

$$>\frac{\left(2k+1\right)^2}{\left(k^2+2k\right)\left(k^2+4k+1\right)}-\frac{1}{k^2+4k+2}-\frac{1}{k^2+4k+3}>0\,.$$

Справедливість останньої нерівності читач перевірить самостійно.

Отже, за ознакою Лейбниця цей допоміжний ряд збігається, а тоді, як це пояснюється пункті «Властивості збіжних рядів», попередній ряд теж збігається, очевидно, умовно.

Приклад. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1}b_n,\ 0<b_n\to 0,\ n\to\infty.$

Як було вказано раніше, при відсутності монотонності послідовності b_n ряд може розбігатись. Розглянемо випадок:

$$b_n=\left(\alpha+(-1)^{n-1}\beta\right)\gamma_n,\ \alpha>\beta>0,\ \gamma_n\sim\frac{C}{n^{\delta}},\ 0<\delta\le 1,C>0.$$

Розглянемо частинні суми даного знакозмінного ряду:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(-1\right)^{k-1}b_k=\alpha\sum_{k=1}^{n}\left(-1\right)^{k-1}\gamma_k+\beta\sum_{k=1}^{n}\gamma_k.$$

Послідовність перших сум в правій частині рівності збігається до скінченного числа завдяки ознаці Лейбниця, а друга сума прямує до нескінченності за ознакою порівняння з відомим степеневим рядом. Отже, ряд розбігається.

Розглянемо конкретний приклад:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1}\frac{2+\left(-1\right)^{n-1}}{n}.$$

Тут $\alpha = 2, \beta = 1 < \alpha, \gamma_n = \frac{1}{n}$. Отже, ряд розбігається.

Нехай є дві послідовності $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}, \{v_n, n \in \mathbb{N}\}$. Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$.

Перетворення Абеля

Будемо позначати:

$V_n = v_n, V_{n+1} = V_n + v_{n+1} = v_n + v_{n+1}, ..., V_{n+p} = V_{n+p-1} + v_{n+p} = v_n + v_{n+1} + ... + v_{n+p}$. Звідси $v_n = V_n, v_{n+1} = V_{n+1} - V_n, v_{n+2} = V_{n+2} - V_{n+1}, ..., v_{n+p} = V_{n+p} - V_{n+p-1}$. Підставляючи ці значення в суму, яка фігурує в Критерію Коші для ряду, будемо мати:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k = u_{n+1}v_{n+1} + u_{n+2}v_{n+2} + ... + u_{n+p}v_{n+p} =$$

$$= u_{n+1}\left(V_{n+1} - V_n\right) + u_{n+2}\left(V_{n+2} - V_{n+1}\right) + ... + u_{n+p}\left(V_{n+p} - V_{n+p-1}\right) =$$

$$= u_{n+p}V_{n+p} - u_{n+1}V_n + \left(u_{n+1} - u_{n+2}\right)V_{n+1} + \left(u_{n+2} - u_{n+3}\right)V_{n+2} + ... + \left(u_{n+p-1} - u_{n+p}\right)V_{n+p-1} =$$

$$= u_{n+p}V_{n+p} - u_{n+1}V_n + \sum_{k=n+1}^{n+p-1}\left(u_k - u_{k+1}\right)V_k .$$

Далі будемо розглядати випадок, в якому u_n - монотонна (зростаюча чи спадна – не має значення), а V_n - обмежена послідовності. Нехай, наприклад, u_n - спадна. Тоді $u_{n+1} - u_{n+2} \geq 0$ і $\left|u_{n+1} - u_{n+2}\right| = u_{n+1} - u_{n+2}$, При $u_{n+1} - u_{n+2} \leq 0$ і $\left|u_{n+1} - u_{n+2}\right| = -\left(u_{n+1} - u_{n+2}\right)$, чим ми і скористаємось в наступній оцінці, враховуючи, що у випадку доданків одного знаку модуль їхньої суми дорівнює сумі модулів. Об'єднуючи обидва випадки, будемо мати:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k\right| = \left|u_{n+p}V_{n+p} - u_{n+1}V_n + \sum_{k=n+1}^{n+p-1}(u_k - u_{k+1})V_k\right| \le$$

$$\le \left|u_{n+p}V_{n+p}\right| + \left|u_{n+1}V_n\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(u_k - u_{k+1})V_k\right| \le$$

$$\max_{n\le k\le n+p}|V_k|\left(\left|u_{n+p}\right| + \left|u_{n+1}\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(u_k - u_{k+1})\right|\right) =$$

$$= \max_{n\le k\le n+p}|V_k|\left(\left|u_{n+p}\right| + \left|u_{n+1}\right| + \left|u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+2} - u_{n+3} + \ldots + u_{n+p+1} - u_{n+p}\right|\right) =$$

$$= \max_{n\le k\le n+p}|V_k|\left(\left|u_{n+p}\right| + \left|u_{n+1}\right| + \left|u_{n+1} - u_{n+p}\right|\right) \le 4\max_{n\le k\le n+p}|V_k|\max\left(\left|u_{n+1}\right|, \left|u_{n+p}\right|\right)$$

Теорема (ознака Абеля). Нехай члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ мають наступні властивості:

1) послідовність u_n монотонна і обмежена;

2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збігається (не обов'язково абсолютно).

Тоді даний ряд збігається (взагалі кажучи, не абсолютно).

Доведення. Нехай $|u_n| \le M$. Із збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ випливає умова критерію Коші: $\forall \varepsilon > 0 \exists N \exists n > N, p \in \mathbb{N} \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} v_k\right| \le \max_{n\le k\le n+p}|V_k| < \frac{\varepsilon}{4M}$. Використаємо тільки що одержану оцінку: $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k\right| \le 4\max_{n\le k\le n+p}|V_k|\max\left(\left|u_{n+1}\right|, \left|u_{n+p}\right|\right) < 4\frac{\varepsilon}{4M}M = \varepsilon$.

Тепер збіжність ряду випливає з критерію Коші.

Теорема (ознака Діріхлє). Нехай члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ мають наступні властивості:

1) функціональна послідовність u_n монотонно прямує до нуля;

2) послідовність частинних сум $\sum_{k=1}^{n} v_k$ рівномірно обмежена.

Тоді даний ряд збігається.

Доведення. Друга умова теореми означає, що $\forall n \in \mathbb{N} \left| \sum_{k=1}^{n} v_k \right| \le M$. З монотонного прямування u_n до нуля випливає, що $\forall \varepsilon > 0 \exists N \exists n > N, p \in \mathbb{N} \; |u_n|, |u_{n+p}| < \dfrac{\varepsilon}{4M}$. З доведеної оцінки випливає справедливість умови критерію Коші для досліджуваного ряду, що й доводить його збіжність:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k \right| \le 4 \max_{n \le k \le n+p} |V_k| \max\left(|u_{n+1}|, |u_{n+p}| \right) < 4M \frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon .$$

Зауваження. Ознака Лейбниця випливає з ознаки Діріхлє. Нехай виконано умови ознаки Лейбниця. Якщо покласти $u_n = a_n, v_n = (-1)^{n-1}, |V_n| = |1-1+1-1+...| \le 1$, то виконано умови ознаки Діріхлє, і ряд збігатиметься.

Зауваження. Порівняння ознак Абеля і Діріхлє. Нехай для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ виконано умови ознаки Абеля. Тоді $\exists \lim_{n \to \infty} u_n = u$. Запишемо даний ряд в наступній формі: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n - u) v_n + u \sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Другий ряд в правій частині рівності за умовою збігається, отже всі його частинні суми обмежені. В першому ряді справа послідовність $u_n - u$ монотонно прямує до нуля. Отже, виконано умови ознаки Діріхлє.

Звідси робимо висновок, що якщо ряд можна дослідити, використовуючи ознаку Даламбера, то його тим більше можна дослідити, використовуючи ознаку Діріхлє (хоча інколи технічно це може бути важче). Обернене твердження, взагалі кажучи, невірне.

Приклад. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n-1}{n+1}\frac{1}{\sqrt[10]{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\frac{1}{\sqrt[10]{n}}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt[10]{n}}$ збігається умовно за ознакою Лейбниця, а послідовність $1-\frac{2}{n+1}$ монотонна і обмежена. Отже, за ознакою Абеля ряд збігається. Оскільки ряд з модулів цього ряду є різницею абсолютно збіжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(n+1)\sqrt[10]{n}}$ і збіжного лише умовно - $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt[10]{n}}$, то даний ряд збігається умовно.

Приклад. В залежності від параметра $p\in(-\infty,\infty)$ Дослідити на абсолютну і умовну збіжність ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left(n+(-1)^n\right)^p}.$$

При $p\le 0$ не виконується необхідна умова збіжності, загальний член ряду не прямує до нуля, і ряд розбігається. Нехай $p>0$. Перетворимо загальний член ряду і використаємо формулу Тейлора для одержаної степеневої функції:

$$\frac{(-1)^n}{\left(n+(-1)^n\right)^p}=\frac{(-1)^n}{n^p}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{-p}=\frac{(-1)^n}{n^p}\left(1-p\frac{(-1)^n}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Розглянемо ряди $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$, $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{p}{n^{1+p}}$, $\sum_{n=2}^{\infty}o\left(\frac{1}{n^{1+p}}\right)$.

Другий і третій, ряди з додатними членами, як відомо з попереднього, збігаються при всіх $p>0$. Перший при $p>1$ абсолютно збігається, при $0<p\le 1$ він збігається умовно. Легко бачити, що сума рядів, один з яких

збігається абсолютно, а другій – умовно, збігається умовно. Отже, даний ряд при $p \le 0$ розбігається, при $0 < p \le 1$ збігається умовно і при $p > 1$ збігається абсолютно.

Приклад. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos\frac{\pi n^2}{n+1}}{\ln^2 n}$.

$$\cos\frac{\pi n^2}{n+1} = (-1)^n \cos\left(\frac{\pi n^2}{n+1} - \pi n\right) = (-1)^n \cos\left(-\pi\frac{n}{n+1}\right) = (-1)^n \cos\left(-\pi + \frac{\pi}{n+1}\right) =$$

$$= (-1)^{n-1}\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right).$$

Ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln^2 n}$ збігається (умовно) за ознакою Лейбниця, а послідовність

$\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$ монотонна і обмежена. Отже, даний ряд збігається за ознакою Абеля (умовно).

Контрольні питання.

1). Сформулювати ознаки Лейбниця, Абеля і Діріхлє збіжності ряду.

2). Чи можна застосовувати ці ознаки для дослідження на абсолютну збіжність незнакосталих рядів?

3. 3. Властивості збіжних рядів

Повернемось до поняття абсолютно збіжного ряду. Вже відомо, що з його абсолютної збіжності випливає збіжність (або кажуть: просто збіжність).

Запропонуємо більш детальний аналіз ситуації. Отже, нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ збігається абсолютно, тобто, збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = A*$. В довільній частинній сумі даного ряду можна виділити, взагалі кажучи, як додатні, так і від'ємні члени. Позначимо додатні члени через p_i, а модулі від'єминих – через q_i ,

$P_k = \sum_{i=1}^{k} p_i$, $Q_m = \sum_{j=1}^{m} q_j$, . В результаті $A_n = \sum_{l=1}^{n} a_l = \sum_{i=1}^{k} p_i - \sum_{j=1}^{m} q_j = P_k - Q_m$. Звідси $A_n^* = \sum_{l=1}^{n} |a_l| = \sum_{i=1}^{k} p_i + \sum_{j=1}^{m} q_j$. Очевидно, $P_k = \sum_{i=1}^{k} p_i \le \sum_{l=1}^{n} |a_l| = A_n^*$, $Q_m = \sum_{j=1}^{m} q_j \le \sum_{l=1}^{n} |a_l| = A_n^*$.

Якщо $n \to \infty \Rightarrow k \to \infty, m \to \infty$ і тоді існують границі $P = \lim_{k\to\infty} P_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} p_i, Q = \lim_{m\to\infty} Q_m = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} q_j$, тобто, з абсолютної збіжності існують границі P і Q, $A* = P + Q$, значить існує границя A частинних сум ряду без модулів і $A = P - Q$. Це й означає, що з абсолютної збіжності випливає просто збіжність ряду, і ми дали інше доведення цього факту.

Розглянемо ряд $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$; $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n$

Будемо об'єднувати його члени довільним чином без перестановок їх місцями і розглянемо частинні суми такого ряду:

$$\sigma_k = \left(a_1 + ... + a_{n_1}\right) + \left(a_{n_1+1} + ... + a_{n_2}\right) + ... + \left(a_{n_{k-1}+1} + ... + a_{n_k}\right).$$

Доведемо, що ряд, утворений такими сумами, збігається, тобто, границя його частинних сум є $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Дійсно, послідовність частинних сум σ_k є послідовність S_{n_k} частинних сум даного ряду, що прямує до $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Сформулюємо результат.

Теорема (асоціативність суми ряду). Ряд, утворений з сум $\left(a_1+...+a_{n_1}\right)+\left(a_{n_1+1}+...+a_{n_2}\right)+...+\left(a_{n_{k-1}+1}+...+a_{n_k}\right)...$ збігається і має ту ж суму, що й початковий ряд. Іншими словами, для ряду має місце асоціативний закон.

Ще раз підкреслимо: якщо в нескінченній сумі ряду будь-яким способом розставляти дужки, не переставляючи місцями члени ряду, то йог сума буде співпадати з сумою початкового ряду. Обернене твердження, взагалі кажучи, невірне.

Приклад. Розглянемо ряди:

$$(1-1)+(1-1)+...+(1-1)+...=0+0+...+0+...=0$$

і

$$1-(1-1)-(1-1)-...-(1-1)-...=1-0-0-...-0-...=1.$$

Вони, безперечно, збігаються, але ряд, який дістанемо, якщо відкинути дужки: $1-1+1-1+1+...(-1)^{n-1}+...$ - розбігається.

Інша справа: якщо, відкинувши дужки, одержимо збіжний ряд, то його сума буде співпадати з сумою ряду «з дужками» . Це випливає з тільки що доведеної властивості асоціативності.

І все ж таки можна привести приклад, коли, опускаючи дужки прийдемо до гарантовано збіжного ряду. Розглянемо ряд

$$\sigma=\left(a_1+...+a_{n_1}\right)+\left(a_{n_1+1}+...+a_{n_2}\right)+...+\left(a_{n_{k-1}+1}+...+a_{n_k}\right)...,$$

$\sigma_k=\left(a_1+...+a_{n_1}\right)+\left(a_{n_1+1}+...+a_{n_2}\right)+...+\left(a_{n_{k-1}+1}+...+a_{n_k}\right)$ - його частинна сума.

Зауваження $(*)$. Нехай в межах кожної окремої пари дужок доданки мають один і той же самий знак, причому, вони можуть мати різні знаки в різних дужках. Після опускання дужок утвориться ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, його частинні суми будемо традиційно позначати $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Доведемо, що цей ряд буде збіжний. Нехай номер доданку в межах однієї пари дужок в частинній сумі «ряду з дужками» змінюється від $n_{k-1}+1$ до n_k. Тоді частинна сума S_n буде поводити себе монотонно. Її значення будуть знаходитись між σ_{k-1} і σ_k. При досить великому номері k ці дві суми будуть як завгодно мало відрізнятись від суми σ «ряду з дужками» , а значить, і сума S_n також буде як завгодно мало відрізнятись від σ.

Сформулюємо більш точний результат про асоціативність ряду, що не є, взагалі кажучи, знакосталим. При цьому будемо використовувати позначення з теореми про асоціативність.

Теорема. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, якщо виконано умови:

a). Загальний член ряду прямує до нуля, якщо його номер прямує до нескінченності: $a_n \to 0, n \to \infty$.

b). Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k,\ \sigma_k = \sum_{l=p_k}^{p_{k+1}-1} a_l\ \left(1 = p_1 < p_2 < \ldots\right)$, отриманий з даного ряду групуванням його членів без перестановки їхнього порядку, збігається.

c). Кількості доданків членів другого ряду p_m обмежені одним і там самим числом, яке не залежить від m: $p_m \le N, m \in \mathbb{N}$.

Доведення. Розглянемо частинну суму першого ряду: $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Очевидно, її можна зобразити у вигляді

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{l=1}^{\nu} \sigma_l + a_{\nu+1} + \ldots + a_n$$

і при цьому число членів суми $a_{\nu+1} + \ldots + a_n$ менше, ніж N, тобто, $n - \nu < N$. Тоді $\left|a_{\nu+1} + \ldots + a_n\right| \le \left|a_{\nu+1}\right| + \ldots + \left|a_n\right| \le N \max\limits_{\nu+1 \le k \le n} \left|a_k\right| \to 0, n \to \infty.$

Отже, із збіжності ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sigma_k$ випливає збіжність $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Нагадаємо, що обернене твердження без умови $p_m \le N, m \in \mathbb{N}$ доведено раніше.

Переформулюємо одержані результати, застосувавши їх для рядів

(A) $a_1 + a_2 + \ldots + a_{p_1} - a_{p_1+1} - \ldots - a_{p_2-1} + a_{p_2} + \ldots + a_{p_3-1} - \ldots$

і

(B) $\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_{p_1}\right) - \left(a_{p_1+1} + \ldots + a_{p_2-1}\right) + \left(a_{p_2} + \ldots + a_{p_3-1}\right) - \ldots$.

Вважається, що члени другого ряду в кожній дужці додатні (невід'ємні).

Теорема. Ряд (A) збігається або розбігається разом з рядом (B).

Нехай є збіжний ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$. Переставимо якимсь чином його члени. Утвориться ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n$. Зрозуміло, що кожен його член – це деякий член початкового ряду: $\forall n \in \mathbb{N} \exists n_k \in \mathbb{N} : a'_n = a_{n_k}$. Виникає питання: чи збігається новий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n$, а в разі збіжності чи буде його сума дорівнювати сумі A початкового ряду?

Теорема (властивість комутативності абсолютно збіжного ряду). Нехай ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$ абсолютно збігається. Тоді ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n$, що його одержано перестановкою його членів, теж збігається, причому, абсолютно, і має ту ж саму суму, що й початковий ряд.

Доведення. Розіб'ємо доведення на два етапи: спочатку розглянемо ряд з невід'ємними членами, а потім вже розглянемо довільний ряд.

Отже, нехай $a_n \geq 0$. Розглянемо частинну суму нового ряду, що утворився в результаті перестановки членів початкового ряду: $\sigma_k = a_1' + a_2' + ...a_k' = a_{n_1} + a_{n_2} + ... + a_{n_k}$. Нехай $m_k = \max\{n_1, n_2, ..., n_k\}$. Очевидно, $\sigma_k \leq S_{m_k}$. Із збіжності початкового ряду випливає обмеженість зверху частинних сум σ_k числом A. Отже, завдяки монотонному неспаданню цієї послідовності вона має границю: $\lim\limits_{k\to\infty} \sigma_k = A' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n'$. При цьому з властивості границі числової послідовності маємо: $A' \leq A$. Тепер, міркуємо навпаки: початковим рядом вважаємо $A' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n'$ а рядом, що утворено з нього перестановкою членів – ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$. Тоді за доведеним $A \leq A'$. Отже, $A' = A$.

Розглянемо тепер загальну ситуацію. Як було доведено і цьому розділі раніше, при з'ясуванні зв'язку між збіжністю і абсолютною збіжністю, у разі абсолютної збіжності початкового ряду його можна подати у вигляді:

$A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k - \sum\limits_{j=1}^{\infty} q_j = P - Q$. При цьому $A^* = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k + \sum\limits_{j=1}^{\infty} q_j = P + Q$. За доведенним при перестановці членів ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ його сума не змінюється. Але така перестановка спричинить перестановки у додатних рядах $P = \sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ і $Q = \sum\limits_{j=1}^{\infty} q_j$, що не змінить їхніх сум. А це означає, що при перестановці не зміниться і значення $A = P - Q$.

Нехай тепер ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ збігається умовно.

Для його частинних сум справедлива рівність $A_n = \sum_{l=1}^{n} a_l = \sum_{i=1}^{k} p_i - \sum_{j=1}^{m} q_j = P_k - Q_m$.

Із збіжності випливає виконання необхідної умови $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Зрозуміло, що і $\lim_{k\to\infty} p_k = 0, \lim_{m\to\infty} q_m = 0$ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Доведемо, що ряди $P = \sum_{k=1}^{\infty} p_k$ і $Q = \sum_{j=1}^{\infty} q_j$ розбігаються. Якби, скажімо, ряд $Q = \sum_{j=1}^{\infty} q_j$ збігався, то збігався б і ряд $P = \sum_{k=1}^{\infty} p_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{j=1}^{\infty} q_j = A + Q$, що мало б наслідком, що збігався б і ряд $P + Q = A*$, тобто, початковий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігався б абсолютно, що протирічить умові.

Теорема Рімана. Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається умовно. Тоді яким би не було дійсне число B (скінченне або нескінченне), можна так переставити члени ряду, щоб новий ряд мав би своєю сумою саме це число B.

Доведення. Розглянемо спочатку скінченне B. Згадаємо зображення частинних сум $A_n = \sum_{l=1}^{n} a_l = \sum_{i=1}^{k} p_i - \sum_{j=1}^{m} q_j = P_k - Q_m$ і розбіжність додатних рядів $P = \sum_{k=1}^{\infty} p_k$ і $Q = \sum_{j=1}^{\infty} q_j$. Спочатку візьмемо кілька додатних членів (не змінюючи порядку членів в сумі), щоб їхня сума стала більша за B: $\sum_{l=1}^{k_1} p_l > B.$ Потім виберемо кілька від'ємних членів ряду Q (не змінюючи порядку членів в сумі), щоб їхня сума з попередньою додатною сумою стала меншою за B: $\sum_{l=1}^{k_1} p_l - \sum_{j=1}^{m_1} p_l = p_1 + p_1 + ... + p_{k_1} - q_1 - q_2 - ... - q_{m_1} < B.$

Будемо повторювати цю процедуру, вибираючи кожного разу найменшу можливу кількість доданків для того, щоб відповідні суми були то більші, то менші за B. Розглянемо ситуацію більш детально. Нехай $\left(p_1+p_1+\ldots+p_{k_1}\right)-\left(q_1+q_2+\ldots+q_{m_1}\right)+\ldots+\left(p_{k_{i-1}+1}+\ldots+p_{k_i}\right)>B$. Тоді

$B-\left(p_1+p_1+\ldots+p_{k_1}\right)+\left(q_1+q_2+\ldots+q_{m_1}\right)-\ldots-\left(p_{k_{i-1}+1}+\ldots+p_{k_i-1}\right)<p_{k_i}$. Аналогічна оцінка буде справджуватись, коли будемо досліджувати суму, що менша за B.

Отже, різниця між B і певною такою сумою не буде за модулем більша, ніж останній член в останніх дужках. При великій кількості членів сум останній доданок буде як завгодно малій, а це й доводить, що ряд з цих сум буде збігатись до B. В межах кожної пари дужок доданки мають однакові знаки, і як було доведено в зауваженні $(*)$, те саме буде справедливим після опускання дужок.

Розглянемо випадок $B=\infty$. Візьмемо монотонно зростаючу до нескінченності послідовність $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots \to \infty$. Можна вибрати скінченну кількість додатних членів початкового ряду, щоб їхня сума була більша за B_1, потім додати до неї перший з від'ємних членів ряду, потім додати ще кілька додатних членів ряду, щоб утворена сума стала більша за B_2 і додати другий від'ємний член ряду і так продовжувати цей процес до нескінченності. В результаті сума утвореного ряду буде дорівнювати нескінченності. Аналогічним чином можна побудувати ряд, сума якого дорівнювала б $B=-\infty$.

Контрольні питання

1). При яких умовах можна довільним чином переставляти члени ряду?

2). Сформулювати теорему Рімана.

Додаток

Задача (Ейлер)

Розглянемо послідовність всіх простих чисел:

$p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11, \ldots, p_k, \ldots$

Доведемо, що при $x > 1$ має місце тотожність:

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^x}\right)\left(1-\frac{1}{3^x}\right)\left(1-\frac{1}{5^x}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_k^x}\right)\ldots}= =1+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\frac{1}{4^x}+\frac{1}{5^x}+\ldots+\frac{1}{n^x}+\ldots=\varsigma(x).$$	(E.01)

Нагадаємо, що ряд в правій частині рівності визначає ς -функцію Рімана.

Цю рівність можна переписати у вигляді

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{p_k^x}\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}=\varsigma(x)$$	(E.02)

Доведення. Згідно з формулою суми членів нескінченно спадної геометричної прогресії

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^x}}=1+\frac{1}{p_k^x}+\frac{1}{\left(p_k^2\right)^x}+\ldots+\frac{1}{\left(p_k^m\right)^x}+\ldots$$

Перемножимо скінченну кількість таких рядів, що відповідають простим числам, які не перевищують $N\in\mathbb{N}$:

$P^N(x)=\prod_{p_k\le N}\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^x}}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}\right)'=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^x}+\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^x}\right)'$	(E.03)

Тут штрих коло знаку суми означає, що додавання розповсюджується тільки на ті натуральні числа (крім одиниці), які в розкладі на прості множники містять тільки введені прості числа

$$0<P^N(x)-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^x}=\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^x}\right)'<\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^x}.$$

Завдяки збіжності ряду $\varsigma(x),\,x>1$ права частина цієї оцінки може бути зроблена як завгодно малою, що і доводить формулу.

При $x=1$співвідношення (E.01) теж справедливе, і з нього випливає оцінка знизу:

$$P^N(1)=\prod_{p_k\le N}\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^x}}>\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\to\infty, N\to\infty.$$

Цей факт дав змогу Ейлеру дати доведення того факту, що існує нескінченна кількість простих чисел, тому що при їхній скінченності і і добуток у знаменнику був би скінченний.

Перепишемо (3.46) при умові розбіжності нескінченного добутку при $x=1$ у вигляді

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\ldots=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_k}\right)=0$$	(E.04)

За означенням нескінченний добуток $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ збігається тоді і тільки тоді, коли збігається ряд з логарифмів його членів (вважаються, що вони додатні):

$$\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(a_k\right).$$

З необхідної умови збіжності ряду випливає необхідна умова збіжності до нуля послідовності $\ln a_k \to 0, k\to\infty \Rightarrow a_k \to 1$. Цей висновок робить більш зручною форму запису нескінченного добутку у вигляді

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\alpha_k\right),\ \alpha_k \to 0, k\to\infty \ .$$

і пов'язаний з ним ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1+\alpha_k\right)\ .$$

Якщо, починаючи з якогось номера усі $\alpha_k > 0$ або $\alpha_k < 0$, то збіжність (або розбіжність) ряду з логарифмів еквівалентна збіжності (відповідно - розбіжності) ряду $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$.

Застосуємо сказане для нескінченного добутку (3.46). Він розбігається – ряд з його логарифмів розбігається, його члени не прямують до нуля. А це, в свою чергу, означає, що ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p_k}$ розбігається, його сума дорівнює нескінченності.

Одержаний результат набагато сильніший, ніж розбіжність гармонічного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty.$

4. Функціональні послідовності і ряди

4. 1. Поточкова і рівномірна збіжність

Означення. Послідовність функцій, що приймають дійсні значення, $f_n(x), n=1,2,\ldots\ldots$ називається обмеженою на множині E, якщо існує така стала $M>0$, що $\left|f_n(x)\right|\le M$ для всіх $x\in E$, і всіх $n\in\mathbb{N}$.

Означення. Послідовність $f_n(x), n=1,2,\ldots\ldots$ називається монотонно незростаючою (монотонно неспадною) на множині E, якщо $f_{n+1}(x)\le f_n(x)$ $\left(f_{n+1}(x)\ge f_n(x)\right)$ для всіх $x\in E$ і всіх $n\in\mathbb{N}$. Якщо виконуються умови $f_{n+1}(x)<f_n(x)$ або $f_{n+1}(x)>f_n(x)$, то послідовність називається спадною, відповідно – зростаючою.

Означення. Послідовність $f_n(x), n=1,2,\ldots\ldots$ називається збіжною в точці $x_0\in E,$ якщо числова послідовність $\left\{f_n(x_0)\right\}$ збігається.

Послідовність $f_n(x), n=1,2,\ldots\ldots$ називається збіжною на множині E, якщо вона збігається в кожній точці множини E.

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),\ x\in E,$ то кажуть, що послідовність $f(x), n=1,2,\ldots..$ збігається до функції $f(x), x\in E.$

Означення. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називається збіжним в точці $x_0 \in E$, якщо збігається числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називається збіжним на множині E, якщо він збігається в кожній точці цієї множини.

Означення. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називається абсолютно збіжним на множині $E,$ якщо на цій множині збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|.$

Подібно до випадку числових рядів сума $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x), n=1,2,\ldots..$ називається n-ою частиною сумою ряду $\sum\limits_{m=1}^{\infty} u_n(x).$ Границя частинних сум збіжного на множині E ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називають його сумою. Будемо позначати її $S(x)$: $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x).$

Ряд $r_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ називають n-м залишком ряду. Ряд збігається, тоді і тільки тоді, коли на E збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x).$ Очевидно, $S(x) = S_n(x) + r_n(x)$.

Означення рівномірної збіжності функціональної послідовності. Нехай задано послідовність функцій $f_n(x), n\in\mathbb{N}, D(f_n) = E$. Будемо говорити, що послідовність збігається до функції f рівномірно, на множині E, якщо $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \forall n > N \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall x \in E$.

Підкреслимо, що в цьому означенні суттєво те, що $N = N(\varepsilon)$ не залежить від $x \in E$. Зауважимо також, що при поточковій збіжності, взагалі кажучи, $N = N(\varepsilon, x)$.

Якщо $\{f_n\}$ збігається на множині E до функції f, то будемо також використовувати запис: $f_n \to f$. Якщо $\{f_n\}$ збігається рівномірно на E, то це підкреслюється записом: $f_n \rightrightarrows f$.

Означення рівномірної збіжності функціонального ряду

Нехай $D(u_n) = E.$ Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називається рівномірно збіжними на цій множині, якщо послідовність його частинних сум рівномірно збігається на $E.$

Таким чином, рівномірна збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на E означає існування такої функції S, що $S_n \rightrightarrows S.$

Теорема. Для того, щоб збіжний на E ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ рівномірно збігався на множині $E,$ необхідно і достатньо, щоб $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |r_n(x)| = 0.$

Доведення досить очевидне, тому радимо читачу самостійно це довести.

Приклад. $f_n(x) = x^n,\ x \in [0, q], 0 < q < 1.$ Оскільки $|f_n(x)| = f_n(x) = x^n \le q^n \to 0, n \to \infty$, то послідовність рівномірно прямує до тотожньо нульоіої функції.

Розглянемо ту ж послідовність на відрізку $[0,1]$.

Для кожної точки $x \in [0,1)\ x^n \to 0;$ и $x \in [0,1)\ f_n(1) = 1 \to 1.$ Отже, послідовність прямує до розривної функції *f*, яка дорівнює нулю скрізь крім точки 1, а в правому кінці проміжка, в точці 1, вона дорівнює одиниці.

Послідовність не може прямувати до граничної точки рівномірно, оскільки $\sup\limits_{[0,1]}\left|x^n - f(x)\right| = 1$. Для пояснення досить запропонувати послідовність точок $x_n \in [0,1]$, на якій ця різниця приймає значення як завгодно близьки до одиниці. Виберемо, наприклад, $x_n = \frac{1}{\sqrt[n^2]{n}} < 1 \Rightarrow x_n^n = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$.

Приклад. $f_n(x) = x^n - x^{n+1} = x^n(1-x), x \in [0,1]$.. З попереднього прикладу зрозуміло, що поточково ця послідовність прямує до функції, що тотожно дорівнює нулю. Знайдемо її максимум на проміжку. $\left(f_n(x)\right)' = nx^{n-1} - (n+1)x^n = -(n+1)x^{n-1}\left(x - \frac{n}{n+1}\right)$. Легко бачити, що переході через свою стаціонарну точку $\frac{n}{n+1}$ похідна змінює знак з "-" на "+", тому функція в ній досягає максимуму, який, легко бачити, є максимумом на всьому проміжку і дорівнює $\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \to 0$. Отже, збіжність рівномірна.

Приклад. $f_n(x) = x^n - x^{2n} = x^n(1-x^n), x \in [0,1]$. Так само робимо висновок, що послідовність поточково прямує до тотожно нульової функції. Знайдемо її максимальне значення на проміжку. $\left(f_n(x)\right)' = nx^{n-1} - 2nx^{2n-1} = -2nx^{n-1}\left(x^n - \frac{1}{2}\right)$,

Точка максимуму $\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$, мінімальне значення дорівнює $\frac{1}{4}$. Отже, на проміжку норма відстані членів послідовності від граничної функції дорівнює $\frac{1}{4}$ і не може бути як завгодно малою, тобто, рівномірної збіжності немає.

Приклад. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}, x \in (-\infty, \infty)$. В кожній точці $x \in (-\infty, \infty)$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} = |x|. \qquad \sup_{x\in(-\infty,\infty)}\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x| = \sup_{x\in(-\infty,\infty)}\frac{1}{n^2\left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|\right)} = \frac{1}{n}.$$

Отже, послідовність рівномірно на всій дійсній осі збігається до граничної функції.

Критерій Коші для функціональних послідовностей і рядів

Теорема. Функціональна послідовність збігається рівномірно тоді і тільки тоді, коли $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N, p \in \mathbb{N} \left| f_n(x) - f_{n+p}(x) \right| < \varepsilon \ \forall x \in E$.

Як і в теорії числових послідовностей будемо таку функціональну послідовність називати фундаментальною.

Зауважимо, що в цій умові суттєво те, що номер N залежить тільки від вибраного $\varepsilon > 0$ і не залежить від $x \in E$, тобто, він підходить зразу для всіх значень аргументу з області визначення членів функціональної послідовності.

Доведення. Необхідність. Нехай $f_n \rightrightarrows f$. Тоді

$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N\left(\varepsilon\right) \forall N > N : \left| f_n(x) - f(x) \right| < \dfrac{\varepsilon}{2} \forall x \in E.$ Також, зрозуміло, $\left| f_{n+p}(x) - f(x) \right| < \dfrac{\varepsilon}{2} \forall x \in E$.

Маємо: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > N(\varepsilon) \quad \forall n > N, p \in \mathrm{N}:$

$$\left| f_n(x) - f_{n+p}(x) \right| = \left| f_n(x) - f(x) + f(x) - f_{n+p}(x) \right| \le \left| f_n(x) - f(x) \right| + \left| f_{n+p}(x) - f(x) \right| <$$

$$< \varepsilon / 2 + \varepsilon / 2 = \varepsilon .$$

При кожному значенні $x \in E$ маємо числову фундаментальну послідовність $f_n(x)$. За критерієм Коші для числових послідовностей вона має границю. Отже, кожному $x \in E$ відповідає граничне значення числової послідовності, і тим самим визначається функція $f : x \in E \to f(x)$. Доведемо, що до неї дана функціональна послідовність збігається рівномірно. Перейдемо до границі при $p \to \infty$ в нерівності $\left| f_n(x) - f_{n+p}(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Будемо мати $\left| f_n(x) - f(x) \right| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, що й доводить рівномірну збіжність.

На практиці часто зручно користуватись поняттям збіжності в нормованому просторі. Розглянемо лінійний простір неперервних функцій, що визначені на відрізку $[a,b]$. Його будемо позначати $C^0[a,b]$. Легко бачити, що вираз $\|f\| = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$ визначає норму в цьому просторі. Згідно з теоремою Вейєрштраса можна насправді писати $\|f\| = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Легко довести, що рівномірна збіжність функціональної послідовності еквівалентна іі збіжності у цьому нормованому просторі. $\|f\| = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

Критерій Коші для ряду. Для рівномірної збіжності функціонального ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множині E необхідно і достатньо, щоб $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \forall n > N, p \in \mathbb{N} \left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_n(x) \right| < \varepsilon \forall x \in E$.

Для доведення досить застосувати критерій Коші для послідовності частинних сум ряду.

Наслідок з абсолютної збіжності функціонального ряду випливає його збіжність.

Для доведення досить використати критерій Коші і використати умову абсолютної збіжності ряду: $\left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_n(x) \right| \le \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} |u_n(x)| < \varepsilon \forall x \in E$.

Наслідок. Необхідна умова рівномірної збіжності. Нехай функціональний ряд рівномірно збігається. Тоді в розумінні рівномірної збіжності $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = 0$.

Для доведення досить застосувати необхідну умову в критерії Коші
збіжності при $p=1$.
рівномірної

Теорема порівняння для функціональних послідовностей і рядів

Теорема Вейєрштраса (мажорантна ознака Вейєрштраса рівномірної збіжності). Якщо члени ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ задовольняють на множині $E \subset \mathbb{R}$ нерівностям $|u_n(x)| \le a_n, (n \in \mathbb{N})$, і якщо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збігається на множині E абсолютно і рівномірно.

Зауваження. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається мажоруючим для досліджуваного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Доведення. Із збіжності числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ випливає наступне твердження:

$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N, p \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \le a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p} < \varepsilon$

$\Rightarrow a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p} < \varepsilon$ Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і оцінимо величину $|S_{n+p}(x) - S_n(x)|$ вважаючи, що $n > N$ і N знайдено з попередньої умови:

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| \le |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| \le |u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \dots + |u_{n+p}(x)| \le$$

$\le a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p} < \varepsilon$ тобто $|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ для $\forall n > N$ $\forall p > 0$ $\forall x \in E$ що означає рівномірну і абсолютну збіжність функціонального ряду на множині E.

Зауваження. Теорема справедлива в більш загальному варіанті. Нехай

$$\left|u_n(x)\right| \le v_n(x), (n \in \mathbb{N})$$

і нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ збігається рівномірно. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збігається абсолютно і рівномірно.

Доведення повторює попередні міркування з урахуванням умови фундаментальності для мажоруючого ряду.

Зауваження. Розглянемо два ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ з еквівалентними членами: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{v_n(x)}{u_n(x)} = 1$. Навіть для додатних рядів, взагалі кажучи, не можна сказати, що вони водночас рівномірно збігаються або розбігаються.

Приклад. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n\left(n^2+x^2\right)}$ і $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^3}$. Еквівалентність членів рядів при кожному конкретному x очевидна. Оцінимо загальний член першого ряду:
$$\frac{x}{n\left(n^2+x^2\right)} = \frac{1}{n^2}\frac{|nx|}{\left(n^2+x^2\right)} \le \frac{1}{n^2}\frac{1}{\left(\frac{n}{|x|}+\frac{|x|}{n}\right)} \le \frac{1}{2n^2}.$$

З цієї оцінки виливає, що він збігається абсолютно і рівномірно. При кожному значенні $x \in (-\infty, \infty)$ загальний член ряду прямує до нуля (необхідна умова збіжності), але $\sup\limits_{x\in(-\infty,\infty)} \frac{|x|}{n^3} = \infty$. Отже, на всій осі другий ряд не збігається рівномірно. На довільному обмеженому відрізку він збігається рівномірно.

Задача. Розглянемо два додатних ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ з «рівномірно еквівалентними» членами: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{v_n(x)}{u_n(x)} = 1$, і прямування цього відношення до одиниці рівномірне відносно *x*. Тоді обидва ряди водночас або збігається, або розбігаються. Радимо читачу довести цей факт самостійно.

Контрольні питання

1). Сформулювати ознаку порівняння для ряду.

2) Чи можна використовувати ознаку порівняння для незнакосталого ряду?

4. 2. Незнакосталі функціональні ряди

Нехай є дві функціональні послідовності $\{u_n, n\in\mathbb{N}\},\{v_n, n\in\mathbb{N}\}, D(u_n)=D(v_n)=E$. Нагадаємо конструкцію перетворення Абеля. Будемо позначати: $V_n=v_n,\, V_{n+1}=V_n+v_{n+1}=v_n+v_{n+1},\dots, V_{n+p}=V_{n+p-1}+v_{n+p}=v_n+v_{n+1}+\dots+v_{n+p}$. Звідси $v_n=V_n,\, v_{n+1}=V_{n+1}-V_n,\, v_{n+2}=V_{n+2}-V_{n+1},\dots, v_{n+p}=V_{n+p}-V_{n+p-1}$. Підставляючи ці значення в суму, яка фігурує в Критерію Коші для ряду, будемо мати:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k = u_{n+1}v_{n+1}+u_{n+2}v_{n+2}+\dots+u_{n+p}v_{n+p}=$$

$$=u_{n+1}\left(V_{n+1}-V_n\right)+u_{n+2}\left(V_{n+2}-V_{n+1}\right)+\dots+u_{n+p}\left(V_{n+p}-V_{n+p-1}\right)=$$

$$=u_{n+p}V_{n+p}-u_{n+1}V_n+\left(u_{n+1}-u_{n+2}\right)V_{n+1}+\left(u_{n+2}-u_{n+3}\right)V_{n+2}+\dots+\left(u_{n+p-1}-u_{n+p}\right)V_{n+p-1}=$$

$$=u_{n+p}V_{n+p}-u_{n+1}V_n+\sum_{k=n+1}^{n+p-1}\left(u_k-u_{k+1}\right)V_k .$$

Далі будемо розглядати випадок, в якому u_n - монотонна (зростаюча чи спадна – не має значення), а V_n - обмежена послідовності. Нехай, наприклад, u_n - спадна. Тоді $u_{n+1}-u_{n+2}\ge 0$ і $\left|u_{n+1}-u_{n+2}\right|=u_{n+1}-u_{n+2}$, При $u_{n+1}-u_{n+2}\le 0$ і $\left|u_{n+1}-u_{n+2}\right|=-\left(u_{n+1}-u_{n+2}\right)$, чим ми і скористаємось в наступній оцінці, враховуючи, що у випадку доданків одного знаку модуль їхньої суми дорівнює сумі модулів. Об'єднуючи обидва випадки, будемо мати:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k\right| = \left|u_{n+p}V_{n+p} - u_{n+1}V_n + \sum_{k=n+1}^{n+p-1}(u_k - u_{k+1})V_k\right| \le$$

$$\le \left|u_{n+p}V_{n+p}\right| + \left|u_{n+1}V_n\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(u_k - u_{k+1})V_k\right| \le$$

$$\max_{n\le k\le n+p}\left|V_k\right|\left(\left|u_{n+p}\right| + \left|u_{n+1}\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(u_k - u_{k+1})\right|\right) =$$

$$= \max_{n\le k\le n+p}\left|V_k\right|\left(\left|u_{n+p}\right| + \left|u_{n+1}\right| + \left|u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+2} - u_{n+3} + \ldots + u_{n+p+1} - u_{n+p}\right|\right) =$$

$$= \max_{n\le k\le n+p}\left|V_k\right|\left(\left|u_{n+p}\right| + \left|u_{n+1}\right| + \left|u_{n+1} - u_{n+p}\right|\right) \le 4\max_{n\le k\le n+p}\left|V_k\right|\max\left(\left|u_{n+1}\right|, \left|u_{n+p}\right|\right)$$

Теорема (ознака Абеля). Нехай члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ мають наступні властивості:

1) функціональна послідовність u_n монотонна і обмежена на *E*;

2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ рівномірно збігається на *E*.

Тоді цей ряд збігається на *E* рівномірно.

Доведення. Нехай $\left|u_n(x)\right| \le M$. З рівномірної збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ випливає умова критерію Коші: $\forall \varepsilon > 0\, \exists N\, \exists n > N,\, p \in \mathbb{N} \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} v_k(x)\right| \le \max_{n\le k\le n+p}\left|V_k\right| < \frac{\varepsilon}{4M}$. Використаємо тільки що одержану оцінку: $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)v_k(x)\right| \le 4\max_{n\le k\le n+p}\left|V_k\right|\max\left(\left|u_{n+1}\right|, \left|u_{n+p}\right|\right) < 4\frac{\varepsilon}{4M}M = \varepsilon$.

Тепер рівномірна збіжність ряду випливає з критерію Коші.

Теорема (ознака Діріхлє). Нехай члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ мають наступні властивості:

1) функціональна послідовність u_n монотонно і рівномірно прямує до нуля на E;

2) послідовність частинних сум $\sum_{k=1}^{n} v_k(x)$ рівномірно обмежена на E.

Тоді цей ряд збігається на E рівномірно.

Доведення. Друга умова теореми означає, що $\forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N} \left| \sum_{k=1}^{n} v_k(x) \right| \le M$. З монотонного і рівномірного прямування u_n до нуля випливає, що $\forall \varepsilon > 0 \exists N \exists n > N, p \in \mathbb{N} \ |u_n(x)|, |u_{n+p}(x)| < \dfrac{\varepsilon}{4M}$. З доведеної оцінки випливає справедливість умови критерію Коші для досліджуваного ряду, що й доводить його рівномірну збіжність:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x) \right| \le 4 \max_{n \le k \le n+p} |V_k| \max\left(|u_{n+1}|, |u_{n+p}| \right) < 4M \frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon .$$

Приклад. При $\alpha > 0$ дослідити на рівномірну збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n^{\alpha}}$.

a). Нехай $\alpha > 1$. Тоді $\dfrac{|\sin(nx)|}{n^{\alpha}} \le \dfrac{1}{n^{\alpha}}$. При значеннях $\alpha > 1$ мажорантний ряд, як відомо, збігається, тому даний ряд збігається абсолютно і рівномірно.

b). Нехай $\alpha \in (0,1], x \in [\delta, 2\pi - \delta], 0 < \delta < 2\pi$. Послідовність $\dfrac{1}{n^{\alpha}}$ монотонно спадаючи прямує до нуля. Знайдемо формулу для частинних сум синусів, які утворюють арифметичну прогресію (формула Фейєра). В даному випадку різниця прогресії дорівнює x. Зауважимо, що в даній області $\sin\dfrac{x}{2} > 0$.

$$\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)=\sum_{k=1}^{n}\frac{2\sin(kx)\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{1}{2}\right)x-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Звідси $\left|\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)\right|\le\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\le\frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}$.

Застосовуючи ознаку Діріхлє, робимо висновок про рівномірну збіжність ряду.

Радимо читачу самостійно одержати формулу Фейєра для аналогічної суми косинусів: $\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)$, а також для альтерованих сум: $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sin(kx)$, $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cos(kx)$. В цих двох останніх випадках суму треба множити і ділити на $2\cos\frac{x}{2}\neq 0$.

Дослідимо ряд на абсолютну збіжність. Зробимо зауваження: $|\sin\varphi|\ge\sin^2\varphi\ \forall\in\mathbb{R}$. Застосуємо цю нерівність для оцінки знизу ряду з модулів:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin(nx)|}{n^{\alpha}}\ge\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(nx)}{n^{\alpha}}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos 2(nx)}{n^{\alpha}}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2(nx)}{n^{\alpha}}$ - ряд такого ж типу, як і досліджуваний, отже, за ознакою Діріхлє, він збігається. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ розбігається при $\alpha\in(0,1]$. Отже ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin(nx)|}{n^{\alpha}}$ розбігається, і досліджуваний ряд збігається умовно.

Дослідимо тепер наш ряд на множині $x\in[0,2\pi],\alpha\in(0,1]$.

Зрозуміло, що оцінка сум Фейєра тут непридатна, тому застосуємо оцінку модуля суми з критерію Коші. Покладемо $p=n$. Зробимо зауваження. Для того, щоб довести відсутність рівномірної збіжності, досить знайти нескінченну послідовність точок, в яких порушується умова фундаментальності. Покажемо, як це робити на нашому прикладі. Візьмемо $x_n=\frac{1}{n}\in[0,2\pi],\,n\in\mathbb{N}.$ Підставимо в наступну суму $\left|\frac{\sin(n+1)x}{(n+1)^{\alpha}}+\frac{\sin(n+2)x}{(n+2)^{\alpha}}+...+\frac{\sin 2nx}{(2n)^{\alpha}}\right|$ значення $x_n=\frac{1}{n}$. Одержимо:
$\frac{\sin\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(n+1)^{\alpha}}+\frac{\sin\left(1+\frac{2}{n}\right)}{(n+2)^{\alpha}}+...+\frac{\sin 2}{(2n)^{\alpha}}>\frac{\sin 1}{2^{\alpha}}n^{1-\alpha}>\frac{\sin 1}{2^{\alpha}}$, що є доводить відсутність рівномірної збіжності ряду на проміжку $[0,2\pi]$.

Теорема про неперервність рівномірно збіжних функціональних послідовностей і рядів

Теорема. Нехай $f_n\rightrightarrows f$ на $[a,b]$, f_n - функції неперервні в точці $x_0\in[a,b]$. Тоді f неперервна в цій точці.

Доведення. Маємо: $|f(x)-f(x_0)|=|f(x)-f_n(x)+f_n(x)-f_n(x_0)+f_n(x_0)-f(x_0)|\le$
$\le|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f(x_0)|$.

Завдяки рівномірній збіжності

$\forall\varepsilon>0\exists N\in\mathbb{N}\forall n>N,p\in\mathbb{N}\left|f_n(x)-f_{n+p}(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3}\ \forall x\in[a,b]$

Те ж саме виконується в точці $x_0\in[a,b]$ (рівномірність!). Як тільки значення n було вибране, можна x вибрати настільки близьким до x_0, що другий модуль теж стане менше за $\frac{\varepsilon}{3}$. Отже, доведено, що при x досить близьких до x_0, $\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon$.

Зауваження. В разі відмови від рівномірної збіжності гранична функція може не бути неперервною.

Теорема Діні. Нехай функціональна послідовність неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій збігається до неперервної функції. Тоді ця збіжність рівномірна.

Доведення. Нехай для визначеності послідовність f_n в кожній точці збігається до f монотонно зростаючи. Це значить, що $\forall\varepsilon>0\exists n=n(x)$. З властивості неперервної функції нерівність $0\le f(t)-f_{n(x)}(t)<\varepsilon$ буде справджуватись з деякого околу $U(x)$ цієї точки $(t\in U(x))$. Ці околи покривають відрізок, а тому за лемою Гейне-Бореля-Лебега з одержаного нескінченного покриття можна виділити скінченне підпокриття $U(x_1),U(x_2),...,U(x_m)$. Нехай $n(x)=\max\{n(x_1),n(x_1),...,n(x_m)\}$. Тоді завдяки неспаданню послідовності $\forall n>n(\varepsilon)$ будемо мати $0\le f(t)-f_n(t)<\varepsilon\,\forall t\in[a,b]$.

Наслідок. Якщо члени функціонального ряду невід'ємні і неперервні на $[a,b]$ і ряд збігається до неперервної функції, то він збігається на $[a,b]$ рівномірно.

Доведення очевидне: частинні суми ряду утворюють монотонно неспадну послідовність.

Зауваження. Теорема Діні дає лише достатні умови. Тому, якщо якась з них не виконується, нічого конкретного про збіжність сказати не можна. Дослідимо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(nxe^{-nx}-(n-1)xe^{-(n-1)x}\right)$. Легко бачити, що на відрізку частинні суми ряду поточково прямують до нуля:

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(kxe^{-kx}-(k-1)xe^{-(k-1)x}\right)=nxe^{-nx}\to S(x)\equiv 0.$$

Максимум кожної частинної суми (радимо читачу знайти його самостійно) дорівнює $\frac{1}{e}$, з чого випливає відсутність рівномірної збіжності.

Контрольні питання

1). Дати означення рівномірно збіжної функціональної послідовності (ряду). Пов'язати цю збіжність зі збіжністю за нормою у просторі неперервних функцій.

2). Сформулювати основні ознаки рівномірної збіжності функціонального ряду.

Теореми про інтегровність та диференційовність для рівномірно збіжних функціональних послідовностей і рядів

Теорема. Нехай f_n – інтегровна на [a, b] функціональна послідовність і $f_n \rightrightarrows f$ тоді f інтегровна на $[a,b]$ і

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx\,.$$

Доведення. Нагадаємо, що за побудовою класу інтегровних функцій знайдеться послідовність простих (частинно-сталих) функцій, яка збігається до такої функції рівномірно і інтеграл від цієї граничної функції коректно визначався як границя інтегралів від простих функцій. Отже, нехай $\exists\, f_{s,n}^m \rightrightarrows f_n,\ m\to\infty$. Маємо :

$$\begin{array}{ccccccc}
f_{s,1}^1 & f_{s,1}^2 & \dots & f_{s,1}^n & \dots & \rightrightarrows & f_1 \\
. & . & \dots & . & \dots & . & . \\
f_{s,n}^1 & f_{s,n}^2 & \dots & f_{s,n}^n & \dots & \rightrightarrows & f_n \\
. & . & \dots & . & \dots & . & \downdownarrows \\
 & & & & & & f
\end{array}$$

Маємо для діагональної послідовності Кантора:

$f_{s,n}^n \rightrightarrows f \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_{s,n}^n(x)\,dx.$ Звідси $\left|\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b f_n(x)\,dx\right|=$

$$=\left|\int_a^b \big(f(x)-f_n(x)\big)dx\right|=\left|\int_a^b \big(f(x)-f_{s,n}^n(x)\big)dx+\int_a^b \big(f_{s,n}^n(x)-f_n(x)\big)dx\right|\le$$

$$\le\int_a^b \left|f(x)-f_{s,n}^n(x)\right|dx+\int_a^b \left|f_{s,n}^n(x)-f_n(x)\right|dx<\ \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\,.$$

Теорема. Якщо функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ збігається рівномірно і функції u_n інтегровні, , то $\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,dx$.

Справедливість цього факту миттєво випливає з попередньої теореми, якщо її застосувати до функціональної послідовності частинних сум ряду.

Зробимо зауваження, що навіть рівномірної збіжності послідовності диференційовних функцій не достатньо для того, щоб до похідної граничної функції (в разі її диференційовності) збігалась послідовність похідних даної послідовності.

Приклад

$$f_n(x)=\frac{\sin\left(n^2x\right)}{n},\ \left|f_n(x)\right|=\left|\frac{\sin\left(n^2x\right)}{n}\right|\le\frac{1}{n}\to 0\Rightarrow f_n\rightrightarrows 0.$$

$f_n'(x)=n\sin\left(n^2x\right)$ і, зрозуміло, послідовність похідних розбігається.

Теорема про диференційовність функціональних послідовностей.

Нехай хоча б в одній точці $f_n(x_0)\to f(x_0)$ і $f_n'\rightrightarrows g$ тоді $f_n\rightrightarrows f$, гранична функція f диференційовна і $f'(x)=g(x).$

Доведення. Доведемо фундаментальність в розумінні рівномірної збіжності послідовності f_n. Розглянемо функціональну послідовність $\varphi_{n,p}(x)=f_{n+p}(x)-f_n(x)$. Застосовуючи формулу скінченних приростів, одержимо:

$$\varphi_{n,p}(x)-\varphi_{n,p}(x_0)=\varphi_{n,p}'(\xi)(x-x_0)=\left(f_{n+p}'(\xi)-f_n'(\xi)\right)(x-x_0),$$

$$\left|\left(f_{n+p}(x)-f_n(x)\right)-\left(f_{n+p}(x_0)-f_n(x_0)\right)\right|\le\left|f_{m+p}'(\xi)-f_n'(\xi)\right|(b-a)$$

З варіанта нерівності трикутника $\left(\left||a|-|b|\right|\le|a-b|\right)$ одержимо:

$$\left|\left|f_{n+p}(x)-f_n(x)\right|-\left|f_{n+p}(x_0)-f_n(x_0)\right|\right|\le\left|f_{n+p}'(\xi)-f_n'(\xi)\right|(b-a)$$

$$| f_{(n+p)}(x)-f_n(x)|\le| f'_{(n+p)}(\xi)-f'_n(\xi)|(b-a)+| f_{(n+p)}(x_0)-f_n(x_0)|<\varepsilon$$

Розглянемо тепер послідовність функції від

Розглянемо тепер послідовність функції від Δx: $\Psi_n(\Delta x)=\frac{(f_n(x+\Delta x)-f_n(x))}{\Delta x}$. Її границя при $\Delta x\to 0$ є $f_n'(x)$. Дослідимо цю послідовність на фундаментальність:

$$\Psi_{n+p}(\Delta x)-\Psi_n(\Delta x)=\frac{f_{n+p}(x+\Delta x)-f_{n+p}(x)-f_n(x+\Delta x)+f_n(x)}{\Delta x}=$$

$$=\frac{\left(f_{n+p}(x+\Delta x)-f_n(x+\Delta x)\right)-\left(f_{n+p}(x)-f_n(x)\right)}{\Delta x}=f'_{n+p}(\xi)-f'_n(\xi).$$

Отже, з рівномірної збіжності послідовності похідних f_n' випливає її фундаментальність і з доведеної рівності випливає фундаментальність послідовності Ψ_n , що доводить рівномірність збіжності цієї послідовності. З попередньої теореми про перехід до границі для рівномірно збіжних послідовностей $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\lim\limits_{n\to\infty}\Psi_n(\Delta x)=\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Psi_n(\Delta x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n'(x)=g(x)$. Ліва частина має зміст $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)=g(x)$.

4. 3. Степеневі ряди. Поняття радіуса збіжності

Загальний вигляд степеневого ряду: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Лема Абеля. Нехай степеневий ряд збігається при $x = l > 0$. Тоді він абсолютно збігається при $x: |x| < l$.

Із збіжності ряду при $x = l$ з необхідної умови збіжності ряду при досить великих значеннях *n* члени ряду стають як завгодно малими, а значить, обмеженими: $\forall k > n \ |a_k x^k| < M$. Звідси $\sum_{k=n}^{\infty} |a_k x^k| = \sum_{k=n}^{\infty} |a_k l^k| \left|\frac{x}{l}\right|^k \le M \sum_{k=n}^{\infty} \left|\frac{x}{l}\right|^k$. Мажорантний ряд – залишок збіжної геометричної прогресії, який може бути зробленим як завгодно малим при великих *n*, що і доводить абсолютну збіжність степеневого ряду.

Означення. Супремум значень таких таких l, при яких збігається степеневий ряд, називається його радіусом збіжності. Будемо позначати його *R*.

Теорема. Нехай ряд збігається (хоча б не абсолютно) при $x = R$. Тоді він рівномірно збігається для $x \in [0, R]$. Аналогічно, якщо степеневий ряд збігається при $x = -R$, то він рівномірно збігається на $[-R, 0]$.

Доведення. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n$. Оскільки ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ збігається, а послідовність $\left(\frac{x}{R}\right)^n$ монотонна і обмежена, то за теоремою Абеля ряд збігається рівномірно. Другу половину теореми читачу радимо довести самостійно.

Зробимо важливий висновок. Нехай при $x = R$ ряд розбігається. Тоді він збігається при $x = R - \delta > 0$. Як випливає з доведених фактів, ряд абсолютно і рівномірно збігається на $[0,R-\delta]$, а насправді, як легко бачити, на $[-R+\delta,R-\delta]$.

Зауваження. Нехай збігається числовий ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$. Це означає, що степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ збігається при $x=1$, з чого випливає, що цей степеневий ряд абсолютно збігається в області $|x|<1$.

Приклад. Ряд Ламберта (L): $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\dfrac{x^n}{1-x^n}$.

Разом з ним розглянемо степеневий ряд (A): $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$.

Розглядати ряд Ламберта будемо розглядати , звичайно, в області $D=\{x\in\mathbb{R}: x\neq\pm1\}$.

Доведемо наступний факт: якщо ряд (A_1): $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ збігається, то ряд Ламберта збігається в D, якщо ж цей ряд розбігається, то ряд Ламберта збігається як раз для тих значеннях x, для яких збігається степеневий ряд (A): $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$.

1). Розглянемо спочатку випадок розбіжного ряду (A_1): $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. Це означає, що у степеневого ряду (A): $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ радіус збіжності $R\le1$. Покажемо, що при $|x|<1$ поведінка рядів (L) і (A) однакова.

Нехай ряд (L) збігається. Тоді буде збігатись ряд, який буде утворено з нього множенням членів, що містять x^n, на x^n: (L_1): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} x^n$.

Тоді ряд (A) може бути виражений через (L) і (L_1):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{x^n}{1-x^n} - a_n \frac{x^n}{1-x^n} x^n \right).$$

Отже, із збіжності ряду Ламберта (L) випливає збіжність степеневого ряду (A).

Нехай тепер збігається степеневий ряд (A), $|x|<1$. Помножимо його члени, що містять x^n, на додатні монотонно спадні множники $\frac{1}{1-x^{2n}}$: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \frac{1}{1-x^{2n}}$. , а потім на спадні $\frac{x^n}{1-x^{2n}}$: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \frac{x^n}{1-x^{2n}}$. В обох випадках за ознакою Абеля нові ряди будуть збігатись. Тоді степеневий (A) ряд збігається, що випливає з тотожності:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n x^n \frac{1}{1-x^{2n}} + a_n x^n \frac{x^n}{1-x^{2n}} \right).$$

Розглянемо тепер область $|x|>1$.

Очевидно, степеневий ряд (A): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ розбігається. Доведемо тепер, що ряд Ламберта теж розбігається. Нехай це не так, ряд Ламберта. Перепишемо його в новому вигляді:

$$(L):\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n}.$$

Тоді за ознакою Абеля збігається також ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n}$. Із збіжності цих двох рядів випливає збіжність числового ряду (A_1) завдяки тотожності

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{1}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n} - a_n \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n} \right),$$

А це протирічить умові.

2). Неха числовий ряд $(A_1):\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається. Це означає, що радіус збіжності ряду $(A):\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ не менше одиниці: $|R| \geq 1$. Тоді при $|x| < 1$ степеневий ряд збігається, і тоді ряд Ламберта $(A):\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ теж збігається, що доводиться так само, як і у першому випадку. Доведемо нарешті, що при $|x| > 1$ ряд Ламберта збігається. В цій області $\frac{1}{|x|} < 1$і ряд Ламберта зручно переписати у вигляді $(L):\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n}$.

З ознаки Абеля випливає, що збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n}$. Звідси ряд Ламберта

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n} = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n} =$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n + a_n \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n}\right)$$

збігається як сума двох збіжних рядів.

Знаходження радіуса збіжності степеневого ряду. Формула Коші-Адамара.Теорема Коші-Адамара. Нехай $\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$. Тоді радіус збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ знаходиться за формулою $R = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$.Ця формула називається формулою Коші-Адамара.

1) Перший випадок $\rho = 0$. Доведемо, що в цьому випадку $R = 0$, тобто, при довільному x ряд абсолютно збігається. Оскільки верхня границя додатної послідовності $\sqrt[n]{|a_n|}$ дорівнює нулю, то вона має границю, яка теж дорівнює нулю. При цьому $\sqrt[n]{|a_n||x|^n} = |x|\sqrt[n]{|a_n|} \to 0$ при $n \to \infty$. Значить за ознакою Коші для числових рядів ряд з модулів членів даного ряду збігається, тобто, сам ряд збігається абсолютно.

2). $\rho = \infty$. Доведемо, що при $x \neq 0$ ряд розбігається.

Очевидно, можна знайти таку підпослідовність $n_k \to \infty$, що $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = \infty$. Отже, $\forall x \exists K \forall k > K \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{1}{|x|}$ і тоді $\left|a_{n_k} x^{n_k}\right| > 1$, тобто, не буде виконуватись необхідна умова збіжності ряду.

3). $0 < \rho < \infty$. Доведемо, що при $|x| < \frac{1}{\rho}$ ряд абсолютно збігається, а при $|x| > \frac{1}{\rho}$ ряд розбігається. Візьмемо довільне $x : |x| < \frac{1}{\rho}$. Відомо, що можна вибрати таке мале $\varepsilon > 0$, що $|x| < \frac{1}{\rho + \varepsilon}$. Як випливає з поняття верхньої границі, $\exists N \forall n > N \sqrt[n]{|a_n|} < \rho + \varepsilon.$ Звідси випливає, що $\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|} < |x|(\rho + \varepsilon) < 1 \; \forall n > N$. За ознакою Коші ряд з модулів членів даного ряду збігається, а сам ряд збігається абсолютно.

Візьмемо тепер $x : |x| > \frac{1}{\rho}$. Виберемо таке мале $\varepsilon > 0$, що $|x| > \frac{1}{\rho - \varepsilon}$. Як випливає з означення верхньої межі, для як завгодно великих n буде виконуватись $\sqrt[n]{|a_n x^n|} > |x|(\rho - \varepsilon) > 1$. Отже, не виконується необхідна умова збіжності ряду і він розбігається.

Наслідок. Радіус збіжності степеневого ряду можна знайти за формулою

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Доведення. Як відомо, з існування границі $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ випливає існування границі $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ і ці значення рівні. Тоді $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$. Тоді

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Будемо називати цю формулу для радіусі збіжності степеневого ряду формулою Даламбера.

Зауваження. Нехай R - радіус збіжності степеневого ряду і в цьому кінці він розбігається. Тоді ряд не може рівномірно збігатись на проміжку $[0, R)$.

Якби ряд збігався рівномірно, то за теоремою про граничний перехід випливало б існування скінченної границі ряду при $x \to R$, що протирічить умові.

Зауваження. При дослідженні на збіжність конкретних степеневих рядів треба зайти їхній радіус збіжності і потім дослідити на збіжність числові ряди – значення ряду в граничних точках $x = \pm R.$

Приклад. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$. Знайдемо радіус збіжності за формулою Коші-Адамара: $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} = \frac{1}{e}$. Дослідимо на збіжність ряд в граничних точках інтервалу радіуса збіжності. $x = \frac{1}{e}: \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{e^n}$. Розглянемо загальний член ряду: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{e^n} = \ = e^{-n+n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{-n+n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = e^{-\frac{1}{2}+o(1)} \to e^{-\frac{1}{2}}, n\to\infty$. Оскільки не виконується необхідна умова збіжності ряду, він розбігається. Те ж саме відбувається при $x = -\frac{1}{e}.$

Контрольні питання.

1). Чи можна і при яких умовах переходити до границі, інтегрувати і диференціювати функціональний ряд?

4. 4. Інтегровність і диференційовність степеневих рядів

Теорема (інтегровність). Степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можна почленно інтегрувати на проміжку [0; x] , $|x|< R$, так , що:

$$\int_0^x s(t)\,dt = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \ldots + \frac{a_{n-1}}{n} x^n \ldots$$

Якщо ряд збігається і при $x = R$, то інтегрування можливе на проміжку $[0, R]$.

Доведення: На вказаних проміжках ряд збігається рівномірно. Формально проінтегрований степеневий ряд має радіус збіжності ρ_1, який дорівнює радіусу збіжності даного ряду: $\rho_1 = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}} = \frac{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho.$

Тепер досить застосувати теорему про інтегровність функціонального ряду.

Теорема (диференційовність). Степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можна почленно диференціювати на його проміжку збіжності, так що $S'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots$, $x \in (-R; R)$, Цей факт справедливий і при $x = R$, якщо досліджуваний ряд збігається в даній точці.

Іншими словами, степеневий ряд диференційовний нескінченну кількість разів.

Доведення. Формально продиференційований ряд має вигляд: $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. Його радіус збіжності R' обчислюється за формулою:

$$R' = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n|a_n|}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = R\ .$$

Отже, на довільному проміжку $[-l,l]\subset(-R,R)$ він збігається рівномірно, і тоді за теоремою про диференціювання функціональних рядів його можна почленно диференціювати. Повторне диференціювання не змінює радіус збіжності, отже, степеневий ряд диференційовний нескінченну кількість разів.

Розглянуті теореми дають змогу знаходити суми деяких степеневих рядів.

Приклад. Провести дослідження степеневого ряду і знайти його суму:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{16^n(2n+1)}x^{2n+2}.$$

Для зручності винесемо x за знак суми:

$$f(x)=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{16^n(2n+1)}x^{2n+1}=xf_1(x);\ f_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{16^n(2n+1)}x^{2n+1}.$$

Радіуси збіжності рядів $f(x),\ f_1(x)$, очевидно, співпадають. Далі буде зручніше, як це стане зрозумілим трохи пізніше, будемо працювати з рядом $f_1(x)$. Його радіус збіжності обчислимо за формулою Коші-Адамара, помітивши, що при непарних степенях x коефіцієнти не дорівнюють нулю, нульові вони при парних степенях, тому у формулі Коші-Адамара треба знаходити верхню межу, що зводиться до звичайної межі, тільки корінь треба брати степені $2n+1$:

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{\dfrac{4}{4^{2n+1}(2n+1)}}}=4.$$

Зразу можна зробити висновок, що ряд збігається абсолютно в інтервалі $(-4,4)$. Поки що можна зробити висновок, що рівномірно ряд збігається на довільному відрізку $[-4+\delta, 4-\delta],\ 0<\delta<4.$ Дослідимо ряд на збіжність в граничних точках $x=\pm 4.$

а). $x=4$. Маємо: $4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}$. За ознакою Лейбниця ряд збігається умовно (очевидно, абсолютно він розбігається).

а). $x=-4$. Маємо: $-4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)}$. Ряд розбігається.

Висновок: рівномірно ряд збігається на довільному проміжку $[-4+\delta, 4],\ 0<\delta<4.$

Знайдемо тепер суму ряду. Продиференціюємо почленно ряд $f_1(x)$:

$$f_1'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{16^n(2n+1)}x^{2n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{16^n}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x^2}{16}\right)^n .$$

Одержали ряд, що є збіжною на інтервалі $(-4,4)$ геометричною прогресією. Отже,

$$f_1'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x^2}{16}\right)^n=\frac{1}{1+\frac{x^2}{16}}.$$

Помічаючи, що $f_1(0)=0,$ візьмемо інтеграл від обох частин рівності, використовуючи формулу Ньютона-Лейбниця:

$$\int_0^x f_1'(t)dt= f_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{16^n(2n+1)}x^{2n+1}=\int_0^x\frac{dt}{1+\left(\frac{t}{4}\right)^2}=4arctg\,\frac{x}{4}.$$

Остаточно, $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{16^n(2n+1)}x^{2n+2}=4x\,arctg\,\frac{x}{4}.$

1). Як дослідити на абсолютну збіжність степеневий ряд, знаючи його радіус збіжності?

2) Чи збігається він рівномірно на інтервалі радіуса збіжності? На відповідному відрізку?

4. 5. Ряди Тейлора для елементарних функцій, їхні області збіжності

Формула Тейлора для функції $f(x)$ при $x_0 = 0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n(x), x \in (-R; R),$$

де R - радіус збіжності.

Запишемо ряд також у такій формі і дослідимо поведінку залишкового члена для деяких рядів:

$$f(x) = S_n(x) + r_n(x), x \in (-R, R),$$

де $S_n(x)$ - частинна сума ряда Тейлора (Маклорена).

Скористаємось доведеними раніше формулами для залишкового члена для $x_0 = 0$.

Лагранжа: $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \theta \in (0,1)$ де точка ξ знаходиться між точками 0 і x;

Коші: $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n x = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x, \theta \in (0,1).$

Ряди Тейлора для елементарних функцій.

Ми будемо користуватись результатами, які одержано раніше, при вивченні формули Коші, зокрема, для деяких важливих елементарних функцій.

1). $f(x)=e^{x}$.

$$e^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\ldots+\frac{x^{n}}{n!}+\ldots, \text{ область збіжності } x\in(-\infty;+\infty).$$

Для оцінки залишкового члена використаємо формулу Лагранжа. Отже, $\forall x\in[-R,R]$ знайдемо:

$$\left|r_{n}(x)\right|=\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}|x|^{n+1}\le\frac{e^{R}}{(n+1)!}R^{n+1}.$$

Як відомо з теорії границь, права частина цієї нерівності прямує до нуля, якщо *n* прямує до нескінченності. Отже, степеневий ряд для експоненти збігається до неї рівномірно на довільному обмеженому замкненому проміжку.

Знайдемо радіус збіжності для цього ряду:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{n!}\right)}{\left(\frac{1}{(n+1)!}\right)}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$$

Не треба думати, що степеневий ряд для експоненти збігається до неї на всій осі: $\forall n\in\mathbb{N}\sup\limits_{x\in(-\infty,\infty)}\left|e^{x}-\left(1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\ldots+\frac{x^{n}}{n!}\right)\right|=\infty$. Це випливає з теорії границь: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{x}}{x^{n}}=\infty$. Отже, залишковий член формули Тейлора не прямує до нуля на всій осі.

2). $f(x)=\sin x, x\in[-R,R]$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, x \in R$$

Для оцінки залишкового члена теж треба використати формулу Лагранжа: $|r_n(x)| = \frac{\left|sin\left(\xi + \frac{\pi}{2}(2n+1)\right)\right|}{(2n+1)!}|x|^{2n+1} \le \frac{R^{2n+1}}{(2n+1)!}$, з чого випливає рівномірна збіжність.

Радіус збіжності – нескінченність, але, як і у випадку ряду для експоненти на всій осі рівномірної збіжності немає.

3). $f(x) = \cos x,\ x \in [-R, R]$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, x \in R$$

Радимо читачу довести рівномірну збіжність ряду на проміжку $x \in [-R, R]$ і відсутність рівномірної збіжності на всій осі.

4). $f(x) = \ln(1+x)$.

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots, x \in (-1;1)$$

Як відомо, $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$, $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$.

Для дослідження залишку застосуємо дві форми – Лагранжа $\forall x \in [0,1]$ і Коші $\forall x \in (-1,0)$:

$r_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n(1+\theta x)^n}$, $0 < \theta < 1$ - Лагранжа.

$r_n(x) = (-1)^{n+1}\frac{x^n}{1+\theta x}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}$, $0 < \theta < 1$ - Коші.

Нехай $x\in[0,1]$. З формули Лагранжа $|r_n(x)|\le\frac{x^n}{n}<\frac{1}{n}$. З цих оцінок видно, що при $x\in[0,1)$ прямування до нуля залишкового члена досить швидке, при $x=1$ - досить повільне.

Нехай $x\in(-1,0)\Rightarrow|x|<1$. Застосуємо формулу Коші:

$$|r_n(x)|=\frac{|x|^n}{1+\theta x}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}<\frac{|x|^n}{1-|x|}\left(\frac{1-\theta}{1-\theta}\right)^{n-1}<\frac{|x|^n}{1-|x|}\to 0, n\to\infty.$$

З цих оцінок випливає, що при $x\in[-1+\delta,1-\delta]\ (0<\delta<1)$ ряд збігається абсолютно і рівномірно. На правому кінці проміжку ряд збігається, оскільки для нього виконано умови Лейбниця. Отже, він рівномірно збігається на $x\in[-1+\delta,1]$.

5). $f(x)=(1+x)^\alpha$, α - довільне дійсне число:

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots,$$

$x\in(-1;1)$ Такий ряд називається біноміальним рядом.

Для оцінки залишкового члена використаємо формулу Коші:

$$|r_n(x)|=\frac{1}{n!}\left|f^{(n+1)}(\xi)\right||x-\xi|^n|x|=\frac{|\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)|}{n!}|1+\xi|^{\alpha-n-1}|x-\xi|^n|x|\le$$

$$\le\left|\alpha\left(1-\frac{\alpha}{1}\right)...\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\right||1+\xi|^{\alpha-1}\left|\frac{x-\xi}{1+\xi}\right|^n|x|$$

Нехай $|x|<1$. Зробимо оцінку:

$$\left|\frac{x-\xi}{1+\xi}\right|=\frac{|x|-|\xi|}{1-|\xi|}\le 1-\frac{1-|x|}{1-|\xi|}\le 1-\frac{1-|x|}{1-|0|}=|x|.$$

Звідси $|r_n(x)| \le \left|\alpha\left(1-\frac{\alpha}{1}\right)...\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\right| |1+\xi|^{\alpha-1} |x|^{n+1}$

При збільшенні n на одиницю права частина множиться на $\left|\left(1-\frac{\alpha}{n+1}\right)x\right|$. При

$|x| < q < 1$ $\left|\left(1-\frac{\alpha}{n+1}\right)x\right| < q < 1$. Отже, $|r_n(x)| \to 0, n \to \infty$.

З цих оцінок випливає, що при $x \in [-1+\delta, 1-\delta]$ ряд збігається рівномірно.

Приклад. Розкласти в степеневий ряд функцію $f(x) = \arcsin x$.

$$f'(x) = \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)...\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} x^{2n} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} x^{2n}.$$

Неважко знайти радіус збіжності ряду: $R = 1$.

Проінтегрувавши обидві частини, одержимо:

$$\arcsin x = \int_0^x f'(t)dt = x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n (2n+1) n!} x^{2n+1}.$$

Його радіус збіжності:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+10n+6}{4n^2+4n+1} = 1.$$

Для дослідження збіжності в граничних точках застосуємо ознаку Раабе:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{4n^2+10n+6}{4n^2+4n+1} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{6n^2+5n}{4n^2+4n+1} = \frac{3}{2} > 1.$$

Отже, на кінцях проміжку збіжності ряд збігається абсолютно, звідки робимо висновок: степеневий ряд для функції $f(x) = \arcsin x$ на відрізку $[-1,1]$, тобто на всій області визначення цієї функції збігається абсолютно і рівномірно.

Приклад. Розкласти в степеневий ряд функцію, яка називається інтегральний синус: $si(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt.$ Маючи степеневий ряд для синуса, запишемо степеневий ряд для підінтегральної функції і проінтегруємо обидві частини:

$$si(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt=\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

Цей ряд поточково збігається на всій осі, а рівномірно – на будь-якому відрізку $[a,b]$.

Приклад. Довести рівність:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}.$$

Продовжимо функцію $f(x)=x^{-x}=e^{-x\ln x}$ за неперервністю в точці 0, після чого будемо вважати, що $f(0)=1$.

Скористаємось відомим розкладом у ряд Тейлора:

$$f(x)=x^{-x}=e^{-x\ln x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n\ln^n x.$$

Оскільки цей ряд рівномірно збігається на довільному проміжку $[0,R]$, його можна почленно інтегрувати, в результаті чого будемо мати:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 x^n\ln^n x dx.$$

Використання раніше одержаної формули (див. [6], стор. 82)

$$\int_0^1 x^n\ln^n x dx=(-1)^n\frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$$

доводить твердження:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

Контрольні питання

1). Виписати п’ять рядів для елементарних функцій – експоненти, синуса, косинуса, логарифма і степеневої.

2). Вказати області рівномірної збіжності цих функцій.

5. Інтеграли, що залежать від параметра

5. 1. Власні інтеграли, що залежать від параметра

Розглянемо функцію, визначеному на прямокутнику $D = [a,b] \times [c,d]$. Як правило, будемо вважати її неперервною на своїй області визначення: $f \in C^0(D)$. Розглянемо інтеграл

.

$I(y) = \int_a^b f(x,y)dx$	(5. 1.1)

Інтегрування відбувається по змінній x, тому інтеграл є функцією $y \in [c,d]$, і ця змінна називається вільним параметром.

Властивості інтегралів, що залежать від параметра

Теорема 5. 1.1. Нехай $f \in C^0[a,b] \times [c,d]$. Тоді функція *I*, що визначається рівністю (5. 1.1) , неперервна на $[c,d]$.

Доведення. Розглянемо приріст функції I в точці $y \in [c,d]$:

$$\Delta I(y) = \int_a^b \left(f(x, y+\Delta y) - f(x,y) \right) dx,$$

За теоремою Кантора f рівномірно неперервна на $[a,b]\times[c,d]$, тому

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in [a,b], \forall y, y+\Delta y \in [c,d], |\Delta y| < \delta \Rightarrow \left| f\left(x, y+\Delta y\right) - f\left(x,y\right) \right| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

.

Звідси

$$|\Delta I(y)| \le \int_a^b | f(x, y+\Delta y) - f(x,y) | dx < \frac{\varepsilon}{b-a} \int_a^b dx = \varepsilon,$$

Що й доводить неперервність *I*.

Теорема 5. 1.2 (Фубіні). Нехай $f \in C^0[a,b]\times[c,d]$. Тоді функція *I*, що визначається рівністю (5. 1.1) , інтегровна на $[c,d]$ і

$\int_c^d I(y)dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy \equiv \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy.$	(5. 1.2)

Доведення теореми буде проведене пізніше, при вивченні подвійних інтегралів. А зараз зауважимо, що інтегровність випливає з тільки що доведеної неперервності.

Теорема 5. 1.3. Нехай $f, \frac{\partial f}{\partial y} \in C^0[a,b]\times[c,d]$. Тоді функція I, що визначається рівністю (5. 1.1) , диференційовна на $[c,d]$ і її похідна знаходиться за формулою

$\frac{dI(y)}{dy} = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx.$	(5. 1.3)

Слід зауважити, що таке правило диференціювання інтегралу за параметром називається **правилом Лейбниця**.

Доведення. Зауважимо, що інтеграл в правій частині рівності існує завдяки неперервності частинної похідної $\frac{\partial f}{\partial y}$. Позначимо його $J(y)=\int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx.$

Запишемо скінченний приріст для функції I:

$$\frac{\Delta I}{\Delta y}=\int_a^b \frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}dx.$$

Застосувавши формулу скінченних приростів в диференціальному численні, оцінимо різницю

$$J(y)-\frac{\Delta I}{\Delta y}=$$

$$=\int_a^b\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}-\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}\right)dx=\int_a^b\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}-\frac{f'(x,\eta)\Delta y}{\Delta y}\right)dx=$$

$$=\int_a^b\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial f(x,\eta)}{\partial y}\right)dx.$$

Тут η знаходиться між y і $y+\Delta y$. При малому Δy завдяки неперервності частинної похідної різниця під інтегралом буде мала, і за теоремою про неперервність інтеграла, що залежить параметра, різниця $J(y)-\frac{\Delta I}{\Delta y}$ буде як завгодно малою, як тільки приріст Δy як завгодно малий. Це й доводить існування похідної $\frac{dI(y)}{dy}$, і тим самим формулу (5. 1.3) .

Зауваження. Можна розглянути більш загальний випадок – криволінійної трапеції. Справа і зліва вона буде обмеженою графіками неперервних функцій $x=\varphi(y), x=\psi(y)$. Тоді інтеграл буде мати вигляд

$$I(y)=\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx$$	(5. 1.4)

Доведені теореми 1.1, 1.3 припускають узагальнення на цей випадок.
Об'єднаємо їх в одне тредження.

Теорема 5. 1.4. Нехай f неперервна на криволінійній трапеції D, φ,ψ - неперервні на $[c,d]$ функції. Тоді функція, визначена інтегралом (5. 1.4) неперервна. В разі неперервності похідної $\frac{\partial f}{\partial y}$ і неперервній диференційовності φ,ψ функція (5. 1.4) неперервно диференційовна, і її похідна дається формулою

$$\frac{dI(y)}{dy}=\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx+\psi'(y)f\left(\psi(y),y\right)-\varphi'(y)f\left(\varphi(y),y\right).$$	(5. 1.5)

Нехай $\max\limits_{D}\left|f(x,y)\right|=M$.

Зафіксуємо $y_0\in[c,d]$ і візьмемо досить близьке до нього значення $y\in[c,d]$.

Перепишемо функцію (5. 1.4) у вигляді:

$$I(y)=\int_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} f(x,y)dx+\int_{\psi(y_0)}^{\psi(y)} f(x,y)dx-\int_{\varphi(y_0)}^{\varphi(y)} f(x,y)dx.$$	(5. 1.6)

Перший інтеграл з сталими границями інтегрування, і для нього неперервність доведено. Оцінимо другий інтеграл:

$\left|\int\limits_{\varphi(y_0)}^{\varphi(y)} f(x,y)dx\right| \leq \int\limits_{\varphi(y_0)}^{\varphi(y)} |f(x,y)|dx \leq M\left|\varphi(y)-\varphi(y_0)\right|$. Завдяки неперервності функції

φ і одержаній оцінці інтеграл в лівій частині нерівності прямує до 0, якщо $y \to y_0$. Те саме справедливе для третього інтеграла.

Для доведення диференційовності і формули для похідної використаємо зображення функції I у вигляді (5. 1.6). Розглянемо другий доданок і його похідну. Маємо:

$$\lim_{y\to y_0}\frac{1}{y-y_0}\int\limits_{\psi(y_0)}^{\psi(y)} f(x,y)dx = \lim_{y\to y_0}\frac{f(\xi,y)\left(\psi(y)-\psi(y_0)\right)}{y-y_0} = f(\psi(y_0),y_0)\psi'(y_0).$$

Аналогічний вираз можна одержати при розгляді третього інтеграла. В результаті формулу (5. 1.6) доведено.

5. 2. Невласні інтеграли, що залежать від параметра

Розглянемо область $D=[a,\infty)\times[c,d]$. Нехай в цій області визначено функцію f, яка при кожному $y\in[c,d]$ інтегрована на $[a,\infty)$. Таким чином визначена функція

$$I(y)=\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$$	(5. 2.1)

Будемо говорити, що інтеграл збігається поточково. Як і в теорії функціональних рядів, тут буде велике значення мати рівномірна збіжність.

Означення 5. 2.1. Невласний інтеграл (5. 2.1) називається рівномірно збіжним за параметром $y \in [c,d]$, якщо він поточкові збігається на цьому проміжку і $\forall \varepsilon > 0 \exists A = A(\varepsilon) > a \forall R > A \Rightarrow \left|\int_R^\infty f(x,y)\right| < \varepsilon \ \forall y \in [c,d]$.

Теорема 5. 2.1 (критерій Коші). Для рівномірної збіжності інтеграла за параметром $y \in [c,d]$ необхідно і достатньо, щоб

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A = A(\varepsilon) > a \forall R_2 > R_1 > A \Rightarrow \left|\int_{R_1}^{R_2} f(x,y)\right| < \varepsilon \ \forall y \in [c,d].$$

Доведення очевидне. Воно випливає з означення рівномірної збіжності інтеграла.

Теорема 5. 2.2 (ознака порівняння Вейєрштраса). Нехай функція f, яка при кожному $y \in [c,d]$ інтегрована на $[a,\infty)$ і справедлива нерівність $|f(x,y)| \le g(x)$. Тоді із збіжності інтеграла $\int_a^\infty g(x)dx$ випливає абсолютна і рівномірна збіжність інтеграла (5. 2.1).

Доведення миттєво випливає з критерію Коші і оцінки

$$\left|\int_{R_1}^{R_2} f(x,y)dx\right| \le \int_{R_1}^{R_2} |f(x,y)|dx \le \int_{R_1}^{R_2} g(x)dx < \varepsilon .$$

Наслідок. Нехай в області $D = [a,\infty) \times [c,d]$ визначено обмежену функцію $\varphi(x,y)$ яка при кожному $y \in [c,d]$ 171нтегрована на кожному відрізку $[a,R]$. Тоді, якщо збігається інтеграл

$$\int_a^\infty |h(x)|dx,$$

то абсолютно і рівномірно по $y \in [c,d]$ збігається інтеграл

$$\int_a^\infty \varphi(x,y)h(x)dx\,.$$

Доведення. Треба в ознаці Вейєрштраса покласти

$$f(x,y)\le \varphi(x,y)h(x), g(x)=M\left|h(x)\right|, M=\sup_D\left|\varphi(x,y)\right|.$$

Зауваження. З невласним інтегралом можна зв'язати функціональний ряд $\left(a_1=a\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x,y)dx\,.$$

Якщо при довільному розбитті інтервалу $[a,\infty)$ точками $a=a_1<a_2<...<a_n<...$ цей ряд збігається (рівномірно збігається), то так само збігається невласний інтеграл. Застосовуючи це зауваження, можна отримати ознаки рівномірної збіжності невласних інтегралів.

Далі будемо вважати, що всі функції визначені в області $D=[a,\infty)\times[c,d]$.

Теорема 5. 2.3. Ознака Абеля. Невласний інтеграл $\int_a^\infty f(x,y)g(x)dx$ збігається рівномірно по $y\in[c,d]$, якщо

1) інтеграл $\int_a^\infty f(x,y)dx$ збігається рівномірно по $y\in[c,d]$;

2) функція $g(x)$ монотонна і обмежена на $[a,\infty)$.

Теорема 5. 2.4. Ознака Діріхлє. Невласний інтеграл $\int_a^\infty f(x,y)g(x)dx$ збігається рівномірно по $y\in[c,d]$, якщо

1) $\left|\int_a^A f(x,y)dx\right|\le M \;\; \forall A\ge a$

2) функція $g(x)$ монотонно прямує до нуля, якщо $x\to\infty$.

Теорема 5. 2.5 (ознака Діні). Нехай функція $f(x,y)$ неперервна і невід'ємна на $D=[a,\infty)\times[c,d]$, а функція $I(y)=\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ неперервна на $[c,d]$. Тоді цей інтеграл збігається рівномірно на відрізку $[c,d]$.

Справедливість теореми випливає з теореми Діні для функціональних рядів.

Теорема 5. 2.6. Нехай функція $f(x,y)$ неперервна на $D=[a,\infty)\times[c,d]$, а інтеграл $I(y)=\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ рівномірно збігається на $[c,d]$. Тоді цей інтеграл є неперервною функцією на цьому відрізку.

Теорема 5. 2.7. Нехай функція $f(x,y)$ і її частинна похідна $\frac{\partial f}{\partial y}$ неперервні на $D=[a,\infty)\times[c,d]$. Нехай при деякому $y\in[c,d]$ збігається інтеграл $I(y)=\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$, а інтеграл $J(y)=\int\limits_a^\infty \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx$ рівномірно збігається на $[c,d]$. Тоді інтеграл $I(y)$ збігається рівномірно по $y\in[c,d]$, ця функція диференційовна по y, і її похідна знаходится за формулою

$$\frac{dI(y)}{dy}=J(y)=\int\limits_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx.$$	(5. 2.2)

Справедливість цих фактів випливає, як було пояснено в попередньому зауваженні, з теорії функціональних рядів.

Теорема 5. 2.8 (Фубіні). Нехай виконано умови теореми 2.6. Тоді інтеграл (5. 2.1) $I(y)=\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ можна інтегрувати по параметра y по відрізку $[c,d]$ і справедлива формула

$\int\limits_c^d I(y)dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^\infty f(x,y)dx \right) dy \equiv \int\limits_c^d dy \int\limits_a^\infty f(x,y)dx = \int\limits_a^\infty dx \int\limits_c^d f(x,y)dy.$	(5. 2.3)

Доведення. З теореми 2.6 випливає неперервність по y інтегралу (5. 2.1), а значить, його інтегрованість. Доведемо рівність (5. 2.3).

Завдяки рівномірній збіжності інтеграла (5. 2.1)

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A = A(\varepsilon) > a \forall R > A \Rightarrow \left| \int\limits_R^\infty f(x,y) \right| < \frac{\varepsilon}{b-a} \; \forall y \in [c,d].$$

Зафіксуємо $R > A$ і скористаємось теоремою Фубіні для випадку обмежених проміжків інтегрування:

$$\int\limits_c^d I(y)dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^R f(x,y)dx + \int\limits_R^\infty f(x,y)dx \right) dy = \int\limits_a^R dx \int\limits_c^d f(x,y)dy + \int\limits_c^d dy \int\limits_R^\infty f(x,y)dx$$

З попередньої оцінки для залишку невласного інтеграла випливає нерівність

$$\left| \int\limits_c^d I(y)dy - \int\limits_a^R dx \int\limits_c^d f(x,y)dy \right| < \varepsilon,$$

яка й доводить теорему.

Наслідок. Нехай $f(x,y)$ неперервна і невід'ємна на вказаній області визначення, а $I(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ - неперервна функція на $[c,d]$. Тоді справедлива формула (5. 2.3).

Доведення миттєво випливає з теореми Діні.

Можна розглядати функцію f, визначену в області $D = [a,\infty) \times [c,\infty)$.

Теорема 5. 2.9. Нехай функція f визначена в області $D = [a,\infty) \times [c,\infty)$, неперервна в ній і невід'ємна. Нехай інтеграли

$$I(y)=\int_a^{\infty} f(x,y)dx,\ J(x)=\int_c^{\infty} f(x,y)dy$$

неперервні при $y\ge c,\ x\ge a$. Нехай один з наступних інтегралів збігається:

$$\int_c^{\infty} I(y)dy=\int_c^{\infty} dy\int_a^{\infty} f(x,y)dx$$

або

$$\int_a^{\infty} J(x)dx=\int_a^{\infty} dx\int_c^{\infty} f(x,y)dy\,.$$

Тоді із збіжності одного з них випливає збіжність іншого і їхня рівність.

Доведення. Нехай збігається інтеграл $I(y)=\int_a^{\infty} f(x,y)dx$. Для доведення твердження теореми треба довести, що

$\forall\varepsilon>0\exists A=A(\varepsilon)>a\forall R_1>A\Rightarrow\left\lvert\int_c^{\infty} I(y)dy-\int_a^{R_1} J(x)dx\right\rvert<\varepsilon.$	(5. 2.4)

З попередньої теореми у випадку одного обмеженого проміжку випливає:

$$\int_a^{R_1} J(x)dx=\int_a^{R_1} dx\int_c^{\infty} f(x,y)dy=\int_c^{\infty} dy\int_a^{R_1} f(x,y)dx\,.$$

Використовуючи цю рівність, оцінимо різницю (5. 2.4):

$$\int_c^{\infty} I(y)dy-\int_a^{R_1} J(x)dx=\int_c^{\infty} dy\int_a^{\infty} f(x,y)dx-\int_c^{\infty} dy\int_a^{R_1} f(x,y)dx=\int_c^{\infty} dy\int_{R_1}^{\infty} f(x,y)dx=$$

$$=\int_c^{\infty} dy\int_{R_1}^{\infty} f(x,y)dx=\int_c^{R_2} dy\int_{R_1}^{\infty} f(x,y)dx+\int_{R_2}^{\infty} dy\int_{R_1}^{\infty} f(x,y)dx.$$

Дослідимо два одержаних інтеграли. Із збіжності інтеграла $\int\limits_c^{\infty} I(y)dy$ випливає,

що $\forall\varepsilon>0\exists R_2>c\Rightarrow 0\le\int\limits_{R_2}^{\infty} I(y)dy<\frac{\varepsilon}{2}\Leftrightarrow 0\le\int\limits_{R_2}^{\infty} dy\int\limits_a^{\infty} f(x,y)dx<\frac{\varepsilon}{2}.$

Звідси і з невід'ємності $f(x,y)$ можна зробити висновок, що при вибраному $R_2>c$ і довільному $R_1>a$ має місце оцінка для другого інтеграла суми

$$0\le\int\limits_{R_2}^{\infty} dy\int\limits_{R_1}^{\infty} f(x,y)dx<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Зафіксуємо тепер $R_2>c$ і скористаємось незалежністю одержаної оцінки від $R_1>a$. В області $[a,\infty)\times[c,R_2]$ виконано всі умови ознаки Діні рівномірної збіжності невласних інтегралів. Тому

$$\forall\varepsilon>0\exists A=A(\varepsilon)>a\,\forall R_1>A\Rightarrow\left|\int\limits_{R_1}^{\infty} f(x,y)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2(R_2-c)}\ \forall y\in[c,d].$$

Отже, $0\le\int\limits_c^{R_2} dy\int\limits_{R_1}^{\infty} f(x,y)dx<\frac{\varepsilon}{2(R_2-c)}\int\limits_c^{R_2} dy=\frac{\varepsilon}{2}.$

Таким чином, одержали оцінку першого інтеграла досліджуваної суми. Тим самим доведення теореми закінчено.

Зауваження. Всю цю теорію можна викласти для невласних інтегралі другого роду, що залежать від параметра. Читач легко зробить це самостійно.

Контрольні питання.

1). Сформулювати умови, при яких у власних і невласних інтегралах, що залежать від параметра, можна переходити до границі за цим параметром, інтегрувати, диференціювати.

2). Сформулювати теорему Фубіні.

5. 3. Застосування теорії інтегралів, що залежать від параметру до обчислення деяких невласних інтегралів

1). **Інтеграл Діріхлє.** Так називається інтеграл

$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx.$	(5. 3.1)

Нехай поки що $a=1$.

Дослідимо на рівномірну збіжність по $\alpha \in [0,\infty)$ невласний інтеграл

$I(\alpha)=\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx.$	(5. 3.2)

Тут штучно в підінтегральну функцію було введено так званий «множник збіжності».

Як це часто роблять, довизначимо у нулі функцію $\frac{\sin x}{x}$ її граничним значенням, що дорівнює одиниці. Нова функція буде неперервною на $[0,\infty)$.

З теорії невизначених інтегралів відомо значення:

$$\int e^{-\alpha x} \sin x dx = -\frac{e^{-\alpha x}\left(\alpha \sin x + \cos x\right)}{1+\alpha^2} + C \equiv \Phi(\alpha, x) + C.$$

Легко бачити, що в даній області первісна обмежена:

$$\left|\Phi(\alpha, x)\right| \le \frac{1+\alpha}{1+\alpha^2} \le 2.$$

Нехай $R>0$. Зробимо оцінку наступного інтегралу:

$$\left|\int_R^{\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx\right| \le \left|\frac{\Phi(\alpha,x)}{x}\right|_R^{\infty}\right| + \left|\int_R^{\infty}\frac{\Phi(\alpha,x)}{x^2}dx\right| \le \frac{|\Phi(\alpha,R)|}{R} + \int_R^{\infty}\frac{|\Phi(\alpha,x)|}{x^2}dx.$$

З урахуванням одержаної раніше оцінки первісної будемо мати оцінку

$$\left|\int_R^{\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx\right| \le \frac{2}{R} + 2\int_R^{\infty}\frac{1}{x^2}dx = \frac{4}{R}.$$

Очевидно,

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx = \int_0^{\delta} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx + \int_{\delta}^{\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx .$$

Виберемо $\delta>0$ настільки малим, щоб, завдяки неперервності підінтегральної функції при довільному $\alpha \ge 0$ справджувалась оцінка

$$\int_0^{\delta} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx \le \int_0^{\delta}\frac{\sin x}{x}dx < \frac{\varepsilon}{2},$$

а потім, оскільки δ зафіксоване, другий інтеграл буде збігатись рівномірно по $\alpha \ge 0$. Тому за теоремою 2.7 можна перейти до границі під інтегралом (5. 3.2):

$$\lim_{\alpha\to 0} I(\alpha) = \lim_{\alpha\to 0}\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx = \int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx \equiv I.$$	(5. 3.3)

Застосовуючи теорему 2.7 про диференційовність по параметра інтегралу, що залежить від параметра, дослідимо на рівномірну збіжність по $\alpha \in [0,\infty)$ інтегралу від формально продиференційованої по α функції

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x dx.$$

Зафіксуємо $\delta > 0$. Тоді при $\alpha \ge \delta$ інтеграл збігається абсолютно і рівномірно за ознакою порівняння. Отже, за теоремою про диференціювання за параметром інтегралу, що залежить від параметра, похідна по α, $\alpha \ge \delta > 0$ від інтеграла (5. 3.2) дорівнює інтегралу від похідної підінтегральної функції. Звідси одержуємо:

$$I'(\alpha) = -\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x\, dx = \left.\frac{e^{-\alpha x}\left(\alpha \sin x + \cos x\right)}{1+\alpha^2}\right|_0^\infty = -\frac{1}{1+\alpha^2}.$$

Тепер значення інтегралу (5. 3.2) знайдемо інтегруванням одержаної рівності:

$$\int_\alpha^\infty I'(\beta)\, d\beta = I(\infty) - I(\alpha) = -\int_\alpha^\infty \frac{1}{1+\beta^2}\, d\beta = -\left. arctg\beta\right|_\alpha^\infty = -\frac{\pi}{2} + arctg\alpha.$$

Зауважимо, що з вигляду інтегралу (5. 3.2) випливає існування його границі

$$I(\infty) = \lim_{\beta\to\infty} I(\beta) = 0.$$

Остаточно, $I(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2} - arctg\alpha$, $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$.

Розглянемо тепер інтеграл $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}dx$ і зробимо в ньому заміну $y = ax$, зауваживши, що

$\forall a > 0, x: 0 \to \infty \Rightarrow y = ax: 0 \to \infty; \forall a < 0, x: 0 \to \infty \Rightarrow y = ax: 0 \to -\infty$.

Отже, $\forall a > 0$ $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}dx = \int_0^\infty \frac{\sin y}{y}dy = \frac{\pi}{2}$,

$$\forall a<0\ \int_0^{\infty}\frac{\sin ax}{x}dx=\int_0^{-\infty}\frac{\sin y}{y}dy=-\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin y}{y}dy=-\int_0^{\infty}\frac{\sin y}{y}dy=-\frac{\pi}{2}.$$

При перетвореннях ми скористались парністю підінтегральної функції.

Об’єднуючи всі випадки, приходимо до результату:

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin ax}{x}dx=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} a.$$	(5. 3.4)

Цей інтеграл називається інтегралом Діріхлє.

Застосування інтегралу Діріхлє для обчислення деяких інтегралів

а). $\int_0^{\infty}\frac{\sin ax\cos bx}{x}dx,\ a>0, b>0$. Застосовуючи елементарні перетворення, одержимо:

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin ax\cos bx}{x}dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\infty}\frac{\sin(a+b)x+\sin(a-b)x}{x}dx\right)=\frac{\pi}{4}\left(\operatorname{sgn}(a+b)+\operatorname{sgn}(a-b)\right)=$$

$$=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & b<a,\\ \frac{\pi}{4}, & b=a,\\ 0, & b>a.\end{cases}$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin ax\cos bx}{x}dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & b<a,\\ \frac{\pi}{4}, & b=a,\\ 0, & b>a.\end{cases}$$	(5. 3.5)

b). $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax \sin bx}{x^2} dx,\ a > 0, b > 0$.

Застосовуючи елементарні перетворення і інтегрування за частинами, одержимо:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax \sin bx}{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\cos(a-b)x - \cos(a+b)x}{x^2} dx =$$

$$-\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right) d\frac{1}{x} = -\frac{1}{2} \left(\left. \frac{\cos(a-b)x - \cos(a+b)x}{x} \right|_0^{\infty} + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\infty} \frac{(a-b)\sin(a-b)x - (a+b)\sin(a+b)x}{x} dx \right) =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left((a+b)\operatorname{sgn}(a+b) - (a-b)\operatorname{sgn}(a-b)\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} b,\ 0 < b \le a, \\ \frac{\pi}{2} a,\ b \ge a > 0. \end{cases}$$

Остаточно:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} b,\ 0 < b \le a, \\ \frac{\pi}{2} a,\ b \ge a > 0. \end{cases}$$	(5. 3.6)

2). **Інтеграл Ейлера-Пуасона.**

Покажемо, що

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$	(5. 3.7)

Для зручності перепишемо його у вигляді $I=\int_0^\infty e^{-u^2}du$ і введемо заміну:

$u=xy, y>0, du=ydx$.

Маємо: $\int_0^\infty e^{-u^2}du=y\int_0^\infty e^{-(yx)^2}dx$. Помножимо другий інтеграл на e^{-y^2} , проінтегруємо одержаний вираз по y на інтервалі $(0,\infty)$

$$\int_0^\infty ye^{-y^2}dy\int_0^\infty e^{-(yx)^2}dx=\int_0^\infty e^{-y^2}dy\int_0^\infty e^{-(yx)^2}d(yx)=\int_0^\infty e^{-y^2}dy\int_0^\infty e^{-u^2}du=I^2$$

Поміняємо порядки інтегрування в повторному інтегралі. Законність цієї дії доведемо пізніше:

$$I^2=\int_0^\infty ye^{-y^2}dy\int_0^\infty e^{-(yx)^2}dx=\int_0^\infty dy\int_0^\infty ye^{-\left(1+x^2\right)y^2}dx=\int_0^\infty dx\int_0^\infty ye^{-\left(1+x^2\right)y^2}dy=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}.$$

Отже, $I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$

Тепер законність заміни порядків інтегрування в повторному інтегралі законна за теоремою 2.9. Дійсно, умови теореми виконано: підінтегральна функція невід’ємна, функція

$$\int_0^\infty ye^{-\left(1+x^2\right)y^2}dy=\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}$$

неперервна при $x\geq 0$, функція

$$\int_0^\infty ye^{-\left(1+x^2\right)y^2}dx=e^{-y^2}I$$

неперервна при $y>0,$ і повторний інтеграл $\int_0^\infty ye^{-y^2}dy\int_0^\infty e^{-(yx)^2}dx=I^2$ збігається.

Узагальнимо результат, знайшовши інтеграл $\int_0^\infty e^{-ax^2}dx,\ a>0.$

Зробимо заміну: $t=\sqrt{a}x,\ dx=\dfrac{dt}{\sqrt{a}}\Rightarrow\int_0^\infty e^{-ax^2}dx=\dfrac{1}{\sqrt{a}}\int_0^\infty e^{-t^2}dt=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}.$ Отже,

$\int_0^\infty e^{-ax^2}dx=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}.$	(5. 3.8)

Цей інтеграл теж називається інтегралом **Ейлера-Пуасона.**

Задачі, пов'язані з інтегралом Ейлера-Пуасона

а). Диференціювання (5. 3.8).

Очевидно, інтеграл (5. 3.8) припускає диференціювання за параметром довільну кількість разів. Маємо після першого диференціювання:

$$\frac{d}{da}\left(\int_0^\infty e^{-ax^2}dx\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{d\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)}{da}\Rightarrow\int_0^\infty x^2e^{-ax^2}dx=\frac{1}{2^2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Після другого диференціювання після спрощень:

$$\int_0^\infty x^{2\cdot 2}e^{-ax^2}dx=\frac{3!!}{2^{2+1}a^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

За індукцією одержуємо формулу:

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}x^{2n}dx=\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$	(5. 3.9)

b).

$$I(\beta)=\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\cos\beta x dx,\ \alpha=const>0.$$	(5. 3.10)

Його збіжність випливає із збіжності інтеграла Ейлера-Пуасона. Підінтегральна функція неперервна по своїх змінних $(x,\beta)\in[0,\infty)\times(-\infty,\infty)$. За мажорантою ознакою інтеграл збігається рівномірно при $\beta\in(-\infty,\infty)$. Формально продиференціюємо його по β:

$$\frac{dI(\beta)}{d\beta}=-\int_0^\infty xe^{-\alpha x^2}\sin\beta x dx.$$	(5. 3.11)

Пояснимо справедливість цієї дії.

Як вже зазначалось, підінтегральна функція в (5. 3.9) неперервна у вказаній області, в цій області неперервна також підінтегральна функція в тільки що одержаному інтегралі.

Обидва інтеграли (5. 3.10), (5. 3.11) рівномірно збігаються при $\beta\in(-\infty,\infty)$ завдяки мажорант ній ознаці.

Отже, законність здійсненого диференціювання випливає з теореми 2.7.

Для знаходження інтегралу (5. 3.8) проінтегруємо його за частинами:

$$\frac{dI(\beta)}{d\beta}=-\int_0^\infty xe^{-\alpha x^2}\sin\beta x dx=\frac{1}{2\alpha}\left(e^{-\alpha x^2}\sin\beta x\Big|_0^\infty-\beta\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\cos\beta x dx\right)=-\frac{\beta}{2\alpha}I(\beta).$$

Звідси $\frac{dI(\beta)}{I(\beta)} = -\frac{1}{2\alpha}\beta d\beta$. Інтегруючи це диференціальне рівняння по β, одержимо:

$$\int_0^\beta \frac{dI(\gamma)}{I(\gamma)} = -\frac{1}{2\alpha}\int_0^\beta \gamma d\gamma \Rightarrow \ln\frac{I(\beta)}{I(0)} = -\frac{1}{4\alpha}\beta^2 \Rightarrow I(\beta) = I(0)e^{-\frac{1}{4\alpha}\beta^2} .$$

Згадавши, що $I(0) = \int_0^\infty e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$, одержимо остаточно:

$$I(\beta) = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\cos\beta x dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{1}{4\alpha}\beta^2} .$$	(5. 3.12)

c).

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(ax^2+2bx+c\right)}dx,\ a > 0.$$	(5. 3.13)

Виділимо повний квадрат в квадратному тричлені у показнику і зробимо заміну

$t = x + \frac{b}{a}, dx = dt$:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(x^2+2\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{a}\right)^2+c-\frac{b^2}{a^2}\right)}dx = e^{\frac{b^2-ac}{a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2}dt = e^{\frac{b^2-ac}{a}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

d).

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\left(a_1x^2 + b_1x + c_1\right)e^{-\left(ax^2+2bx+c\right)}dx,\ a > 0.$$	(5. 3.14)

Радимо читачу зробити цей приклад самостійно. Дамо деякі вказівки. По-перше, треба, як і в минулому прикладі, виділити повний квадрат у показнику, а потім ввести таку саму заміну. В результаті інтеграл перетвориться в лінійну комбінацію інтегралів, серед яких потребує пояснення тільки $I_2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}t^2e^{-at^2}dt=2\int\limits_0^{\infty}t^2e^{-at^2}dt$. Для його обчислення застосуємо формулу інтегрування за частинами для інтеграла Ейлера-Пуасона:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}=\int\limits_0^{\infty}e^{-at^2}dt=te^{-at^2}\Big|_0^{\infty}+2\int\limits_0^{\infty}t^2e^{-at^2}dt=I_2.$$

е).

$I(a)=\int\limits_0^{\infty}e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}dx, a>0.$	(5. 3.15)

Зобразимо цей інтеграл у вигляді суми:

$I(a)=\int\limits_0^{\infty}e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}dx=\int\limits_0^{1}e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}dx+\int\limits_1^{\infty}e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}dx$. В першому зробимо заміну

$$y=\frac{1}{x}\Rightarrow x=\frac{1}{y}\Rightarrow dx=-\frac{1}{y^2}dy,\ x:0\to 1\Rightarrow y:\infty\to 1.$$

В другому для зручності замість x будемо писати y. Тоді

$$I(a)=\int\limits_1^{\infty}e^{-\left(a^2y^2+\frac{1}{y^2}\right)}\frac{dy}{y^2}+\int\limits_1^{\infty}e^{-\left(y^2+\frac{a^2}{y^2}\right)}dy.$$

Підинтегральні функції в одержаних інтегралах неперервні і неперервно диференційовні по a. При $a\ge\delta>0$ інтеграли від продиференційованих по a підінтегральних функцій рівномірно відносно параметра a збігаються завдяки мажорантній ознаці. Тому вони $I(a)$ неперервно диференційовна за параметром і можна застосувати правило диференціювання Лейбниця:

$$\frac{dI(a)}{da}=\int_1^\infty \frac{d}{da}e^{-\left(a^2y^2+\frac{1}{y^2}\right)}\frac{dy}{y^2}+\int_1^\infty \frac{d}{da}e^{-\left(y^2+\frac{a^2}{y^2}\right)}dy=-2a\left(\int_1^\infty e^{-\left(a^2y^2+\frac{1}{y^2}\right)}dy+\int_1^\infty e^{-\left(y^2+\frac{a^2}{y^2}\right)}\frac{dy}{y^2}\right).$$

Якщо, знову-таки, в першому інтегралі зробити заміну

$$x=\frac{1}{y}\Rightarrow y=\frac{1}{x}\Rightarrow dy=-\frac{1}{x^2}dx,\ y:1\to\infty\Rightarrow x:1\to 0,$$

а в другому замість y писати x, одержимо:

$$\frac{dI(a)}{da}=-2a\left(\int_0^1 e^{-\left(a^2x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\frac{dx}{x^2}+\int_1^\infty e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\frac{dx}{x^2}\right)=-2a\int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\frac{dx}{x^2}.$$

Якщо в початковому інтегралі (5. 3.15) зробити заміну $x=\frac{a}{y}$, то прийдемо до нового його вигляду:

$$I(a)=a\int_0^\infty e^{-\left(y^2+\frac{a^2}{y^2}\right)}\frac{dy}{y^2}.$$

Порівнюючи $I(a)$ з $\frac{dI(a)}{da}$, приходимо до співвідношення, яке є диференціальним рівнянням зі звичайними похідними першого порядку:

$$\frac{dI(a)}{da}=-2I(a)\Rightarrow\frac{dI(a)}{I(a)}=-2da.$$

З (5. 3.15) випливає: $I(0)=\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Це дає змогу взяти визначений інтеграл від обох частин отриманого диференціального рівняння, застосовуючи формулу Ньютона-Лейбниця:

$$\int_0^a\frac{dI(t)}{I(t)}=-2\int_0^a dt\Rightarrow\ln\frac{I(a)}{I(0)}=-2a\Rightarrow I(a)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2a},a\ge 0..$$

Зауважимо, що завдяки парності підінтегральної функції відносно a від умови невід'ємності цього параметра можна відмовитись. Тоді, очевидно, приходимо до відповіді

$$I(a)=\int_0^{\infty} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2\lvert a\rvert},\ a\in(-\infty,\infty).$$	(5. 3.14)

4). **Інтеграли Френеля** $\int_0^{\infty}\sin x^2 dx, \int_0^{\infty}\cos x^2 dx$.

Зробимо заміну зразу у двох інтегралах: $t=x^2, dx=\dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$. В результаті

прийдемо до їхніх записів у новій формі:

інтегралах: $\int_0^{\infty}\sin x^2 dx=\dfrac{1}{2}\int_0^{\infty}\dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}dt,\ \int_0^{\infty}\cos x^2 dx=\dfrac{1}{2}\int_0^{\infty}\dfrac{\cos t}{\sqrt{t}}dt$.

Згідно з (5. 3.8) замінимо вираз $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ рівним йому інтегралом:

$\dfrac{1}{\sqrt{t}}=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-tu^2}du$:

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\sin t\,dt\int_0^{\infty}e^{-tu^2}du.$$

Легко бачити, що перестановка порядків інтегрування привела б до остаточної відповіді, але її обґрунтування виявляється досить складним. Тому застосуємо «множник збіжності» $e^{-kt}, k>0$.з Тоді перестановка порядків інтегрування легко обгрунтовується з застосуванням теореми Фубіні:

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} e^{-kt} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-kt} \sin t \, dt \int_0^\infty e^{-tu^2} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty du \int_0^\infty e^{-\left(k+u^2\right)t} \sin t dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{du}{1+\left(k+u^2\right)^2}.$$

Підінтегральна функція в $\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} e^{-kt} dt$ неперервна в області

$\left(t,k\right) \in [0,\infty) \times [0,\infty)$, він збігається рівномірно в області $k \in [0,\infty)$, тому цей інтеграл є неперервною функцією від $k \in [0,\infty)$. Значить, можна перейти до границі за теоремою 2.7 при $k \to 0$:

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{du}{1+u^4}.$$

Зображуючи підінтегральний вираз у останньому інтегралі у вигляді суми елементарних дробів після нескладних перетворень одержуємо:

$$\int_0^\infty \frac{du}{1+u^4} = \left(\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2}+1}{x^2 - x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(arctg\left(x\sqrt{2}+1 \right) + arctg\left(x\sqrt{2}-1 \right) \right) \right) \Bigg|_0^\infty = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

І в результаті

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Аналогічним чином доводиться, що другий інтеграл Френеля має те ж саме значення. Остаточно:

$\int_0^\infty \sin x^2 dx = \int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$	(5. 3.16)

7). **Інтеграл Фрулані**

Так називається інтеграл при $0 < a < b$

$$\int_0^{\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx.$$	(5. 3.17)

Розрізняють три випадки:

a). f неперервна на $[0, \infty)$ і має скінченну границю на нескінченності: $f(\infty) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

b). Не існує скінченної границі функції f при $x \to \infty$, але збігається інтеграл $\int_A^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx,\ A > 0$.

c). Не існує скінченної границі функції f при $x \to 0$, але збігається інтеграл $\int_0^{A} \frac{f(x)}{x} dx,\ A < \infty.$

Розглянемо кожен з цих випадків.

a). За означенням невласного інтегралу даний інтеграл можна наближати інтегралами $\int_\delta^{A} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$ при $\delta \to 0, A \to \infty.$ Маємо:

$$\int_\delta^{A} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_\delta^{A} \frac{f(ax)}{x} dx - \int_\delta^{A} \frac{f(bx)}{x} dx.$$

В першому з них зробимо заміну

$$z = ax : a\delta \to aA,\ x : \delta \to A, \frac{dx}{x} = \frac{dz}{z}.$$

В другому –

$$z = bx : b\delta \to bA,\ x : \delta \to A, \frac{dx}{x} = \frac{dz}{z}.$$

В результаті одержимо:

$$\int_{\delta}^{A}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_{a\delta}^{aA}\frac{f(z)}{z}dz-\int_{b\delta}^{bA}\frac{f(z)}{z}dz=\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(z)}{z}dz-\int_{aA}^{bA}\frac{f(z)}{z}dz.$$

Як вже було відзначено,

$$\int_{0}^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\lim_{\delta\to 0}\int_{a\delta}^{aA}\frac{f(z)}{z}dz-\lim_{A\to\infty}\int_{b\delta}^{bA}\frac{f(z)}{z}dz=\lim_{\delta\to 0}\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(z)}{z}dz-\lim_{A\to\infty}\int_{aA}^{bA}\frac{f(z)}{z}dz.$$

Застосовуючи для останніх двох інтегралів теорему про середнє, одержимо:

$$\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(z)}{z}dz=f(\xi)\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{dz}{z}=f(\xi)\ln\frac{b}{a}.$$

Аналогічно

$$\int_{aA}^{bA}\frac{f(z)}{z}dz=f(\eta)\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{dz}{z}=f(\eta)\ln\frac{b}{a}.$$

Очевидно, при $\delta\to 0, A\to\infty$ відповідно $\xi\to 0,\eta\to\infty.$ В результаті отримаємо:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\left(\lim_{\delta\to 0}f(\xi)-\lim_{A\to\infty}f(\eta)\right)\ln\frac{b}{a}=\left(f(0)-f(\infty)\right)\ln\frac{b}{a}.$$

Остаточно:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\left(f(0)-f(\infty)\right)\ln\frac{b}{a}.$$	(5. 3.18)

b). В цьому випадку не вимагається існування скінченної границі функції при $x\to\infty$, але вимагається, щоб збігався інтеграл $\int_{A}^{\infty}\frac{f(z)}{z}dz.$

Із збіжності інтегралу випливає: $\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_{aA}^{bA}\frac{f(z)}{z}dz=0.$ Отже, попередній аналіз приводить до формули

$$\int\limits_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(z)}{z}dz=f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

Остаточно

$$\int\limits_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\ln\frac{b}{a}.$$	(5. 3.19)

c). Не передбачається існування скінченної границі функції при $x\to 0,$ але вимагається, щоб збігався інтеграл $\int\limits_0^A\frac{f(z)}{z}dz\ \left(0<A<\infty\right).$

Міркування, аналогічні попереднім, доводять справедливість формули

$$\int\limits_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(+\infty)\ln\frac{a}{b}.$$	(5. 3.20)

Приклади обчислення інтегралів Фрулані

a). Застосуємо формулу (5. 3.19) до обчислення наступного інтегралу:

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x}dx=\ln\frac{a}{b}.$$

Неважко впевнитись в тому, що всі умови для застосування цієї формули виконано:

b). Перевіривши, що всі умови для застосування формули (5. 3.20) виконані, обчислимо інтеграл $\int\limits_0^{\infty}\frac{\cos bx-\cos ax}{x}dx=\ln\frac{a}{b}$.

Кілька прикладів знаходження значень деяких інтегралів, що залежать від параметра

Приклад 01. Відомо: $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{a+x^2}=\frac{\pi}{2\sqrt{a}}$, $a>0$.

Очевидно, цей інтеграл припускає диференціювання за параметром довільну кількість разів. Маємо після першого диференціювання:

$$\frac{d}{da}\left(\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{a+x^2}\right)=\frac{\pi}{2\sqrt{a}}\frac{da^{-\frac{1}{2}}}{da}\Rightarrow-\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{\left(a+x^2\right)^2}=-\frac{\pi a^{-\frac{3}{2}}}{2^2},$$

Звідки

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{\left(a+x^2\right)^2}=\frac{\pi a^{-\frac{3}{2}}}{2^2}=\frac{\pi}{2^2a\sqrt{a}};$$

Продовжуючи диференціювання, одержимо:

$$-2!\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{\left(a+x^2\right)^3}=-\frac{3!!\pi a^{-\frac{5}{2}}}{2^3}=-\frac{3!!\pi}{2^3a^2\sqrt{a}}\Rightarrow\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{\left(a+x^2\right)^3}=\frac{3!!\pi}{2^3(2!)a^2\sqrt{a}}=\frac{3!!\pi}{(4)!!a^2\sqrt{a}}.$$

За індукцією одержимо:

$\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{\left(a+x^2\right)^n}=\frac{1}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{a^n\sqrt{a}}.$	(5. 3.21)

Приклад 02. Відомо: $\int_0^1 x^{a-1}dx = \frac{1}{a},\ a > 0$.

Нехай $a \ge \delta > 0$. В цій області інтеграл припускає довільну кількість похідних за параметром. Маємо після першого диференціювання:

$$\int_0^1 x^{a-1}\ln x\, dx = -\frac{1}{a^2}.$$

Легко бачити, що після n – кратного диференціювання одержимо:

$$\int_0^1 x^{a-1}\ln^n x\, dx = (-1)^n \frac{n!}{a^{n+1}}.$$	(5. 3.22)

Приклад 02. Обчислити інтеграл $\int_0^\infty \frac{1-e^{-x}}{x}\cos x\, dx$.

Включимо його в сім'ю інтегралів

$$I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-\alpha x}}{x}\cos x\, dx,\ \alpha > 0.$$

Легко бачити, що цей інтеграл задовольняє умовам застосування правила Лейбниця – диференціювання за параметром:

$$\frac{d}{d\alpha} I(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos x dx = \frac{-\alpha\cos x + \sin x}{\alpha^2+1} e^{-\alpha x}\Big|_0^\infty = \frac{\alpha}{\alpha^2+1}.$$

Після інтегрування за параметром одержимо :

$$\int_0^\alpha \frac{d}{d\beta} I(\beta) d\beta = I(\alpha) - I(0) = \int_0^\alpha \frac{\beta}{1+\beta^2} d\beta = \frac{1}{2}\ln\left(1+\beta^2\right)\Big|_0^\alpha = \frac{1}{2}\ln\left(1+\alpha^2\right)\Big|.$$

Враховуючи, що $I(0)=0$, будемо мати:

$$I(\alpha)=\int_0^{\infty}\frac{1-e^{-\alpha x}}{x}\cos x\,dx=\frac{1}{2}\ln\left(1+\alpha^2\right).$$

Остаточно:

$$\int_0^{\infty}\frac{1-e^{-x}}{x}\cos x\,dx=\frac{1}{2}\ln 2=\ln\sqrt{2}.$$	(5. 3.23)

Контрольні питання

1). Сформулювати ідею методу диференціювання інтеграла за параметром з метою його обчислення.
2). Те ж саме запитання щодо інтегрування за параметром.

5.4. Функції (інтеграли) Ейлера

Будемо вивчати два інтеграли, що залежать від параметрів:

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}\left(1-x\right)^{\beta-1}dx$$	(5. 3.24)

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$	(5. 3.25)

Перший називається B-функцією, а другий - Γ-функцією Ейлера. Функціями Ейлера ці інтеграли запропонував назвати Лежандр.

З наших уявлень про збіжність невласних інтегралів зразу випливають умови (необхідні і достатні) збіжності кожного з інтегралів, а значить, області існування функцій Ейлера: область визначення B-функції - $\alpha > 0, \beta > 0$, Γ-функції - $\alpha > 0$.

Деякі властивості B-функції Ейлера

a). Симетричність

$$\mathrm{B}(\beta,\alpha) = \mathrm{B}(\alpha,\beta)$$	(5. 3.26)

Для доведення досить в інтегралі (5. 3.24) зробити заміну $x = 1 - t$.

b). Формула зниження.

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \frac{\alpha - 1}{\alpha + \beta - 1}\mathrm{B}(\alpha - 1,\beta),\ \alpha > 1.$$	(5. 3.27)

В результаті застосування формули інтегрування за частинами і деяких елементарних перетворень, одержимо:

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = -\frac{1}{\beta}\left(x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta}\Big|_0^1 - (\alpha-1)\int_0^1 x^{\alpha-2}(1-x)^{\beta}dx \right) =$$

$$= \frac{(\alpha-1)}{\beta}\int_0^1 x^{\alpha-2}(1-x)^{\beta}dx = \frac{(\alpha-1)}{\beta}\int_0^1 x^{\alpha-2}(1-x)(1-x)^{\beta-1}dx =$$

$$=\frac{(\alpha-1)}{\beta}\int_0^1 x^{\alpha-2}\left(1-x\right)^{\beta-1}dx-\frac{(\alpha-1)}{\beta}\int_0^1 x^{\alpha-1}\left(1-x\right)^{\beta-1}dx=$$

$$=\frac{(\alpha-1)}{\beta}\mathrm{B}(\alpha-1,\beta)-\frac{(\alpha-1)}{\beta}\mathrm{B}(\alpha,\beta),$$

звідки й випливає формула зниження.

Використовуючи властивість симетричності (5. 3.26), перепишемо цю формулу у вигляді

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\frac{\beta-1}{\alpha+\beta-1}\mathrm{B}(\alpha,\beta-1),\ \beta>1. \qquad (5.\ 3.27a)$$

Помітимо, що $\mathrm{B}(\alpha,1)=\frac{1}{\alpha}$, тому для натуральних значень n одержимо:

$$\mathrm{B}(\alpha,n)=\frac{n-1}{\alpha+n-1}\frac{n-2}{\alpha+n-2}\cdots\frac{n-\left(n-1\right)}{\alpha+n-\left(n-1\right)}\mathrm{B}(\alpha,1)=\frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+n-1)}.$$

Остаточно

$$\mathrm{B}(\alpha,n)=\frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+n-1)}. \qquad (5.\ 3.28)$$

В частинному випадку $m,n\in\mathbb{N}$ формула має вигляд:

$$\mathrm{B}(m,n)=\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}. \qquad (5.\ 3.28a)$$

с). Зображення B-функції Ейлера невласним інтегралом 1-го роду.

Зробимо заміну в (3.24):

$$x=\frac{y}{y+1}=1-\frac{1}{y+1}\Rightarrow 1-x=\frac{1}{y+1},\ x^{\alpha-1}\left(1-x\right)^{\beta-1}dx=\frac{y^{\alpha-1}}{\left(y+1\right)^{\alpha+\beta}}dy\ ,$$

$$x:0\to 1\Rightarrow y=\frac{1}{1-x}-1:0\to\infty.$$

В результаті

$\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}\left(1-x\right)^{\beta-1}dx=\int\limits_0^\infty \frac{y^{\alpha-1}}{\left(y+1\right)^{\alpha+\beta}}dy=\int\limits_0^\infty \frac{y^{\beta-1}}{\left(y+1\right)^{\alpha+\beta}}dy.$	(5. 3.29)

Зауважимо, що остання рівність випливає з властивості симетричності B - функції Ейлера.

Γ-функція Ейлера і її властивості

а). Диференційовність.

Формально диференціюючи *n* разів за правилом Лейбниця інтеграл $\Gamma(\alpha)=\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$, що задає $\Gamma-$функцію Ейлера, одержимо:

$\Gamma^{(n)}(\alpha)=\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x\,dx$	(5. 3.30)

Обгрунтуємо законність цієї дії.

З теорії границь функцій відомо, що при досить великих значеннях $x\ge R>1$ і обмежених значеннях $o<\alpha\le b$, b - будь-яке, $1\le b<\infty$ буде справджуватись оцінка $x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x\le e^{-\frac{1}{2}x}$. Тому інтеграл $\int\limits_R^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x\,dx$ за мажорантою ознакою буде збігатись рівномірно по α. При $0<x\le 1$ можна вибрати таке $\delta:1>\delta\ge 1-\alpha$, що буде виконуватись оцінка $\left|x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x\right|=\frac{e^{-x}\left|\ln^n x\right|}{x^{1-\alpha}}<\frac{1}{x^{\delta}}$, і інтеграл $\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x\,dx$ буде збігатись рівномірно по $\alpha \ge a = 1-\delta > 0$, $a > 0$ - будь-яке. Інтеграл $\int_1^R x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x\,dx$ власний, тому він теж збігається рівномірно по α. З цих міркувань робимо висновок, що інтеграл (3.30) рівномірно по α збігається на будь-якому проміжку $\alpha \in [a,b] \subset (0,\infty)$. Тим самим формулу диференціювання $\Gamma-$функції Ейлера доведено.

b). Рекурентна формула:

$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$	(5. 3.31)

Застосуємо формулу інтегрування за частинами:

$$\Gamma(\alpha+1)=\int_0^\infty x^{\alpha}e^{-x}dx=-x^{\alpha}e^{-x}\Big|_0^\infty+\alpha\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx=\alpha\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx=\alpha\Gamma(\alpha).$$

Помітимо, що $\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}dx=1$. Тоді, застосовуючи рекурентну формулу n разів, одержимо:

$\Gamma(n+1)=n!$	(5. 3.32)

З цієї формули випливає, що $\Gamma(2)=1$. Отже, на кінцях відрізка $[1,2]$ $\Gamma-$функція приймає однакові значення, тому за теоремою Ролля існує внутрішня точка $\xi \in (0,1)$ проміжку, в якій її похідна дорівнює нулю: $\Gamma'(\xi)=0$. З формули (3.30) бачимо, що друга похідна $\Gamma-$функції додатна, тому це точка мінімуму.

Цікаво також підрахувати значення $\Gamma -$функція при $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = \left\{ t = \sqrt{x}, \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dt, -x = -t^2 \right\} = 2\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{5. 3.33}$$

Задача. Для $n \in \mathbb{N}$ довести формулу $\Gamma\left(n + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}.$

с). **Формула Ейлера-Гауса**

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha} \frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+n-1)}. \tag{5. 3.34}$$

Введемо в інтегралі (5. 3.25) заміну:

$$x = \ln\frac{1}{u} = -\ln u \Rightarrow e^{-x} = u, dx = -\frac{1}{u}du; x: 0 \to \infty \Rightarrow u: 1 \to 0.$$

Маємо:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \int_0^1 \ln^{\alpha-1}\left(\frac{1}{u}\right) du. \tag{5. 3.35}$$

За допомогою диференціального числення легко показати, що на проміжку $u \in (0,1)$ послідовність $f_n(u) = n\left(1-u^{\frac{1}{n}}\right)$ монотонно зростаючи, прямує до функції $\ln\frac{1}{u}, n \to \infty$. Тоді за теоремою Діні збіжність рівномірна, і за теоремою 2.6 інтеграл від границі послідовності функцій дорівнює границі інтегралів від членів послідовності. Отже при $\alpha \ge 1$,

$$\int_0^1 \ln^{\alpha-1}\left(\frac{1}{u}\right)du = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha-1}\int_0^1\left(1-u^{\frac{1}{n}}\right)^{\alpha-1}du.$$

Зробимо заміну $u = v^n \Rightarrow du = nv^{n-1}dv, v = u^{\frac{1}{n}}$. В результаті отримаємо:

$$\int_0^1 \ln^{\alpha-1}\left(\frac{1}{u}\right)du = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\int_0^1 v^{n-1}\left(1-v\right)^{\alpha-1}dv = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\,\mathrm{B}(n,\alpha) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\,\mathrm{B}(\alpha,n) = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\,\frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+n-1)}.$$

Нагадаємо, що формулу (3.33) було доведено при $\alpha > 1$. Застосовуючи до функцій Ейлера рекурентні формули (3.27) і (3.31), доводимо справедливість (3.34) для всіх $\alpha > 0$.

d). **Формула доповнення (належить Ейлеру).**

Нехай $0 < \alpha < 1 \Rightarrow 0 < 1-\alpha < 1$. Значення $\alpha, 1-\alpha$ називають взаємно доповнювальними (до одиниці).

При даних умовах щодо α має місце формула (доповнення):

	(5. 3.36)

$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\dfrac{\pi}{\sin\pi\alpha}, 0<\alpha<1.$	

Для доведення застосуємо формули Ейлера-Гауса:

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=$$

$$=\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+n-1)}n^{1-\alpha}\frac{(n-1)!}{(1-\alpha)(2-\alpha)...(n-1-\alpha)(n-\alpha)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha\left(1+\frac{\alpha}{1}\right)\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)...\left(1+\frac{\alpha}{n-1}\right)}\frac{1}{\left(1-\frac{\alpha}{1}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)...\left(1-\frac{\alpha}{n-1}\right)}\frac{n}{n-\alpha}=$$

$$=\frac{1}{\alpha}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{\alpha^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{\alpha^2}{2^2}\right)...\left(1-\frac{\alpha^2}{(n-1)^2}\right)}.$$

Отже, при $0<\alpha<1$ одержано результат:

$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\dfrac{1}{\alpha}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1-\frac{\alpha^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{\alpha^2}{2^2}\right)...\left(1-\frac{\alpha^2}{(n-1)^2}\right)}.$	(5. 3.37)

В теорії рядів Фур'є буде одержано формулу:

$\sin(\pi\alpha)=\pi\alpha\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{\alpha^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{\alpha^2}{2^2}\right)...\left(1-\frac{\alpha^2}{(n-1)^2}\right)=\pi\alpha\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha^2}{n^2}\right).$	(5. 3.38)

Її застосування і доводить формулу доповнення.

Зазначимо, що за допомогою формули доповнення легко обчислюється вже відоме значення $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$. Дійсно,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)=\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}}=\pi\Rightarrow\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

Ще один невеличкий приклад:

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\pi\sqrt{2}.$$

е). **Зв'язок між** B **і** Γ **функціями Ейлера**

Доведемо формулу

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$	(5. 3.39)

Зауважимо, що при доведенні треба в одному місці пояснювати законність перестановки місцями двох повторних інтегралів, але ми пропустимо це досить кропітке доведення.

Зробимо заміну в інтегралі $\Gamma(\alpha)=\int\limits_0^\infty u^{\alpha-1}e^{-u}du=\{u=tx, du=tdx\}=t^\alpha\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-tx}dx.$

Введемо тепер заміну $t=1+y$:

$\Gamma(\alpha) = (1+y)^{\alpha}\int\limits_0^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-(1+y)x}dx.$ Поділимо обидві частини на множник, що стоїть перед інтегралом і зробимо заміну $\alpha \to \alpha+\beta$:

$\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{(1+y)^{\alpha+\beta}} = \int\limits_0^{\infty} x^{\alpha+\beta-1}e^{-x}e^{-yx}dx.$ Помножимо обидві частини рівності на $y^{\alpha-1}$:

$$\Gamma(\alpha+\beta)\frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}} = y^{\alpha-1}\int\limits_0^{\infty} x^{\alpha+\beta-1}e^{-x}e^{-yx}dx.$$

Проінтегруємо тепер обидві частини рівності по y з урахуванням рівності (5. 3.29) :

$$\Gamma(\alpha+\beta)\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \Gamma(\alpha+\beta)\int\limits_0^{\infty}\frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}dy = \int\limits_0^{\infty} y^{\alpha-1}dy\int\limits_0^{\infty} x^{\alpha+\beta-1}e^{-x}e^{-yx}dx.$$

Зауважимо, що обґрунтування перестановки порядків інтегрування в цьому місці легше проводити при умові $\alpha > 1,\ \beta > 1$, але ми цього робити не будемо і приймемо цей факт на віру. Маємо:

$$\Gamma(\alpha+\beta)\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \int\limits_0^{\infty} y^{\alpha-1}dy\int\limits_0^{\infty} x^{\alpha+\beta-1}e^{-x}e^{-yx}dx = \int\limits_0^{\infty} x^{\beta-1}e^{-x}dx\int\limits_0^{\infty}(xy)^{\alpha-1}e^{-xy}d(xy) =$$

$= \Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)$, звідки і випливає справедливість формули (3.39). Щоб пояснити її справедливість при $\alpha > 0,\ \beta > 0$, треба скористатись рекурентними співвідношеннями (5. 3.27), $(3.27)'$, (5. 3.31).

Приклади

a).

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\alpha-1}\varphi \cos^{\beta-1}\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}.$	(5. 3.40)

Доведення. Зробимо заміну $x=\sin^2\varphi \Rightarrow \cos^2\varphi = 1-x \Rightarrow dx = 2\sin\varphi\cos\varphi d\varphi$,

$$\sin^{\alpha-1}\varphi\cos^{\beta-1}\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\left(\sin^2\varphi\right)^{\frac{\alpha}{2}-1}\left(\cos^2\varphi\right)^{\frac{\beta}{2}-1}\left(2\sin\varphi\cos\varphi\right)d\varphi = \frac{1}{2}x^{\frac{\alpha}{2}-1}\left(1-x\right)^{\frac{\beta}{2}-1}dx.$$

Отже, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\alpha-1}\varphi \cos^{\beta-1}\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x^{\frac{\alpha}{2}-1}\left(1-x\right)^{\frac{\beta}{2}-1}dx = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}.$

Розглянемо частинний випадок:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\alpha-1}\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x^{\frac{\alpha}{2}-1}\left(1-x\right)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}.$$

b). $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}dx = \int\limits_0^1 \left(1-x^n\right)^{-\frac{1}{n}}dx = \left\{ y = x^n, x = y^{\frac{1}{n}}, dx = \frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1}dy \right\} =$

$$= \frac{1}{n}\int\limits_0^1 y^{\frac{1}{n}-1}\left(1-y\right)^{\left(1-\frac{1}{n}\right)-1}dx = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}.$$

Нехай треба розв’язати наступну задачу: знайти границю початкового інтегралу з умови. Треба відзначити, що функціональна послідовність під цим інтегралом не збігається рівномірно, тому немає підстави переходити до границі під інтегралом. Але завдяки отриманій формулі, користуючись першою важливою границею, зразу приходимо до відповіді:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}dx = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sin\frac{\pi}{n}} = 1.$$

c). **Формула Лежандра**

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Gamma(2a)$$	(5. 3.41)

Для доведення розглянемо $B(a,a) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{a-1}dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right)^{a-1}dx =$

$$= 2\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right)^{a-1}dx =$$

$$\left\{\frac{1}{2}-x = \frac{1}{2}\sqrt{t} \Rightarrow x: 0 \to \frac{1}{2} \Rightarrow t: 1 \to 0,\ dx = -\frac{1}{4}t^{-\frac{1}{2}}dt, \left(\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right) = \frac{1}{4}(1-t)\right\}.$$

Звідси

$$B(a,a) = \frac{1}{2^{2a-1}}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}-1}(1-t)^{a-1}dt = \frac{1}{2^{2a-1}}B\left(\frac{1}{2},a\right).$$

Використання формули (5. 3.39) доводить (5. 3.41).

d). **Інтеграл Раабе.**

	(5. 3.42)

$$R_0=\int_0^1 \ln\Gamma(\alpha)d\alpha .$$	

Інтеграл існує, оскільки завдяки рекурентному співвідношенню $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)\Rightarrow\ln\Gamma(\alpha)=\ln\Gamma(\alpha+1)-\ln a$, а інтеграл від правої частини, очевидно, існує.

Заміняючи в досліджуваному інтегралі $\alpha\to 1-\alpha$, впевнюємось в рівності

$$R_0=\int_0^1 \ln\Gamma(\alpha)d\alpha=\int_0^1 \ln\Gamma(1-\alpha)d\alpha .$$

Після додавання цих інтегралів одержуємо:

$$2R_0=\int_0^1 \ln\Gamma(\alpha)d\alpha+\int_0^1 \ln\Gamma(1-\alpha)d\alpha=\int_0^1 \ln\Gamma(\alpha)\ln\Gamma(1-\alpha)d\alpha=\int_0^1 \ln\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}d\alpha=$$

$$=\int_0^1\left(\ln\pi-\ln\sin\pi\alpha\right)d\alpha=\ln\pi-\int_0^1 \ln\sin\pi\alpha\, d\alpha .$$

Зробимо в останньому інтегралі заміну $x=\pi\alpha,\alpha:0\to 1\Rightarrow x:0\to\pi, d\alpha=\frac{dx}{\pi}$.

$$\int_0^1 \ln\sin\pi\alpha\, d\alpha=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\sin x\, dx .$$

Обчислимо інтеграл, який теж пов’язують з ім’ям Ейлера:

$$I=\int_0^{\pi}\ln\sin x\, dx=\int_0^{\pi}\ln 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx=\int_0^{\pi}\ln 2dx+\int_0^{\pi}\ln\sin\frac{x}{2}dx+\int_0^{\pi}\ln\cos\frac{x}{2}dx=$$

$$=\pi\ln 2+\int_0^{\pi}\ln\sin\frac{x}{2}dx+\int_0^{\pi}\ln\cos\frac{x}{2}dx=\left\{t=\frac{x}{2}:0\to\frac{\pi}{2},dx=2dt\right\}=$$

$$=\pi\ln 2+2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos t dt\right)=\pi\ln 2+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t dt .$$

Зауважимо, що підстановка $s=\frac{\pi}{2}-t$, доводить рівність інтегралів

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\,dt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos t\,dt$, що тільки що було використано.

З іншої сторони, $I=\int\limits_0^{\pi}\ln\sin x\,dx=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx.$ З рівності

$2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx=\pi\ln 2+4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\,dt$ одержуємо значення інтеграла, одержаного Ейлером:

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx=-\frac{\pi}{2}\ln 2$.	(5. 3.43)

Нарешті,

$$2R_0=2\int\limits_0^1\ln\Gamma(\alpha)d\alpha=\ln\pi-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\ln\sin x\,dx=\ln\pi-\frac{1}{\pi}\left(\pi\ln 2+4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\,dt\right)=$$

$$=\ln\pi-\left(\ln 2-2\ln 2\right)=\ln\pi+\ln 2=\ln 2\pi\ .$$

Відповідь: $R_0=\int\limits_0^1\ln\Gamma(\alpha)d\alpha=\ln\sqrt{2\pi}.$

е). Обчислити інтеграл $I_0=\int\limits_0^1\frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}dx,\ p\in(0,1).$

Розглянемо допоміжний інтеграл

$$I_\varepsilon = \int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{(1-x)^{1-\varepsilon}} dx = \int_0^1 \left(x^{p-1} - x^{-p}\right)(1-x)^{-1+\varepsilon} dx,\ \varepsilon \ge 0.$$

Функція $f(x,\varepsilon) = \dfrac{x^{p-1} - x^{-p}}{(1-x)^{\varepsilon}}, \varepsilon > 0$ неперервна по x на $[0,1)$. Вона має скінченну границю при $x \to 1$, в чому легко впевнитись, застосовуючи правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{(1-x)^{1-\varepsilon}} = \lim_{x\to 1} \frac{(p-1)x^{p-2} + px^{-(p+1)}}{-(1-\varepsilon)(1-x)^{-\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon - 1} \lim_{x\to 1}\left((p-1)x^{p-2} + px^{-(p+1)}\right)(1-x)^{\varepsilon} = 0.$$

Тому вона неперервна по x на $[0,1], 0 < \varepsilon < 1$. Функція $f(x,0) = \dfrac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x}$ також має скінченну границю при $x \to 1$, в чому також можна впевнитись, застосовуючи правило Лопіталя, тому її можна за неперервністю продовжити граничним значенням в точці $x = 1$, і це продовження буде неперервною функцією на всьому відрізку $[0,1]$. Очевидно, справедлива оцінка:

$$\left| f(x,\varepsilon) \right| = \left| \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{(1-x)^{\varepsilon}} \right| \le \frac{\left| x^{p-1} - x^{-p} \right|}{1-x}, x \in [0,1), 0 \le \varepsilon < 1.$$

Оскільки інтеграл $\displaystyle\int_0^1 \frac{\left| x^{p-1} - x^{-p} \right|}{1-x} dx$ збігається, то за теоремою порівняння Вейєрштраса буде рівномірно по ε збігатись інтеграл $I_\varepsilon = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{(1-x)^{1-\varepsilon}} dx$.

Тоді можна перейти до границі під знаком інтегралу:

$$\lim_{\varepsilon\to +0} I_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to +0} \int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{(1-x)^{1-\varepsilon}} dx = \int_0^1 \lim_{\varepsilon\to +0} \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{(1-x)^{1-\varepsilon}} dx = \int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x} dx.$$

Очевидно,

$$I_\varepsilon=\int_0^1\left(x^{p-1}-x^{-p}\right)\left(1-x\right)^{-1+\varepsilon}dx=\int_0^1 x^{p-1}\left(1-x\right)^{\varepsilon-1}dx-\int_0^1 x^{(1-p)-1}\left(1-x\right)^{-1+\varepsilon}dx=$$

$=\mathrm{B}(p,\varepsilon)-\mathrm{B}(1-p,\varepsilon).$

Звідси

$$I_0=\lim_{\varepsilon\to+0}I_\varepsilon=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\mathrm{B}(p,\varepsilon)-\mathrm{B}(1-p,\varepsilon)\right)=\lim_{\varepsilon\to+0}\Gamma(\varepsilon)\left(\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+\varepsilon)}-\frac{\Gamma(1-p)}{\Gamma(1-p+\varepsilon)}\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon}\left(\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+\varepsilon)}-\frac{\Gamma(1-p)}{\Gamma(1-p+\varepsilon)}\right).$$

Тут було використано властивість $\Gamma(1+\varepsilon)=\varepsilon\Gamma(\varepsilon).$

Для знаходження останньої границі застосуємо правило Лопіталя, враховуючи, що $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\Gamma(1+\varepsilon)=\Gamma(1)=1$:

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon}\left(\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+\varepsilon)}-\frac{\Gamma(1-p)}{\Gamma(1-p+\varepsilon)}\right)=$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(-\frac{\Gamma(p)\Gamma'(p+\varepsilon)}{\Gamma^2(p+\varepsilon)}+\frac{\Gamma(1-p)\Gamma'(1-p+\varepsilon)}{\Gamma^2(1-p+\varepsilon)}\right)=\frac{\Gamma'(1-p)}{\Gamma(1-p)}-\frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)}=$$

$$=-\left(\frac{\Gamma'_p(1-p)}{\Gamma(1-p)}+\frac{\Gamma'_p(p)}{\Gamma(p)}\right)=-\left(\ln'_p\left(\Gamma(1-p)\right)+\ln'_p\left(\Gamma(p)\right)\right)=-\left(\ln\left(\Gamma(1-p)\Gamma(p)\right)\right)'_p=$$

$$=-\left(\ln\frac{\pi}{\sin\pi p}\right)'_p=\left(\ln\sin\pi p\right)'_p=\frac{\pi\cos\pi p}{\sin\pi p}=\pi ctg\pi p.$$

Відповідь: $\displaystyle\int_0^1\frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}dx=\pi ctg\pi p,\ p\in(0,1).$

f). Обчислити інтеграл $\displaystyle I(p,q)=\int_0^\infty\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\left(1+x\right)\ln x}dx.$

Подамо цей інтеграл у вигляді

$$I(p,q)=\int_0^\infty \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{(1+x)\ln x}dx = I_1(p)-I_2(q)=\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)\ln x}dx-\int_0^\infty \frac{x^{q-1}}{(1+x)\ln x}dx.$$

Легко бачити, що при $p,q\in[\delta,1-\delta]\ (\delta\in(0,1))$ інтеграли $I_1(p),I_2(q)$ рівномірно збігається, відповідно, по p,q. Отже, їх можна інтегрувати за параметрами p,q і при цьому можна поміняти порядки інтегрування. Зауважимо, що $\int x^{a-1}dp=\frac{x^{a-1}}{\ln x}+C.$ В результаті чого одержимо збіжний, як відомо, інтеграл

$$\int I_1(p)dp-\int I_2(q)dq=\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx-\int_0^\infty \frac{x^{q-1}}{1+x}dx+C=\int_0^\infty \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{1+x}dx+C.$$

В свою чергу, виходячи з вигляду B-функції Ейлера як інтеграла по необмеженій півпрямій $(0,\infty)$, будемо мати:

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{1+x}dx=\mathrm{B}(p,1-p)-\mathrm{B}(q,1-q).$$

В результаті

$$I(p,q)=\int \mathrm{B}(p,1-p)dp-\int \mathrm{B}(q,1-q)dq+C.$$

Враховуючи зв'язок між функціями Ейлера і застосовуючи формулу доповнення, одержимо:

$$I(p,q)=\int \Gamma(p)\Gamma(1-p)dp-\int \Gamma(q)\Gamma(1-q)dq+C=$$

$$I(p,q)=\pi\left(\int \frac{dp}{\sin\pi p}dp-\int \frac{dq}{\sin\pi q}dq\right)+C=\pi\ln\left|\frac{tg\frac{\pi p}{2}}{tg\frac{\pi q}{2}}\right|+C.$$

Сталу інтегрування знайдемо, помічаючи, що при $p=q$ інтеграл

$I(p,p)=\int\limits_0^\infty \frac{x^{p-1}-x^{p-1}}{1+x}dx=0.$ Звідси $C=0.$

Відповідь: $I(p,q)=\int\limits_0^\infty \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{(1+x)\ln x}dx=\pi\ln\left|\frac{tg\frac{\pi p}{2}}{tg\frac{\pi q}{2}}\right|,\ p,q\in(0,1).$

Контрольні питання

1). При яких значеннях аргумента визначені функції Ейлера?

2). Виписати рекурентні формули для цих функцій.

3). Чому гама-функція є узагальненнями поняття факторіалу?

4). Записати формулу Ейлера-Гауса.

6. Додаток I

Γ-функція Ейлера як нескінченний добуток

Нехай $x\notin\mathbb{Z}$. Розглянемо (беручи приклад з Ейлера) нескінченний добуток:

$\Gamma(x)=\frac{1}{x}\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}.$	(6. 3.43)

Дослідимо загальний член нескінченного добутку:

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}=\left(1+\frac{x}{n}+\frac{x(x-1)}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1-\frac{x}{n}+\frac{x^2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=$$

$$=1-\frac{x}{n}+\frac{x}{n}+\frac{x(x-1)}{2n^2}-\frac{x^2}{n^2}+\frac{x^2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)=1+\frac{x(x-1)}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Знайдемо n-частинний добуток:

$$\prod_n(x)=\frac{1}{x}\frac{\left(1+\frac{1}{1}\right)^x}{1+\frac{x}{1}}\frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)^x}{1+\frac{x}{2}}\cdots\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}=\frac{1}{x}\frac{\frac{2^x}{1^x}\frac{3^x}{2^x}\cdots\frac{n^x}{(n-1)^x}\frac{(n+1)^x}{n^x}}{\frac{x+1}{1}\frac{x+2}{2}\cdots\frac{x+n}{n}}=$$

$$=\frac{n!n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)}\left(\frac{n+1}{n}\right)^x.$$

Отже,

$\Gamma(x)=\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)}.$	(6. 3.44)

Це є відома вже формула Ейлера-Гауса для Γ – функції Ейлера. Тому позначення функції в виразі (6. 3.44) виправдане.

Треба зауважити, що з інтегрального зображення Γ – функції Ейлера (6. 3.25) випливало, що ця функція визначена тільки при додатних значеннях аргументу тоді як функція (6. 3.44) визначена і при від’ємних його значеннях крім цілих від’ємних чисел. Таким чином, інтегральний вигляд Γ – функції Ейлера еквівалентний нескінченному добутку (6. 3.44) при додатних значеннях аргументу.

Знайдемо відношення $\dfrac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!n^{x+1}}{(x+1)...(x+n)(x+n+1)}}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!n^{x}}{x(x+1)...(x+n)}}. = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{nx}{x+1+n} = x.$

Звідси випливає відома формула $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Згадаємо факт з теорії границь послідовностей:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n} = \ln n + C + \gamma_n,$$

де C - стала Ейлера $\left(C = 0{,}57721566490...\right)$, $\gamma_n \to 0, n \to \infty.$

Розглянемо нескінченний добуток $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}.$

Запишемо його частинний добуток:

$$\prod\nolimits_n(x) = \frac{e^{\frac{1}{1}}}{1+\frac{1}{1}}\cdot\frac{e^{\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{2}}\cdot...\cdot\frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{e^{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}}}{\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot...\cdot\frac{n+1}{n}} = \frac{e^{\ln n + C + \gamma_n}}{n+1} = \frac{n}{n+1}e^{C}e^{\gamma_n}$$

Звідси випливає, що $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\prod\nolimits_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}e^{C}e^{\gamma_n} = e^{C}.$

Піднесемо обидві частини одержаної рівності до степеня x і перемножимо одержану рівність з нескінченним добутком типу (6. 3.44) для $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$:

$$e^{Cx}\Gamma(x+1) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x}}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x}}{1+\frac{x}{n}}.$$

Звідси випливає формула Вейєрштраса:

$$\frac{1}{\Gamma(x+1)}=e^{Cx}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}$$	(6. 3.45)

Прологарифмувавши рівність

$$\Gamma(x+1)=e^{-Cx}\prod_{n=1}^{\infty}e^{\frac{x}{n}}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1},$$

одержимо:

$$\ln\Gamma(x+1)=-Cx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n}-\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right).$$

З оцінки

$$\frac{x}{n}-\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)=\frac{x}{n}-\frac{x}{n}+\frac{1}{2n^2}x^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2n^2}x^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

випливає рівномірна збіжність ряду на довільному обмеженому відрізку. Ряд від похідних членів цього ряду також збігається рівномірно:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n\left(1+\frac{x}{n}\right)}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n(n+x)}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^2}, x\in[0,R].$$

Отже, ряд для логарифма від $\Gamma-$функції можна почленно диференціювати:

$$\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)}=-C+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right).$$

Звідси випливає важливий висновок – значення похідної значення Γ – функції у одиниці:

$\Gamma'(1) = -C.$	(6. 3.46)

Цей факт знаходить широке застосування у математиці.

7. Додаток 2. Теорема про неявну функцію
7. 1. Теорема про середнє

Спочатку запишемо в різних варіантах теорему про середнє для багатовимірних відображень. Вже відзначалось, що у формі рівності формула, подібна формулі про скінченні прирости, несправедлива. Можна лише виписати оцінку для такого скінченного приросту.

Нехай $y = y(x), x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m$ і нехай $x = \varphi(t),\ t \in [\alpha, \beta]$ - крива γ в просторі $\mathbb{R}^n$. Її довжину позначимо $l(\gamma) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \|\varphi'(\tau)\| d\tau.$ Для вектор-функції $y = y(\varphi(t)) = \psi(t)$ застосуємо формулу Ньютона-Лейбниця, після чого отримаємо: $\|y(b) - y(a)\| = \|y(\varphi(\beta)) - y(\varphi(\alpha))\| = \|\psi(\beta) - \psi(\alpha)\| = \left\|\int\limits_{\alpha}^{\beta} \psi'(\tau) d\tau\right\| =$

$$= \left\|\int\limits_{\alpha}^{\beta} y'\left(\varphi(\tau)\right)\varphi'(\tau) d\tau\right\| \le \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left\|y'\left(\varphi(\tau)\right)\right\| \|\varphi'(\tau)\| d\tau \le \sup_{x\in\gamma} \left\|y'\left(x\right)\right\| \int\limits_{\alpha}^{\beta} \|\varphi'(\tau)\| d\tau.$$

Отже, отримали оцінку

$\|y(b) - y(a)\| \le \sup\limits_{x\in\gamma} \left\|y'\left(x\right)\right\| \int\limits_{\alpha}^{\beta} \|\varphi'(\tau)\| d\tau = \sup\limits_{x\in\gamma} \left\|y'\left(x\right)\right\| l(\gamma).$	(7. 1.1)

Особливо зручний вигляд має ця оцінка, якщо $\gamma : x(t) = \varphi(t) = a + (b-a)t, t \in [0,1]; \varphi'(t) = b - a -$ відрізок $\gamma = [a,b]$ прямої, що з'єднує точки a і b:

$\lVert y(b) - y(a) \rVert \le \sup\limits_{x \in [a,b]} \lVert y'(x) \rVert \lVert b - a \rVert.$	(7. 1.2)

Таким чином, диференційовна функція задовольняє умову Ліпшиця.

У випадку відрізку можна написати більш сильну нерівність:

$$\lVert y(b) - y(a) \rVert = \left\lVert \int_0^1 y'(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)d\tau \right\rVert = \left\lVert \int_0^1 y'(\varphi(\tau))(b-a)d\tau \right\rVert \le$$

$$\le \int_0^1 \lVert y'(\varphi(\tau))(b-a) \rVert d\tau \le \sup_{\tau \in [0,1]} \lVert y'(\varphi(\tau))(b-a) \rVert = \sup_{x \in [a,b]} \lVert y'(x)(b-a) \rVert.$$

Тобто

$\lVert y(b) - y(a) \rVert \le \sup\limits_{\tau \in [0,1]} \lVert y'(\varphi(\tau))(b-a) \rVert = \sup\limits_{x \in [a,b]} \lVert y'(x)(b-a) \rVert.$	(7. 1.3)

Розглянемо тепер функцію $g(x) = y(x) - y'(a)(x-a)$. Для неї $g'(x) = y'(x) - y'(a)$. Застосуємо для цієї функції нерівність (7. 1.3):

$$\lVert g(b) - g(a) \rVert = \lVert y(b) - y(a) - y'(a)(b-a) \rVert \le \sup_{x \in \gamma} \lVert g'(x)(b-a) \rVert \Rightarrow$$

$\lVert y(b) - y(a) - y'(a)(b-a) \rVert \le \sup\limits_{x \in [a,b]} \lVert (y'(x) - y'(a))(b-a) \rVert.$	(7. 1.4)

В менш сильному варіанті цю нерівність можна написати у вигляді

$\left\|y(b)-y(a)-y'(a)(b-a)\right\| \le \sup\limits_{x\in[a,b]}\left\|y'\left(x\right)-y'\left(a\right)\right\| \left\|b-a\right\|.$	(7. 1.5)

Теорема 7. 1. 1. Нехай у зв'язній області $f'(x)\equiv 0$. Тоді $f(x)\equiv const.$

Доведення. Нехай a, x - точки з цієї області. З'єднаємо їх гладкою кривою γ. Застосуємо для них формулу (7. 1.1):

$$\left\| f(x)-f(a)\right\| \le \sup_{\xi\in\gamma}\left\| f'\left(\xi\right)\right\| l(\gamma)=0 \Rightarrow f(x)\equiv f(a)=const.$$

7. 2. Теорема про існування, єдиність і диференційовність неявної функції

Нехай
$x\in B_r(a)\subset\mathbb{R}^m, y\in B_\rho(b)\subset\mathbb{R}^n, F:(x,y)\in B_r(a)\times B_\rho(b)\to F(x,y)=z\in Z\subset\mathbb{R}^k.$

Далі для похідних функції $F\left(x,y\right)$ двох векторних аргументів будемо використовувати позначення для похідної по першому аргументу - $D_xF\left(x,y\right)$, і по другому - $D_yF\left(x,y\right)$.

Нехай $F(a,b)=0.$ Постає питання: чи існує функція f, визначена в деякому околі точки a, що переводить цей окіл в окіл точки b, яка задовольняє рівняння $F\left(x, f(x)\right)=0$? Така функція при умові її існування називається неявною. Відповідь дається наступною теоремою.

Теорема 7. 2.1 про існування і єдиність неявної функції. Нехай $F(x,y)=z\in Z\subset\mathbb{R}^k\ \forall x\in B_r(a)\subset\mathbb{R}^m, y\in B_\rho(b)\subset\mathbb{R}^n$ і $F(a,b)=0.$ Нехай в околі $B_r(b)\times B_\rho(b)$ існує обернений оператор (матриця) $\left(D_yF(x,y)\right)^{-1}$ (похідна береться по аргументу $y\in\mathbb{R}^n$), який є неперервним відносно аргументу (x,y). Тоді існує окіл $B_\delta(a)\subset\mathbb{R}^m$, в якому визначена і неперервна функція f, така, що $f(a)=b,\ F\left(x, f(x)\right)\equiv 0\ \forall x\in B_\delta(a).$ Така функція єдина в тому розумінні, що якщо існує ще одна функція f_1, визначена в околі $B_{\delta_1}(a)\subset\mathbb{R}^m$, що задовольняє таким самим умовам, то $\forall x\in B_\delta(a)\cap B_{\delta_1}(a)\ f_1(x)=f(x).$

Доведення. Якщо f - шукана функція, тобто, $F\left(x, f(x)\right)\equiv 0$, то безпосередньо перевіряється, що

$$\left(D_y F(a,b)\right)^{-1}\left(D_y F(a,b) f(x)-F\left(x, f(x)\right)\right)\equiv f(x).$$

Це означає, що шукана функція є нерухомою точкою оператора

$$\left(Tu\right)(x)=\left(D_y F(a,b)\right)^{-1}\left(D_y F(a,b)u(x)-F\left(x,u(x)\right)\right).$$	(7. 2.1)

Для її знаходження досить довести, що цей оператор стискаючий.

Розглянемо метричний простір M_δ неперервних функцій u, визначених на замкненому околі $B_\delta^a(a)$, які приймають значення в $\mathbb{R}^n$, і задовольняють умову $u(a)=b.$ Визначимо метрику за формулою

$$\rho\left(u,v\right)=\sup_{\lvert x-a\rvert\le\delta}\left\lVert u\left(x\right)-v\left(x\right)\right\rVert$$	(7. 2.2)

Цей простір повний як замкнена множина повного простору. Оператор T визначено на функціях, які задовольняють умову $\left\lVert u(x)-b\right\rVert\le\rho$, тому що саме при таких умовах визначено функцію $F\left(x, f(x)\right)$, і до того ж $\left(Tu\right)(a)=\left(D_y F(a,b)\right)^{-1}\left(D_y F(a,b)u(a)-F\left(a,b\right)\right)=u(a)=b.$ Сукупність таких функцій будемо позначать. Очевидно, вона замкнена, тому можна її розглядати як повний простір. Нехай $u,v \in M_{\delta,\varepsilon}$. Оцінимо відстань між їхніми образами:

$$\|Tv - Tu\| = \left\| \left(D_y F(a,b)\right)^{-1} \left(D_y F(a,b)v(x) - D_y F(a,b)u(x) - F\left(x,v(x)\right) + F\left(x,u(x)\right)\right) \right\| =$$

$$= \left\| \left(D_y F(a,b)\right)^{-1} \left(D_y F(a,b)\left(v(x) - u(x)\right) + F\left(x,u(x)\right) - F\left(x,v(x)\right)\right) \right\| =$$

$$= \left\| \left(D_y F(a,b)\right)^{-1} \left(D_y F(a,b) - D_y F(x,u)\right)\left(v(x) - u(x)\right) - \right.$$

$$\left. -\left(F\left(x,v(x)\right) - F\left(x,u(x)\right)\right) - D_y F(x,u)\left(\left(v(x) - u(x)\right)\right) \right\| \le$$

$$\le \left\| \left(D_y F(a,b)\right)^{-1} \right\| \left(\left\| D_y F(a,b) - D_y F(x,u) \right\| \left\| v(x) - u(x) \right\| + \right.$$

$$\left. + \left\| \left(F\left(x,v(x)\right) - F\left(x,u(x)\right)\right) - D_y F(x,u)\left(\left(v(x) - u(x)\right)\right) \right\| \right).$$

Оцінимо кожен доданок окремо.

$$\left\| D_y F(a,b) - D_u F(x,u) \right\| \left\| v(x) - u(x) \right\| \le \sup_{x \in B_\delta} \sup_{\xi \in [u,v]} \left\| D_y F(x,\xi) - D_y F(a,b) \right\| \left\| v(x) - u(x) \right\|.$$

Для оцінки другого доданку слід використати нерівність (7. 1.5), для функції F, в якій треба покласти $a = u(x), b = v(x)$:

$$\left\| \left(F\left(x,v(x)\right) - F\left(x,u(x)\right)\right) - D_y F(x,u)\left(\left(v(x) - u(x)\right)\right) \right\| \le$$

$$\le \sup_{\xi\in[u,v]}\left\|D_yF(x,\xi)-D_yF(x,u)\right\|\left\|b-a\right\|\le$$

$$\le \sup_{x\in B_\delta(a)}\sup_{\xi\in[u,v]}\left\|D_yF(x,\xi)-D_yF(x,u)\right\|\left\|v(x)-u(x)\right\|=$$

$$=\sup_{x\in B_\delta(a)}\sup_{\xi\in[u,v]}\left\|D_yF(x,\xi)-D_yF(a,b)+D_yF(a,b)-D_yF(x,u)\right\|\left\|v(x)-u(x)\right\|\le$$

$$\le \sup_{x\in B_\delta(a)}\sup_{\xi\in[u,v]}\left\|D_yF(x,\xi)-D_yF(a,b)\right\|\left\|v(x)-u(x)\right\|+$$

$$+\sup_{x\in B_\delta(a)}\left\|D_yF(a,b)-D_yF(x,u)\right\|\left\|v(x)-u(x)\right\|\le$$

$$\le 2\sup_{x\in B_\delta(a)}\sup_{\xi\in[u,v]}\left\|D_yF(x,\xi)-D_yF(a,b)\right\|\left\|v(x)-u(x)\right\|.$$

Звідси

$$\left\|Tv-Tu\right\|\le 3\sup_{x\in B_\delta(a)}\sup_{\xi\in[u,v]}\left\|\left(D_yF(a,b)\right)^{-1}\right\|\left\|D_yF(x,\xi)-D_yF(a,b)\right\|\left\|v(x)-u(x)\right\|$$

і остаточно

$$\rho\left(Tu,Tv\right)\le 3\sup_{x\in B_\delta(a)}\sup_{\xi\in[u,v]}\left\|\left(D_yF(a,b)\right)^{-1}\right\|\left\|D_yF(x,\xi)-D_yF(a,b)\right\|\rho\left(u,v\right).$$

Завдяки неперервній диференційовності функції F при досить малих $\varepsilon,\delta>0$ для $x:\left\|x-a\right\|\le\delta,\ u,v:\left\|u-b\right\|\le\varepsilon,\left\|v-b\right\|\le\varepsilon$ буде виконуватись нерівність

$$3\sup_{x\in B_\delta(a)}\sup_{\xi\in[u,v]}\left\|\left(D_yF(a,b)\right)^{-1}\right\|\left\|D_yF(x,\xi)-D_yF(a,b)\right\|\le\frac{1}{2}.$$

Це означатиме, що оператор T стискаючий, і

$$\rho\left(Tu,Tv\right)\le\frac{1}{2}\rho\left(u,v\right).$$

Треба ще вимагати виконання умови, щоб цей оператор переводив простір $M_{\delta,\varepsilon}$ в себе.

Згідно з визначенням цього оператора

$$\left(Tb\right)(x)=\left(D_yF(a,b)\right)^{-1}\left(D_yF(a,b)b-F\left(x,b\right)\right)\Rightarrow\left(Tb\right)(x)-b=-\left(D_yF(a,b)\right)^{-1}F\left(x,b\right).$$

Звідси $\left\|\left(Tb\right)(x)-b\right\|\leq\left\|\left(D_yF(a,b)\right)^{-1}\right\|\left\|F\left(x,b\right)\right\|.$ Оскільки $F(a,b)=0,$ завдяки неперервності цієї функції при досить малому $\delta>0, \left\|x-a\right\|<\delta$ буде виконуватись $\left\|\left(Tb\right)(x)-b\right\|\leq\left\|\left(D_yF(a,b)\right)^{-1}\right\|\left\|F\left(x,b\right)-F(a,b)\right\|\leq\frac{\varepsilon}{2}.$

Звідси

$$\left\|\left(Tu\right)(x)-b\right\|\leq\left\|\left(Tu\right)(x)-Tb\right\|+\left\|\left(Tb\right)(x)-b\right\|\leq\frac{1}{2}\rho\left(u,b\right)+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Тепер виконано всі умови теореми Банаха про стискаюче відображення ([5]), з якої випливає, що існує неперервна функція $y=f(x)\in M_{\delta,\varepsilon}$, що визначена при $\left\|x-a\right\|<\delta, f(x)\in\mathbb{R}^n, f(a)=b,$ яка є нерухомою точкою оператора $T:Ty=y$, тобто,

$$\left(Tf\right)(x)=\left(D_yF(a,b)\right)^{-1}\left(D_yF(a,b)f(x)-F\left(x,f(x)\right)\right)=f(x).$$

Розкриваючи дужки, одержимо: $F\left(x,f(x)\right)=0$, і тим самим існування неявної функції доведено.

Якщо є ще одна функція $f_1(x)$, що задовольняє цьому рівнянню і визначена на іншій області, то на перетині областей їхнього визначення ці дві функції співпадають. З іншого боку,

$$\left(Tf_1\right)(x)=\left(D_yF(a,b)\right)^{-1}\left(D_yF(a,b)f_1(x)-F\left(x,f_1(x)\right)\right)=f_1(x),$$

а це означає, що $f_1(x)$ є нерухомою точкою стискаючого оператора T. Оскільки він може мати лише одну нерухому точку, то $f_1(x)=f(x)$ на спільній області визначення.

Теорема 7. 2.2 про диференціювання неявної функції. Нехай виконано умови теореми 7. 2.2 про існування неявної функції і до того ж існує похідна $D_x F(x,y)$ при $\|x-a\| \le \delta, \|y-b\| \le \varepsilon$. Тоді неявна функція $y = f(x)$ диференційовна і

$y'(x) = -\left(D_y F(x,y)\right)^{-1} D_x F(x,y).$	(7. 2.3)

Доведення. У вказаному околі справджується тотожність $F\left(x, y(x)\right) \equiv 0$. Це означає, що при досить малому зсуві Δx, значення функції $y(x+\Delta x) = y(x) + \Delta y$ також належить околу і $F\left(x+\Delta x, y(x+\Delta x)\right) = 0$. Завдяки неперервності неявної функції малому значенню приросту Δx відповідає малий приріст Δy. Тоді маємо:

$$0 = F\left(x+\Delta x, y(x+\Delta x)\right) - F\left(x, y(x)\right) = F\left(x+\Delta x, y(x)+\Delta y\right) - F\left(x, y(x)\right) =$$

$$= D_x F\left(x, y(x)\right)\Delta x + D_y F\left(x, y(x)\right)\Delta y + o\left(\Delta x + \Delta y\right),$$

$$\left(D_y F\left(x, y(x)\right)\right)^{-1} D_x F\left(x, y(x)\right)\Delta x + \Delta y = \left(D_y F\left(x, y(x)\right)\right)^{-1} o\left(\Delta x + \Delta y\right).$$

Нехай Δx, а значить, і Δy таке мале, що виконується нерівність

$$\left\|\left(D_y F\left(x, y(x)\right)\right)^{-1}\right\| \left\|o\left(\Delta x + \Delta y\right)\right\| \le \frac{1}{2}\left(\Delta x + \Delta y\right).$$

Тоді з попереднього маємо:

$$\left\|\left(D_y F\left(x, y(x)\right)\right)^{-1} D_x F\left(x, y(x)\right)\Delta x + \Delta y\right\| \le \left\|\left(D_y F\left(x, y(x)\right)\right)^{-1}\right\| \left\|o\left(\Delta x + \Delta y\right)\right\| \le$$

$$\le \frac{1}{2}\left(\Delta x + \Delta y\right).$$

З іншого боку,

$$\left\|\left(D_yF\left(x,y(x)\right)\right)^{-1}D_xF\left(x,y(x)\right)\Delta x+\Delta y\right\|\geq\|\Delta y\|-\left\|\left(D_yF\left(x,y(x)\right)\right)^{-1}D_xF\left(x,y(x)\right)\Delta x\right\|$$

Тому $\|\Delta y\|-\left\|\left(D_yF\left(x,y(x)\right)\right)^{-1}D_xF\left(x,y(x)\right)\Delta x\right\|\leq\frac{1}{2}\Delta x+\frac{1}{2}\Delta y.$

Звідси $\frac{1}{2}\|\Delta y\|\leq\frac{1}{2}\|\Delta x\|+\left\|\left(D_yF\left(x,y(x)\right)\right)^{-1}D_xF\left(x,y(x)\right)\Delta x\right\|\leq$

$$\leq\left(\frac{1}{2}+\left\|\left(D_yF\left(x,y(x)\right)\right)^{-1}D_xF\left(x,y(x)\right)\right\|\right)\|\Delta x\|.$$

Інакше кажучи, $\|\Delta y\|\leq C\|\Delta x\|$. ідту Δx відту Δx відту Δx від

Тоді

$$\left\|\Delta y-\left(-\left(D_yF\left(x,y(x)\right)\right)^{-1}D_xF\left(x,y(x)\right)\right)\Delta x\right\|\leq\left\|\left(D_yF\left(x,y(x)\right)\right)^{-1}\right\|\left\|o\left(\Delta x+\Delta y\right)\right\|\leq$$

$$\leq\left\|\left(D_yF\left(x,y(x)\right)\right)^{-1}\right\|\left\|o\left((C+1)\Delta x\right)\right\|=o\left(\|\Delta x\|\right).$$

Звідси $\Delta y=-\left(D_yF\left(x,y(x)\right)\right)^{-1}D_xF\left(x,y(x)\right)\Delta x+o\left(\|\Delta x\|\right),$

що й означає диференційовність неявної функції, і її похідна знаходиться за формулою

$$y'(x)=-\left(D_yF\left(x,y(x)\right)\right)^{-1}D_xF\left(x,y(x)\right).$$

Зауваження. З доведеної формули випливає рівність

$$D_xF\left(x,y(x)\right)+D_yF\left(x,y(x)\right)y'(x)=0.$$

Її можна одержати, формально диференціюючи за змінною x тотожність $F(x,y(x))\equiv 0.$ Але без доведення існування похідної неявної функції така дія була б необґрунтована.

Теорема 7. 2.3 про існування і диференційовність оберненої функції. Нехай $x=\varphi(y), x,y\in\mathbb{R}^n, \varphi(b)=a$ - неперервно диференційовна в околі точки b функція і оператор похідної $\varphi'(y)$ має обернений в цьому околі. Тоді існує окіл $B_\delta(a)$, в якому визначена і диференційовна обернена функція $y=f(x), f(\varphi(y))\equiv y$, причому, оператор $f'(x)$ є оберненим до оператора $\varphi'(y)$:

$$f'(x)=\left(\varphi'(y)\right)^{-1},\ y=f(x),\ x=\varphi(y).$$	(7. 2.4)

Для доведення досить застосувати до функції $F(x,y)=x-\varphi(y)$ результати доведених теорем про існування, єдиність і диференційовність неявної функції, помітивши, що $D_xF(x,y)=D_x\left(x-\varphi(y)\right)=I$ - одиничний оператор, а $D_yF(x,y)=D_y\left(x-\varphi(y)\right)=-\varphi'(y).$

Отже, $f'(x)=-\left(D_yx-\varphi(y)\right)^{-1}D_x\left(x-\varphi(y)\right)=\left(\varphi'(y)\right)^{-1}.$

Тим самим формулу для похідної оберненої функції доведено.

Теорема 7. 2.4 про ранг. Нехай $f:D\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ - неперервно диференційовне відображення і в кожній точці $x\in D$ його матриця Якобі $f'(x)$ має ранг $r\le m, r<n$. Тоді для кожної внутрішньої точки $x\in D$ існує відкрита множина $V\subset D, x\in V$, що $\forall y\in f(V)$ її $n-r$ координат є образами неперервно диференційовної функції, визначеної на r координатах.

Доведення. Можна вважати, що нерівний нулю мінор матриці Якобі (якобіан) розташований у верхньому лівому куті матриці Якобі:

$$\det\left(\frac{D(f_1, f_2,..., f_n)}{D(x_1, x_2,..., x_n)}\right) \neq 0.$$	(7. 2.5)

Оскільки якобіан є неперервною функцією аргументу $x \in D \subset \mathbb{R}^m$, то для деякої точки $x_0 \in D$ існує такий її окіл $B_\delta(x_0) \subset D$, в якому $\det\left(\frac{D(f_1, f_2,..., f_n)}{D(x_1, x_2,..., x_n)}\right) \neq 0,\ x \in B_\delta(x_0)$. Зауважимо, що довільний мінор матриці Якобі порядку більшого ніж r, дорівнює нулю.

Будемо розглядати простір $\mathbb{R}^m$ як прямий добуток: $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{m-r}$. В зв'язку з цим будемо вживати позначення:

$$x = (\tilde{x}_r, \tilde{x}_{m-r}) = (x_1,..., x_r) \times (x_{r+1},..., x_m) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{m-r}.$$

Аналогічно $y = (\tilde{y}_r, \tilde{y}_{n-r}) = (y_1,..., y_r) \times (y_{r+1},..., y_n) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r}$.

Тепер з теорем існування і єдиності неявної функції і її диференційовності випливає, що існують відкриті кулі, околи $B_{\delta_1}(\tilde{x}_{0,r}) \subset \mathbb{R}^r,\ B_{\delta_2}(\tilde{x}_{0,m-r}) \subset \mathbb{R}^{m-r}$ такі, що $B_{\delta_1}(\tilde{x}_{0,r}) \times B_{\delta_2}(\tilde{x}_{0,m-r}) \subset B_\delta(x_0)$ і такий окіл точки $\tilde{y}_{0,r} : B_\varepsilon(\tilde{y}_{0,r}) \subset \mathbb{R}^r$, що на множині $B_\varepsilon(\tilde{y}_{0,r}) \times B_{\delta_2}(\tilde{x}_{0,m-r})$ визначено єдине неперервно диференційовне відображення

$$\varphi_r : B_\varepsilon(\tilde{y}_{0,r}) \times B_{\delta_2}(\tilde{x}_{0,m-r}) \to B_{\delta_1}(\tilde{x}_{0,r}),\ \tilde{x}_r = \varphi_r(\tilde{y}_r, \tilde{x}_{m-r}).$$

Розглядаючи відображення $\tilde{y}_r = f_r(\tilde{x}_r, \tilde{x}_{m-r})$ як рівняння в деякій області простору $\mathbb{R}^{m+r}$ і підставивши його в праву частину попереднього співвідношення, одержимо тотожність

$$\tilde{y}_r = f_r\left(f_r(\tilde{x}_r, \tilde{x}_{m-r}), \tilde{x}_{m-r}\right) \equiv \psi_r(\tilde{y}_r, \tilde{x}_{m-r})$$

відносно $\left(\tilde{y}_r,\tilde{x}_{m-r}\right)\in B_{\varepsilon}\left(\tilde{y}_{0,r}\right)\times B_{\delta_2}\left(\tilde{x}_{0,m-r}\right)$ еквівалентне r тотожностям:

$$y_j = f_j\left(\varphi_r\left(y_r,\tilde{x}_{m-r}\right),\tilde{x}_{m-r}\right)\equiv\psi_j\left(y_1,\ldots,y_r,x_{r+1},\ldots,x_m\right).$$

Диференціюючи ці тотожності по $x_p,\ p>r$, одержимо:

$$\frac{\partial\psi_j}{\partial x_p}=\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial f_j}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_p}+\frac{\partial f_j}{\partial x_p}=\left(D_p f_j,D_p\varphi\right),\ j=1,\ldots,r,\ p=r+1,\ldots,m.$$

Тут використано позначення:

$$D_p f_j=\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f_j}{\partial x_r},\frac{\partial f_j}{\partial x_p}\right)\in\mathbb{R}^{r+1},\ D_p\varphi=\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_p},\ldots,\frac{\partial\varphi_r}{\partial x_p},1\right)\in\mathbb{R}^{r+1}.$$

Введемо позначення $V=B_{\delta_1}\left(\tilde{x}_{0,r}\right)\times B_{\delta_2}\left(\tilde{x}_{0,m-r}\right),Y=f(V)$.

Якщо $y=\left(\tilde{y}_r,\tilde{y}_{n-r}\right),y\in Y$ і при цьому $\tilde{y}_r\in B_{\varepsilon}\left(\tilde{y}_{0,r}\right)$, то $\tilde{x}_r=\varphi_r(\tilde{y}_r,\tilde{x}_{m-r})$, і тоді $\tilde{y}_{n-r}=f_{n-r}\left(\varphi_r(\tilde{y}_r,\tilde{x}_{m-r}),\tilde{x}_{m-r}\right)=g_{n-r}(\tilde{y}_r,\tilde{x}_{m-r})$. Доведемо, що, насправді, відображення g_{n-r} від $\tilde{x}_{m-r}$ не залежить. Перевіримо це для кожної координати

$$g_s\left(y_1,\ldots,y_r,x_{r+1},\ldots,x_m\right)\equiv f_s\left(\varphi_r\left((\tilde{y}_r,\tilde{x}_{m-r}),\tilde{x}_{m-r}\right)\right),s=r+1,\ldots,n.$$

Диференціюючи g_s по $x_p,p=r+1,\ldots,m$, одержимо:

$$\frac{\partial g_s}{\partial x_p}=\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial f_s}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_p}+\frac{\partial f_s}{\partial x_p}=\left(D_p f_s,D_p\varphi\right).$$

Оскільки $s > r$, кожен вектор $D_p f_s$ є лінійною комбінацією векторів $D_p f_s, \ j = 1,...,r,$ що випливає з того, що ранг матриці Якобі дорівнює r:

$$D_p f_s = \sum_{k=1}^{r} \lambda_j^s D_p f_j.$$

Звідси

$$\frac{\partial g_s}{\partial x_p} = \left(\sum_{k=1}^{r} \lambda_j^s D_p f_j, D_p \varphi \right) = \sum_{k=1}^{r} \lambda_j^s \left(D_p f_j, D_p \varphi \right) = 0.$$

Значить, множина M точок $\left(\tilde{y}_r, \tilde{y}_{n-r}\right) \in Y$, для яких $\tilde{y}_r \in B_\varepsilon\left(\tilde{y}_{0,r}\right)$, визначається рівнянням $\tilde{y}_{n-r} = g_{n-r}\left(\tilde{y}_r\right).$ Множина M є образом при відображенні перетину множин V і $\{x\} = \tilde{y}_r^{-1}\left(B_\varepsilon\left(\tilde{y}_{0,r}\right)\right)$ таких, що $\tilde{y}_r(x) \in B_\varepsilon\left(\tilde{y}_{0,r}\right),$ тобто, образом перетину двох відкритих множин, і вона є образом відкритого множини V, що містить точку x_0.

Розглянемо повний прообраз точки $y = \left(\tilde{y}_r, \tilde{y}_{n-r}\right) = f(x) \in Y.$ Як було доведено, така точка визначається рівнянням $\tilde{y}_{n-r} = g_{n-r}\left(\tilde{y}_r\right), \tilde{y}_r \in B_\varepsilon\left(\tilde{y}_{0,r}\right).$

Наслідок. Якщо задано $\tilde{x}_{m-r} \in B_{\delta_2}\left(\tilde{x}_{0,m-r}\right), \tilde{y}_r \in B_\varepsilon\left(\tilde{x}_{0,r}\right),$ то на множині $B_\varepsilon\left(\tilde{y}_{0,r}\right) \times B_{\delta_2}\left(\tilde{x}_{0,m-r}\right)$ однозначно визначено відображення
$\tilde{x}_r : B_\varepsilon\left(\tilde{y}_{0,r}\right) \times B_{\delta_2}\left(\tilde{x}_{0,m-r}\right) \to B_{\delta_1}\left(\tilde{x}_{0,r}\right),$ яке є функцією від $\tilde{x}_{m-r} \in B_{\delta_2}\left(\tilde{x}_{0,m-r}\right).$

При фіксованому $\tilde{y}_r$, очевидно, $\tilde{y}_{n-r}$ також буде фіксованим, що випливає з теореми про ранг, тому повний прообраз $f^{-1}(y)$ точки y описується рівнянням $\tilde{x}_r = z_r\left(\tilde{x}_{m-r}\right), \tilde{x}_{m-r} \in B_{\delta_2}\left(\tilde{x}_{0,m-r}\right),$ де z_r - неперервно диференційовне відображення.

Приклад. Розглянемо систему рівнянь

$$f(u,v) = x,$$
$$g(u,v) = y,$$
$$h(u,v) = z,$$

де $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Нехай

$$f\left(u_0, v_0\right) = x_0,$$
$$g\left(u_0, v_0\right) = y_0,$$
$$h\left(u_0, v_0\right) = z_0$$

і ранг матриці Якобі $\begin{pmatrix} f'_u & f'_v \\ g'_u & g'_v \\ h'_u & h'_v \end{pmatrix}$ дорівнює 2 в точці $\left(u_0, v_0\right)$.

Нехай $\begin{vmatrix} f'_u\left(u_0, v_0\right) & f'_v\left(u_0, v_0\right) \\ g'_u\left(u_0, v_0\right) & g'_v\left(u_0, v_0\right) \end{vmatrix} \neq 0.$ З неперервності частинних похідних цей мінор не дорівнює нулю в деякому околі точки $\left(u_0, v_0\right)$. Тоді згідно з теоремою про ранг множину образів відображення цього околу в окіл точки $\left(x_0, y_0, z_0\right)$ за допомогою даної системи можна задати однією функцією $z = \varphi(x, y)$.

Функціональна залежність функцій

Означення. Функція f_k залежить в області D від функцій $f_1, ..., f_{k-1}, f_{k+1}, ..., f_n$, якщо існує неперервно диференційовна функція F така, що

$f_k = F\left(f_1, ..., f_{k-1}, f_{k+1}, ..., f_n\right).$	(7. 2.6)

Якщо в області D з системи функцій $f_1,...,f_n$ хоча б одна залежна від інших, то така система називається функціонально залежною.
Якщо не існує функції з вказаними властивостями, то тоді система функцій не є функціонально залежною.

Теорема 7. 2.5. Нехай функції $f_1,...,f_n$ неперервно диференційовні в області $D\subset\mathbb{R}^m, n\le m, x_0\in D, y_0=\left(f_1(x_0),...,f_n(x_0)\right)^T\in\mathbb{R}^n$. Нехай ранг матриці Якобі $\dfrac{D\left(f_1(x_0),...,f_n(x_0)\right)}{D(x_1,...,x_n)}$ дорівнює n. Тоді система цих функцій функціонально незалежна в околі x_0.

Доведення. Згідно з теоремою про ранг образ деякого околу точки x_0 при відображенні $f=\left(f_1,...,f_n\right)^T$ є околом точки $y_0=f(x_0)$. Якщо в околі точки x_0 функції пов'язані співвідношенням типу (7. 2.6), то це означає, що k -тий рядок матриці Якобі є лінійною комбінацією інших рядків, оскільки за правилом диференціювання складеної функції

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j}=\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\partial F}{\partial y_i}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}+\sum_{i=k+1}^{n}\frac{\partial F}{\partial y_i}\frac{\partial f_i}{\partial x_j},\ j=1,...,m,$$

але це означало б, що ранг матриці Якобі був би менший за n, що протирічить умові.

Теорема 7. 2.6. Нехай функції $f_1,...,f_n$ неперервно диференційовні в області $D\subset\mathbb{R}^m, n\le m, x_0\in D, y_0=\left(f_1(x_0),...,f_n(x_0)\right)^T\in\mathbb{R}^n$. Нехай ранг матриці Якобі $\dfrac{D\left(f_1(x_0),...,f_n(x_0)\right)}{D(x_1,...,x_n)}$ дорівнює $r<n$ і нерівний нулю мінор цієї матриці знаходиться у лівому верхньому куті. Тоді функції $f_1,...,f_r$ функціонально

незалежні, а довільна функція $f_s, s > r$ залежить від функцій $f_1,..., f_n$ у деякому околі точки x_0.

Доведення. Згідно з теоремою про ранг існує окіл $V : x_0 \in V$ такий, що $f(V)$ деяка його під область, окіл точки $y_0 = f\left(x_0\right)$ задається рівнянням вигляду

$$\tilde{y}_{n-r} = g\left(\tilde{y}_r\right) \Leftrightarrow y_s = g_s\left(y_1,..., y_r\right), s = r+1,...,n.$$

Тоді в області V функції $f_s, s = r+1,...,n$ задовольняють співвідношенням

$$f_s(x) = g_s\left(f_1(x),..., f_r(x)\right),$$

тобто, функції $f_s(x), s = r+1,...,n$ залежать в цій області від функцій $f_j, j = 1,...,r$. Функціональна незалежність функцій $f_j(x), j = 1,...,r$ випливає з теореми 7. 2.5.

Зауваження. Теорему про функціональну залежність буде використано в теорії звичайних диференціальних рівнянь при з’ясуванні вигляду інтегрувального множника.

8. Перетворення Лежандра

Перетворення Лежандра функції однієї змінної

Розглянемо перетворення, в формулах якого присутні не тільки старі і нові координати, але й похідні:

$$t = y'_x,\ u = xy'_x - y.$$

Воно називається перетворенням Лежандра.

Нову змінну u можна розглядати як функцію від x, адже $t = y'_x$ залежить від x. Зауважимо, що $t'_x = y''_{x^2}$ Продиференціюємо по x другу змінну:

$$u'_x = u'_t t'_x = u'_t y''_{x^2} = y'_x + xy''_{x^2} - y'_x = xy''_{x^2} \Rightarrow u'_t = x.$$

Зауважимо, що цю формулу встановлено при умові $y''_{x^2} \neq 0$. При існуванні і нерівності похідної на проміжку, як відомо, з теореми Дарбу випливає, що похідна має скрізь один і той же знак, а це означає її опуклість на цьому проміжку (униз чи угору).

З означення нової змінної u і тільки що одержаної формули випливає:

$$x = u'_t,\ y = tu'_t - u.$$

Отже, бачимо, що нові змінні виражаються через старі за такими ж формулами, як і старі через нові. Це, в свою чергу, означає, що двічі застосувавши перетворення Лежандра, скажімо, до старих змінних, знову одержимо старі змінні. Те саме стосується нових змінних. Така властивість називається інволютивністю. Таким чином, перетворення Лежандра інволютивне. Знайдемо $\frac{d^2u}{dt^2}, \frac{d^3u}{dt^3}$. Вже знайдено $\frac{du}{dt} = x.$ Звідси

$$\frac{d^2u}{dt^2}=\frac{dx}{dt}=\frac{1}{\left(\frac{dt}{dx}\right)}=\frac{1}{y''_{x^2}}\Rightarrow\frac{d^3u}{dt^3}=\frac{d}{dt}\frac{1}{y''_{x^2}}=\frac{d}{dx}\frac{1}{y''_{x^2}}\frac{1}{\left(\frac{dt}{dx}\right)}=-\frac{y'''_{x^3}}{\left(y''_{x^2}\right)^2}\frac{1}{y''}=-\frac{y'''_{x^3}}{\left(y''_{x^2}\right)^3}.$$

З перетворенням Лежандра функції однієї змінної ми зустрінемось в розділі «Звичайні диференціальні рівняння» при вивченні рівняння Клеро.

Зауваження. Розглянемо перетворення Лежандра як перетворення площини і нехай воно дії на деяку гладку криву й $y=y(x)$. Тоді для визначення образу цієї кривої координат довільної її точки буде недостатньо, треба ще знати кутовий коефіцієнт дотичної в цій точці.

Перетворення Лежандра функцій двох змінних

Нехай $z=z(x,y)$ - принаймні, двічі неперервно диференційовна функція. Покладемо $t=\frac{\partial z}{\partial x},u=\frac{\partial z}{\partial y},v=x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}-z.$

Перед тим, як сформулювати задачу, випишемо матрицю Гессе

$$\frac{Dcol(t,u)}{D(x,y)}=\frac{Dcol\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{D(x,y)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\end{pmatrix}.$$

Будемо вважати, що

$$J=\det\frac{D(t,u)}{D(x,y)}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2\neq 0.$$

Треба виразити $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ через $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},\frac{\partial^2 v}{\partial u^2},\frac{\partial^2 v}{\partial t\partial u}.$

Розв’язання. Виходячи з означення функції v , знайдемо $\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{D(v)}{D(x,y)}=\left(x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial x},x\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}+y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)=$$

$$\left(x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},x\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}+y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\frac{Dcol\left(\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)}{D(x,y)}=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\frac{Dcol(t,u)}{D(x,y)}.$$

З іншого боку,

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{D(v)}{D(x,y)}=\frac{D(v)}{D(t,u)}\frac{Dcol(t,u)}{D(x,y)}=\left(\frac{\partial v}{\partial t},\frac{\partial v}{\partial u}\right)\frac{Dcol(t,u)}{D(x,y)}.$$

Розв’язуючи систему

$$\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\frac{Dcol(t,u)}{D(x,y)}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial v}{\partial t} & \dfrac{\partial v}{\partial u}\end{pmatrix}\frac{Dcol(t,u)}{D(x,y)},$$

одержимо:

$$x=\frac{\partial v}{\partial t},\ y=\frac{\partial v}{\partial u}.$$

В результаті приходимо до виразу в нових змінних:

$$z=t\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial u}.$$

Звідси робимо висновок, що як і в одновимірному випадку, стара змінна z виражається через нові змінні за такою ж формулою, як і нова змінна v - через старі; повторне застосування перетворення Лежандра приводить до тотожного перетворення. Нагадаємо, що ця властивість називається інволютивністю.

Перетворення Лежандра узагальнюється на випадок просторів довільної розмірності.

Нехай $x, t \in \mathbb{R}^n, z = z(x) \in \mathbb{R}^1, v = v(t) \in \mathbb{R}^1.$

Покладемо: $t_i = \dfrac{\partial z}{\partial x_i},\ v = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \dfrac{\partial z}{\partial x_i} - z.$

Будемо вимагати невиродженість матриці Гессе

$$z''(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_n} \\ . & . & \cdots & . \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}, \det\left(z''(x)\right) = J \neq 0.$$

Знайдемо

$$\frac{D(v)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_i}, \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_i}, \ldots, \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial^2 z}{\partial x_n \partial x_i} \right) =$$

$$= \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_n \partial x_1} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_n \partial x_2} \\ . & . & \cdots & . \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

З іншого боку,

$$\frac{D(v)}{D(x_1,x_2,...,x_n)}=\frac{D(v)}{D(t_1,t_2,...,t_n)}\cdot\frac{D(t_1,t_2,...,t_n)}{D(x_1,x_2,...,x_n)}=$$

$$=\left(\frac{\partial v}{\partial t_1},\frac{\partial v}{\partial t_2},...,\frac{\partial v}{\partial t_n}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial t_1}{\partial x_1} & \frac{\partial t_1}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial t_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial t_2}{\partial x_1} & \frac{\partial t_2}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial t_2}{\partial x_n}\\ . & . & ... & .\\ \frac{\partial t_n}{\partial x_1} & \frac{\partial t_n}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial t_n}{\partial x_n}\end{pmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\partial v}{\partial t_1},\frac{\partial v}{\partial t_2},...,\frac{\partial v}{\partial t_n}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2\partial x_1} & ... & \frac{\partial^2 z}{\partial x_n\partial x_1}\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} & ... & \frac{\partial^2 z}{\partial x_n\partial x_2}\\ . & . & ... & .\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_n} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2\partial x_n} & ... & \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2}\end{pmatrix}.$$

Отже,

$$(x_1,x_2,...,x_n)\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2\partial x_1} & ... & \frac{\partial^2 z}{\partial x_n\partial x_1}\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} & ... & \frac{\partial^2 z}{\partial x_n\partial x_2}\\ . & . & ... & .\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_n} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2\partial x_n} & ... & \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2}\end{pmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\partial v}{\partial t_1},\frac{\partial v}{\partial t_2},\ldots,\frac{\partial v}{\partial t_n}\right)\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_1} & \ldots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} & \ldots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_n \partial x_2} \\ . & . & \ldots & . \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_n} & \ldots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)=\left(\frac{\partial v}{\partial t_1},\frac{\partial v}{\partial t_2},\ldots,\frac{\partial v}{\partial t_n}\right).$$

Зважаючи на те, що $\frac{\partial z}{\partial x_i}=t_i,\ x_i=\frac{\partial v}{\partial t_i},$ одержимо:

$$z=\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{\partial v}{\partial t_i}-v.$$

Знову показано, що формули для перетворення Лежандра від старих змінних до нових і навпаки, однакові. Перетворення Лежандра інволютивне.

ЛІТЕРАТУРА

1. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: підручник / А. Я. Дороговцев. – К.: "Либідь". 1993. 323 с.
2. Шкіль. М. І. Математичний аналіз: підручн. у 2-х ч. /М. І. Шкіль. – К.: Вища школа, 2005. – 447 с.
3. Дубовик В. П. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. зак. / В.П Дубовик., І. І. Юрик. - 4-те вид. - К. : Ігнатекс-Україна., 2013. - 648 с.
4. Вища математика. Збірник задач : навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П. Вовкодав, В. І. Дев'ятко, Р. К. Клименко, В. В. Крочук, М. А. Мартиненко ; за ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. – К. : А.С.К., 2011. – 480 с.
5. Математичний аналіз: Диференціальне числення функцій однієї змінної [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 122 «Компьютерні науки» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад. Ю. Є. Бохонов. – Електронні текстові дані (1 файл: 3,56 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 162 с.
6. Математичний аналіз: Диференціальне числення функцій кількох дійсних змінних. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Частина І [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 122 «Комп’ютерні науки» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад. Ю. Є. Бохонов. – Електронні текстові дані (1 файл: 2,2 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 83 с.
7. Dieudonne, Jean. Foundations of Modern Analysis. Academic Press. 1960.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК