

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ  
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

**Н. Л. Денисенко,  
Т. О. Єр'оміна,  
В. В. Могильова**

**ВИЩА МАТЕМАТИКА  
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ  
ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ  
ПРАКТИКУМ**

**Навчальний посібник**

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра

Електронне мережне навчальне видання

Київ  
КПІ ім. Ігоря Сікорського  
2022

Рецензент *Орловський І. В.*, канд. фіз.-мат. наук, доц.,  
доц. кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей НТУУ  
«КПІ ім. Ігоря Сікорського»

Відповідальний редактор *Дудкін М. Є.*, докт. фіз.-мат. наук, проф.,  
проф. кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь  
НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського»

Автори *Денисенко Наталія Леонідівна*, канд. фіз.-мат. наук  
*Єр'оміна Тетяна Олександрівна*, канд. фіз.-мат. наук  
*Могильова Вікторія Віталіївна*, канд. фіз.-мат. наук, доц.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 1 від 02.09.2022 р.)  
за поданням Вченої ради Фізико-математичного факультету (протокол № 5 від 30.08.2022 р.)*

Вища математика : Диференціальне числення функцій однієї змінної : Практикум [Електронний ресурс] : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра / Н. Л. Денисенко, Т. О. Єр'оміна, В. В. Могильова. — Електронні текстові дані (1 файл: 2,9 Мбайт). — Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. — 159 с.

Навчальний посібник складено на основі багаторічного досвіду викладання авторів у КПІ ім. Ігоря Сікорського і розрахований для студентів вищих навчальних закладів, які вивчають вищу математику. Посібник містить необхідний матеріал з розділу «Диференціальне числення функцій однієї змінної» курсу вищої математики, який вивчають студенти вищих технічних навчальних закладів. У кожному пункті посібника висвітлені теоретичні відомості, які містять основні означення, формулювання основних властивостей і теорем, деякі схеми розв'язання задач, а також наведено велику кількість прикладів розв'язання типових задач з даного розділу. Також посібник містить контрольні приклади для самоперевірки, до яких надано відповіді, і індивідуальні завдання з розділу «Диференціальне числення функцій однієї змінної».

Посібник буде корисним для студентів технічних спеціальностей вищих навчальних закладів і може бути використаний для самостійного вивчення матеріалу з вище зазначеного розділу курсу вищої математики студентами як денної, так і заочної форми навчання.

Реєстр. № НП 22/23-044. Обсяг 6,9 авт. арк.

Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»  
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056  
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів  
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© Н. Л. Денисенко, Т. О. Єр'оміна, В. В. Могильова  
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022

## ЗМІСТ

Вступ .....	5
1. Похідна .....	6
1.1. Основні поняття. Фізичний та геометричний зміст похідної .....	6
1.2. Неперервність функції, що має похідну. Односторонні похідні .....	12
Контрольні приклади для самоперевірки .....	21
2. Диференціювання функцій .....	22
2.1. Правила і формули диференціювання .....	22
2.2. Диференціювання неявно заданої функції .....	39
2.3. Логарифмічне диференціювання .....	42
2.4. Диференціювання параметрично заданої функції .....	46
2.5. Задачі на геометричні застосування похідної .....	49
Контрольні приклади для самоперевірки .....	58
3. Диференціал .....	63
3.1. Означення і властивості диференціала. Інваріантність форми першого диференціала .....	63
3.2. Застосування диференціала до наближених обчислень .....	69
Контрольні приклади для самоперевірки .....	71
4. Похідні і диференціали вищих порядків .....	73
4.1. Похідні вищих порядків .....	73
4.2. Формула Лейбніца .....	80
4.3. Похідні вищих порядків параметрично і неявно заданих функцій .....	82
4.4. Диференціали вищих порядків .....	88
Контрольні приклади для самоперевірки.....	90
5. Основні теореми диференціального числення .....	93
6. Розкриття невизначеностей за допомогою правила Лопіталя .....	96

Контрольні приклади для самоперевірки .....	103
7. Застосування диференціального числення до дослідження функцій ...	105
7.1. Монотонність функції .....	105
7.2. Максимум і мінімум функції .....	107
7.3. Найбільше і найменше значення функції на відрізку .....	113
7.4. Опуклість і угнутість кривої. Точки перегину .....	117
7.5. Асимптоти кривої .....	121
7.6. Схема дослідження функції і побудови графіка .....	126
Контрольні приклади для самоперевірки .....	131
Індивідуальні завдання .....	134
Список рекомендованої літератури .....	159

## ВСТУП

Навчальний посібник розрахований для студентів вищих навчальних закладів, які вивчають вищу математику, зокрема, для студентів технічних спеціальностей. Посібник містить необхідний матеріал з розділу «Диференціальне числення функцій однієї змінної» курсу вищої математики, який вивчають студенти вищих технічних навчальних закладів.

У кожному пункті посібника висвітлені теоретичні відомості, які містять основні означення і поняття, формулювання основних властивостей і теорем з вище зазначеного розділу, а також наведено деякі схеми розв'язання задач. Окрім цього, розглянуто велику кількість прикладів розв'язання задач з детальними поясненнями і зауваженнями. Також посібник містить контрольні приклади для самоперевірки, до яких надано відповіді, та індивідуальні завдання з розділу «Диференціальне числення функцій однієї змінної».

Навчальний посібник може бути корисним для самостійного вивчення матеріалу з вище зазначеного розділу курсу вищої математики студентами як денної, так і заочної форми навчання. Даний посібник також може бути корисним і для викладачів, а саме, запропоновані приклади і індивідуальні завдання можуть бути використані при організації аудиторного або дистанційного навчання, а також при складанні білетів контрольних робіт або варіантів розрахункових робіт з даної теми.

# 1. ПОХІДНА

## 1.1. Основні поняття. Фізичний та геометричний зміст похідної

Нехай задана функція  $y = f(x)$ , яка визначена на деякому проміжку  $(a; b)$ . Надамо змінній  $x \in (a; b)$  довільного приросту  $\Delta x$  так, щоб  $x + \Delta x \in (a; b)$ . Знайдемо приріст функції за формулою  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ .

**Означення 1.** *Похідною функції*  $y = f(x)$  в точці  $x$  називається границя, якщо вона існує, відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля. Позначається вона одним із символів  $y'$ ,  $y'_x$ ,  $f'(x)$ ,  $\frac{dy}{dx}$ ; а значення похідної функції в точці  $x_0$  позначаємо так:  $y'(x_0)$ ,  $f'(x_0)$  або  $f'(x)|_{x=x_0}$ .

Отже, за означенням 1 маємо

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (1)$$

Коли кажуть, що функція має похідну, то мають на увазі, що похідна скінченна.

Але, якщо  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$ , то вважають, що функція має нескінченну похідну в точці  $x$ . Якщо ж границя  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  не існує в точці  $x$ , то в цій точці не існує і похідної функції  $y = f(x)$ .

Операція знаходження похідної функції називається **диференціюванням**.

Функцію  $y = f(x)$  називають **диференційовною** в точці  $x$ , якщо в цій точці вона має скінченну похідну. Функція  $y = f(x)$  називається диференційовною на проміжку, якщо вона диференційовна в кожній точці цього проміжку.

**Приклад 1.** Знайти похідну функції  $y = 2x^3 - x + 1$ , використовуючи означення похідної.

□ Розв'язання. Надамо аргументу  $x$  довільного приросту  $\Delta x$ , тоді функція  $f(x) = 2x^3 - x + 1$  набуде приріст

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = (2(x + \Delta x)^3 - (x + \Delta x) + 1) - (2x^3 - x + 1) = \\ &= (2x^3 + 6x^2 \cdot \Delta x + 6x \cdot \Delta x^2 + 2\Delta x^3 - x - \Delta x + 1) - (2x^3 - x + 1) = \\ &= 6x^2 \cdot \Delta x + 6x \cdot \Delta x^2 + 2\Delta x^3 - \Delta x. \end{aligned}$$

Далі запишемо відношення приросту функції до приросту аргументу

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6x^2 \cdot \Delta x + 6x \cdot \Delta x^2 + 2\Delta x^3 - \Delta x}{\Delta x} = 6x^2 + 6x \cdot \Delta x + 2\Delta x - 1.$$

За означенням похідної з формули (1) маємо

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (6x^2 + 6x \cdot \Delta x + 2\Delta x - 1) = \\ &= 6x^2 + 6x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x + 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x - 1 = 6x^2 - 1 \Rightarrow (2x^3 - x + 1)' = 6x^2 - 1. \end{aligned}$$

**Приклад 2.** Знайдемо похідні наступних елементарних функцій:

**1) Степенева функція  $y = x^k$ ,  $k = \text{const} > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$**

□ Розв'язання. Надамо аргументу  $x$  довільного приросту  $\Delta x$ , тоді функція  $f(x) = x^k$  набуде приріст  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^k - x^k$ .

Далі запишемо відношення приросту функції до приросту аргументу

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^k - x^k}{\Delta x}.$$

За означенням похідної маємо

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^k - x^k}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^k \left( \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^k - 1 \right)}{\Delta x} =$$

$$= \left. \begin{array}{l} \text{за таблицею еквівалентних} \\ \text{нескінченно малих функцій маємо} \\ (1 + \alpha)^k - 1 \sim k \cdot \alpha, \text{ при } \alpha \rightarrow 0; \\ \text{тут } \alpha = \frac{\Delta x}{x} \rightarrow 0, \text{ при } \Delta x \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^k \cdot k \cdot \frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = k \cdot x^{k-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^k)' = k \cdot x^{k-1}, \quad k = \text{const} > 0.$$

Можна довести, що ця формула справедлива при будь-якому  $k \in \mathbb{R}$ , тобто

$$\boxed{(x^k)' = k \cdot x^{k-1}, \quad k \in \mathbb{R}}.$$

Зокрема, при  $k=1$ :  $(x)' = 1$ ;

$$\text{при } k = \frac{1}{2}: (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$\text{при } k = -1: \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}. \quad \blacksquare$$

## 2) Показникова функція $y = a^x$ , $a > 0$ , $a \neq 1$ , $x \in \mathbb{R}$

□ Розв'язання. Надаємо аргументу  $x$  приросту  $\Delta x$ , тоді функція  $f(x) = a^x$  набуде приріст  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$ . Тому

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} \quad \text{і за означенням 1 маємо}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} =$$

$$= \left. \begin{array}{l} \text{за таблицею еквівалентних} \\ \text{нескінченно малих функцій маємо} \\ a^{\Delta x} - 1 \sim \Delta x \cdot \ln a, \text{ при } \Delta x \rightarrow 0 \end{array} \right| = a^x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \cdot \ln a}{\Delta x} = a^x \cdot \ln a \Rightarrow$$

$$\boxed{(a^x)' = a^x \cdot \ln a}.$$

Зокрема, при  $a = e$ ,  $\ln e = 1$ :  $\boxed{(e^x)' = e^x}$ . ■

### 3) Логарифмічна функція $y = \log_a x$ , $a > 0$ , $a \neq 1$ , $x > 0$

□ Розв'язання. Надаємо аргументу  $x$  приросту  $\Delta x$ , тоді функція  $f(x) = \log_a x$  набуде приріст  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x$ .

$$\text{Тому } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \frac{\log_a\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} \quad \text{і за}$$

означенням похідної маємо

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \left. \begin{array}{l} \text{за таблицею еквівалентних} \\ \text{нескінченно малих функцій} \\ \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \sim \frac{\Delta x}{x} \cdot \log_a e, \text{ при } \Delta x \rightarrow 0 \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta x}{x} \cdot \log_a e}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \log_a e = \frac{1}{x \cdot \ln a} \Rightarrow$$

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x} \cdot \log_a e = \frac{1}{x \cdot \ln a}}.$$

Зокрема, при  $a = e$ ,  $\ln e = 1$ :  $\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$ . ■

### 4) Тригонометричні функції $y = \sin x$ , $y = \cos x$ , $x \in \mathbb{R}$

□ Розв'язання. Надаємо аргументу  $x$  приросту  $\Delta x$ , тоді функція  $f(x) = \sin x$  набуде приріст  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x$ . Тому

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}, \text{ за означенням 1 маємо}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x + \Delta x + x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \left. \begin{array}{l} \text{ВІДОМО, ЩО} \\ \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \sim \frac{\Delta x}{2}, \text{ при } \Delta x \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x \Rightarrow$$

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}.$$

Аналогічно можна отримати рівність

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}.$$

### Фізичний та геометричний зміст похідної

З фізичної точки зору похідна це швидкість зміни функції в даний момент часу.

Дійсно, якщо  $S = S(t)$  — закон руху тіла, де  $S$  це шлях, який проходить тіло за час  $t$ , то  $S' = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$  — миттєва швидкість руху тіла в момент часу  $t$ ,

тобто

$$v(t) = S'(t).$$

Це механічний зміст похідної.

Для відомого закону зміни температури  $T = T(t)$  залежно від часу  $t$ ,  $T' = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta t}$  — швидкість охолодження або нагрівання тіла в момент часу  $t$ .

Якщо  $m = m(t)$  — маса речовини в момент часу  $t$ , то  $m' = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta t}$  — швидкість розпаду речовини в момент часу  $t$ .

Тому в фізичних задачах похідна має дуже широке застосування.

**Геометричний зміст похідної:** кутовий коефіцієнт дотичної до кривої  $y = f(x)$  в точці  $M_0(x_0, y_0)$  чисельно дорівнює значенню похідної цієї функції в заданій точці, тобто

$$k_{\text{дот.}} = f'(x_0) \text{ або } \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0),$$

де  $\alpha$  — кут, який утворює дотична до даної кривої в заданій точці з додатним напрямом осі  $Ox$  (рис. 1.1).

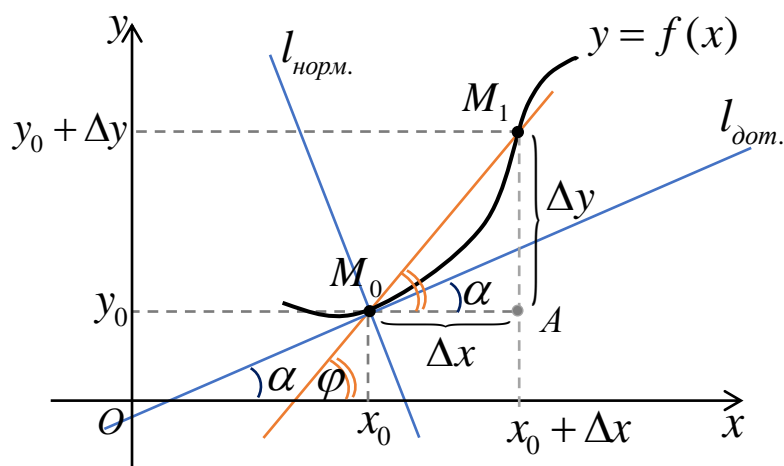


Рис. 1.1

Дійсно, нехай неперервна функція  $y = f(x)$  має неvertикальну дотичну в точці  $M_0(x_0, y_0)$ . Знайдемо кутовий коефіцієнт дотичної  $k_{dot} = \operatorname{tg} \alpha$ .

Позначимо  $\varphi$  — кут між січною  $M_0M_1$  і додатним напрямом осі  $Ox$ , тоді з прямокутного трикутника  $AM_0M_1$  маємо  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{AM_1}{AM_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ .

Якщо  $\Delta x \rightarrow 0$ , то січна  $M_0M_1$  переходить в дотичну  $l_{dot}$ , тому

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha. \text{ Отже,}$$

$$k_{dot} = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0),$$

що і треба було показати. Тоді, знаючи кутовий коефіцієнт дотичної, можна знайти рівняння дотичної до заданої кривої за формулою  $y - y_0 = k_{dot} \cdot (x - x_0)$ .

**Рівняння дотичної до кривої  $y = y(x)$  в точці  $M_0(x_0, y_0)$  має вигляд**

$$l_{dot}: y - y_0 = y'(x_0) \cdot (x - x_0). \quad (2)$$

Пряма, яка перпендикулярна до дотичної в точці дотику, називається **нормаллю** до кривої.

Рівняння нормалі можна одержати, застосувавши умову перпендикулярності двох прямих:

$$l_{\text{норм.}} \perp l_{\text{дот.}} \Rightarrow k_{\text{норм.}} \cdot k_{\text{дот.}} = -1 \Rightarrow k_{\text{норм.}} = -\frac{1}{k_{\text{дот.}}} = -\frac{1}{y'(x_0)}.$$

Отже, *рівняння нормалі до кривої*  $y = y(x)$  *в точці*  $M_0(x_0, y_0)$  *має вигляд*

$$l_{\text{норм.}} : y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)} \cdot (x - x_0) \quad (3)$$

або

$$l_{\text{норм.}} : y'(x_0) \cdot (y - y_0) = -(x - x_0). \quad (4)$$

### **Зауваження.**

- 1) Якщо в точці  $M_0(x_0, y_0)$  похідна  $y'(x_0)$  не існує, то в цій точці не існує і дотичної до кривої.
- 2) Якщо  $y'(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow x_0$ , то в точці  $M_0(x_0, y_0)$  дотична до кривої  $y = f(x)$  буде паралельна до осі  $Oy$  та має рівняння вигляду  $l_{\text{дот.}} : x - x_0 = 0$ .

## **1.2. Неперервність функції, що має похідну.**

### **Односторонні похідні**

**Теорема.** *Якщо функція  $y = f(x)$  в точці  $x$  має скінченну похідну, то в цій точці функція  $f(x)$  неперервна.*

Отже, якщо функція  $f(x)$  диференційовна в точці  $x$ , то вона неперервна в цій точці.

### **Зауваження.**

- 1) Обернене твердження, взагалі кажучи, не є правильним, тобто неперервна в точці  $x$  функція може і не мати похідної в цій точці.
- 2) Якщо похідна  $f'(x)$  існує в деякій точці  $x$ , то функція  $f'(x)$  не обов'язково є неперервною в цій точці.

**Означення 2.** Якщо функція  $f(x)$  в точці  $x$  має неперервну похідну  $f'(x)$ , то в цій точці функція  $f(x)$  називається **неперервно-диференційовною**, а крива  $y = f(x)$  — **гладкою**.

**Приклад 3.** Розглянемо функцію, яка є неперервною в точці, але не має в ній похідної:

$$y = |x + 1| = \begin{cases} x + 1, & \text{при } x \geq -1; \\ -(x + 1), & \text{при } x < -1. \end{cases}$$

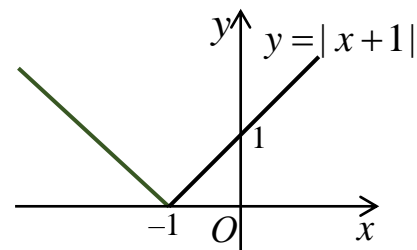


Рис. 1.2

□ Дійсно, ця функція (рис. 1.2) неперервна при  $x \in (-\infty; +\infty)$  і, зокрема, в точці  $x = -1$ .

Покажемо, що в точці  $x = -1$  вона не має похідної. Запишемо приріст функції і знайдемо відношення приросту функції до приросту аргументу

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f(-1 + \Delta x) - f(-1) = |(-1 + \Delta x) + 1| - |-1 + 1| = |\Delta x|,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1, & \text{якщо } \Delta x > 0; \\ -\frac{\Delta x}{\Delta x} = -1, & \text{якщо } \Delta x < 0. \end{cases}$$

Звідси отримаємо, що похідна  $y'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  не існує, бо функція  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

не може мати дві різні границі при  $\Delta x \rightarrow 0$  (якщо границя існує, то вона єдина). Отже, функція  $y = |x + 1|$  не має похідної в точці  $x = -1$ , а графік функції не має дотичної в точці  $O(-1; 0)$ . ■

З цього прикладу слідує необхідність введення **односторонніх похідних**. Нехай функція  $y = f(x)$  визначена в околі точки  $x$ .

**Означення 3.** **Правою похідною** від функції  $f(x)$  в точці  $x$

називається границя справа (якщо вона існує)  $\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ , де  $\Delta x > 0$ , і

позначається символом  $f'(x + 0)$ . Отже,  $f'(x + 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ .

Аналогічно визначається *ліва похідна* від функції  $f(x)$  в точці  $x$ :

$$f'(x-0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ де } \Delta x < 0.$$

**Зауважимо**, що для того, щоб функція  $f(x)$  мала похідну в точці  $x$  необхідно і достатньо, щоб в цій точці існували рівні односторонні похідні, тобто  $f'(x+0) = f'(x-0) = f'(x)$ .

Але, якщо  $f'(x+0) \neq f'(x-0)$ , то в точці  $x$  похідна  $f'(x)$  не існує. Похідної також не існує в точках розриву функції.

**Приклад 4.** Показати, що функція

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{при } x < 0; \\ -\cos x & \text{при } x \geq 0 \end{cases} \text{ неперервна в точці}$$

$(0; -1)$ , але не має в цій точці похідної.

□ Розв'язання. Спочатку покажемо, що ця функція неперервна в точці  $x = 0$ . Для цього знайдемо значення функції в цій точці та лівосторонню і правосторонню границі функції в точці  $x = 0$ :

$$f(0) = -\cos x|_{x=0} = -\cos 0 = -1;$$

$$f(-0) = \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (x < 0)}} (x-1) = 0-1 = -1;$$

$$f(+0) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (x > 0)}} (-\cos x) = -\cos 0 = -1.$$

Таким чином, оскільки  $f(-0) = f(+0) = f(0)$ , то в точці  $x = 0$  задана функція є неперервною (рис. 1.3).

Тепер доведемо, що в точці  $x = 0$  дана функція не має похідної. Так як в цій точці функція визначена зліва і справа, то знаходимо ліву та праву похідну. Для функції  $f(x) = x-1$  обчислимо ліву похідну в точці  $x = 0$

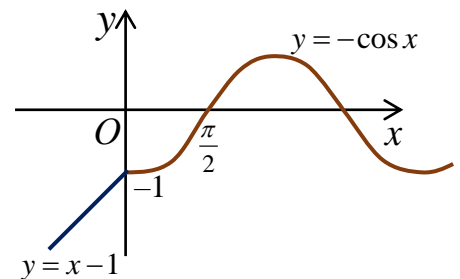


Рис. 1.3

$$f'(-0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ (\Delta x < 0)}} \frac{(0 + \Delta x - 1) - (0 - 1)}{\Delta x} = 1.$$

А для функції  $f(x) = -\cos x$  знаходимо праву похідну в точці  $x = 0$

$$\begin{aligned} f'(+0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ (\Delta x > 0)}} \frac{-\cos(\Delta x) + \cos 0}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ (\Delta x > 0)}} \frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x} = \left. \begin{array}{l} \text{при } \Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \\ 1 - \cos \Delta x \sim \frac{(\Delta x)^2}{2} \end{array} \right| = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ (\Delta x > 0)}} \frac{\frac{(\Delta x)^2}{2}}{\Delta x} = 0. \end{aligned}$$

Звідси отримаємо, що оскільки  $f'(+0) \neq f'(-0)$ , то в точці  $x = 0$  похідна  $f'(0)$  не існує. ■

**Приклад 5.** Дослідити функції на неперервність і диференційовність у вказаній точці  $x_0$ :

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} 2x^5 \sin \frac{3}{x^2}, & \text{якщо } x \neq 0; \\ 0, & \text{якщо } x = 0 \end{cases} \quad \text{при } x_0 = 0;$$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} \frac{2x-6}{x}, & \text{якщо } x \neq 3; \\ 4e^{\frac{x}{(x-3)^3}} + 1, & \\ 0, & \text{якщо } x = 3 \end{cases} \quad \text{при } x_0 = 3;$$

$$\text{в) } f(x) = \begin{cases} (x-1) \operatorname{arctg} \frac{1}{(x-1)^5}, & \text{при } x \neq 1; \\ 0, & \text{при } x = 1 \end{cases} \quad \text{в точці } x_0 = 1.$$

□ Розв'язання. а) Спочатку перевіримо, чи неперервна функція

$$f(x) = \begin{cases} 2x^5 \sin \frac{3}{x^2}, & \text{при } x \neq 0; \\ 0, & \text{при } x = 0 \end{cases} \quad \text{в точці } x = 0. \text{ Для цього знайдемо значення}$$

функції в цій точці та лівосторонню і правосторонню границі функції в точці  $x = 0$ :

$$f(0) = 0;$$

$$f(-0) = \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} 2x^5 \cdot \sin \frac{3}{x^2} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} 2x^5 \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow -0 \Rightarrow \\ \alpha(x) = 2x^5 - \text{нескінченно мала функція при } x \rightarrow -0; \\ \text{а функція } g(x) = \sin \frac{3}{x^2}, x \neq 0, \text{ обмежена, бо } \left| \sin \frac{3}{x^2} \right| \leq 1 \end{array} \right| = 0$$

(нагадаємо, що добуток обмеженої функції на нескінченно малу є нескінченно малою функцією);

$$f(+0) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} 2x^5 \cdot \sin \frac{3}{x^2} = 0,$$

як добуток обмеженої функції на нескінченно малу.

Таким чином, оскільки  $f(-0) = f(+0) = f(0)$ , то в точці  $x = 0$  задана функція є неперервною.

Тепер перевіримо, чи диференційвна в точці  $x = 0$  задана функція, тобто чи має вона в цій точці скінченну похідну:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(\Delta x)^5 \sin \frac{3}{(\Delta x)^2} - 0}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2(\Delta x)^4 \sin \frac{3}{(\Delta x)^2} = 0,$$

як добуток нескінченно малої функції на обмежену.

Отже, оскільки існує скінченна похідна  $f'(0)$ , то в точці  $x=0$  задана функція диференційвна.

**б)** Перевіримо, чи неперервна функція  $f(x) = \begin{cases} \frac{2x-6}{\frac{x}{4e^{(x-3)^3} + 1}}, & \text{якщо } x \neq 3; \\ 0, & \text{якщо } x = 3 \end{cases}$

в точці  $x = 3$ . Для цього знайдемо значення функції в цій точці та односторонні границі функції в цій точці

$$f(3) = 0;$$

$$f(3-0) = \lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{2x-6}{4e^{\frac{x}{(x-3)^3}} + 1} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{якщо } x \rightarrow 3-0, \text{ то } x-3 \rightarrow -0 \Rightarrow (x-3)^3 \rightarrow -0 \Rightarrow \\ \frac{x}{(x-3)^3} \rightarrow -\infty \Rightarrow e^{\frac{x}{(x-3)^3}} \rightarrow 0 \end{array} \right| = \frac{0}{4 \cdot 0 + 1} = 0;$$

$$f(3+0) = \lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+0} (2x-6) \cdot \frac{1}{4e^{\frac{x}{(x-3)^3}} + 1} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{якщо } x \rightarrow 3+0, \text{ то } x-3 \rightarrow +0 \Rightarrow (x-3)^3 \rightarrow +0 \Rightarrow \\ \frac{x}{(x-3)^3} \rightarrow +\infty \Rightarrow e^{\frac{x}{(x-3)^3}} \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{1}{4e^{\frac{x}{(x-3)^3}} + 1} \rightarrow 0 \end{array} \right| = 0 \cdot 0 = 0.$$

Оскільки  $f(-0) = f(+0) = f(0)$ , то в точці  $x=3$  задана функція є неперервною.

Далі перевіримо, чи диференційовна в точці  $x=3$  задана функція. Знайдемо односторонні похідні в цій точці

$$f'(3-0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\frac{2(3+\Delta x) - 6}{4e^{\frac{3+\Delta x}{((3+\Delta x)-3)^3}} + 1} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{2}{4e^{\frac{3+\Delta x}{(\Delta x)^3}} + 1} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{якщо } \Delta x \rightarrow -0, \text{ то } \frac{3+\Delta x}{(\Delta x)^3} \rightarrow -\infty \Rightarrow \\ \Rightarrow e^{\frac{3+\Delta x}{(\Delta x)^3}} \rightarrow 0 \end{array} \right| = 1;$$

$$f'(3+0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x} =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2(3+\Delta x)-6}{\frac{3+\Delta x}{4e^{((3+\Delta x)-3)^3}+1}} - 0 \\
= & \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{2(3+\Delta x)-6}{\frac{3+\Delta x}{4e^{((3+\Delta x)-3)^3}+1}} - 0 = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{2}{\frac{3+\Delta x}{4e^{(\Delta x)^3}+1}} = \\
= & \left| \begin{array}{l} \text{якщо } \Delta x \rightarrow +0, \text{ то } \frac{3+\Delta x}{(\Delta x)^3} \rightarrow +\infty \Rightarrow \\ \Rightarrow e^{\frac{3+\Delta x}{(\Delta x)^3}} \rightarrow +\infty \end{array} \right| = 0.
\end{aligned}$$

Отже, оскільки  $f'(3-0) \neq f'(3+0)$ , то похідна  $f'(3)$  не існує, а тому в цій точці дана функція є недиференційовною. ■

**в)** Перевіримо, чи неперервна функція

$$f(x) = \begin{cases} (x-1) \operatorname{arctg} \frac{1}{(x-1)^5}, & \text{при } x \neq 1; \\ 0, & \text{при } x = 1 \end{cases} \quad \text{в точці } x=1. \text{ Для цього знайдемо}$$

значення функції в цій точці та лівосторонню і правосторонню границі функції в точці  $x=1$ :

$$f(1) = 0;$$

$$\begin{aligned}
f(1-0) &= \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (x-1) \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{(x-1)^5} = \\
&= \left| \begin{array}{l} \text{якщо } x \rightarrow 1-0, \text{ то } x-1 \rightarrow -0 \Rightarrow (x-1)^5 \rightarrow -0 \\ \Rightarrow \frac{1}{(x-1)^5} \rightarrow -\infty \Rightarrow \operatorname{arctg} \frac{1}{(x-1)^5} \rightarrow -\frac{\pi}{2} \end{array} \right| = 0 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(1+0) &= \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (x-1) \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{(x-1)^5} = \\
&= \left| \begin{array}{l} \text{якщо } x \rightarrow 1+0, \text{ то } x-1 \rightarrow +0 \Rightarrow (x-1)^5 \rightarrow +0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{(x-1)^5} \rightarrow +\infty \Rightarrow \operatorname{arctg} \frac{1}{(x-1)^5} \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = 0 \cdot \frac{\pi}{2} = 0.
\end{aligned}$$

Отже, оскільки  $f(-0) = f(+0) = f(0)$ , то в точці  $x=1$  задана функція є неперервною.

Тепер перевіримо, чи диференційовна в точці  $x=1$  дана функція.

Знайдемо односторонні похідні в цій точці

$$\begin{aligned}
 f'(1-0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{((1+\Delta x)-1) \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{((1+\Delta x)-1)^5} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \operatorname{arctg} \frac{1}{(\Delta x)^5} = \\
 &= \left| \begin{array}{l} \text{якщо } \Delta x \rightarrow -0, \text{ то } \frac{1}{(\Delta x)^5} \rightarrow -\infty \\ \Rightarrow \operatorname{arctg} \frac{1}{(\Delta x)^5} \rightarrow -\frac{\pi}{2} \end{array} \right| = -\frac{\pi}{2};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f'(1+0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{((1+\Delta x)-1) \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{((1+\Delta x)-1)^5} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \operatorname{arctg} \frac{1}{(\Delta x)^5} = \\
 &= \left| \begin{array}{l} \text{якщо } \Delta x \rightarrow +0, \text{ то } \frac{1}{(\Delta x)^5} \rightarrow +\infty \\ \Rightarrow \operatorname{arctg} \frac{1}{(\Delta x)^5} \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

Отже, оскільки  $f'(1+0) \neq f'(1-0)$ , то в точці  $x=1$  похідна  $f'(1)$  не існує, а це означає, що в цій точці дана функція є недиференційовною. ■

**Приклад 6.** Дослідити диференційовність функцій

а)  $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$ ;    б)  $y = \sqrt[7]{x^3}$ .

□ Розв'язання.

а) Функція  $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$  має скінченну похідну  $f'(x) = \left(x^{\frac{2}{5}}\right)' = \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}} = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$  в

усіх точках числової осі, окрім  $x=0$ .

Покажемо, що в точці  $x = 0$  ця функція не має похідної. Обчислимо односторонні похідні

$$\begin{aligned} f'(-0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\sqrt[5]{(0 + \Delta x)^2} - \sqrt[5]{0^2}}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{1}{\sqrt[5]{\Delta x^3}} = -\infty; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\sqrt[5]{(0 + \Delta x)^2} - \sqrt[5]{0^2}}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{1}{\sqrt[5]{\Delta x^3}} = +\infty. \end{aligned}$$

Звідси отримаємо, що оскільки  $f'(0) \neq f'(-0)$ , то похідна  $f'(0)$  не існує, а це означає, що в точці  $x = 0$  дана функція є недиференційовною.

Отже, задана функція диференційовна при  $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ .

**б)** Функція  $y = \sqrt[7]{x^3}$  має скінченну похідну  $y' = \left(x^{\frac{3}{7}}\right)' = \frac{3}{7}x^{-\frac{4}{7}} = \frac{3}{7\sqrt[7]{x^4}}$  в усіх точках числової осі, окрім точки  $x = 0$ . Використовуючи означення 1, знайдемо похідну в точці  $x = 0$ :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[7]{(0 + \Delta x)^3} - \sqrt[7]{0^3}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[7]{\Delta x^4}} = +\infty,$$

а це означає, що в точці  $x = 0$  функція має нескінченну похідну, тому в цій точці функція недиференційовна.

Отже, задана функція диференційовна при  $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ . ■

## Контрольні приклади для самоперевірки

**1.1.** Використовуючи означення похідної, знайти похідну функцій:

**а)**  $y = \frac{1}{x^2} + x$ ; **б)**  $y = 3(2x - 3)^2 - 1$  в точці  $x = 1$ ; **в)**  $y = \sqrt[3]{x}$  в точці  $x = -8$ .

**1.2.** Показати, що функція  $y = 2|x| + 3$  не має похідної в точці  $x = 0$ .

**1.3.** Показати, що функція  $f(x) = \begin{cases} e^{2x} + 1, & \text{при } x > 0, \\ -x^2 + 2, & \text{при } x \leq 0 \end{cases}$  неперервна в

точці  $(0; 2)$ , але не має в цій точці похідної.

**1.4.** Дослідити функції на неперервність і диференційовність у

вказаній точці  $x_0$ : **а)**  $f(x) = \begin{cases} 3(x+1)\sin\frac{5}{x+1}, & \text{якщо } x \neq -1; \\ 0, & \text{якщо } x = -1 \end{cases}$  при  $x_0 = -1$ ;

**б)**  $f(x) = \begin{cases} \frac{(x-2)^2}{3}, & \text{при } x \neq 2; \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{(x-2)^4}{3}, & \text{в точці } x_0 = 2. \\ 0, & \text{при } x = 2 \end{cases}$

**1.5.** Дослідити диференційовність функції  $y = \sqrt[9]{x^5}$ .

### Відповіді

**1.1.** а)  $y'(x) = 1 - \frac{2}{x^3}$ . б)  $y'(1) = -24$ ; в)  $y'(-8) = \frac{1}{12}$ . **1.4.** а) функція

неперервна, але недиференційовна в точці  $x = -1$ ; б) функція неперервна і диференційовна в точці  $x = 2$ ,  $f'(2) = 0$ . **1.5.** Функція диференційовна при

$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ .

## 2. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЙ

### 2.1. Правила і формули диференціювання

На практиці функції диференціюють за наступними правилами і формулами.

**Теорема 1.** Якщо функція  $y = C$ , де  $C = \text{const}$ , то вона має похідну і похідна сталої дорівнює нулю:  $y' = (C)' = 0$ , тобто  $(\text{const})' = 0$ .

**Теорема 2.** Якщо функції  $u = u(x)$  і  $v = v(x)$  мають похідні в точці  $x$ , то функції  $u(x) \pm v(x)$ ,  $u(x) \cdot v(x)$ ,  $\frac{u(x)}{v(x)}$  (якщо  $v(x) \neq 0$ ) також мають похідні в цій точці, причому

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \quad (5)$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v', \quad (6)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}. \quad (7)$$

#### Наслідки.

- 1) Сталий множник можна винести за знак похідної, тобто

$$(C \cdot u)' = C \cdot u',$$

$$\left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{1}{C} \cdot u', \text{ де } C = \text{const}.$$

- 2) Теорема 2 має місце для будь якого скінченного числа доданків або співмножників. Наприклад,

$$(u \pm v \pm w)' = u' \pm v' \pm w',$$

$$(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'.$$

**Теорема 3 (похідна складної функції).** Якщо функція  $u = \varphi(x)$  має похідну  $u'_x$  в точці  $x_0$ , а функція  $y = f(u)$  має похідну  $y'_u$  в точці  $u_0 = \varphi(x_0)$ , то складна функція  $y = f(\varphi(x))$  має похідну  $y'_x$  в точці  $x_0$ , що знаходиться за формулою

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x. \quad (8)$$

Таким чином, для обчислення похідної складної функції потрібно похідну цієї функції по проміжному аргументу перемножити на похідну від проміжного аргументу по незалежному аргументу. Це правило також має місце, якщо проміжних аргументів більше, ніж один. Наприклад, якщо  $y = f(u)$ ,  $u = \varphi(v)$ ,  $v = \psi(x)$ , то

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x.$$

**Теорема 4 (похідна оберненої функції).**

Нехай функція  $y = f(x)$  строго монотонна на інтервалі  $(a, b)$  і існує похідна  $y'_x = f'(x) \neq 0$  при  $x \in (a, b)$ . Тоді обернена їй функція  $x = \varphi(y)$  теж має похідну  $x'_y = \varphi'(y)$  в відповідній точці  $y$ , яка обчислюється за формулою

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} \quad \text{або} \quad \varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}. \quad (9)$$

Обчислимо похідні наступних елементарних функцій:

**1) Тригонометричні функції  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $y = \operatorname{ctg} x$**

□ Розв'язання. Використаємо правило диференціювання частки

$$\begin{aligned} y' = (\operatorname{tg} x)' &= \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

Аналогічно можна отримати рівність

$$\boxed{(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}}. \quad \blacksquare$$

## 2) Гіперболічні функції $y = \operatorname{sh} x$ , $y = \operatorname{ch} x$ , $y = \operatorname{th} x$ , $y = \operatorname{cth} x$

□ Розв'язання. Відомо, що гіперболічні функції визначаються за наступними формулами

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R} \text{ – гіперболічний синус;}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R} \text{ – гіперболічний косинус або ланцюгова лінія;}$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R} \text{ – гіперболічний тангенс;}$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ – гіперболічний котангенс.}$$

Знайдемо їхні похідні, використовуючи формули (5) - (8):

$$(\operatorname{sh} x)' = \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{1}{2} \cdot ((e^x)' - (e^{-x})') = \frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x} \cdot (-1)) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x;$$

аналогічно можна отримати  $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$ ;

$$\begin{aligned} (\operatorname{th} x)' &= \left( \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \right)' = \frac{(\operatorname{sh} x)' \cdot \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \cdot (\operatorname{ch} x)'}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{відомо, що} \\ \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \end{array} \right| = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}; \end{aligned}$$

аналогічно можна отримати  $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$ . Отже,

$$\boxed{(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x; \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x; \quad (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}; \quad (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}} \quad \blacksquare$$

## 3) Обернені тригонометричні функції

□ Розв'язання.

$$1. y = \arcsin x, \quad x \in (-1; 1), \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

Використовуючи теорему 4 про диференціювання оберненої функції, знаходимо обернену їй функцію  $x = \sin y$ ,  $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ . Ця функція

монотонно зростає на проміжку  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  і існує похідна

$x'_y = (\sin y)' = \cos y \neq 0$  при  $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ , тому маємо

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \left| \begin{array}{l} \cos y > 0 \text{ при } y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} \text{ при } y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \Rightarrow$$

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

$$2. y = \arccos x, \quad x \in (-1; 1), \quad y \in (0; \pi)$$

Відомо, що  $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$ . Отже,

$$(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = 0 - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \Rightarrow$$

$$\boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

$$3. y = \operatorname{arctg} x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

Обернена їй функція  $x = \sin y$  монотонно зростає на проміжку  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  і

існує похідна  $x'_y = (\operatorname{tg} y)' = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \operatorname{tg}^2 y \neq 0$  при  $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ .

Тому з теореми 4 маємо  $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2} \Rightarrow$

$$\boxed{(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}}.$$

4.  $y = \operatorname{arcctg} x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in (0; \pi)$

Відомо, що  $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$ . Отже,

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right)' = 0 - \frac{1}{1 + x^2} = -\frac{1}{1 + x^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}}. \quad \blacksquare$$

Правила диференціювання і формули похідних основних елементарних функцій, які вище наведені та виведені, запишемо у вигляді таблиці.

### Правила диференціювання:

1.  $(C \cdot u(x))' = C \cdot u'(x)$ , де  $C = \text{const}$ ;

2.  $(u \pm v)' = u' \pm v'$ ;

3.  $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ ;

$$(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w';$$

4.  $\left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ ;

5. Якщо  $y = f(u)$ ,  $u = \varphi(x)$ , то  $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ ;

6. Якщо  $y = f(x)$ ,  $x = \varphi(y)$  – взаємно обернені функції, то  $y'_x = \frac{1}{x'_y}$ .

### Таблиця похідних:

1.  $(C)' = 0$ , де  $C = \text{const}$
2.  $(u^k)' = ku^{k-1} \cdot u'$ , де  $k \in \mathbb{R}$
3.  $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
4.  $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$
5.  $(e^u)' = e^u \cdot u'$
6.  $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$
7.  $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
8.  $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
9.  $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
10.  $(\text{tg } u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
11.  $(\text{ctg } u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
12.  $(\text{sh } u)' = \text{ch } u \cdot u'$
13.  $(\text{ch } u)' = \text{sh } u \cdot u'$
14.  $(\text{th } u)' = \frac{1}{\text{ch}^2 u} \cdot u'$
15.  $(\text{cth } u)' = -\frac{1}{\text{sh}^2 u} \cdot u'$
16.  $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
17.  $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
18.  $(\text{arctg } u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
19.  $(\text{arcctg } u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

**Приклад 7.** Обчислити похідні нижче наведених функцій:

1)  $y = 3x^5 - 2\sqrt[4]{x} + \frac{4}{\sqrt[8]{x^7}} + x^2\sqrt[5]{x} - 2x + 1$ ; 2)  $y = (x^2 - 2x)\arcsin 2x$ ;

3)  $y = \frac{3x^4 + 1 + \ln x}{5 \sin x}$ ; 4)  $y = \text{arctg}^5 \log_2(10x - 1)$ ;

5)  $S = (2t^2 - 5 \text{ctg } t + 2^t)^6$ ; 6)  $y = \frac{1}{2(6x - x^6)^5} + \frac{\sqrt[9]{(x^2 - 2x + 5)^7}}{14}$ ;

7)  $y = \frac{1}{\sqrt[5]{x \sin 3x + 2x^3}}$ ; 8)  $y = \sqrt{\text{tg } 3x^7}$ ; 9)  $y = \arcsin^4 \sqrt{2x - 1}$ ;

$$\begin{aligned}
10) \quad y &= e^{4x^2+x-3} \cos^2 7x; & 11) \quad y &= \ln(\ln \arccos e^x); & 12) \quad y &= \frac{e^{\frac{1}{x^3}}}{\operatorname{tg}(\sin 2x)}; \\
13) \quad y &= 3^{\sqrt[4]{\sin x^2 + 2\operatorname{ch}^3 x}}; & 14) \quad y &= \frac{1}{5 \sin(2 - \ln \operatorname{tg}^3 \sqrt{x})}; \\
15) \quad y &= x^2 \arccos \frac{2}{x} - 2\sqrt{x^2 - 4} + 5; & 16) \quad y &= x 3^{2 \cos 5x - 1} \operatorname{arccotg} \sqrt[4]{x}; \\
17) \quad y &= 2e^{\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}}} + \ln \frac{\sqrt[5]{x^3 + x - 1}}{\operatorname{tg} 2x} + 2 \cos 1; & 18) \quad y &= \frac{e^{-x^4} \cos \sqrt{5x}}{\operatorname{arctg}^3 2x}.
\end{aligned}$$

□ Розв'язання.

1) Використовуючи правило диференціювання суми, маємо

$$\begin{aligned}
y' &= \left( 3x^5 - 2\sqrt[4]{x} + \frac{4}{\sqrt[8]{x^7}} + x^2 \sqrt[5]{x} - 2x + 1 \right)' = \\
&= 3(x^5)' - 2\left(x^{\frac{1}{4}}\right)' + 4\left(x^{-\frac{7}{8}}\right)' + \left(x^{2+\frac{1}{5}}\right)' - 2 \cdot x' + 1' = \\
&= 3 \cdot 5x^4 - 2 \cdot \frac{1}{4} x^{\frac{1}{4}-1} + 4 \cdot \left(-\frac{7}{8} x^{-\frac{7}{8}-1}\right) + \frac{11}{5} x^{\frac{11}{5}-1} - 2 \cdot 1 + 0 = \\
&= 15x^4 - \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{4}} - \frac{7}{2} x^{-\frac{15}{8}} + \frac{11}{5} x^{\frac{6}{5}} - 2 = 15x^4 - \frac{1}{2\sqrt[4]{x^3}} - \frac{7}{2x\sqrt[8]{x^7}} + \frac{11\sqrt[5]{x^6}}{5} - 2.
\end{aligned}$$

2) За правилом диференціювання добутку маємо

$$\begin{aligned}
y' &= (x^2 - 2x)' \cdot \arcsin 2x + (x^2 - 2x) \cdot (\arcsin 2x)' = \\
&= \left((x^2)' - 2(x)'\right) \cdot \arcsin 2x + (x^2 - 2x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot (2x)' = \\
&= (2x - 2) \arcsin 2x + (x^2 - 2x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \cdot 2 = 2(x-1) \arcsin 2x + \frac{2x^2 - 4x}{\sqrt{1-4x^2}}.
\end{aligned}$$

3) Використовуючи правило диференціювання частки, одержимо

$$y' = \left( \frac{3x^4 + 1 + \ln x}{5 \sin x} \right)' = \frac{(3x^4 + 1 + \ln x)' \cdot 5 \sin x - (3x^4 + 1 + \ln x) \cdot (5 \sin x)'}{(5 \sin x)^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left(12x^3 + 0 + \frac{1}{x}\right) \cdot 5 \sin x - (3x^4 + 1 + \ln x) \cdot (5 \cos x)}{25 \sin^2 x} = \\
&= \frac{(12x^4 + 1) \sin x - x(3x^4 + 1 + \ln x) \cos x}{5x \sin^2 x}.
\end{aligned}$$

4) Функція  $y = (\arctg(\log_2(10x-1)))^5$  є складною, тому її можна представити у вигляді  $y = u^5$ , де  $u = \arctg v$ ,  $v = \log_2 z$ ,  $z = 10x-1$ . Застосуємо правило диференціювання складної функції

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_z \cdot z'_x,$$

де  $y'_u = 5u^4$ ,  $u'_v = \frac{1}{1+v^2}$ ,  $v'_z = \frac{1}{z \ln 2}$ ,  $z'_x = 10 \cdot 1 - 0 = 10$ , звідки отримаємо

$$\begin{aligned}
y'_x &= 5 \arctg^4 \log_2(10x-1) \cdot \frac{1}{1 + (\log_2(10x-1))^2} \cdot \frac{1}{(10x-1) \ln 2} \cdot 10 = \\
&= \frac{50 \arctg^4 \log_2(10x-1)}{\ln 2 \cdot (10x-1) (1 + \log_2^2(10x-1))}.
\end{aligned}$$

5)  $S = (2t^2 - 5 \operatorname{ctg} t + 2^t)^6$ . Ця функція є складною, де степенева функція  $S = u^6$  є зовнішньою функцією, а  $u = 2t^2 - 5 \operatorname{ctg} t + 2^t$  – внутрішньою. За правилом диференціювання складної функції отримаємо

$$S'_t = S'_u \cdot u'_t,$$

звідки маємо

$$\begin{aligned}
S' &= \underbrace{6(2t^2 - 5 \operatorname{ctg} t + 2^t)^5}_{\text{похідна степеневій функції}} \cdot \underbrace{(2t^2 - 5 \operatorname{ctg} t + 2^t)'}_{\text{похідна основи степеня}} = \\
&= 6(2t^2 - 5 \operatorname{ctg} t + 2^t)^5 \cdot \left(4t + 5 \cdot \frac{1}{\sin^2 t} + 2^t \ln 2\right).
\end{aligned}$$

**Зауваження.** На практиці при обчисленні похідних складних функцій її проміжні аргументи надалі записувати не будемо, також похідні треба намагатися знаходити одразу без зайвих записів.

$$\begin{aligned}
6) \quad y &= \frac{1}{2(6x - x^6)^5} + \frac{\sqrt[9]{(x^2 - 2x + 5)^7}}{14}. \\
y' &= \left( \frac{1}{2}(6x - x^6)^{-5} + \frac{1}{14}(x^2 - 2x + 5)^{\frac{7}{9}} \right)' = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \underbrace{(-5)(6x - x^6)^{-5-1}}_{\text{похідна степеня}} \cdot \underbrace{(6x - x^6)'}_{\text{похідна основи степеня}} + \frac{1}{14} \cdot \underbrace{\frac{7}{9}(x^2 - 2x + 5)^{\frac{7}{9}-1}}_{\text{похідна степеня}} \cdot \underbrace{(x^2 - 2x + 5)'}_{\text{похідна основи степеня}} = \\
&= -\frac{5}{2}(6x - x^6)^{-6} \cdot (6 - 6x^5) + \frac{1}{14} \cdot (x^2 - 2x + 5)^{-\frac{2}{9}} \cdot (2x - 2) = \\
&= -\frac{15(1 - x^5)}{(6x - x^6)^6} + \frac{x - 1}{9\sqrt[9]{(x^2 - 2x + 5)^2}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7) \quad y &= \frac{1}{\sqrt[5]{x \sin 3x + 2x^3}}. \\
y' &= \left( (x \sin 3x + 2x^3)^{-\frac{1}{5}} \right)' = -\frac{1}{5} \underbrace{(x \sin 3x + 2x^3)^{-\frac{1}{5}-1}}_{\text{похідна степеня}} \cdot \underbrace{(x \sin 3x + 2x^3)'}_{\text{похідна основи степеня}} = \\
&= -\frac{1}{5} (x \sin 3x + 2x^3)^{-\frac{6}{5}} \cdot \left( \underbrace{(x' \cdot \sin 3x + x \cdot (\sin 3x)')}_{\text{похідна добутку } x \cdot \sin 3x} + \underbrace{2 \cdot 3x^2}_{\text{похідна } 2x^3} \right) = \\
&= -\frac{1}{5} (x \sin 3x + 2x^3)^{-\frac{6}{5}} \cdot \left( \underbrace{1 \cdot \sin 3x + x \cdot \cos 3x \cdot (3x)'}_{\text{похідна добутку } x \cdot \sin 3x} + \underbrace{6x^2}_{\text{похідна } 2x^3} \right) = \\
&= -\frac{1}{5\sqrt[5]{(x \sin 3x + 2x^3)^6}} \cdot (\sin 3x + x \cdot \cos 3x \cdot 3 + 6x^2) = -\frac{\sin 3x + 3x \cos 3x + 6x^2}{5\sqrt[5]{(x \sin 3x + 2x^3)^6}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8) \quad y &= \sqrt{\operatorname{tg} 3x^7}. \\
y' &= \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg} 3x^7}} \cdot \underbrace{(\operatorname{tg} 3x^7)'}_{\text{похідна підкореневого виразу}} = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg} 3x^7}} \cdot \frac{1}{\underbrace{\cos^2 3x^7}_{\text{похідна тангенса}}} \cdot (3x^7)' =
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg} 3x^7}} \cdot \frac{1}{\cos^2 3x^7} \cdot \underbrace{21x^6}_{\substack{\text{похідна} \\ \text{аргумента} \\ \text{тангенса}}} = \frac{21x^6}{2\cos^2 3x^7 \cdot \sqrt{\operatorname{tg} 3x^7}}.$$

9)  $y = \arcsin^4 \sqrt{2x-1}.$

$$\begin{aligned} y' &= \left( (\arcsin \sqrt{2x-1})^4 \right)' = 4 \underbrace{(\arcsin \sqrt{2x-1})^3}_{\substack{\text{похідна від} \\ \text{степеня арксинуса}}} \cdot (\arcsin \sqrt{2x-1})' = \\ &= 4 (\arcsin \sqrt{2x-1})^3 \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+(\sqrt{2x-1})^2}}}_{\substack{\text{похідна арксинуса}}} \cdot \underbrace{(\sqrt{2x-1})'}_{\substack{\text{похідна від функції,} \\ \text{що стоїть під} \\ \text{знаком арксинуса}}} = \\ &= 4 (\arcsin \sqrt{2x-1})^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{1+2x-1}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{2x-1}}}_{\substack{\text{похідна від} \\ \text{квадратного кореня}}} \cdot (2x-1)' = \\ &= 4 \arcsin^3 \sqrt{2x-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x-1}} \cdot 2 = \frac{4 \arcsin^3 \sqrt{2x-1}}{\sqrt{4x^2-2x}}. \end{aligned}$$

10)  $y = e^{4x^2+x-3} \cos^2 7x.$  Використовуючи правило диференціювання добутку, маємо

$$\begin{aligned} y' &= (e^{4x^2+x-3})' \cdot \cos^2 7x + e^{4x^2+x-3} \cdot (\cos^2 7x)' = \\ &= \underbrace{e^{4x^2+x-3}}_{\substack{\text{похідна} \\ \text{показникової} \\ \text{функції}}} \cdot \underbrace{(4x^2+x-3)'}_{\substack{\text{похідна} \\ \text{показника} \\ \text{степеня}}} \cdot \cos^2 7x + e^{4x^2+x-3} \cdot \underbrace{2\cos 7x}_{\substack{\text{похідна від} \\ \text{степеня} \\ \text{косинуса}}} \cdot \underbrace{(\cos 7x)'}_{\substack{\text{похідна основи} \\ \text{степеня}}} = \\ &= e^{4x^2+x-3} \cdot \underbrace{(8x+1-0)}_{\substack{\text{похідна} \\ \text{показника} \\ \text{степеня}}} \cdot \cos^2 7x + e^{4x^2+x-3} \cdot 2\cos 7x \cdot \underbrace{(-\sin 7x)}_{\substack{\text{похідна} \\ \text{косинуса}}} \cdot \underbrace{(7x)'}_{\substack{\text{похідна} \\ \text{аргумента} \\ \text{косинуса}}} = \\ &= (8x+1)e^{4x^2+x-3} \cdot \cos^2 7x - e^{4x^2+x-3} \cdot 2\cos 7x \cdot \sin 7x \cdot 7 = \\ &= e^{4x^2+x-3} \cdot ((8x+1)\cos^2 7x - 7\sin 14x). \end{aligned}$$

11)  $y = \ln(\ln \arccos e^x).$

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{\underbrace{\ln \arccos e^x}_{\text{похідна логарифма}}} \cdot \underbrace{(\ln \arccos e^x)'}_{\substack{\text{похідна від функції,} \\ \text{що стоїть під} \\ \text{знаком логарифма}}} = \frac{1}{\ln \arccos e^x} \cdot \frac{1}{\underbrace{\arccos e^x}_{\text{похідна логарифма}}} \cdot \underbrace{(\arccos e^x)'}_{\substack{\text{похідна} \\ \text{аргумента} \\ \text{логарифма}}} = \\
&= \frac{1}{\ln \arccos e^x} \cdot \frac{1}{\arccos e^x} \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}}\right)}_{\substack{\text{похідна} \\ \text{арккосинуса}}} \cdot \underbrace{(e^x)'}_{\substack{\text{похідна} \\ \text{аргумента} \\ \text{арккосинуса}}} = \\
&= -\frac{1}{\ln \arccos e^x} \cdot \frac{1}{\arccos e^x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}} \cdot e^x = \frac{e^x}{\arccos e^x \cdot \ln \arccos e^x \cdot \sqrt{1-e^{2x}}}.
\end{aligned}$$

12)  $y = \frac{e^{\frac{1}{x^3}}}{\text{tg}(\sin 2x)}$ . Використовуючи правило диференціювання частки,

одержимо

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{\left(\frac{1}{e^{x^3}}\right)' \cdot \text{tg}(\sin 2x) - e^{\frac{1}{x^3}} \cdot (\text{tg}(\sin 2x))'}{\text{tg}^2(\sin 2x)} = \\
&= \frac{e^{\frac{1}{x^3}} (x^{-3})' \cdot \text{tg}(\sin 2x) - e^{\frac{1}{x^3}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \sin 2x} \cdot (\sin 2x)'}{\text{tg}^2(\sin 2x)} = \\
&= \frac{e^{\frac{1}{x^3}} \cdot (-3x^{-4}) \cdot \text{tg}(\sin 2x) - e^{\frac{1}{x^3}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \sin 2x} \cdot (\cos 2x \cdot 2)}{\text{tg}^2(\sin 2x)} = \\
&= e^{\frac{1}{x^3}} \cdot \frac{-\frac{3}{x^4} \cdot \text{tg}(\sin 2x) - \frac{2 \cos 2x}{\cos^2 \sin 2x}}{\text{tg}^2(\sin 2x)} = e^{\frac{1}{x^3}} \left( \frac{-3 \cdot \text{ctg}(\sin 2x)}{x^4} + \frac{2 \cos 2x}{\sin^2(\sin 2x)} \right).
\end{aligned}$$

13) Функція  $y = 3^{\sqrt[4]{\sin x^2 + 2\text{ch}^3 x}}$  є складною, де показникова функція  $y = 3^u$  є зовнішньою функцією, а  $u = \sqrt[4]{\sin x^2 + 2\text{ch}^3 x}$  – внутрішньою. За правилом диференціювання складної функції отримаємо  $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ , тому

$$\begin{aligned}
y' &= 3^{\sqrt[4]{\sin x^2 + 2\operatorname{ch}^3 x}} \ln 3 \cdot \left( (\sin x^2 + 2\operatorname{ch}^3 x)^{\frac{1}{4}} \right)' = \\
&= 3^{\sqrt[4]{\sin x^2 + 2\operatorname{ch}^3 x}} \ln 3 \cdot \frac{1}{4} (\sin x^2 + 2\operatorname{ch}^3 x)^{-\frac{3}{4}} \cdot (\sin x^2 + 2\operatorname{ch}^3 x)' = \\
&= 3^{\sqrt[4]{\sin x^2 + 2\operatorname{ch}^3 x}} \ln 3 \cdot \frac{1}{4} (\sin x^2 + 2\operatorname{ch}^3 x)^{-\frac{3}{4}} \cdot (\cos x^2 \cdot (x^2)' + 6\operatorname{ch}^2 x \cdot (\operatorname{ch} x)') = \\
&= 3^{\sqrt[4]{\sin x^2 + 2\operatorname{ch}^3 x}} \ln 3 \cdot \frac{1}{4} (\sin x^2 + 2\operatorname{ch}^3 x)^{-\frac{3}{4}} \cdot (\cos x^2 \cdot 2x + 6\operatorname{ch}^2 x \cdot \operatorname{sh} x) = \\
&= \frac{\ln 3 \cdot 3^{\sqrt[4]{\sin x^2 + 2\operatorname{ch}^3 x}} (x \cos x^2 + 3\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^2 x)}{2\sqrt[4]{(\sin x^2 + 2\operatorname{ch}^3 x)^3}}.
\end{aligned}$$

$$14) \quad y = \frac{1}{5 \sin(2 - \ln \operatorname{tg}^3 \sqrt{x})}.$$

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{5} \left( (\sin(2 - \ln \operatorname{tg}^3 \sqrt{x}))^{-1} \right)' = \frac{1}{5} \cdot (-1) \cdot (\sin(2 - \ln \operatorname{tg}^3 \sqrt{x}))^{-2} \cdot (\sin(2 - \ln \operatorname{tg}^3 \sqrt{x}))' = \\
&= -\frac{1}{5} (\sin(2 - \ln \operatorname{tg}^3 \sqrt{x}))^{-2} \cdot \cos(2 - \ln \operatorname{tg}^3 \sqrt{x}) \cdot (2 - \ln \operatorname{tg}^3 \sqrt{x})' = \\
&= -\frac{\cos(2 - \ln \operatorname{tg}^3 \sqrt{x})}{5 \sin^2(2 - \ln \operatorname{tg}^3 \sqrt{x})} \cdot \left( 0 - \frac{1}{\operatorname{tg}^3 \sqrt{x}} \cdot (\operatorname{tg}^3 \sqrt{x})' \right) = \\
&= \frac{\cos(2 - \ln \operatorname{tg}^3 \sqrt{x})}{5 \sin^2(2 - \ln \operatorname{tg}^3 \sqrt{x})} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^3 \sqrt{x}} \cdot (3 \operatorname{tg}^2 \sqrt{x} \cdot (\operatorname{tg} \sqrt{x})') = \\
&= \frac{\cos(2 - \ln \operatorname{tg}^3 \sqrt{x})}{5 \sin^2(2 - \ln \operatorname{tg}^3 \sqrt{x})} \cdot \frac{3}{\operatorname{tg} \sqrt{x}} \cdot \left( \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = \\
&= \frac{3 \cos(2 - \ln \operatorname{tg}^3 \sqrt{x})}{5 \sqrt{x} \sin 2\sqrt{x} \cdot \sin^2(2 - \ln \operatorname{tg}^3 \sqrt{x})}.
\end{aligned}$$

$$15) \quad y = x^2 \arccos \frac{2}{x} - 2\sqrt{x^2 - 4} + 5.$$

$$y' = (x^2)' \arccos \frac{2}{x} + x^2 \left( \arccos \frac{2}{x} \right)' - 2(\sqrt{x^2 - 4})' + (5)' =$$

$$\begin{aligned}
&= 2x \arccos \frac{2}{x} + x^2 \left( -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2}{x}\right)^2}} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)' \right) - 2 \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 4}} \cdot (x^2 - 4)' + 0 = \\
&= 2x \arccos \frac{2}{x} + x^2 \left( -\frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} \cdot \left(-\frac{2}{x^2}\right) \right) - \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} \cdot (2x - 0) = \\
&= 2x \arccos \frac{2}{x} + \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 4}} - \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 4}} = 2x \arccos \frac{2}{x}.
\end{aligned}$$

**16)**  $y = x 3^{2 \cos 5x - 1} \operatorname{arctg} \sqrt[4]{x}.$

$$\begin{aligned}
y' &= (x)' \cdot 3^{2 \cos 5x - 1} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt[4]{x} + x \cdot (3^{2 \cos 5x - 1})' \cdot \operatorname{arctg} \sqrt[4]{x} + x \cdot 3^{2 \cos 5x - 1} \cdot (\operatorname{arctg} \sqrt[4]{x})' = \\
&= 1 \cdot 3^{2 \cos 5x - 1} \operatorname{arctg} \sqrt[4]{x} + x \cdot 3^{2 \cos 5x - 1} \ln 3 \cdot (-2 \sin 5x \cdot 5) \cdot \operatorname{arctg} \sqrt[4]{x} + \\
&+ x 3^{2 \cos 5x - 1} \cdot \left( -\frac{1}{1 + (\sqrt[4]{x})^2} \cdot \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} \right) = \\
&= 3^{2 \cos 5x - 1} \left( \operatorname{arctg} \sqrt[4]{x} - 10 \ln 3 \cdot x \sin 5x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt[4]{x} - \frac{x}{4 \sqrt[4]{x^3} (1 + \sqrt{x})} \right).
\end{aligned}$$

**17)**  $y = 2e^{\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}}} + \ln \frac{\sqrt[5]{x^3 + x - 1}}{\operatorname{tg} 2x} + 2 \cos 1.$

Оскільки  $\ln \frac{\sqrt[5]{x^3 + x - 1}}{\operatorname{tg} 2x} = \ln(x^3 + x - 1)^{\frac{1}{5}} - \ln \operatorname{tg} 2x = \frac{1}{5} \ln(x^3 + x - 1) - \ln \operatorname{tg} 2x$ , то

$$\begin{aligned}
y' &= 2 \left( e^{\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}}} \right)' + \frac{1}{5} (\ln(x^3 + x - 1))' - (\ln \operatorname{tg} 2x)' + (2 \cos 1)' = \\
&= 2e^{\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}}} \cdot \frac{(\sqrt{x-2})' (\sqrt{x+2}) - (\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})'}{(\sqrt{x+2})^2} + \\
&+ \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{x^3 + x - 1} \cdot (x^3 + x - 1)' - \frac{1}{\operatorname{tg} 2x} \cdot (\operatorname{tg} 2x)' + 0 =
\end{aligned}$$

$$= 2e^{\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+2}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} (\sqrt{x}+2) - (\sqrt{x}-2) \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{5(x^3+x-1)} \cdot (3x^2+1) -$$

$$- \frac{1}{\operatorname{tg} 2x} \cdot \frac{1}{\cos^2 2x} \cdot 2 = \frac{4e^{\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+2}}}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^2} + \frac{3x^2+1}{5(x^3+x-1)} - \frac{4}{\sin 4x}.$$

18)  $y = \frac{e^{-x^4} \cos \sqrt{5x}}{\operatorname{arctg}^3 2x}.$

$$y' = \frac{(e^{-x^4} \cos \sqrt{5x})' \cdot \operatorname{arctg}^3 2x - e^{-x^4} \cos \sqrt{5x} \cdot (\operatorname{arctg}^3 2x)'}{\operatorname{arctg}^6 2x} =$$

$$= \frac{\left( (e^{-x^4})' \cos \sqrt{5x} + e^{-x^4} (\cos \sqrt{5x})' \right) \cdot \operatorname{arctg}^3 2x - e^{-x^4} \cos \sqrt{5x} \cdot \frac{3 \operatorname{arctg}^2 2x \cdot 2}{1+4x^2}}{\operatorname{arctg}^6 2x} =$$

$$= \frac{\left[ \left( e^{-x^4} \cdot (-4x^3) \cdot \cos \sqrt{5x} + e^{-x^4} \cdot (-\sin \sqrt{5x}) \cdot \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{x}} \right) \cdot \operatorname{arctg}^3 2x - \right.}{- e^{-x^4} \cos \sqrt{5x} \cdot \frac{6 \operatorname{arctg}^2 2x}{1+4x^2}} \left. \right] / \operatorname{arctg}^6 2x =$$

$$= - \frac{e^{-x^4} \left( (1+4x^2) \operatorname{arctg} 2x (8x^3 \sqrt{x} \cos \sqrt{5x} + \sqrt{5} \sin \sqrt{5x}) + 12\sqrt{x} \cos \sqrt{5x} \right)}{2\sqrt{x}(1+4x^2) \operatorname{arctg}^4 2x}. \blacksquare$$

**Приклад 8.**

1.  $z(t) = \frac{4}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{(t^3-t-2)e^{t^2}}{3}$ ; знайти  $z'(0)$ .

□ Розв'язання. Знаходимо похідну

$$z'(t) = 4 \cdot \left( (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \right)' + \frac{1}{3} \left( (t^3-t-2)e^{t^2} \right)' =$$

$$= 4 \left( -\frac{1}{2} \right) (1-t^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2t) + \frac{1}{3} \left( (3t^2-1) \cdot e^{t^2} + (t^3-t-2) \cdot e^{t^2} \cdot 2t \right) =$$

$$= \frac{4t}{\sqrt{(1-t^2)^3}} + \frac{e^{t^2}}{3}(2t^4 + t^2 - 4t - 1),$$

звідки маємо

$$z'(0) = \frac{4 \cdot 0}{\sqrt{(1-0^2)^3}} + \frac{e^{0^2}}{3}(2 \cdot 0^4 + 0^2 - 4 \cdot 0 - 1) = -\frac{1}{3}. \quad \blacksquare$$

2.  $\rho(\varphi) = \sin^4 \varphi \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi\sqrt{2} \cos 3\varphi}{4}\right)$ ; знайти  $\rho'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ .

□ Розв'язання. Знаходимо похідну

$$\begin{aligned} \rho'(\varphi) &= (\sin^4 \varphi)' \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi\sqrt{2} \cos 3\varphi}{4}\right) + \sin^4 \varphi \cdot \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi\sqrt{2} \cos 3\varphi}{4}\right)\right)' = \\ &= 4\sin^3 \varphi \cos \varphi \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi\sqrt{2} \cos 3\varphi}{4}\right) + \sin^4 \varphi \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi\sqrt{2} \cos 3\varphi}{4}\right)} \cdot \frac{\pi\sqrt{2}}{4} (-\sin 3\varphi \cdot 3) = \\ &= \sin^3 \varphi \left[ 4\cos \varphi \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi\sqrt{2} \cos 3\varphi}{4}\right) - \frac{\pi 3\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sin \varphi \cdot \sin 3\varphi}{\cos^2\left(\frac{\pi\sqrt{2} \cos 3\varphi}{4}\right)} \right], \end{aligned}$$

звідки отримаємо

$$\begin{aligned} \rho'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \sin^3 \frac{\pi}{4} \cdot \left[ 4\cos \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi\sqrt{2} \cos \frac{3\pi}{4}}{4}\right) - \frac{\pi 3\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{3\pi}{4}}{\cos^2\left(\frac{\pi\sqrt{2} \cos \frac{3\pi}{4}}{4}\right)} \right] = \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \left[ 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi 3\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)} \right] = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \left[ 2\sqrt{2} \cdot (-1) - \frac{\pi 3\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \right] = -1 - \frac{3\pi}{8}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Приклад 9.** Довести, що функція  $y = \frac{\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2}$  задовольняє

співвідношенню  $(1+4x^2)^2 y' + 8x(1+4x^2)y = 2$ .

□ Розв'язання. Знаходимо похідну

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\operatorname{arctg} 2x)'(1+4x^2) - \operatorname{arctg} 2x(1+4x^2)'}{(1+4x^2)^2} = \\ &= \frac{\frac{1}{1+(2x)^2} \cdot 2 \cdot (1+4x^2) - \operatorname{arctg} 2x \cdot 8x}{(1+4x^2)^2} = \frac{2 - 8x \operatorname{arctg} 2x}{(1+4x^2)^2}, \end{aligned}$$

далі підставляємо значення  $y$  та  $y'$  в задане співвідношення:

$$(1+4x^2)^2 \cdot \frac{2 - 8x \operatorname{arctg} 2x}{(1+4x^2)^2} + 8x(1+4x^2) \cdot \frac{\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2} = 2,$$

тобто

$$2 - 8x \operatorname{arctg} 2x + 8x \operatorname{arctg} 2x = 2 \Rightarrow 0 \equiv 0.$$

Це доводить, що функція задовольняє заданому співвідношенню. ■

**Приклад 10.**

1.  $x = 5 - \sin 2y + 3y^7$ ; виразити  $\frac{dy}{dx}$  через  $y$ .

□ Розв'язання. Використовуючи теорему 4 про диференціювання оберненої функції, знаходимо похідну за формулою (9):

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}.$$

Оскільки

$$x'_y = \frac{dx}{dy} = (5 - \sin 2y + 3y^7)'_y = -2 \cos 2y + 21y^6,$$

то

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{21y^6 - 2 \cos 2y}. \quad \blacksquare$$

2. Знайти похідну функції  $y = \operatorname{arcsec} x$ .

□ Розв'язання. Обернена їй функція  $x = \sec y$  (нагадаємо, що  $\sec y = \frac{1}{\cos y}$ ),

тобто  $x = \frac{1}{\cos y}$ . Знайдемо похідну від обох частин останньої рівності по

змінній  $x$ :

$$(x)'_x = \left( \frac{1}{\cos y} \right)'_x \Leftrightarrow 1 = -\frac{1}{\cos^2 y} (-\sin y) \cdot y' \Leftrightarrow y' = \frac{\cos^2 y}{\sin y},$$

де за умовою  $\frac{1}{\cos y} = x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos y = \frac{1}{x}; \sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}.$$

Отже,  $y' = \frac{x}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}}$ .

Шукану похідну також можна було знайти за допомогою теореми 4 про диференціювання оберненої функції:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}, \text{ де } x = \frac{1}{\cos y}; x'_y = -\frac{1}{\cos^2 y} (-\sin y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'_x = \frac{\cos^2 y}{\sin y} = \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}}. \quad \blacksquare$$

3.  $s = e^{\arccos \frac{2-t^3}{2+t^3}}$ . Виразити  $\frac{dt}{ds}$  через  $t$ ; через  $s$ .

□ Розв'язання. За теоремою про диференціювання оберненої функції

знаходимо  $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}},$

$$\frac{ds}{dt} = \left( e^{\arccos \frac{2-t^3}{2+t^3}} \right)'_t = e^{\arccos \frac{2-t^3}{2+t^3}} \cdot \left( -\frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{2-t^3}{2+t^3} \right)^2}} \right) \cdot \frac{-3t^2(2+t^3) - (2-t^3)3t^2}{(2+t^3)^2} =$$

$$= e^{\arccos \frac{2-t^3}{2+t^3}} \cdot \sqrt{\frac{(2+t^3)^2}{(2+t^3)^2 - (2-t^3)^2}} \cdot \frac{12t^2}{(2+t^3)^2} = e^{\arccos \frac{2-t^3}{2+t^3}} \cdot \frac{6\sqrt{t}}{\sqrt{2}(2+t^3)} \Rightarrow$$

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{e^{\arccos \frac{2-t^3}{2+t^3}} \cdot \frac{6\sqrt{t}}{\sqrt{2}(2+t^3)}} = e^{-\arccos \frac{2-t^3}{2+t^3}} \cdot \frac{\sqrt{2}(2+t^3)}{6\sqrt{t}}.$$

Виразимо тепер  $\frac{dt}{ds}$  через  $s$ :

$$\frac{dt}{ds} = e^{-\arccos \frac{2-t^3}{2+t^3}} \cdot \frac{\sqrt{2}(2+t^3)}{6\sqrt{t}} = \left| \begin{array}{l} \text{за умовою } s = e^{\arccos \frac{2-t^3}{2+t^3}} \\ \Rightarrow t = \sqrt[3]{\frac{2-2\cos \ln s}{1+\cos \ln s}} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{s} \cdot \frac{\sqrt{2} \left( 2 + \frac{2-2\cos \ln s}{1+\cos \ln s} \right)}{6 \cdot \sqrt[6]{\frac{2-2\cos \ln s}{1+\cos \ln s}}} = \frac{2\sqrt{2}}{3s(1+\cos \ln s) \cdot \sqrt[6]{\frac{2(1-\cos \ln s)}{1+\cos \ln s}}} =$$

$$= \frac{2\sqrt[3]{2}}{3s(1+\cos \ln s)^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[6]{(1+\cos \ln s)(1-\cos \ln s)}} = \frac{2\sqrt[3]{2}}{3s \cdot \sqrt[3]{(1+\cos \ln s)^2 \sin \ln s}}. \quad \blacksquare$$

## 2.2. Диференціювання неявно заданої функції

Нагадаємо поняття явної і неявної функції.

Аналітичний закон залежності між  $x$  та  $y$ , який поданий у вигляді  $y = f(x)$ , де  $x$  — незалежна, а  $y$  — залежна змінна, називають явно заданою функцією  $y$  від аргументу  $x$ .

Кажуть, що функція  $y = f(x)$  *задана неявно* рівнянням

$$F(x; y) = 0, \quad (10)$$

якщо виконується тотожність  $F(x; f(x)) \equiv 0$ . При цьому, зазвичай рівняння (10) не розв'язне відносно змінної  $y$ .

Наприклад, рівняння кола  $x^2 + y^2 = r^2$  являє собою неявну функцію, але можна знайти і явний вираз цієї функції, яка визначається двома функціями:  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$  — рівняння півкола з центром у початку координат, що розташоване у верхній півплощині, та  $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$  — півколо з центром у початку координат, що розташоване у нижній півплощині.

Поняття неявної функції ширше, ніж поняття явної функції, бо не завжди рівняння  $F(x; y) = 0$  можна розв'язати відносно змінної  $y$  або  $x$ . Наприклад, рівність  $2x^4 y^3 + \sin(2x + y) = 2x - 1$  не можна розв'язати ні відносно змінної  $y$ , ні відносно змінної  $x$ .

Зауважимо, що рівність  $y = f(x)$  записана у вигляді

$$y - f(x) = 0$$

вже має форму неявної функції.

**Правило.** Для того, щоб знайти похідну функції, яка задана неявно, потрібно ліву і праву частини рівності (10) продиференціювати по змінній  $x$ , пам'ятаючи, що  $y = f(x)$ . Одержане рівняння розв'язати відносно  $y'$ .

Похідна неявної функції виражається через змінну  $x$  і функцію  $y$ .

**Приклад 11.** Знайти похідну  $y'$  функцій, заданих неявно.

1.  $2x^4 y^3 + \sin(2x + y) = 2x - 1$

□ Розв'язання. Функція  $y$  задана неявно, тому продиференціюємо по змінній  $x$  обидві частини заданого рівняння:

$$\left(2x^4 y^3 + \sin(2x + y)\right)'_x = (2x - 1)'_x, \text{ де } y = y(x);$$

$$2(x^4)' y^3 + 2x^4 (y^3)' + \cos(2x + y) \cdot (2x' + y') = 2;$$

$$8x^3 y^3 + 2x^4 \cdot 3y^2 \cdot y' + \cos(2x + y) \cdot (2 + y') = 2;$$

$$6x^4 y^2 y' + y' \cos(2x + y) = 2 - 8x^3 y^3 - 2\cos(2x + y),$$

звідси виражаємо похідну

$$y' = \frac{2 - 8x^3 y^3 - 2 \cos(2x + y)}{6x^4 y^2 + \cos(2x + y)}.$$

■

**Зауважимо**, що в прикладах при обчисленні похідної неявної функції, де буде зустрічатись як елемент функція від  $y$  (в даному прикладі це  $y^3$  або  $\sin(2x + y)$ ), цей вираз потрібно диференціювати по змінній  $x$  за правилом диференціювання складної функції.

$$2. \quad \arccos \frac{y}{x} = \ln \sqrt[5]{(x^2 - y^2)^3}.$$

□ Розв'язання. Продиференціюємо по змінній  $x$  обидві частини заданого рівняння:

$$\left( \arccos \frac{y}{x} \right)'_x = \left( \ln (x^2 - y^2)^{\frac{3}{5}} \right)'_x \Rightarrow \left( \arccos \frac{y}{x} \right)'_x = \left( \frac{3}{5} \ln (x^2 - y^2) \right)'_x, \text{ де } y = y(x);$$

$$-\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{x^2 - y^2} \cdot (x^2 - y^2)';$$

$$-\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot \frac{y' \cdot x - y \cdot 1}{x^2} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{x^2 - y^2} \cdot (2x - 2yy');$$

$$-5\sqrt{x^2 - y^2} \cdot (y'x - y) = 6x \cdot (x - yy');$$

$$6xyy' - 5y'x\sqrt{x^2 - y^2} = 6x^2 - 5y\sqrt{x^2 - y^2};$$

$$y' = \frac{6x^2 - 5y\sqrt{x^2 - y^2}}{6xy - 5x\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

■

$$3. \quad \sin y^3 - x2^{xy} = \frac{1}{y}.$$

□ Розв'язання. Продиференціюємо по змінній  $x$  обидві частини заданого рівняння:

$$\left(\sin y^3 - x2^{xy}\right)'_x = \left(\frac{1}{y}\right)'_x, \text{ пам'ятаючи, що } y = y(x);$$

$$\cos y^3 \cdot (y^3)' - (x' \cdot 2^{xy} + x \cdot (2^{xy})') = (y^{-1})';$$

$$\cos y^3 \cdot 3y^2 \cdot y' - (1 \cdot 2^{xy} + x \cdot 2^{xy} \ln 2 \cdot (xy)') = -y^{-2} \cdot y';$$

$$3y^2 y' \cos y^3 - 2^{xy} - x \cdot 2^{xy} \ln 2 \cdot (1 \cdot y + x \cdot y') = -\frac{y'}{y^2};$$

$$3y^4 y' \cos y^3 - y^2 2^{xy} - \ln 2 \cdot xy^3 2^{xy} - \ln 2 \cdot x^2 y^2 2^{xy} y' + y' = 0;$$

$$y'(3y^4 \cos y^3 - \ln 2 \cdot x^2 y^2 2^{xy} + 1) = y^2 2^{xy} + \ln 2 \cdot xy^3 2^{xy};$$

$$y' = \frac{y^2 2^{xy} + \ln 2 \cdot xy^3 2^{xy}}{3y^4 \cos y^3 - \ln 2 \cdot x^2 y^2 2^{xy} + 1}.$$

■

### 2.3. Логарифмічне диференціювання

Іноді при знаходженні похідної зручно задану функцію спочатку прологарифмувати за будь якою основою (наприклад, за основою  $e$ ), а потім знайти похідну як від неявно заданої функції. Така операція називається **логарифмічним диференціюванням**, а похідна – логарифмічною (не плутати з похідною від логарифмічної функції).

Застосовують логарифмічне диференціювання для обчислення похідних степеневих-показникових функцій  $y = u^v$ , де  $u = u(x) > 0$ ,  $v = v(x)$  — задані і диференційовні по  $x$  функції.

Також цей метод доцільно застосовувати для функцій, які містять багато співмножників (включаючи дроби).

**Приклад 12.** Знайти похідні  $y'$  функцій.

$$1. \quad y = \frac{e^{2x} \sqrt[4]{2x-1} (x^3+5)^5}{x^5 \sqrt{(x^2+x-1)^2}}.$$

□ Розв'язання. Похідну заданої функції можна знайти за правилом диференціювання частки, але в даному випадку цей спосіб громіздкий, тому раціональніше застосувати логарифмічне диференціювання. Прологарифмуємо задану рівність

$$\ln y = \ln \frac{e^{2x}(2x-1)^{\frac{1}{4}}(x^3+5)^5}{x(x^2+x-1)^{\frac{2}{5}}}$$

і застосуємо властивості логарифмічної функції (а саме  $\ln a^k = k \ln a$ ;  $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ ;  $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ ):

$$\ln y = 2x + \frac{1}{4} \ln(2x-1) + 5 \ln(x^3+5) - \ln x - \frac{2}{5} \ln(x^2+x-1).$$

Далі знаходимо похідні по змінній  $x$  від обох частин отриманої рівності:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2x-1} \cdot 2 + 5 \frac{1}{x^3+5} \cdot 3x^2 - \frac{1}{x} - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{x^2+x-1} \cdot (2x^2+1),$$

звідси виражаємо похідну

$$y' = y \left( 2 + \frac{2}{4(2x-1)} + \frac{15x^2}{x^3+5} - \frac{1}{x} - \frac{2(2x^2+1)}{5(x^2+x-1)} \right).$$

Підставимо в останню рівність замість  $y$  функцію, яка задана в умові, а саме

$$y = \frac{e^{2x} \sqrt[4]{2x-1} (x^3+5)^5}{x^5 \sqrt{(x^2+x-1)^2}}, \text{ і отримаємо}$$

$$y' = \frac{e^{2x} \sqrt[4]{2x-1} (x^3+5)^5}{x^5 \sqrt{(x^2+x-1)^2}} \left( 2 + \frac{2}{4(2x-1)} + \frac{15x^2}{x^3+5} - \frac{1}{x} - \frac{2(2x^2+1)}{5(x^2+x-1)} \right). \quad \blacksquare$$

2.  $y = (x^2+1)^{\cos 2x}$ .

□ Розв'язання. Це степенево-показникова функція. Прологарифмуємо задану рівність

$$\ln y = \ln(x^2+1)^{\cos 2x} \Rightarrow \ln y = \cos 2x \ln(x^2+1).$$

Далі знаходимо похідні по змінній  $x$  від обох частин отриманої рівності:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = -\sin 2x \cdot 2 \cdot \ln(x^2 + 1) + \cos 2x \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x,$$

звідки

$$y' = y \left( \frac{2x \cos 2x}{x^2 + 1} - 2 \sin 2x \ln(x^2 + 1) \right), \text{ де з умови задачі } y = (x^2 + 1)^{\cos 2x};$$

$$\Rightarrow y' = (x^2 + 1)^{\cos 2x} \left( \frac{2x \cos 2x}{x^2 + 1} - 2 \sin 2x \ln(x^2 + 1) \right). \quad \blacksquare$$

**3.**  $y = x^{(2x)^{3x}}$ .

□ Розв'язання. Прологарифмуємо задану рівність

$$\ln y = \ln x^{(2x)^{3x}} \Rightarrow \ln y = (2x)^{3x} \ln x.$$

Далі знову прологарифмуємо отриману рівність

$$\ln \ln y = \ln((2x)^{3x} \ln x) \Rightarrow \ln \ln y = 3x \ln 2x + \ln \ln x$$

і знаходимо похідні по змінній  $x$  від обох частин останньої рівності:

$$\frac{1}{\ln y} \cdot \frac{1}{y} \cdot y' = 3 \cdot \ln 2x + 3x \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2 + \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x},$$

звідки

$$y' = y \ln y \left( 3 \ln 2x + 3 + \frac{1}{x \ln x} \right);$$

$$y' = x^{(2x)^{3x}} \cdot (2x)^{3x} \ln x \left( 3 \ln 2x + 3 + \frac{1}{x \ln x} \right). \quad \blacksquare$$

**4.**  $y^{\sin x} = x^{\sin y}$ .

□ Розв'язання. Ця функція задана неявно. Для того, щоб знайти похідну  $y'_x$  спочатку прологарифмуємо задану рівність

$$\ln y^{\sin x} = \ln x^{\sin y} \Rightarrow \sin x \ln y = \sin y \ln x,$$

після цього продиференціюємо по  $x$  обидві частини отриманої рівності, пам'ятаючи, що  $y = y(x)$ :

$$(\sin x \ln y)'_x = (\sin y \ln x)'_x;$$

$$\cos x \cdot \ln y + \sin x \cdot \frac{1}{y} \cdot y' = \cos y \cdot y' \cdot \ln x + \sin y \cdot \frac{1}{x};$$

$$xy' \sin x - xy' \cos y \ln x = y \sin y - xy \cos x \ln y.$$

Остаточно виражаємо шукану похідну

$$y'_x = \frac{y(\sin y - x \cos x \ln y)}{x(\sin x - y \cos y \ln x)}.$$

■

5.  $(\sin xy)^{e^y} = (\ln x)^{\frac{x}{y}}.$

□ Розв'язання. Ця функція задана неявно. Для того, щоб знайти похідну  $y'_x$  спочатку прологарифмуємо задану рівність

$$\ln(\sin xy)^{e^y} = \ln(\ln x)^{\frac{x}{y}} \Rightarrow e^y \ln(\sin xy) = \frac{x}{y} \ln(\ln x),$$

після цього продиференціюємо по  $x$  обидві частини отриманої рівності, пам'ятаючи, що  $y = y(x)$ :

$$\left( e^y \ln(\sin xy) \right)'_x = \left( \frac{x \ln(\ln x)}{y} \right)'_x;$$

$$(e^y)' \cdot \ln(\sin xy) + e^y \cdot (\ln(\sin xy))'_x = \frac{(x \ln(\ln x))'_x \cdot y - x \ln(\ln x) \cdot y'}{y^2};$$

$$e^y \cdot y' \cdot \ln(\sin xy) + e^y \frac{1}{\sin xy} \cdot \cos xy \cdot (1 \cdot y + x \cdot y') =$$

$$= \frac{\left( 1 \cdot \ln(\ln x) + x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \right) \cdot y - x \ln(\ln x) \cdot y'}{y^2} \Rightarrow$$

$$y' e^y \ln(\sin xy) + y e^y \operatorname{ctg} xy + xy' e^y \operatorname{ctg} xy =$$

$$= \frac{(\ln x \cdot \ln(\ln x) + 1) \cdot y - \ln x \cdot x \ln(\ln x) \cdot y'}{\ln x \cdot y^2} \Rightarrow$$

$$y^2 \ln x \cdot y' e^y \ln(\sin xy) + y^2 \ln x \cdot y e^y \operatorname{ctg} xy + y^2 \ln x \cdot xy' e^y \operatorname{ctg} xy =$$

$$= (\ln x \cdot \ln(\ln x) + 1) \cdot y - y' x \ln x \cdot \ln(\ln x) \Rightarrow$$

$$y' y^2 \ln x \cdot e^y \ln(\sin xy) + y' x y^2 \ln x \cdot e^y \operatorname{ctg} xy + x \ln x \cdot \ln(\ln x) \cdot y' =$$

$$= y \ln x \cdot \ln(\ln x) + y - y^3 \ln x \cdot e^y \operatorname{ctg} xy.$$

Остаточно виражаємо шукану похідну

$$y'_x = \frac{y \ln x \cdot \ln(\ln x) + y - y^3 \ln x \cdot e^y \operatorname{ctg} xy}{y^2 \ln x \cdot e^y \ln(\sin xy) + xy^2 \ln x \cdot e^y \operatorname{ctg} xy + x \ln x \cdot \ln(\ln x)}. \quad \blacksquare$$

## 2.4. Диференціювання параметрично заданої функції

Якщо змінна  $t$ , яка називається **параметром**, приймає значення з деякого проміжку  $[t_1; t_2]$  і, якщо відомі закони, за якими змінюються залежно від  $t$  змінна  $x = x(t)$  та змінна  $y = y(t)$ , то кажуть, що система

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t) \end{cases} \quad (11)$$

задає **параметричну функцію**  $y = f(x)$ .

Наприклад, рівняння

$$\begin{cases} x = r \cos t, \\ y = r \sin t, \end{cases} \quad \text{де } t \in [0; 2\pi],$$

визначають параметричні рівняння кола з центром в точці  $O(0;0)$  і радіусом  $r$ , тобто рівняння  $x^2 + y^2 = r^2$ . При  $t \in [0; \pi]$  задані рівняння визначають рівняння  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$  півкола, що розташоване у верхній півплощині, а при  $t \in [\pi; 2\pi]$  — рівняння  $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$  півкола, що розташоване у нижній півплощині.

Припустимо, що функції  $x(t)$  і  $y(t)$  мають похідні, а функція  $x(t)$  має обернену функцію  $t = \varphi(x)$ , яка також має похідну:  $t'_x = \frac{1}{x'_t}$ .

Тоді функцію  $y = f(x)$ , яка визначена рівняннями (11), можна розглядати як складну функцію  $y = y(t)$ , де  $t = \varphi(x)$ , тобто  $y = y(\varphi(x))$ . Знайдемо похідну від складної функції:

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t}, \text{ тобто } \boxed{y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}}.$$

Отже, отримали нову, задану параметрично, функцію

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}, \\ x = x(t) \end{cases} \quad (12)$$

— похідна від параметрично заданої функції (11).

### Приклад 13.

1. Знайти похідну  $y'_x$  функції, що задана параметрично:  $\begin{cases} x = \arcsin \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[3]{2t+1}. \end{cases}$

□ Розв'язання. За формулою (12) маємо  $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ , тому обчислюємо

$$x'(t) = (\arcsin \sqrt{t})' = \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{t})^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2\sqrt{t-t^2}},$$

$$y'(t) = (\sqrt[3]{2t+1})' = \frac{1}{3}(2t+1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2 = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2t+1)^2}},$$

звідки отримаємо похідну

$$y'_x = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2t+1)^2}} \bigg/ \frac{1}{2\sqrt{t-t^2}} = \frac{\sqrt{t-t^2}}{3\sqrt[3]{(2t+1)^2}}.$$

Отже, остаточна відповідь:  $\begin{cases} x = \arcsin \sqrt{t}, \\ y'_x = \frac{\sqrt{t-t^2}}{3\sqrt[3]{(2t+1)^2}}. \end{cases}$  ■

2. Знайти похідну  $y'_x$  функції  $\begin{cases} x = 8\cos^5 t, \\ y = 8\sin^5 t \end{cases}$  в точці  $A\left(\frac{1}{4}; \frac{9\sqrt{3}}{4}\right)$ .

□ Розв'язання. Оскільки  $x'_t = 40\cos^4 t \cdot (-\sin t)$ ,  $y'_t = 40\sin^4 t \cdot \cos t$ , то за формулою (12) маємо

$$y_x' = \frac{40\sin^4 t \cdot \cos t}{40\cos^4 t \cdot (-\sin t)} = -\operatorname{tg}^3 t.$$

Знайдемо значення параметра  $t_0$ , яке відповідає заданій точці  $A$ :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x(t_0) = \frac{1}{4}, \\ y(t_0) = \frac{9\sqrt{3}}{4}, \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 8\cos^5 t_0 = \frac{1}{4}, \\ 8\sin^5 t_0 = \frac{9\sqrt{3}}{4}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos^5 t_0 = \frac{1}{32}, \\ \sin^5 t_0 = \frac{(\sqrt{3})^5}{32}, \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} \cos t_0 = \frac{1}{2}, \\ \sin t_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases} \Rightarrow t_0 = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Таким чином, підставляючи знайдене значення параметра в обчислену похідну, отримаємо остаточну відповідь:  $y_x'|_A = -\operatorname{tg}^3 \frac{\pi}{3} = -9\sqrt{3}$ . ■

**Приклад 14.** Перевірити, що функція  $\begin{cases} x = t - \frac{2}{3}t^3, \\ y = t^2 - t^4 \end{cases}$  задовольняє

співвідношенню  $16y = 4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^4$ .

□ Розв'язання. Знаходимо похідну  $\frac{dy}{dx}$  параметрично заданої функції:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(t^2 - t^4)'_t}{\left(t - \frac{2}{3}t^3\right)'_t} = \frac{2t - 4t^3}{1 - 2t^2} = 2t.$$

Підставимо значення  $y$  та  $\frac{dy}{dx}$  в задане співвідношення

$$16(t^2 - t^4) = 4(2t)^2 - (2t)^4 \Rightarrow 0 \equiv 0.$$

Це доводить, що задана функція задовольняє заданому співвідношенню. ■

## 2.5. Задачі на геометричні застосування похідної

Нагадаємо, що кутовий коефіцієнт дотичної до кривої  $y = f(x)$  в точці  $M_0(x_0, y_0)$  дорівнює  $k_{\text{дот.}} = f'(x_0)$  (див. пункт 1.1). Використовуючи геометричний зміст похідної можемо знаходити рівняння дотичної і нормалі до кривої  $y = f(x)$  в точці  $M_0(x_0, y_0)$  за формулами (2) і (3) відповідно.

**Кутом  $\varphi$  між двома кривими**  $y = f_1(x)$  і  $y = f_2(x)$  в точці їх перетину  $M_0(x_0, y_0)$  називають один з двох суміжних кутів між їх дотичними в цій точці, який обчислюється за формулою

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}, \quad (13)$$

де  $k_1 = f_1'(x_0)$ ,  $k_2 = f_2'(x_0)$ .

Для знаходження гострого кута між кривими потрібно взяти праву частину рівності (13) по модулю.

Розглянемо наступні приклади.

### Приклад 15.

1. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до кривої

$$\begin{cases} x = \frac{t^2 + t + 1}{t}, \\ y = \frac{t - 1}{t} \end{cases} \quad \text{в точці } M(3.5; 0.5).$$

□ Розв'язання. Оскільки  $k_{\text{дот.}} = f'(x)$ , то знаходимо похідну функції, яка за умовою задана параметрично:

$$x'(t) = \frac{(2t + 1) \cdot t - (t^2 + t + 1) \cdot 1}{t^2} = \frac{t^2 - 1}{t^2},$$

$$y'(t) = \frac{1 \cdot t - (t - 1) \cdot 1}{t^2} = \frac{1}{t^2},$$

$$\Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{1}{t^2}}{\frac{t^2-1}{t^2}} = \frac{1}{t^2-1}.$$

Знайдемо значення параметра  $t$ , яке відповідає заданій точці  $M$ :

$$\begin{cases} x(t) = 3.5; \\ y(t) = 0.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{t^2+t+1}{t} = \frac{7}{2}, \\ \frac{t-1}{t} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow t = 2.$$

Підставляючи знайдене значення параметра в обчислену похідну, отримаємо остаточну відповідь:  $k_{\text{дот.}} = y'_x|_M = \frac{1}{2^2-1} = \frac{1}{3}$ . ■

2. Чи може дотична до кривої  $y = x^9 + 2x - 3$  утворювати з віссю  $Ox$  тупий кут?

□ Розв'язання. З геометричного змісту похідної відомо, що

$$k_{\text{дот.}} = f'(x),$$

де  $k_{\text{дот.}} = \text{tg } \alpha$ ,  $\alpha$  — кут, який утворює дотична до даної кривої в точці  $M(x, y)$  з додатним напрямом осі  $Ox$ .

Знаходимо похідну заданої функції:  $y' = 9x^8 + 2$ . Оскільки  $9x^8 + 2 > 0$  при всіх значеннях  $x \in \mathbb{R}$ , то  $k_{\text{дот.}} > 0$  при всіх  $x \in \mathbb{R}$ , тому  $\text{tg } \alpha > 0$  при всіх значеннях  $x \in \mathbb{R}$ , звідки отримаємо, що  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  при  $x \in \mathbb{R}$ .

Отже, остаточна відповідь: ні, дотична до заданої кривої не може утворювати з віссю  $Ox$  тупий кут. ■

### Приклад 16.

1. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої  $y = \frac{x^3 + 2x^2}{x+1}$  в точках

її перетину з віссю абсцис.

□ Розв'язання. Знайдемо спочатку точки перетину кривої з віссю  $Ox$ :

$$\frac{x^3 + 2x^2}{x+1} = 0 \Rightarrow x^2(x+2) = 0, \quad x \neq -1 \Rightarrow \begin{cases} x = -2, \\ x = 0. \end{cases}$$

Отримали дві точки  $M_1(-2; 0)$ ,  $M_2(0; 0)$ .

Знайдемо похідну заданої функції

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^3 + 2x^2)'(x+1) - (x^3 + 2x^2)(x+1)'}{(x+1)^2} = \\ &= \frac{(3x^2 + 4x)(x+1) - (x^3 + 2x^2) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^3 + 5x^2 + 4x}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

Рівняння дотичної до кривої  $y = y(x)$  в точці  $M_0(x_0, y_0)$  знаходимо за формулою

$$l_{\text{дот.}} : y - y_0 = y'(x_0) \cdot (x - x_0);$$

а рівняння нормалі до кривої  $y = y(x)$  в точці  $M_0(x_0, y_0)$  – за формулою

$$l_{\text{норм.}} : y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)} \cdot (x - x_0).$$

- В точці  $M_1(-2; 0)$ :  $y'(-2) = \frac{2(-2)^3 + 5(-2)^2 + 4(-2)}{(-2+1)^2} = -4$ , тому рівняння

дотичної до заданої кривої в цій точці має вигляд

$$y - 0 = -4 \cdot (x + 2) \Rightarrow l_{\text{дот.}} : y = -4x - 8;$$

а рівняння нормалі —

$$y - 0 = \frac{1}{4}(x + 2) \Rightarrow l_{\text{норм.}} : y = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}.$$

- В точці  $M_2(0; 0)$ :  $y'(0) = \frac{2 \cdot 0^3 + 5 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0}{(0+1)^2} = 0$ . Отже, рівняння дотичної

до заданої кривої в точці  $M_2$  має вигляд

$$y - 0 = 0 \cdot (x - 0) \Rightarrow l_{\text{дот.}} : y = 0.$$

Оскільки нормаль до кривої це пряма, яка перпендикулярна до дотичної в точці дотику, то нормаль до заданої кривої в точці  $M_2$  визначається рівнянням  $l_{\text{норм.}} : x = 0$ . ■

**2.** Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої  $x^2 - 2xy^8 - x^4y^2 + 2y = -4$  в точці  $M_0(1; -1)$ .

□ Розв'язання. Знайдемо спочатку похідну даної функції, що задана неявно. Для цього продиференціюємо по змінній  $x$  обидві частини заданого рівняння кривої, пам'ятаючи, що  $y = y(x)$ :

$$(x^2 - 2xy^8 - x^4y^2 + 2y)'_x = (-4)'_x;$$

$$2x - 2(1 \cdot y^8 + x \cdot 8y^7 y') - (4x^3y^2 + x^4 \cdot 2yy') + 2y' = 0;$$

$$y' = \frac{2y^8 - 2x + 4x^3y^2}{2 - 16xy^7 - 2x^4y}.$$

І обчислимо значення похідної в заданій точці

$$y'(M_0) = \frac{2(-1)^8 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1^3(-1)^2}{2 - 16 \cdot 1 \cdot (-1)^7 - 2 \cdot 1^4(-1)} = \frac{1}{5}.$$

За формулою (2) складаємо рівняння дотичної до заданої кривої в заданій точці  $M_0$ :

$$y + 1 = \frac{1}{5} \cdot (x - 1) \Rightarrow l_{\text{дот.}}: x - 5y - 6 = 0.$$

За формулою (3) складаємо рівняння нормалі до заданої кривої в точці  $M_0$ :

$$y + 1 = -5(x - 1) \Rightarrow l_{\text{норм.}}: 5x + y - 4 = 0. \quad \blacksquare$$

**3.** Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої  $x = \ln(t^2 - 3)$ ,  $y = t^4 - 4t^3$  при  $t = 2$ .

□ Розв'язання. Знайдемо спочатку координати точки дотику кривої:

$$x_0 = x(2) = \ln(2^2 - 3) = \ln 1 = 0, \quad y_0 = y(2) = 2^4 - 4 \cdot 2^3 = -16,$$

тобто  $M_0(0; -16)$  — точка дотику.

Знайдемо похідну  $y'_x$  даної функції, яка за умовою задана параметрично:

$$x'_t = \frac{2t}{t^2 - 3}, \quad y'_t = 4t^3 - 12t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{4t^3 - 12t^2}{2t} = (2t^2 - 6t)(t^2 - 3);$$

обчислимо значення цієї похідної при  $t = 2$

$$\Rightarrow y'_x(M_0) = y'_x|_{t=2} = (2 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2)(2^2 - 3) = -4.$$

Отже, за формулою (2) складаємо рівняння дотичної до заданої кривої в точці  $M_0$ :

$$y + 16 = -4 \cdot (x - 0) \Rightarrow l_{\text{дот.}}: 4x + y + 16 = 0;$$

за формулою (3) складаємо рівняння нормалі до заданої кривої в точці  $M_0$ :

$$y + 16 = \frac{1}{4}(x - 0) \Rightarrow l_{\text{норм.}}: x - 16y - 64 = 0. \quad \blacksquare$$

### Приклад 17.

1. На кривій  $y = 5x^2 - 2x + 1$  знайти точку, дотична в якій перпендикулярна прямій  $l_1: x + 8y - 2 = 0$ .

□ Розв'язання. Умова перпендикулярності двох прямих (заданої прямої  $l_1$  і дотичної):  $l_{\text{дот.}} \perp l_1 \Leftrightarrow k_{\text{дот.}} \cdot k_1 = -1$ .

Оскільки кутовий коефіцієнт дотичної в довільній точці дорівнює

$$k_{\text{дот.}} = y'(x) = 10x - 2,$$

а кутовий коефіцієнт прямої  $l_1: y = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{4}$  дорівнює  $k_1 = -\frac{1}{8}$ , то

отримаємо рівність  $-\frac{1}{8} \cdot (10x - 2) = -1$ .

Розв'язуючи її, знаходимо абсцису шуканої точки:  $x = 1$ . Так як шукана точка лежить на заданій кривій  $y = 5x^2 - 2x + 1$ , то її ордината знаходиться як  $y(1) = 5 - 2 + 1 = 4$ . Отже,  $M(1; 4)$  — шукана точка.  $\blacksquare$

2. Скласти рівняння дотичної до кривої  $y = -8 \ln x - \frac{8}{x}$  паралельно до прямої  $l_1: 2x + y - 4 = 0$ .

□ Розв'язання. Умова паралельності двох прямих це рівність їх кутових коефіцієнтів:  $l_{\text{дот.}} \parallel l_1 \Leftrightarrow k_{\text{дот.}} = k_1$ .

Оскільки кутовий коефіцієнт дотичної в довільній точці кривої дорівнює

$$k_{\text{дот.}} = y'(x) = -\frac{8}{x} + \frac{8}{x^2},$$

а кутовий коефіцієнт прямої  $l_1: y = -2x + 4$  дорівнює  $k_1 = -2$ , то отримаємо

рівняння  $-\frac{8}{x} + \frac{8}{x^2} = -2$ .

Розв'язуючи його, знаходимо абсцису шуканої точки:  $x_0 = 2$ . Так як шукана точка лежить на заданій кривій, то її ордината дорівнює  $y_0 = y(x_0) = -8\ln 2 - 4$ . Отже,  $M_0(2; -8\ln 2 - 4)$  – точка дотику.

Рівняння дотичної до кривої в точці  $M_0(x_0, y_0)$  знаходимо за формулою

$$l_{\text{дот.}}: y - y_0 = y'(x_0) \cdot (x - x_0), \quad \text{де за умовою задачі } y'(x_0) = k_{\text{дот.}} = -2,$$

$$\Rightarrow y + 8\ln 2 + 4 = -2 \cdot (x - 2) \Rightarrow l_{\text{дот.}}: y + 2x + 8\ln 2 = 0. \quad \blacksquare$$

**Приклад 18.** Знайти кут, під яким крива  $x^5 - x^3y + y^5 = 1$  перетинає вісь  $Ox$ .

□ Розв'язання. Кут між заданою кривою та віссю  $Ox$  це кут між дотичною до цієї кривої та віссю  $Ox$  в точці перетину кривої та осі  $Ox$ . Отже, потрібно знайти кут, який утворює дотична до кривої з віссю  $Ox$  в точці перетину кривої з цією віссю.

Знайдемо точки перетину заданої кривої з віссю  $Ox$ :

$$\begin{cases} x^5 - x^3y + y^5 = 1, \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^5 = 1, \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow M(1; 0).$$

Знайдемо кутовий коефіцієнт дотичної до заданої кривої в отриманій точці перетину  $M$ . Оскільки рівняння кривої задано в неявному вигляді, то відповідно обчислюємо похідну по правилу диференціювання неявно заданої функції:

$$(x^5 - x^3y + y^5)' = (1)' \Rightarrow 5x^4 - (3x^2 \cdot y + x^3 \cdot y') + 5y^4 y' = 0 \Rightarrow$$

$$y' = \frac{3x^2y - 5x^4}{5y^4 - x^3}.$$

В точці  $M(1; 0)$  кутовий коефіцієнт дотичної до кривої дорівнює

$$k = y'(M) = y' = \frac{3 \cdot 1^2 \cdot 0 - 5 \cdot 1^4}{5 \cdot 0^4 - 1^3} = 5.$$

Отже,  $k = \operatorname{tg} \alpha = 5$ , звідки маємо  $\alpha = \operatorname{arctg} 5$  — кут між дотичною до кривої і додатним напрямом осі  $Ox$ , тобто це шуканий кут, під яким крива перетинає вісь  $Ox$ . ■

**Приклад 19.** Знайти кути, під якими перетинаються криві.

1.  $x^2 + y^2 - 4x = 9, \quad y^2 = 2x + 1.$

□ Розв'язання. Знайдемо точки перетину заданих кривих

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x = 9, \\ y^2 = 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 8 = 0, \\ y^2 = 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = -2, \\ y^2 = 2x + 1 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x = 4, \\ y^2 = 2x + 1. \end{cases}$$

Перша система розв'язку не має, а розв'язуючи другу систему отримаємо дві точки  $M_1(4; 3), M_2(4; -3)$  перетину кривих.

Знайдемо кутові коефіцієнти дотичних до заданих кривих в отриманих точках (зауважимо, що похідні знаходимо від неявно заданих функцій).

- Для першої кривої  $x^2 + y^2 - 4x = 9$  обчислюємо похідну:

$$2x + 2yy'_x - 4 = 0 \Rightarrow y'_x = \frac{2 - x}{y}.$$

В точці  $M_1(4; 3)$  кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює  $k_1 = y'_x(M_1) = -\frac{2}{3}$ ;

а в точці  $M_2(4; -3)$ :  $k_1 = y'_x(M_2) = \frac{2}{3}$ .

- Для другої кривої  $y^2 = 2x + 1$ :

$$2yy'_x = 2 \Rightarrow y'_x = \frac{1}{y}.$$

В точці  $M_1(4; 3)$  кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює  $k_2 = y'_x(M_1) = \frac{1}{3}$ ;

а в точці  $M_2(4; -3)$ :  $k_2 = y'_x(M_2) = -\frac{1}{3}$ .

Обчислюємо кут між заданими кривими, використовуючи формулу (13):

$$\blacksquare \text{ в точці } M_1(4; 3) \text{ маємо } \operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}}{1 + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{9}{7} \Rightarrow$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{9}{7};$$

$$\blacksquare \text{ в } M_2(4; -3) \text{ отримаємо } \operatorname{tg} \varphi = \frac{-\frac{1}{3} - \frac{2}{3}}{1 + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{2}{3}} = -\frac{9}{7} \Rightarrow \varphi = -\operatorname{arctg} \frac{9}{7}.$$

Якщо обираємо гострий кут між кривими в точці  $M_2(4; -3)$ , то

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| -\frac{9}{7} \right| = \frac{9}{7} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \frac{9}{7}.$$

Отже, остаточна відповідь: кут між заданими кривими дорівнює

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{9}{7}. \quad \blacksquare$$

$$2. \quad y = (x-1)^4, \quad x = y^3 + 1.$$

□ Розв'язання. Знайдемо точки перетину заданих кривих

$$\begin{cases} y = (x-1)^4, \\ x-1 = y^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = y^{12}, \\ x-1 = y^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(y^{11} - 1) = 0, \\ x-1 = y^3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases}$$

Отже, отримаємо дві точки  $M_1(2; 1)$ ,  $M_2(1; 0)$  перетину кривих.

Знайдемо кутові коефіцієнти дотичних до заданих кривих в отриманих точках.

- Для кривої  $y = (x-1)^4$  обчислюємо похідну:  $y' = 4(x-1)^3$ .

В точці  $M_1(2; 1)$  кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює  $k_1 = y'(x_1) = 4$ .

А в точці  $M_2(1; 0)$  кутовий коефіцієнт дотичної:  $k_1 = y'(x_2) = 0$ , а тому дотична до заданої кривої в цій точці має вигляд  $l_1: y = 0$ .

- Для другої кривої  $y = \sqrt[3]{x-1}$ :  $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ .

В точці  $M_1(2; 1)$  кутовий коефіцієнт дотичної до цієї кривої дорівнює  $k_2 = y'(x_1) = \frac{1}{3}$ .

А в точці  $M_2(1; 0)$  не існує скінченної похідної цієї функції. Але, якщо запишемо цю функцію у вигляді  $x = y^3 + 1$ , де  $y$  – незалежна змінна,  $x$  – залежна змінна, то її рівняння дотичної в точці  $M_2(x_2; y_2)$  знаходимо за формулою

$$l_2: x - x_2 = x'_y(y_2) \cdot (y - y_2);$$

де за умовою задачі  $x'_y = 3y^2 \Rightarrow x'_y(y_2) = 0$ . Тому дотична до цієї кривої в точці  $M_2(1; 0)$  має вигляд  $l_2: x = 1$ .

Тепер обчислюємо кут між заданими кривими:

- в точці  $M_1(2; 1)$  за формулою (13) маємо

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right| = \left| \frac{\frac{1}{3} - 4}{1 + \frac{1}{3} \cdot 4} \right| = \frac{11}{7}, \text{ тому шуканий кут дорівнює } \varphi = \operatorname{arctg} \frac{11}{7};$$

- в  $M_2(1; 0)$  знайдені дотичні  $y = 0$ ,  $x = 1$  до заданих кривих є перпендикулярними прямими, тому кут між ними дорівнює  $\varphi = 90^\circ$ .

Остаточна відповідь: кут між заданими кривими дорівнює  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{11}{7}$

та  $\varphi = 90^\circ$ . ■

## Контрольні приклади для самоперевірки

2.1. Обчислити похідні нижче наведених функцій:

1)  $y = \frac{2}{x^5} - 2x^7 + 10x^5\sqrt{x^4} - 5;$

2)  $y = \frac{4}{(x^2 - 3)^5} - \sqrt[3]{2x^7 + 3x - 1};$

3)  $y = \operatorname{ctg}(3 - x^5);$

4)  $y = \cos \frac{1}{x^2 + \sin x};$

5)  $y = \ln \sqrt[4]{x^5 - 2x - 1};$

6)  $y = \log_5(\sin 3x);$

7)  $y = e^{3+x+x^3};$

8)  $y = 7^{\arccos x^2};$

9)  $y = \arcsin \sqrt{1 - 4e^{2x}};$

10)  $y = e^{x^2 - 2\cos x} + 3\sin^5 2x^2;$

11)  $y = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{x} + 2x - e^{\arcsin x^2}\right)^7};$

12)  $y = e^{x^2 - 2x} \cdot \sin^3 2x;$

13)  $y = x^3 5^{\frac{1}{x^2}} \cos 4x;$

14)  $y = \operatorname{arctg} \sqrt{3x - 1} \cdot \ln(x^3 + 2x^2);$

15)  $y = ch^7 2x^3 \cdot \log_2(3x - 1);$

16)  $y = \frac{e^{\operatorname{ctg} 3x}}{(x^2 - 3x - 1)^7};$

17)  $y = \frac{\sqrt{\operatorname{tg}(2x^4 - 1)}}{\sin^3 5x};$

18)  $y = \sqrt[5]{\frac{2x - 1}{2x + 3}} + e^{\sin^4(\operatorname{tg}(2 - \sqrt{x}))};$

19)  $y = \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{2} \ln \frac{6x}{2x + 3} + \ln 2;$

20)  $y = x 7^{x \arccos \sqrt[3]{x}}.$

21)  $y = \frac{\sqrt{x - 1}(2x + 5)^5}{e^{-x^3} \cdot \sqrt[7]{(x + 2)^3}};$

22)  $y = \frac{(1 - 3x)^5 \sin^2 x}{(x + 2) \cdot \sqrt[8]{(2x^2 - 1)^3}};$

23)  $y = (2 - x^4)^{\operatorname{cth} 3x};$

24)  $y = \left(\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}\right)^{x^2};$

25)  $y = \left(\frac{2 - x}{4x + 1}\right)^{5x + 1};$

26)  $y = (\sin 3x)^{(\cos 2x)^{-x}}.$

2.2. Обчислити похідну.

а)  $y = \frac{1}{2x^3} + 2x + 6\sqrt[3]{x^2}$ , знайти  $y'(-1)$ ;

б)  $y = x^2 \cos^3 2x$ , знайти  $y'(\pi)$ ;

**в)**  $y = e^{-x} \cdot \sqrt[3]{\frac{x^2}{3x+1}}$ , знайти  $y'(1)$ .

**2.3.** Виразити  $\frac{dx}{dy}$  через  $x$ , якщо

**а)**  $y = \text{ctg}(3 - x^5)$ ; **б)**  $y = 7^{\arccos x^2}$ ; **в)**  $y = \sqrt[5]{\frac{2x-1}{2x+3}}$ .

**2.4.** Знайти похідні  $y'$  функцій, заданих неявно:

**а)**  $\frac{e^{x+3y}}{x^2} + \ln xy = 2xy^3$ ; **б)**  $3x^3y^2 - 3x = y \cdot \cos y$ ; **в)**  $\text{arctg} \frac{x^2}{y} = 3x^2 + y^5$ ;

**г)**  $(xy^2)^y = (x^2 + y)^x$ .

**2.5.** Знайти похідні  $y'_x$  наступних параметрично заданих функцій:

**а)**  $\begin{cases} x = \arcsin \sqrt{2t-1}, \\ y = e^{2t-t^7}; \end{cases}$  **б)**  $\begin{cases} x = t^8 - 4t^3 + t, \\ y = t^7 + 3t^5 + 2; \end{cases}$  **в)**  $x = \frac{3t^2 + t - 1}{t + 2}, y = \frac{t^2}{t + 2}$ .

**2.6.** Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до кривої  $y = \frac{x^3 - 2x^2 + 6}{x^2 - 3}$  при  $x = -1$ .

**2.7.** Чи може дотична до кривої  $\begin{cases} x = e^{t^3+t}, \\ y = -t^5 - 3t \end{cases}$  утворювати з віссю  $Ox$

гострий кут?

**2.8.** Знайти, в яких точках кривої  $y = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - 3x + 1$  дотична складає з віссю  $Ox$  кут  $45^\circ$ ?

**2.9.** Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої  $y = \frac{1}{(x-2)^2} - 6\sqrt[3]{2x^3 + x} - 2$  в точці з абсцисою  $x = 1$ .

**2.10.** Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої  $y = 2e^{x^2-3x}$  в точці з абсцисою  $x = 0$ .

**2.11.** Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої  $xy^2 + 2\sin 2x - 3x + y = y^3$  в точці  $M_0(0; 1)$ .

**2.12.** Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої  $x = 5t^2 + \frac{1}{t^2}$ ,  $y = -t^4 + 4t + 1$  в точці, яка відповідає значенню параметра  $t = -1$ .

**2.13.** На кривій  $y = \frac{x^3}{3} + x^2 - 5x + 2$  знайти точку, дотична в якій паралельна прямій  $l_1: 2x + y - 1 = 0$ .

**2.14.** Скласти рівняння дотичної до кривої  $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 2x - \frac{2}{3}$  перпендикулярно до прямої  $l_1: x - 6y - 7 = 0$ .

**2.15.** Знайти кути, під якими перетинаються криві:

**а)**  $y = 4x^2$ ,  $y = x^3$ ; **б)**  $xy = 8$ ,  $x^2 - y^2 = 12$ .

### Відповіді

$$\mathbf{2.1. 1)} \quad y' = 2 \left( -\frac{5}{x^6} - 7x^6 + 9\sqrt[5]{x^4} \right); \quad \mathbf{2)} \quad y' = -\frac{40x}{(x^2 - 3)^6} - \frac{14x^6 + 3}{3\sqrt[3]{(2x^7 + 3x - 1)^2}};$$

$$\mathbf{3)} \quad y' = \frac{5x^4}{\cos^2(3 - x^5)}; \quad \mathbf{4)} \quad y' = \frac{\sin(1/(x^2 + \sin x)) \cdot (2x + \cos x)}{(x^2 + \sin x)^2};$$

$$\mathbf{5)} \quad y' = -\frac{2 - 5x^4}{4(x^5 - 2x - 1)}; \quad \mathbf{6)} \quad y' = \frac{1}{3} \log 5 \cdot \operatorname{tg} 3x; \quad \mathbf{7)} \quad y' = e^{3+x+x^3} \cdot (1 + 3x^2);$$

$$\mathbf{8)} \quad y = -\frac{2x \ln 7 \cdot 7^{\arccos x^2}}{\sqrt{1 - x^4}}; \quad \mathbf{9)} \quad y' = -\frac{2e^x}{\sqrt{1 - 4e^{2x}}};$$

$$\mathbf{10)} \quad y = 2(x + \sin x)e^{x^2 - 2\cos x} + 60x \sin^4 2x^2 \cdot \cos 2x^2;$$

$$\mathbf{11)} \quad y' = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 \left( \frac{1}{x} + 2x - e^{\arcsin x^2} \right)^7} \cdot \cos^2 \left( \frac{1}{x} + 2x - e^{\arcsin x^2} \right)^7} \times$$

$$\times 7 \left( \frac{1}{x} + 2x - e^{\arcsin x^2} \right)^6 \cdot \left( -\frac{1}{x^2} + 2 - e^{\arcsin x^2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} \right);$$

$$12) y' = 2e^{x^2-2x} \cdot \sin^2 2x \cdot ((x-1)\sin 2x + 3\cos 2x);$$

$$13) y' = 5^{\frac{1}{x^2}} \left( (3x^2 - 2\ln 5) \cdot \cos 4x - 4x^3 \sin 4x \right);$$

$$14) y' = \frac{\ln(x^3 + 2x^2)}{2x\sqrt{3x-1}} + \frac{(3x^2 + 4x) \operatorname{arctg} \sqrt{3x-1}}{x^3 + 2x^2};$$

$$15) y' = 3ch^6(2x^3) \cdot \left( 14x^2 sh(2x^3) \cdot \log_2(3x-1) + \frac{ch 2x^3}{(3x-1)\ln 2} \right);$$

$$16) y' = -\frac{e^{\operatorname{ctg} 3x} (3(x^2 - 3x - 1) + 7(2x - 3)\cos^2 3x)}{(x^2 - 3x - 1)^8 \cos^2 3x};$$

$$17) y' = \frac{4x^3 \sin 5x - 5 \operatorname{tg}(2x^4 - 1) \cdot \cos^2(2x^4 - 1) \cdot \cos 5x}{\sin^4 5x \cdot \sqrt{\operatorname{tg}(2x^4 - 1) \cdot \cos^2(2x^4 - 1)}};$$

$$18) y' = \frac{1}{5} \sqrt[5]{\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^4} \cdot \frac{8}{(2x+3)^2} - \frac{4e^{\sin^4(\operatorname{tg}(2-\sqrt{x}))} \cdot \sin^3(\operatorname{tg}(2-\sqrt{x})) \cdot \cos(\operatorname{tg}(2-\sqrt{x}))}{2\sqrt{x} \cos^2(2-\sqrt{x})};$$

$$19) y' = \frac{x \ln \frac{6x}{2x+3}}{2\sqrt{x^2-3}} + \frac{3\sqrt{x^2-3}}{2x(2x+3)};$$

$$20) y = 7^{x \arccos \sqrt[3]{x}} \cdot \left[ 1 + \ln 7 \cdot x \left( \arccos \sqrt[3]{x} - \frac{\sqrt[3]{x}}{3\sqrt{1-\sqrt[3]{x^2}}} \right) \right];$$

$$21) y = \frac{\sqrt{x-1}(2x+5)^5}{e^{-x^3} \cdot \sqrt[7]{(x+2)^3}} \left( \frac{1}{2(x-1)} + \frac{10}{2x+5} + 3x^2 - \frac{3}{7(x+2)} \right);$$

$$22) y = \frac{(1-3x)^5 \sin^2 x}{(x+2) \cdot \sqrt[8]{(2x^2-1)^3}} \left( -\frac{15}{1-3x} + 2 \operatorname{ctg} x - \frac{1}{x+2} - \frac{3x}{2(2x^2-1)} \right);$$

$$23) y = (2 - x^4)^{\operatorname{cth} 3x} \cdot \left( -\frac{3 \ln(2 - x^4)}{\operatorname{sh}^2 3x} + \frac{4x^3 \operatorname{cth} 3x}{2 - x^4} \right);$$

$$24) y = (\operatorname{arctg} 2x)^{\frac{x^2}{2}} \cdot \left( x \operatorname{arctg} 2x + \frac{x^2}{1 + 4x^2} \right);$$

$$25) y = \left( \frac{2 - x}{4x + 1} \right)^{5x+1} \cdot \left[ 5 \ln \left( \frac{2 - x}{4x + 1} \right) + (5x + 1) \left( -\frac{1}{2 - x} + \frac{4}{4x + 1} \right) \right];$$

$$26) y = (\sin 3x)^{(\cos 2x)^{-x}} \cdot (\cos 2x)^{-x} \ln \sin 3x \cdot \left[ -\ln(\cos 2x) - 2x \operatorname{ctg} 2x + \frac{3 \cos 3x}{\sin 3x \cdot \ln(\sin 3x)} \right].$$

$$2.2. \text{ а) } -3.5; \quad \text{ б) } \pi; \quad \text{ в) } -\frac{7\sqrt[3]{2}}{24e}. \quad 2.3. \text{ а) } x'_y = \frac{\cos^2(3 - x^5)}{5x^4};$$

$$\text{ б) } x'_y = -\frac{\sqrt{1 - x^4}}{2 \ln 7 \cdot x \cdot 7^{\arccos x^2}}; \quad \text{ в) } x'_y = \frac{5(2x + 3)^2}{8} \sqrt[5]{\left( \frac{2x - 1}{2x + 3} \right)^4}.$$

$$2.4. \text{ а) } y' = -\frac{y(2x^3 y^3 - x^2 + 2e^{x+3y} - xe^{x+3y})}{x(6x^3 y^3 - x^2 - 3ye^{x+3y})}; \quad \text{ б) } y' = -\frac{3(3x^2 y^2 - 1)}{6x^3 y + y \sin y - \cos y};$$

$$\text{ в) } y' = -\frac{2x(3x^4 + 3y^2 - y)}{5x^4 y^4 + x^2 + 5y^6}; \quad \text{ г) } y' = \frac{x(x^2 + y) \ln(x^2 + y) + 2x^3 - y(x^2 + y)}{x(x^2 + y) \ln xy^2 + 2x(x^2 + y) - x^2}.$$

$$2.5. \text{ а) } y'_x = 8e^{2t-t^7} (2 - 7t^6) \sqrt{(2 - 2t)(2t - 1)}; \quad \text{ б) } y'_x = \frac{7t^6 + 15t^4}{8t^7 - 12t^2 + 1};$$

$$\text{ в) } y'_x = \frac{t(t + 4)}{3(1 + 4t + t^2)}. \quad 2.6. k_{\text{дом}} = -2. \quad 2.7. \text{ Ні.} \quad 2.8. \left(-1; \frac{13}{6}\right) \text{ та } \left(4; -\frac{41}{3}\right).$$

2.9. Дотична:  $12x + y - 7 = 0$ , нормаль:  $x - 12y - 61 = 0$ . 2.10. Дотична:

$6x + y - 2 = 0$ , нормаль:  $x - 6y + 12 = 0$ . 2.11. Дотична:  $y = x + 1$ , нормаль:

$y = -x + 1$ . 2.12. Дотична:  $y = -x + 2$ , нормаль:  $y = x - 10$ . 2.13.  $M_1 \left(1; -\frac{5}{3}\right)$ ,

$M_2(-3; 17)$ . 2.14.  $y = -6x + 2$ . 2.15. а)  $0^\circ$  та  $\operatorname{arctg} \frac{16}{1537}$ ; б)  $90^\circ$ .

### 3. ДИФЕРЕНЦІАЛ

#### 3.1. Означення і властивості диференціала.

##### Інваріантність форми першого диференціала

Нехай функція  $y = f(x)$  диференційовна в точці  $x$ , а це означає, що в цій точці існує похідна  $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ . Тоді, за теоремою про представлення функції, що має границю, можна записати

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x), \text{ де } \alpha(\Delta x) \rightarrow 0 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0,$$

звідки отримаємо

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x. \quad (14)$$

Позначимо  $\gamma(\Delta x) = \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ , при цьому  $\gamma(\Delta x) \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$  і

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\gamma(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0,$$

тобто  $\gamma(\Delta x)$  – нескінченно мала функція вищого порядку малості, ніж  $\Delta x$ , при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Перший доданок  $f'(x) \cdot \Delta x$  рівності (14) називають **головною частиною приросту** функції  $\Delta y$  і вона лінійна відносно приросту аргументу  $\Delta x$ , якщо  $f'(x) \neq 0$ .

**Означення 4.** Диференціалом функції  $y = f(x)$  в точці  $x$  називається головна, лінійна відносно  $\Delta x$ , частина приросту функції  $f(x)$  в цій точці і позначається  $dy$ ;  $df(x)$ .

Отже,

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x. \quad (15)$$

Знайдемо диференціал незалежної змінної  $x$ . Якщо  $y = x$ , то  $y' = x' = 1$ ,

тоді  $dy = d(x) = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$ , тобто диференціал  $dx$  незалежної змінної  $x$  дорівнює її приросту  $\Delta x$ , а саме  $dx = \Delta x$ .

Тоді рівність (15) можна записати у вигляді

$$dy = f'(x)dx. \quad (16)$$

**Зауважимо**, що з останньої формули (16) отримаємо рівність  $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ , яка дає можливість розглядати похідну як відношення диференціалу  $dy$  залежної змінної до диференціалу  $dx$  незалежної змінної (але при введенні поняття похідної (див. пункт 1.1) її позначення  $\frac{dy}{dx}$  розглядалося як єдиний символ).

### Геометричний зміст диференціала

Нехай  $MK$  – дотична до графіку функції  $y = f(x)$  в точці  $M(x, y)$  (див. рис. 3.1).

Надамо аргументу  $x$  довільного приросту  $\Delta x$ , тоді функція  $y = f(x)$  набуде приріст  $\Delta y$ . З прямокутного трикутника  $MAK$  знаходимо  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{AK}{MA}$ , звідки  $AK = \operatorname{tg} \alpha \cdot MA = \operatorname{tg} \alpha \cdot \Delta x$ .

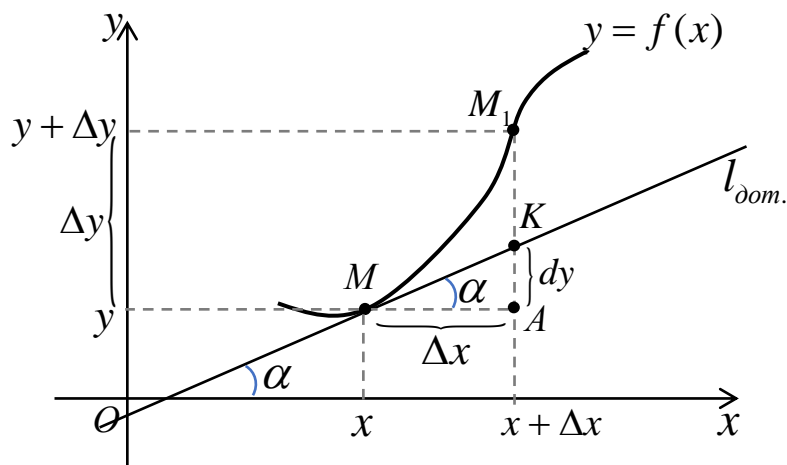


Рис. 3.1

Використовуюючи геометричний зміст похідної та означення диференціала, маємо  $AK = f'(x) \cdot \Delta x = dy$ , тобто диференціал функції  $y = f(x)$  в точці  $x$  дорівнює приросту ординати дотичної до графіка функції в цій точці.

**Приклад 20.**

1. Знайти диференціали функцій: **а)**  $y = 3\sin 2x^5$ ;

**б)**  $y = \sqrt{\arcsin 3x^2} + \ln(1 - 3\sin 2x)$ ; **в)**  $\rho = e^{2\varphi} - \cos^3 5\varphi$ .

□ Розв'язання.

**а)**  $dy = y'_x dx \Rightarrow dy = (3\sin 2x^5)' dx = 3\cos 2x^5 \cdot 10x^4 \cdot dx \Rightarrow$   
 $dy = 30x^4 \cos 2x^5 dx,$

отже  $d(3\sin 2x^5) = 30x^4 \cos 2x^5 dx.$

**б)**  $dy = y' dx \Rightarrow$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\arcsin 3x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-9x^4}} \cdot 6x + \frac{1}{1-3\sin 2x} \cdot (0 - 3\cos 2x \cdot 2) \Rightarrow$$

$$dy = \left( \frac{3x}{2\sqrt{(1-9x^4)\arcsin 3x^2}} - \frac{6\cos 2x}{1-3\sin 2x} \right) dx.$$

**в)**  $d\rho = \rho'(\varphi) \cdot d\varphi \Rightarrow \rho' = e^{2\varphi} \cdot 2 - 3\cos^2 5\varphi \cdot (-\sin 5\varphi) \cdot 5 \Rightarrow$

$$d\rho = (2e^{2\varphi} + 15\cos^2 5\varphi \cdot \sin 5\varphi) d\varphi. \quad \blacksquare$$

2. Знайти диференціали функцій, заданих неявно:

**а)**  $e^{\frac{x}{y}} = 3x^5 + y^2$ ; **б)**  $\sin(x - y^3) = y - x^3.$

□ Розв'язання.

**а)** Спочатку знаходимо похідну від неявно заданої функції:

$$\left( e^{\frac{x}{y}} \right)' = (3x^5 + y^2)', \text{ пам'ятаючи, що } y = y(x);$$

$$e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1 \cdot y - x \cdot y'}{y^2} = 15x^4 + 2y \cdot y' \Rightarrow e^{\frac{x}{y}} (y - xy') = 15x^4 y^2 + 2y^3 y' \Rightarrow$$

$$xy'e^{\frac{x}{y}} + 2y^3y' = ye^{\frac{x}{y}} - 15x^4y^2 \Rightarrow y'_x = \frac{ye^{\frac{x}{y}} - 15x^4y^2}{xe^{\frac{x}{y}} + 2y^3}.$$

Оскільки  $dy = y'_x dx$ , то  $dy = \frac{ye^{\frac{x}{y}} - 15x^4y^2}{xe^{\frac{x}{y}} + 2y^3} dx$ .

**б)** Знаходимо похідну від неявно заданої функції:

$$(\sin(x - y^3))' = (y - x^3)', \text{ пам'ятаючи, що } y = y(x);$$

$$\cos(x - y^3) \cdot (1 - 3y^2 \cdot y') = y' - 3x^2 \Rightarrow$$

$$-3y^2y'\cos(x - y^3) - y' = -3x^2 + \cos(x - y^3) \Rightarrow y' = \frac{3x^2 - \cos(x - y^3)}{1 + 3y^2\cos(x - y^3)}.$$

Тому  $dy = y'_x dx = \frac{3x^2 - \cos(x - y^3)}{1 + 3y^2\cos(x - y^3)} dx$ . ■

### Приклад 21.

**1.** Знайти диференціал функції  $y = 3^{\frac{1}{2x^4}} + 4x^3 - 8\sqrt[4]{x}$  при:

**а)** довільному значенні  $x$ ; **б)**  $x = 1$ ; **в)**  $x = 1$  і  $\Delta x = 0,2$ .

□ Розв'язання.

$$\mathbf{а)} \quad dy = \left( 3^{\frac{1}{2x^4}} + 4x^3 - 8\sqrt[4]{x} \right)' \cdot dx = \left( 3^{\frac{1}{2x^4}} \ln 3 \cdot \frac{1}{2} (-4x^{-5}) + 12x^2 - 8 \cdot \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} \right) dx =$$

$$= \left( -\frac{2 \ln 3 \cdot 3^{\frac{1}{2x^4}}}{x^5} + 12x^2 - \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}} \right) dx;$$

$$\mathbf{б)} \quad dy|_{x=1} = \left( -\frac{2 \ln 3 \cdot 3^{\frac{1}{2 \cdot 1^4}}}{1^5} + 12 \cdot 1^2 - \frac{2}{\sqrt[4]{1^3}} \right) dx = (10 - 2\sqrt{3} \ln 3) dx;$$

$$\mathbf{в)} \quad dy|_{\substack{x=1 \\ \Delta x=0.2}} = (y'(x) \cdot \Delta x)|_{\substack{x=1 \\ \Delta x=0.2}} = (10 - 2\sqrt{3} \ln 3) \cdot 0.2 = 2 - \frac{2\sqrt{3} \ln 3}{5}. \quad \blacksquare$$

2. Знайти приріст і диференціал функції  $y = (2x + 1)^3 - 2x^2 + 1$  при  $x = 1$  і  $\Delta x = 0,1$ . Знайти відповідні значення абсолютної і відносної похибки.

□ Розв'язання. Оскільки приріст функції  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ , то

$$\begin{aligned} \Delta y \Big|_{\substack{x=1 \\ \Delta x=0.1}} &= \left( (2(x + \Delta x) + 1)^3 - 2(x + \Delta x)^2 + 1 - ((2x + 1)^3 - 2x^2 + 1) \right) \Big|_{\substack{x=1 \\ \Delta x=0.1}} = \\ &= (2(1 + 0.1) + 1)^3 - 2(1 + 0.1)^2 + 1 - ((2 \cdot 1 + 1)^3 - 2 \cdot 1^2 + 1) = 5.348. \end{aligned}$$

Диференціал функції при заданих значеннях дорівнює

$$\begin{aligned} dy \Big|_{\substack{x=1 \\ \Delta x=0.1}} &= \left( ((2x + 1)^3 - 2x^2 + 1)' \cdot \Delta x \right) \Big|_{\substack{x=1 \\ \Delta x=0.1}} = \left( (3(2x + 1)^2 \cdot 2 - 4x) \cdot \Delta x \right) \Big|_{\substack{x=1 \\ \Delta x=0.1}} = \\ &= (6(2 \cdot 1 + 1)^2 - 4 \cdot 1) \cdot 0.1 = 5. \end{aligned}$$

Абсолютна похибка від заміни приросту функції її диференціалом дорівнює

$$|\Delta y - dy| = |5.348 - 5| = 0.348,$$

а відносна похибка:

$$\left| \frac{\Delta y - dy}{\Delta y} \right| = \left| \frac{0.348}{5.348} \right| \approx 0.065. \quad \blacksquare$$

## Властивості диференціала

Якщо  $u = u(x)$  і  $v = v(x)$  – диференційовні функції, то мають місце такі правила знаходження диференціалів:

1.  $dC = 0$ , де  $C = const$ ;
2.  $d(C \cdot u) = C \cdot du$ , де  $C = const$ ;
3.  $d(u \pm v) = du \pm dv$ ;
4.  $d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv$ ;
5.  $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$ , якщо  $v(x) \neq 0$ .

## Інваріантність форми першого диференціала

Розглянемо два випадки.

1. Якщо задана функція  $y = f(x)$ , де  $x$  — незалежна змінна, то за формулою (16) маємо  $dy = f'(x)dx = y'_x dx$ .

2. Нехай тепер задана функція  $y = f(x)$ , де  $x = \varphi(t)$  — функція від незалежної змінної  $t$  (тобто  $x$  — залежна змінна), причому  $f(x)$ ,  $\varphi(t)$  — диференційовні функції. Тоді маємо складну функцію  $y = f(\varphi(t))$ , де  $t$  — незалежна змінна, для якої існує похідна  $y'_t = y'_x \cdot x'_t$ , а тому диференціал

$$dy = y'_t dt = y'_x \cdot x'_t dt = \left. \begin{array}{l} \text{для функції } x = \varphi(t) \text{ маємо} \\ dx = x'_t \cdot dt \end{array} \right| = y'_x dx,$$

тобто  $dy = y'_x dx$ .

Бачимо, що в обох випадках отримали однакову формулу для обчислення диференціалу.

Отже, довели наступну властивість: **форма першого диференціала зберігає свій вигляд незалежно від того чи є змінна  $x$  незалежною змінною, чи вона є функцією іншого аргументу.**

Ця властивість називається **інваріантністю (незмінністю) форми першого диференціала.**

Зауважимо, що якщо  $x = \varphi(t)$  — залежна змінна, то  $dx = x'_t \cdot dt \neq \Delta x$ .

**Приклад 22.** Виразити диференціал складної функції

$z = \sin^2 u$ ,  $u = e^{\frac{t}{2}}$ ,  $t = v^2 - v$  через незалежну змінну і її диференціал.

□ Розв'язання. В даному прикладі  $z$  — складна функція, де  $u$  та  $t$  — проміжні змінні,  $v$  — незалежна змінна. Тоді  $dz = z'_v dv$ , де  $z'_v = z'_u \cdot u'_t \cdot t'_v$ ,

$$\Rightarrow z'_u = 2 \sin u \cos u = \sin 2u, \quad u'_t = \frac{1}{2} e^{\frac{t}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{e^t}, \quad t'_v = 2v - 1$$

$$\Rightarrow z'_v = \sin 2e^{\frac{v^2-v}{2}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{e^{v^2-v}} \cdot (2v-1).$$

Отже, 
$$dz = \frac{1}{2} (2v-1) \sqrt{e^{v^2-v}} \cdot \sin 2\sqrt{e^{v^2-v}} dv.$$
 ■

### 3.2. Застосування диференціала до наближених обчислень

Нехай функція  $y = f(x)$  диференційовна в точці  $x$ , тоді виконується рівність (14). Підставляючи рівність (15) в (14), маємо

$$\Delta y = dy + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \text{ де } \alpha(\Delta x) \rightarrow 0 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0.$$

Відкидаючи в останньому співвідношенні нескінченно малу функцію  $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ , одержимо наближену рівність  $\Delta y \approx dy$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ , причому ця рівність більш точніша, чим менший  $\Delta x$ . Підставляючи сюди значення  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$  і  $dy = f'(x) \cdot \Delta x$ , отримаємо

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \cdot \Delta x \Rightarrow f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x.$$

Отже, формула для наближених обчислень значень функції  $y = f(x)$  в точці  $x_0 + \Delta x$  має вигляд

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x. \tag{17}$$

Особливості застосування формули (17):

- 1) значення  $f(x_0)$  відомо точно;
- 2) приріст аргументу може бути як  $\Delta x > 0$ , так і  $\Delta x < 0$ , але  $\Delta x$  обов'язково хоча б на порядок менше за  $x_0$ .

**Приклад 23.** Обчислити наближено за допомогою диференціала:

а)  $\operatorname{tg} 47^\circ$ ; б)  $\sqrt[5]{31}$ ; в) значення функції  $y = \sqrt{x^3 + 2x - 3}$  в точці  $x = 1,97$ .

□ Розв'язання.

а) Оскільки відоме табличне значення  $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$ , а  $47^\circ = 45^\circ + 2^\circ = x_0 + \Delta x$ , то

$$x_0 = 45^\circ, \quad \Delta x = 2^\circ = 2 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{90} \approx 0.0349,$$

тоді  $\operatorname{tg} 47^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ + 2^\circ)$ .

Розглянемо функцію  $f(x) = \operatorname{tg} x$  і обчислимо

$$f(x_0) = \operatorname{tg} 45^\circ = 1; \quad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow f'(x_0) = \frac{1}{\cos^2 45^\circ} = 2.$$

Тому за формулою (17) отримаємо

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(45^\circ + 2^\circ) &= f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x = 1 + 2 \cdot \frac{\pi}{90} \approx 1.0698 \Rightarrow \\ \operatorname{tg} 47^\circ &\approx 1.07. \end{aligned}$$

б) Оскільки  $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$ ,  $31 = 32 - 1 = x_0 + \Delta x$ , то  $x_0 = 32$ ,  $\Delta x = -1$ , тоді

$\sqrt[5]{31} = \sqrt[5]{32 - 1}$ . Розглянемо функцію  $f(x) = \sqrt[5]{x}$  і обчислимо

$$f(x_0) = \sqrt[5]{x}|_{x_0=32} = \sqrt[5]{32} = 2;$$

$$f'(x) = (\sqrt[5]{x})' = \frac{1}{5} x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5 \cdot \sqrt[5]{x^4}} \Rightarrow f'(x_0) = \frac{1}{5 \cdot \sqrt[5]{x^4}} \Big|_{x_0=32} = \frac{1}{5 \cdot \sqrt[5]{32^4}} = \frac{1}{80}.$$

Тому за формулою (17) маємо

$$\sqrt[5]{32 - 1} \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x = 2 + \frac{1}{80} \cdot (-1) = 0.9875 \Rightarrow \sqrt[5]{31} \approx 0.9875.$$

в) За умовою  $x = 1.97$ , тому  $x = x_0 + \Delta x = 2 - 0.03$ , звідки маємо

$x_0 = 2$ ;  $\Delta x = -0.03$ . Обчислимо

$$y(2) = \sqrt{x^3 + 2x - 3} \Big|_{x_0=2} = \sqrt{8 + 4 - 3} = 3;$$

$$y' = (\sqrt{x^3 + 2x - 3})' = \frac{1}{2\sqrt{x^3 + 2x - 3}} \cdot (3x^2 + 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'(2) = \frac{3x^2 + 2}{2\sqrt{x^3 + 2x - 3}} \Big|_{x_0=2} = \frac{7}{3}.$$

Отже, за формулою (17) отримаємо

$$y(1,97) \approx y(2) + y'(2) \cdot \Delta x = 3 + \frac{7}{3} \cdot (-0.03) = 2.93. \quad \blacksquare$$

### Контрольні приклади для самоперевірки

**3.1.** Знайти диференціали функцій: а)  $y = 2x^3 - \frac{1}{2(x-1)^2} + 4\sqrt[5]{x^2} - 3$ ;

б)  $\rho(\varphi) = 3^{\arctg^7 \ln 5\varphi}$ ; в)  $v(t) = \sqrt[3]{\frac{t^2}{2t+5}}$ ; г)  $w(s) = \sin(2s \arccos \sqrt{3s})$ .

**3.2.** Знайти диференціали функцій, заданих неявно:

а)  $\ln(xy^3) + 1 = y^4 + x^2$ ; б)  $x^2 + y^2 = \arctg \frac{y}{x} + 2$ .

**3.3.** Знайти диференціал функції  $y = \frac{3}{\sqrt[3]{x^5 - 3x - 5}} + e^{1-\frac{2}{x}}$ : а) при

довільному значенні  $x$ ; б) при  $x = -1$ ; в) при  $x = -1$  і  $\Delta x = 0,05$ .

**3.4.** Знайти приріст і диференціал функції  $y = \frac{1}{4+3x} - x^4 - 3x - 2$  при

$x = -1$  і  $\Delta x = -0.1$ . Знайти відповідні значення абсолютної і відносної похибки.

**3.5.** Обчислити наближено за допомогою диференціала  $\sqrt[3]{\frac{17-1.012^3}{1+1.012^3}}$ .

**3.6.** Обчислити наближено за допомогою диференціала  $e^{1.998^3 - 4 \times 1.998}$ .

**3.7.** Обчислити наближено за допомогою диференціала  $\ln \operatorname{ctg} 44^\circ$ .

**3.8.** За допомогою диференціала обчислити наближене значення функції  $y = (x^2 + 2x - 5) \ln x$  в точці  $x = 0.97$ .

**3.9.** За допомогою диференціала обчислити наближене значення функції  $y = \sqrt[4]{x^3 - 7}$  в точці  $x = 2.04$ .

## Відповіді

**3.1.** а)  $dy = \left( 6x^2 + \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{8}{5\sqrt[5]{x^3}} \right) dx$ ; б)  $d\rho = \frac{7 \ln 3 \cdot 3^{\arctg^2 \ln 5\varphi} \cdot \arctg^6 \ln 5\varphi}{\varphi(1 + \ln^2 5\varphi)} d\varphi$ ;

в)  $dv = \frac{2(t+5)}{3\sqrt[3]{t} \cdot (2t+5)^4} dt$ ; г)  $dw = \cos(2s \arccos \sqrt{3s}) \left( 2 \arccos \sqrt{3s} - \frac{\sqrt{3s}}{\sqrt{1-3s}} \right) ds$ .

**3.2.** а)  $dy = -\frac{(2x^2-1)y}{x(4y^4-3)} dx$ ; б)  $dy = -\frac{2x^3 + y + 2xy^2}{-x + 2x^2y + 2y^3} dx$ .

**3.3.** а)  $dy = \left( -\frac{5x^4-3}{\sqrt[3]{(x^5-3x-5)^4}} + \frac{2e^{1-\frac{2}{x}}}{x^2} \right) dx$ ; б)  $\left( 2e^3 - \frac{2}{3\sqrt[3]{3}} \right) dx$ ;

в)  $\frac{1}{10} \left( e^3 - \frac{1}{3\sqrt[3]{3}} \right)$ . **3.4.**  $\Delta y \Big|_{\substack{x=-1 \\ \Delta x=-0.1}} = \frac{18513}{70000} \approx 0.2645$ ,  $dy \Big|_{\substack{x=-1 \\ \Delta x=-0.1}} = 0.2$ , абсолютна

похибка 0.0645, відносна похибка 0.2438. **3.5.** 1.987. **3.6.** 0.840. **3.7.** 0.034.

**3.8.** 0.06. **3.9.** 1.12.

## 4. ПОХІДНІ І ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

### 4.1. Похідні вищих порядків

Нехай задана диференційовна в точці  $x$  функція  $y = f(x)$ , тоді її похідна  $y' = f'(x)$ , яку називають *першою похідною* або *похідною першого порядку*, також є функцією від змінної  $x$ .

Якщо існує похідна від першої похідної заданої функції, тобто  $(y')' = (f'(x))'$ , то вона називається *другою похідною* або *похідною другого порядку* і позначається одним із символів:  $y''$ ,  $f''(x)$ ,  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ,  $\frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right)$ . Отже,  $y'' = (y')'$ .

Похідна від другої похідної, якщо вона існує, тобто  $(y'')'$ , називається *третьою похідною* або *похідною третього порядку* і позначається  $y'''$ ,  $f'''(x)$ ,  $\frac{d^3 y}{dx^3}$ ,  $\frac{d}{dx} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)$ . Отже,  $y''' = (y'')'$ .

*Похідною  $n$ -го порядку* або  *$n$ -ю похідною* функції  $y = f(x)$  називається похідна, якщо вона існує, від похідної  $(n-1)$ -го порядку і позначається  $y^{(n)}$ ,  $f^{(n)}(x)$ ,  $\frac{d^n y}{dx^n}$ ,  $\frac{d}{dx} \left( \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right)$ . Таким чином,  $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$ . Похідні вище першого порядку називаються *похідними вищих порядків*.

Похідні, починаючи з четвертого порядку, позначаються не штрихами, а цифрами в дужках (щоб не плутати їх зі степенем) або римськими цифрами.

Наприклад,  $y^{(7)}$  або  $y^{VII}$ ,  $\frac{d^7 y}{dx^7}$  — сьома похідна.

#### Властивості:

Якщо функції  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$  мають похідні  $n$ -го порядку, то

1)  $(C \cdot u)^{(n)} = C \cdot u^{(n)}$ , де  $C = \text{const}$ ;

$$2) (u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}.$$

### Механічний зміст другої похідної:

Якщо матеріальна точка  $M$  рухається прямолінійно по закону  $S = f(t)$ , де  $S$  – шлях,  $t$  – час, то можна показати, що прискорення прямолінійного руху точки дорівнює другій похідній від шляху по часу, тобто

$$a = S''_{tt} \Rightarrow a = f''(t).$$

### Приклад 24.

1. Дано  $y = 2x^5 + 4x^4 - (5x^2 - 1)^2 + 3$ . Знайти  $y^{(5)}$  та  $y^{(6)}$ .

□ Розв'язання.

$$y' = (2x^5 + 4x^4 - (5x^2 - 1)^2 + 3)' = 10x^4 + 16x^3 - 2(5x^2 - 1) \cdot 10x = \\ = 10x^4 - 84x^3 + 20x,$$

$$y'' = (10x^4 - 84x^3 + 20x)' = 40x^3 - 252x^2 + 20,$$

$$y''' = (40x^3 - 252x^2 + 20)' = 120x^2 - 504x,$$

$$y^{(4)} = (120x^2 - 504x)' = 240x - 504,$$

$$y^{(5)} = (240x - 504)' = 240,$$

$$y^{(6)} = (240)' = 0. \quad \blacksquare$$

2. Дано  $f(x) = x \operatorname{tg} 2x$ . Знайти  $f^{(4)}(x)$  та  $f^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ .

□ Розв'язання.

$$f'(x) = (x \operatorname{tg} 2x)' = 1 \cdot \operatorname{tg} 2x + x \cdot \frac{1}{\cos^2 2x} \cdot 2 = \operatorname{tg} 2x + \frac{2x}{\cos^2 2x},$$

$$f''(x) = \left( \operatorname{tg} 2x + \frac{2x}{\cos^2 2x} \right)' = \frac{1}{\cos^2 2x} \cdot 2 + \frac{2 \cdot \cos^2 2x - 2x \cdot 2 \cos 2x (-2 \sin 2x)}{\cos^4 2x} =$$

$$= \frac{2}{\cos^2 2x} + \frac{2 \cos 2x + 8x \sin 2x}{\cos^3 2x} = \frac{4}{\cos^2 2x} + \frac{8x \sin 2x}{\cos^3 2x},$$

$$\begin{aligned}
f'''(x) &= \left( \frac{4}{\cos^2 2x} + \frac{8x \sin 2x}{\cos^3 2x} \right)' = \frac{-8}{\cos^3 2x} \cdot (-2 \sin 2x) + \\
&+ \frac{(8 \sin 2x + 8x \cdot 2 \cos 2x) \cdot \cos^3 2x - 8x \sin 2x \cdot 3 \cos^2 2x (-2 \sin 2x)}{\cos^6 2x} = \\
&= \frac{16 \sin 2x}{\cos^3 2x} + \frac{8 \sin 2x \cos 2x + 16x(\cos^2 2x + \sin^2 2x) + 32x \sin^2 2x}{\cos^4 2x} = \\
&= \frac{24 \sin 2x}{\cos^3 2x} + \frac{16x + 32x \sin^2 2x}{\cos^4 2x},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f^{(4)}(x) &= \left( 24 \frac{\sin 2x}{\cos^3 2x} + 16 \frac{x + 2x \sin^2 2x}{\cos^4 2x} \right)' = \\
&= 24 \frac{2 \cos 2x \cos^3 2x - \sin 2x \cdot 3 \cos^2 2x (-2 \sin 2x)}{\cos^6 2x} + \\
&+ 16 \frac{(1 + 2 \sin^2 2x + 2x \cdot 2 \sin 2x \cdot 2 \cos 2x) \cos^4 2x - (x + 2x \sin^2 2x) 4 \cos^3 2x (-2 \sin 2x)}{\cos^8 2x} = \\
&= 48 \frac{\cos^2 2x + 3 \sin^2 2x}{\cos^4 2x} + \\
&+ 16 \frac{(1 + 2 \sin^2 2x) \cos 2x + 8x \sin 2x (\cos^2 2x + \sin^2 2x) + 8x \sin 2x + 8x \sin^2 2x \sin 2x}{\cos^5 2x} = \\
&= 48 \frac{1 + 2 \sin^2 2x}{\cos^4 2x} + 16 \frac{1 + 2 \sin^2 2x}{\cos^4 2x} + 16 \frac{8x(2 \sin 2x + \sin^3 2x)}{\cos^5 2x} = \\
&= \frac{64(1 + 2 \sin^2 2x)}{\cos^4 2x} + \frac{128x(2 \sin 2x + \sin^3 2x)}{\cos^5 2x} \\
\Rightarrow f^{(4)}(x) &= \frac{64(1 + 2 \sin^2 2x)}{\cos^4 2x} + \frac{128x(2 \sin 2x + \sin^3 2x)}{\cos^5 2x}.
\end{aligned}$$

При  $x = \frac{\pi}{2}$  маємо

$$f^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{64(1 + 2 \sin^2 \pi)}{\cos^4 \pi} + \frac{64\pi(2 \sin \pi + \sin^3 \pi)}{\cos^5 \pi} = 64. \quad \blacksquare$$

3. Знайти похідну другого порядку від функцій: а)  $y = \frac{5^{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x}}$ ; б)  $y = x^{\ln^2 x}$ .

□ Розв'язання.

$$\text{а) } y' = \frac{(5^{\sqrt[3]{x}})' \sqrt[3]{x} - 5^{\sqrt[3]{x}} (\sqrt[3]{x})'}{(\sqrt[3]{x})^2} = \frac{5^{\sqrt[3]{x}} \ln 5 \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{x} - 5^{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{x^2}} =$$

$$= \frac{5^{\sqrt[3]{x}} (\sqrt[3]{x} \ln 5 - 1)}{3x\sqrt[3]{x}},$$

$$y'' = \left( \frac{5^{\sqrt[3]{x}} (\sqrt[3]{x} \ln 5 - 1)}{3x\sqrt[3]{x}} \right)' = \frac{1}{3} \left( 5^{\sqrt[3]{x}} \cdot \left( x^{-1} \ln 5 - x^{-\frac{4}{3}} \right) \right)' =$$

$$= \frac{1}{3} \left( (5^{\sqrt[3]{x}})' \cdot \left( x^{-1} \ln 5 - x^{-\frac{4}{3}} \right) + 5^{\sqrt[3]{x}} \cdot \left( x^{-1} \ln 5 - x^{-\frac{4}{3}} \right)' \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left( 5^{\sqrt[3]{x}} \ln 5 \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \cdot \left( x^{-1} \ln 5 - x^{-\frac{4}{3}} \right) + 5^{\sqrt[3]{x}} \cdot \left( -x^{-2} \ln 5 + \frac{4}{3} x^{-\frac{7}{3}} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{9} \cdot 5^{\sqrt[3]{x}} \left( \ln^2 5 \cdot \frac{1}{x\sqrt[3]{x^2}} - \ln 5 \cdot \frac{1}{x^2} - 3 \ln 5 \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^2\sqrt[3]{x}} \right) =$$

$$= \frac{1}{9} \cdot 5^{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2} \ln^2 5 - 4\sqrt[3]{x} \ln 5 + 4}{x^2\sqrt[3]{x}} = 5^{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{(\sqrt[3]{x} \ln 5 - 2)^2}{9x^2\sqrt[3]{x}}.$$

б) Для заданої функції  $y = x^{\ln^2 x}$  використаємо логарифмічне диференціювання:

$$\ln y = \ln x^{\ln^2 x} \Rightarrow \ln y = \ln^2 x \cdot \ln x \Rightarrow \ln y = \ln^3 x,$$

далі диференціюємо обидві частини отриманої рівності

$$(\ln y)' = (\ln^3 x)', \text{ пам'ятаючи, що } y = y(x),$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = 3 \ln^2 x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow y' = x^{\ln^2 x} \cdot \frac{3 \ln^2 x}{x}.$$

Аналогічні дії виконуємо при обчисленні похідної другого порядку:

$$\ln y' = \ln \left( \frac{3 \cdot x^{\ln^2 x} \cdot \ln^2 x}{x} \right) \Rightarrow \ln y' = \ln 3 + \ln x^{\ln^2 x} + \ln(\ln^2 x) - \ln x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln y' = \ln 3 + \ln^3 x + 2\ln(\ln x) - \ln x.$$

Далі диференціюємо по  $x$  обидві частин отриманої рівності, пам'ятаючи, що  $y = y(x)$ :

$$(\ln y')' = (\ln 3 + \ln^3 x + 2\ln(\ln x) - \ln x)',$$

$$\frac{1}{y'} \cdot y'' = 3\ln^2 x \cdot \frac{1}{x} + 2 \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \Rightarrow y'' = y' \cdot \left( \frac{3\ln^2 x}{x} + \frac{2}{x \ln x} - \frac{1}{x} \right).$$

Підставляючи отримане значення першої похідної в другу похідну, отримаємо

$$y'' = x^{\ln^2 x} \cdot \frac{3\ln^2 x}{x} \left( \frac{3\ln^2 x}{x} + \frac{2}{x \ln x} - \frac{1}{x} \right) = \frac{x^{\ln^2 x} \cdot 3\ln^2 x}{x^2} \left( 3\ln^2 x + \frac{2}{\ln x} - 1 \right). \quad \blacksquare$$

**Приклад 25.** Знайти похідну  $n$ -го порядку  $y^{(n)}$  функцій:

**а)**  $y = \sin kx$ ;      **б)**  $y = x \ln x$ .

□ Розв'язання.

**а)**  $y' = (\sin kx)' = k \cos kx = k \sin \left( \frac{\pi}{2} + kx \right),$

$$y'' = (k \cos kx)' = -k^2 \sin kx = k^2 \sin(\pi + kx) = k^2 \sin \left( kx + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \right),$$

$$y''' = (-k^2 \sin kx)' = -k^3 \cos kx = k^3 \sin \left( \frac{3\pi}{2} + kx \right) = k^3 \sin \left( kx + 3 \cdot \frac{\pi}{2} \right),$$

$$y^{IV} = (-k^3 \cos kx)' = k^4 \sin kx = k^4 \sin(2\pi + kx) = k^4 \sin \left( kx + 4 \cdot \frac{\pi}{2} \right).$$

Бачимо закономірність, за якою складені вище знайдені похідні:

- всі похідні містять множник  $k$  в степені, який дорівнює порядку похідної;
- у кожній похідній аргумент синуса складається з суми двох доданків, перший з яких дорівнює  $kx$ , а другий доданок це добуток  $\frac{\pi}{2}$  на число, яке дорівнює порядку похідної.

Вважаючи, що ця закономірність зберігається для похідної будь якого порядку, отримаємо

$$y^{(n)} = k^n \sin\left(kx + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (18)$$

Точне доведення цієї рівності можна отримати за методом математичної індукції. Дійсно, при  $n = 1$  рівність (18) виконується. Припустимо, що формула (18) справедлива для деякого  $n \geq 1$ , і покажемо її справедливість для  $n + 1$ . Оскільки

$$\begin{aligned} y^{(n+1)} &= \left(k^n \sin\left(kx + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right)' = k^{n+1} \cos\left(kx + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= k^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \left(kx + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right) = k^{n+1} \sin\left(kx + (n+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

то для  $y^{(n+1)}$  отримали формулу аналогічну формулі (18) для  $y^{(n)}$ , де  $n$  змінилось на  $n+1$ . Цим і доведена справедливість формули (18) для всіх натуральних значень  $n$ .

Аналогічно можна показати, що  $(\cos kx)^{(n)} = k^n \cos\left(kx + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**б)**  $y' = (x \ln x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1,$

$$y'' = (\ln x + 1)' = \frac{1}{x}, \quad y''' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad y^{(4)} = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{1 \cdot 2}{x^3} = \frac{2!}{x^3},$$

$$y^{(5)} = \left(\frac{1 \cdot 2}{x^3}\right)' = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4} = -\frac{3!}{x^4},$$

$$y^{(6)} = \left(-\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4}\right)' = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5} = \frac{4!}{x^5},$$

.....

$$y^{(n)} = (-1)^n \frac{(n-2)!}{x^{n-1}}, \quad n \geq 2,$$

де  $(n-2)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2)$ ;  $0! = 1$ . ■

**Приклад 26.** Перевірити, що функція

$$y = e^x \left( 2 - 3x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + \frac{x}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right)$$

задовольняє співвідношення  $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 4}$ .

□ Розв'язання. Знаходимо  $y'$ ,  $y''$ :

$$\begin{aligned} y' &= e^x \left( 2 - 3x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + \frac{x}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right) + \\ &+ e^x \left( -3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + 4} \cdot 2x + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2} x \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} \cdot \frac{1}{2} \right) = \\ &= e^x \left( 2 - 3x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + \frac{x}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right) + e^x \left( -3 - \frac{x}{x^2 + 4} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + x \cdot \frac{1}{4 + x^2} \right) = \\ &= e^x \left( -1 - 3x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + \left( \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right); \\ y'' &= e^x \left( -1 - 3x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + \left( \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right) + \\ &+ e^x \left( -3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + 4} \cdot 2x + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + \left( \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} \cdot \frac{1}{2} \right) = \\ &= e^x \left( -1 - 3x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + \frac{x+1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right) + e^x \left( -3 + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + \frac{1}{x^2 + 4} \right) = \\ &= e^x \left( -4 - 3x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + \frac{x+2}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + \frac{1}{x^2 + 4} \right). \\ \Rightarrow y'' - 2y' + y &= e^x \left( -4 - 3x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + \frac{x+2}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + \frac{1}{x^2 + 4} \right) - \\ &- 2e^x \left( -1 - 3x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + \left( \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +e^x \left( 2 - 3x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + \frac{x}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right) = \\
& = e^x \left( -4 - 3x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + \frac{x+2}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + \frac{1}{x^2 + 4} + \right. \\
& \left. + 2 + 6x + \ln(x^2 + 4) - (x+1) \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + 2 - 3x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + \frac{x}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right) = \\
& = e^x \cdot \frac{1}{x^2 + 4}.
\end{aligned}$$

Підставляючи цей вираз у задане співвідношення  $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 4}$ ,

отримаємо тотожність

$$\frac{e^x}{x^2 + 4} \equiv \frac{e^x}{x^2 + 4},$$

тобто задана функція задовольняє задане співвідношення. ■

## 4.2. Формула Лейбніца

Нехай функції  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$  мають похідні  $n$ -го порядку. Знайдемо похідну  $n$ -го порядку від функції  $y = u(x) \cdot v(x)$ . Обчислюємо:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v';$$

$$(u \cdot v)'' = (u' \cdot v + u \cdot v')' = u'' \cdot v + u' \cdot v' + u' \cdot v' + u \cdot v'' = u''v + 2u'v' + uv'';$$

$$\begin{aligned}
(u \cdot v)''' &= (u''v + 2u'v' + uv'')' = u'''v + u''v' + 2u''v' + 2u'v'' + u'v'' + uv''' = \\
&= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''.
\end{aligned}$$

Бачимо, що праві частини цих рівностей нагадують відповідні степені бінома Ньютона:

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = a^n b^0 + n a^{n-1} b^1 + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot a^{n-2} b^2 + \dots \\
&\dots + \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot a^{n-k} b^k + \dots + n a^1 b^{n-1} + a^0 b^n,
\end{aligned}$$

де лише замість показників степеня стоять похідні відповідних порядків. При цьому будемо вважати, що  $u(x) = u^{(0)}(x)$ ,  $v(x) = v^{(0)}(x)$ .

Отже, користуючись методом математичної індукції, можна довести, що

$$(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)}v + n \cdot u^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot u^{(n-2)}v'' + \dots \\ \dots + \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot u^{(n-k)}v^{(k)} + \dots + n \cdot u'v^{(n-1)} + uv^{(n)}, \quad (19)$$

де  $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (k-1) \cdot k$  — факторіал числа  $k$ , ( $k \in \mathbb{N}$ ,  $0! = 1$ ) або скорочений запис рівності (19):

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot u^{(n-k)} \cdot v^{(k)}, \quad \text{де } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Формула (19) називається **формулою Лейбніца**.

### Приклад 27.

1. Знайти  $y^{(6)}$  за формулою Лейбніца, якщо  $y = (x^4 - x) \ln x$ .

□ Розв'язання. Позначимо  $y = u(x) \cdot v(x)$ , де  $u(x) = x^4 - x$ ,  $v(x) = \ln x$ .

Обчислимо похідні до 6-го порядку від цих функцій:

$$u' = 4x^3 - 1, \quad u'' = 12x^2, \quad u''' = 24x, \quad u^{(4)} = 24, \quad u^{(5)} = 0, \quad u^{(6)} = 0,$$

$$v' = \frac{1}{x}, \quad v'' = -\frac{1}{x^2}, \quad v''' = \frac{2}{x^3}, \quad v^{(4)} = -\frac{6}{x^4}, \quad v^{(5)} = \frac{24}{x^5}, \quad v^{(6)} = -\frac{120}{x^6}.$$

Тоді за формулою Лейбніца маємо

$$y^{(6)} = u^{(6)}v + 6 \cdot u^{(5)}v' + \frac{6 \cdot 5}{2!} \cdot u^{(4)}v'' + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} \cdot u'''v''' + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2}{4!} \cdot u''v^{(4)} + \\ + 6 \cdot u'v^{(5)} + uv^{(6)};$$

$$y^{(6)} = 0 + 0 + 15 \cdot 24 \left( -\frac{1}{x^2} \right) + 20 \cdot 24x \cdot \frac{2}{x^3} + 10 \cdot 12x^2 \cdot \left( -\frac{6}{x^4} \right) + \\ + 6(4x^3 - 1) \cdot \frac{24}{x^5} + (x^4 - x) \cdot \left( -\frac{120}{x^6} \right) = \frac{336}{x^2} - \frac{24}{x^5} = \frac{336x^3 - 24}{x^5}. \quad \blacksquare$$

2. Знайти  $y^{(100)}$ , якщо  $y = e^{3x}x^2$ . Обчислити  $y^{(100)}(0)$ .

□ Розв'язання. Позначимо  $u(x) = e^{3x}$ ,  $v(x) = x^2$ . Обчислимо похідні до 100-го порядку від цих функцій:

$$u' = 3e^{3x}, u'' = 3^2 e^{3x}, u''' = 3^3 e^{3x}, u^{(4)} = 3^4 e^{3x}, \dots, u^{(98)} = 3^{98} e^{3x},$$

$$u^{(99)} = 3^{99} e^{3x}, u^{(100)} = 3^{100} e^{3x},$$

$$v' = 2x, v'' = 2, v''' = 0, v^{(4)} = 0, \dots, v^{(100)} = 0.$$

Тоді  $y = u(x) \cdot v(x)$  і за формулою Лейбніца маємо

$$y^{(100)} = u^{(100)}v + 100 \cdot u^{(99)}v' + \frac{100 \cdot 99}{2!} \cdot u^{(98)}v'' + \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{3!} \cdot u^{(97)}v''' + \dots$$

$$\dots + 100 \cdot u'v^{(99)} + uv^{(100)}; \Rightarrow$$

$$y^{(100)} = 3^{100} e^{3x} \cdot x^2 + 100 \cdot 3^{99} e^{3x} \cdot 2x + \frac{100 \cdot 99}{2!} \cdot 3^{98} e^{3x} \cdot 2 + \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{3!} \cdot 3^{97} e^{3x} \cdot 0 + \dots$$

$$\dots + 100 \cdot 3e^{3x} \cdot 0 + e^{3x} \cdot 0 = 3^{98} e^{3x} (9x^2 + 600x + 9900).$$

Звідси маємо

$$y^{(100)}(0) = 3^{98} e^{3 \cdot 0} (9 \cdot 0 + 600 \cdot 0 + 9900) = 3^{98} \cdot 9900 = 3^{100} \cdot 1100. \quad \blacksquare$$

### 4.3. Похідні вищих порядків параметрично і неявно заданих функцій

I. Нехай функція  $y = f(x)$  задана параметрично рівняннями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in (t_1; t_2).$$

Перша похідна цієї функції по змінній  $x$  знаходиться за формулою

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \text{ тобто } \begin{cases} y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \\ x = x(t). \end{cases}$$

Знайдемо другу похідну по змінній  $x$  від заданої функції. Нехай функції  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  мають похідні другого порядку, позначимо  $z(t) = y'_x$  і

розглянемо нову параметрично задану функцію  $\begin{cases} x = x(t), \\ z = y'_x. \end{cases}$

Знаходимо похідну по  $x$  від отриманої параметричної функції

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = z'_x, \text{ де } z'_x = \frac{z'_t}{x'_t} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t},$$

тоді друга похідна заданої функції по змінній  $x$  обчислюється за формулою

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.$$

Аналогічно отримаємо

$$y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}; \quad \frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{(y'''_{xxx})'_t}{x'_t}; \quad \dots; \quad \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)'_t}{x'_t}.$$

**II.** Для функції  $y = y(x)$ , яка задана неявно рівнянням  $F(x, y) = 0$ , похідні вищих порядків знаходяться аналогічно до знаходження першої похідної від неявно заданої функції.

А саме: знаходимо першу похідну  $y'$  цієї функції; далі, диференціюючи по змінній  $x$  першу похідну (враховуючи, що  $y = y(x)$ ), отримаємо другу похідну від неявно заданої функції. Відповідь виражаємо через змінні  $x$  та  $y$ , підставляючи в отриману рівність значення  $y'$ .

**Приклад 28.** Знайти похідні  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ,  $\frac{d^3 y}{dx^3}$  функцій:

$$\text{а) } \begin{cases} x = t^2 - 2t + 3, \\ y = t^5 + t^4; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x = \operatorname{tg} 2t, \\ y = \cos^3 2t. \end{cases}$$

□ Розв'язання. а) 
$$\begin{cases} x = t^3 - 2t + 3, \\ y = t^5 + t^4. \end{cases}$$

Оскільки  $x'_t = (t^3 - 2t + 3)' = 3t^2 - 2$ ,  $y'_t = (t^5 + t^4)' = 5t^4 + 4t^3$ ,

то для функції, що задана параметрично, знаходимо першу похідну

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{5t^4 + 4t^3}{3t^2 - 2}.$$

Другу похідну по змінній  $x$  обчислюємо за формулою  $y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$ ,

$$\begin{aligned} \text{де } (y'_x)'_t &= \left( \frac{5t^4 + 4t^3}{3t^2 - 2} \right)'_t = \frac{(20t^3 + 12t^2)(3t^2 - 2) - (5t^4 + 4t^3)6t}{(3t^2 - 2)^2} = \\ &= \frac{2(15t^5 + 6t^4 - 20t^3 - 12t^2)}{(3t^2 - 2)^2}. \end{aligned}$$

Тому

$$y''_{xx} = \frac{2(15t^5 + 6t^4 - 20t^3 - 12t^2)}{(3t^2 - 2)^2} \Big/ (3t^2 - 2) = \frac{2(15t^5 + 6t^4 - 20t^3 - 12t^2)}{(3t^2 - 2)^3}.$$

Аналогічно знаходимо третю похідну по змінній  $x$  від заданої функції:

$$y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t},$$

$$\begin{aligned} \text{де } (y''_{xx})'_t &= \left( \frac{2(15t^5 + 6t^4 - 20t^3 - 12t^2)}{(3t^2 - 2)^3} \right)'_t = \\ &= 2 \frac{(75t^4 + 24t^3 - 60t^2 - 24t)(3t^2 - 2)^3 - (15t^5 + 6t^4 - 20t^3 - 12t^2) \cdot 3(3t^2 - 2)^2 \cdot 6t}{(3t^2 - 2)^6} = \\ &= - \frac{6t(15t^5 + 12t^4 - 10t^3 - 32t^2 - 40t - 16)}{(3t^2 - 2)^4}. \end{aligned}$$

Таким чином, маємо

$$\begin{aligned} y'''_{xxx} &= - \frac{6t(15t^5 + 12t^4 - 10t^3 - 32t^2 - 40t - 16)}{(3t^2 - 2)^4} \Big/ (3t^2 - 2) = \\ &= - \frac{6t(15t^5 + 12t^4 - 10t^3 - 32t^2 - 40t - 16)}{(3t^2 - 2)^5}. \end{aligned}$$

Отже, остаточною відповіддю:

$$\begin{cases} x = t^3 - 2t + 3, \\ y''_{xx} = \frac{2(15t^5 + 6t^4 - 20t^3 - 12t^2)}{(3t^2 - 2)^3}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = t^3 - 2t + 3, \\ y_{xxx}''' = -\frac{6t(15t^5 + 12t^4 - 10t^3 - 32t^2 - 40t - 16)}{(3t^2 - 2)^5}. \end{cases}$$

б)  $\begin{cases} x = \operatorname{tg} 2t, \\ y = \cos^3 2t. \end{cases}$  Оскільки

$$x'_t = (\operatorname{tg} 2t)' = \frac{1}{\cos^2 2t} \cdot 2, \quad y'_t = (\cos^3 2t)' = 3\cos^2 2t \cdot (-\sin 2t) \cdot 2,$$

то для функції, що задана параметрично, знаходимо першу похідну

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(-6\cos^2 2t \sin 2t)}{\frac{2}{\cos^2 2t}} = -3\sin 2t \cos^4 2t.$$

Другу похідну по змінній  $x$  обчислюємо за формулою

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t},$$

де

$$(y'_x)'_t = (-3\sin 2t \cos^4 2t)'_t = -3(2\cos 2t \cdot \cos^4 2t + \sin 2t \cdot 4\cos^3 2t \cdot (-2\sin 2t)).$$

Тому

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{(-6\cos^5 2t + 24\sin^2 2t \cos^3 2t)}{\frac{2}{\cos^2 2t}} = \\ &= -3\cos^7 2t + 12\sin^2 2t \cos^5 2t = 12\cos^5 2t - 15\cos^7 2t. \end{aligned}$$

Третю похідну по змінній  $x$  від заданої функції знаходимо за формулою

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t},$$

де

$$(y''_{xx})'_t = (12\cos^5 2t - 15\cos^7 2t)'_t = 60\cos^4 2t(-2\sin 2t) - 105\cos^6 2t(-2\sin 2t).$$

Таким чином, маємо

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = 30\sin 2t(7\cos^6 2t - 4\cos^4 2t) \Big/ \frac{2}{\cos^2 2t} = 15\sin 2t \cdot (7\cos^8 2t - 4\cos^6 2t).$$

Отже, остаточною відповідь:

$$\begin{cases} x = \operatorname{tg} 2t, \\ \frac{d^2 y}{dx^2} = 12 \cos^5 2t - 15 \cos^7 2t, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \operatorname{tg} 2t, \\ \frac{d^3 y}{dx^3} = 15 \sin 2t \cdot (7 \cos^8 2t - 4 \cos^6 2t). \end{cases} \quad \blacksquare$$

**Приклад 29.** Знайти третю похідну  $y'''$  функції  $x^3 + y^2 = 5$ .

□ Розв'язання. Функція задана неявно, тому для знаходження першої похідної продиференціюємо по змінній  $x$  обидві частини заданого рівняння, пам'ятаючи, що  $y = y(x)$ :

$$(x^3 + y^2)'_x = (5)'_x \Rightarrow 3x^2 + 2y \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{3x^2}{2y}.$$

Потім, диференціюючи по змінній  $x$  обидві частини попередньої рівності, отримаємо

$$(3x^2 + 2y \cdot y')' = 0' \Rightarrow 6x + 2y' \cdot y' + 2y \cdot y'' = 0 \Rightarrow y'' = -\frac{3x + (y')^2}{y}.$$

Підставимо в другу похідну замість  $y'$  вираз  $-\frac{3x^2}{2y}$ :

$$\begin{aligned} y'' &= -\frac{3x + \left(-\frac{3x^2}{2y}\right)^2}{y} = -\frac{12xy^2 + 9x^4}{4y^3} = \left| \text{за умовою} \right| = \\ &= -\frac{12x(y^2 + x^3) - 3x^4}{4y^3} = -\frac{12x \cdot 5 - 3x^4}{4y^3} = \frac{3(x^4 - 20x)}{4y^3}. \end{aligned}$$

Отже,  $y'' = \frac{3(x^4 - 20x)}{4y^3}$ .

Аналогічно знаходимо третю похідну, диференціюючи по змінній  $x$  обидві частини вище знайденої рівності  $3x + (y')^2 + y \cdot y'' = 0$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow 3 + 2y' \cdot y'' + y' \cdot y'' + y \cdot y''' &= 0 \Rightarrow y''' = -\frac{3(1 + y' \cdot y'')}{y} \Rightarrow \\ y''' &= -3 \cdot \frac{1 + \left(-\frac{3x^2}{2y}\right) \cdot \left(\frac{3(x^4 - 20x)}{4y^3}\right)}{y} = -3 \cdot \frac{8(y^2)^2 - 9x^2(x^4 - 20x)}{8y^5} = \\ &= \left. \begin{array}{l} \text{за умовою } x^3 + y^2 = 5 \\ \Rightarrow y^2 = 5 - x^3 \end{array} \right| = -3 \cdot \frac{8(25 - 10x^3 + x^6) - 9x^6 + 180x^3}{8y^5} = \\ &= \frac{3 \cdot (x^6 - 100x^3 - 200)}{8y^5}. \end{aligned}$$

Отже, остаточна відповідь:  $y''' = \frac{3 \cdot (x^6 - 100x^3 - 200)}{8y^5}$ . ■

**Приклад 30.** Знайти другу похідну  $y''$  від функції  $\sin(x + y) = 2x + y$ .

□ Розв'язання. Продиференціюємо по змінній  $x$  обидві частини заданого рівняння, пам'ятаючи, що  $y = y(x)$ :

$$\begin{aligned} (\sin(x + y))'_x &= (2x + y)'_x \Rightarrow \\ \cos(x + y) \cdot (1 + y') &= 2 + y' \Rightarrow y' \cos(x + y) - y' = 2 - \cos(x + y) \Rightarrow \\ y' &= \frac{2 - \cos(x + y)}{\cos(x + y) - 1}. \end{aligned}$$

Продиференціюємо по змінній  $x$  обидві частини попередньої рівності

$$\begin{aligned} (y' \cos(x + y) - y')' &= (2 - \cos(x + y))' \Rightarrow \\ y'' \cos(x + y) - y' \sin(x + y) \cdot (1 + y') - y'' &= \sin(x + y) \cdot (1 + y') \Rightarrow \\ y'' (\cos(x + y) - 1) &= (1 + y') \sin(x + y) + y' (1 + y') \sin(x + y) \\ y'' &= \frac{\sin(x + y) \cdot (1 + 2y' + (y')^2)}{\cos(x + y) - 1}, \end{aligned}$$

звідки

$$y'' = \frac{\sin(x + y)}{\cos(x + y) - 1} \left( 1 + 2 \frac{2 - \cos(x + y)}{\cos(x + y) - 1} + \left( \frac{2 - \cos(x + y)}{\cos(x + y) - 1} \right)^2 \right) \Rightarrow$$

$$y'' = \sin(x + y) \cdot \left( \frac{3 - \cos(x + y)}{(\cos(x + y) - 1)^2} + \frac{(2 - \cos(x + y))^2}{(\cos(x + y) - 1)^3} \right).$$

#### 4.4. Диференціали вищих порядків

Нехай  $y = f(x)$  диференційовна в точці  $x$  функція, тоді  $dy = f'(x) \cdot dx$  — перший диференціал цієї функції. Він є функцією від  $x$ , тому можна знайти диференціал отриманої функції.

*Другим диференціалом* або *диференціалом другого порядку* називається диференціал від першого диференціала функції  $y = f(x)$  в деякій точці  $x$ , за умови, що він існує, і позначається  $d^2y$ . Отже,  $d^2y = d(dy)$ .

*Диференціалом  $n$ -го порядку* або  *$n$ -им диференціалом* функції  $y = f(x)$  називається диференціал, якщо він існує, від  $(n - 1)$ -го диференціала цієї функції і позначається  $d^n y$ .

Отже,  $d^n y = d(d^{n-1}y)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Знайдемо вирази для диференціалів вищих порядків, у випадках, якщо  $x$  — незалежна змінна і якщо  $x$  — залежна змінна.

**I.** Нехай задана функція  $y = f(x)$ , де  $x$  — незалежна змінна і  $f(x)$  має похідні будь якого порядку.

У цьому випадку  $dx = \Delta x = \text{const}$  — число, яке не залежить від  $x$ . Тоді

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x) \cdot \underset{\text{const}}{dx}) = d(f'(x)) \cdot dx = (f'(x))' dx \cdot dx = f''(x) \cdot (dx)^2.$$

Позначимо  $(dx)^2 = dx^2$ ,  $(dx)^3 = dx^3$ , ...,  $(dx)^n = dx^n$ , тоді

$$d^2y = f''(x) \cdot dx^2, \text{ якщо } x \text{ — незалежна змінна.} \quad (20)$$

Аналогічно отримуємо:

$$d^n y = f^{(n)}(x) \cdot dx^n, \text{ якщо } x \text{ — незалежна змінна.} \quad (21)$$

**Зауважимо**, що з останньої формули отримуємо рівність  $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$ ,

яка дає можливість розглядати цей вираз не лише як символ  $n$ -ої похідної функції, а і як дріб.

**II.** Можна довести, що формула (21) при  $n > 1$  не має властивості інваріантності, тобто, формула (21) справедлива, коли  $x$  – незалежна змінна, і не виконується, коли  $x$  є функцією від іншої незалежної змінної.

Покажемо на прикладі другого диференціала функції  $y = f(x)$ , де  $x = \varphi(t)$  — залежна змінна, а  $t$  — незалежна змінна. Тоді

$$\begin{aligned} d^2 y &= d(dy) = d(f'(x) \cdot dx) = d(f'(x)) \cdot dx + f'(x) \cdot \underbrace{d(dx)}_{=d^2 x} = \\ &= f''(x) dx^2 + f'(x) \cdot d^2 x \Rightarrow \end{aligned}$$

$$d^2 y = f''(x) dx^2 + f'(x) d^2 x, \quad (22)$$

тут  $d^2 x = x'' dt^2 \neq 0$ . Порівнюючи формули (20) і (22) бачимо, що формула змінилася.

Отже, *диференціали вищих порядків не мають властивості інваріантності.*

**Приклад 31.** Знайти диференціал другого порядку функції:

1.  $y = x \arccos 2x + 5$ .

□ Розв'язання.  $y' = \arccos 2x + x \cdot \left( -\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \cdot 2 \right) = \arccos 2x - \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}},$

$$\begin{aligned} y'' &= \left( \arccos 2x - \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} \right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \cdot 2 - \frac{2 \cdot \sqrt{1-4x^2} - 2x \cdot \frac{-8x}{2\sqrt{1-4x^2}}}{(\sqrt{1-4x^2})^2} = \\ &= -\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{2 \cdot (1-4x^2) + 8x^2}{(1-4x^2)\sqrt{1-4x^2}} = \frac{-2(1-4x^2) - 2 \cdot (1-4x^2) - 8x^2}{(1-4x^2)\sqrt{1-4x^2}} = \frac{-4 + 8x^2}{(1-4x^2)\sqrt{1-4x^2}}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow d^2y = y''(x) \cdot dx^2 \Rightarrow d^2y = \frac{-4 + 8x^2}{(1 - 4x^2)\sqrt{1 - 4x^2}} dx^2. \quad \blacksquare$$

2.  $y = x^4 - 2x, \quad x = \sin 3t.$

□ Розв'язання. За формулою (22):

$$\begin{aligned} y' &= 4x^3 - 2, \quad y'' = 12x^2, \quad dx = 3\cos 3t \cdot dt, \quad d^2x = -9\sin 3t \cdot dt^2 \Rightarrow \\ d^2y &= f''(x) \cdot dx^2 + f'(x) \cdot d^2x = 12x^2(dx)^2 + (4x^3 - 2) \cdot (-9\sin 3t dt^2) = \\ &= 12\sin^2 3t \cdot (3\cos 3t dt)^2 + (4\sin^3 3t - 2) \cdot (-9\sin 3t dt^2) = \\ &= (108\sin^2 3t \cdot \cos^2 3t - 9\sin 3t(4\sin^3 3t - 2)) dt^2. \end{aligned}$$

Також можна знайти другий диференціал функції, виключивши залежну змінну  $x$  і використавши формулу (20):

$$\begin{aligned} y &= \sin^4 3t - 2\sin 3t \Rightarrow y'_t = 12\sin^3 3t \cos 3t - 6\cos 3t, \\ y''_{tt} &= 36\sin^2 3t \cdot 3\cos 3t \cdot \cos 3t + 12\sin^3 3t \cdot (-3\sin 3t) + 18\sin 3t, \\ d^2y &= y''_{tt} dt^2 = y'' = (108\sin^2 3t \cdot \cos^2 3t - 36\sin^4 3t + 18\sin 3t) dt^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### Контрольні приклади для самоперевірки

4.1. Дано  $y = e^{2x-1} + \frac{\sin 3x}{27} + (1-x)^5$ . Знайти  $y^{(4)}(x)$  та  $y^{(5)}(0)$ .

4.2. Дано  $f(x) = \cos x^2 - x^4 + 3x$ . Знайти  $f^{(4)}(x)$  та  $f^{(4)}(0)$ .

4.3. Знайти похідну другого порядку від функцій: а)  $y = \arcsin \sqrt{1-4x}$ ;

б)  $y = x \operatorname{arccotg} 2x^2$ ; в)  $y = x \ln \sqrt{x^2 + 3x - 1}$ ; г)  $y = \sin^4 3x + 2x^4$ ;

д)  $y = x^{e^{2x}}$ .

4.4. Знайти похідну  $n$ -го порядку  $y^{(n)}$  функцій: а)  $y = \ln(2-3x)$ ;

б)  $y = \frac{2-x}{\sqrt{x}}$ .

4.5. Перевірити, що функція  $y = 2e^{-3x} \sin 2x - 5e^{-3x} \cos 2x + (2x+1)e^{-x}$  задовольняє співвідношення  $y'' + 6y' + 13y = 16(x+1)e^{-x}$ .

4.6. За формулою Лейбніца знайти  $y^{(5)}$ , якщо  $y = e^{2x} \sin 3x$ .

4.7. За формулою Лейбніца знайти  $y^{(6)}$ , якщо  $y = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$ .

4.8. За формулою Лейбніца знайти  $y^{(100)}(x)$ , якщо  $y = x^3 \cos 2x$ .  
Обчислити  $y^{(100)}(\pi)$ .

4.9. Знайти  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  від функцій: а)  $\begin{cases} x = \frac{2t^3 + 3}{t}, \\ y = \frac{t^2 + 1}{t}, \end{cases}$  б)  $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} 2t, \\ y = te^{-t}. \end{cases}$

4.10. Знайти похідні  $\frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d^3 y}{dx^3}$  від функцій: а)  $\begin{cases} x = \sqrt{2t + 3}, \\ y = t^3 - 5t + 1; \end{cases}$

б)  $\begin{cases} x = \operatorname{ctg}^2 t, \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$

4.11. Знайти  $y''$  від функції  $e^y = xy + x^2$ .

4.12. Знайти  $y''$  та  $y'''$  від функції  $y^2 - xy + x^2 = 1$ .

4.13. Знайти диференціал другого порядку функції: а)  $y = e^{x \sin x}$ ;

б)  $y = \operatorname{arctg} x, \quad x = \sqrt{t^4 - 1}$ .

### Відповіді

4.1.  $y^{(4)}(x) = 16e^{2x-1} + 3 \sin 3x - 120x + 120, \quad y^{(5)}(0) = 32e^{-1} - 111$ .

4.2.  $f^{(4)}(x) = 48x^2 \sin x^2 + 4(4x^4 - 3) \cos x^2 - 24, \quad f^{(4)}(0) = -36$ .

4.3. а)  $\frac{1-8x}{2\sqrt{(x-4x^2)^3}}$ ; б)  $\frac{4x(4x^4-3)}{(4x^4+1)^2}$ ; в)  $\frac{2x^3+12x^2+3x-6}{(x^2+3x-1)^2}$ ;

г)  $2^{x^4} \cdot 4x^2 \ln 2 \cdot (4x^6 \ln 2 + 3) + 108 \sin^2 3x \cos^2 3x - 36 \sin^4 3x$ ;

д)  $x^{e^{2x}-2} e^{2x} (4e^{2x} x^2 \ln^2 x + e^{2x} + 4x + 4x(x + e^{2x}) \ln x - 1)$ . 4.4. а)  $-\frac{(n-1)! 3^n}{(2-3x)^n}$ ;

$$\text{б) } \frac{(-1)^n}{2^n} \left( 2(2n-1)!! \cdot x^{-\frac{1}{2}-n} + (2n-3)!! \cdot x^{\frac{1}{2}-n} \right). \quad \mathbf{4.6.} \quad e^{2x}(122 \sin 3x - 597 \cos 3x).$$

$$\mathbf{4.7.} \quad y^{(6)} = \frac{720\sqrt{x}}{(x+1)^7} - \frac{360}{(x+1)^6\sqrt{x}} - \frac{90}{(x+1)^5\sqrt{x^3}} - \frac{45}{(x+1)^4\sqrt{x^5}} - \frac{225}{8(x+1)^3\sqrt{x^7}} - \frac{315}{16(x+1)^2\sqrt{x^9}} - \frac{945}{64(x+1)\sqrt{x^{11}}}.$$

$$\mathbf{4.8.} \quad y^{(100)}(x) = 2^{100} (75(2x^2 - 1617) \sin 2x + (x^3 - 7425x) \cos 2x),$$

$$y^{(100)}(\pi) = 2^{100} (\pi^3 - 7425\pi). \quad \mathbf{4.9.} \quad \text{а) } \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{2t^3(2t^3 - 6t + 3)}{(4t^3 - 3)^3};$$

$$\text{б) } \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{2} e^{-t} (4t^3 - 16t^2 + 9t - 2)(1 + 4t^2). \quad \mathbf{4.10.} \quad \text{а) } \begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} = 15t^2 + 18t - 5, \\ x = \sqrt{2t + 3}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d^3 y}{dx^3} = 75t^2 + 144t + 49, \\ x = \sqrt{2t + 3}; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} = 2 \sin^6 t, \\ x = \operatorname{ctg}^2 t, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d^3 y}{dx^3} = -6 \sin^8 t, \\ x = \operatorname{ctg}^2 t. \end{cases}$$

$$\mathbf{4.11.} \quad \frac{2}{e^y - x} + \frac{2(2x + y)}{(e^y - x)^2} - \frac{e^y(2x + y)^2}{(e^y - x)^3}. \quad \mathbf{4.12.} \quad y'' = \frac{6}{(x - 2y)^3}, \quad y''' = \frac{6(5x + 2y)}{(x - 2y)^5}.$$

$$\mathbf{4.13.} \quad \text{а) } d^2 y = e^{x \sin x} (x^2 \cos^2 x + \sin^2 x - x \sin x + 2 \cos x + 2x \sin x \cos x) dx^2;$$

$$\text{б) } d^2 y = \frac{2 - 6t^4}{t^2 \sqrt{(t^4 - 1)^3}} dt^2.$$

## 5. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

### **Теорема Ферма.**

*Нехай виконуються умови:*

- 1) функція  $f(x)$  неперервна на відрізку  $[a;b]$ ;
- 2) існує точка  $c \in (a;b)$ , в якій функція  $f(x)$  набуває свого найбільшого і найменшого значення;
- 3) існує похідна  $f'(c)$ .

*Тоді  $f'(c) = 0$ .*

### Геометричний зміст теореми Ферма:

з теореми Ферма слідує, що кутовий коефіцієнт дотичної до кривої  $y = f(x)$  в точці  $x = c$  задовольняє умові  $k_{\text{дот.}} = 0$ , тому в точці  $x = c$  дотична  $l_{\text{дот.}}$  до кривої паралельна до осі  $Ox$ .

### **Теорема Ролля.**

*Нехай виконуються умови:*

- 1) функція  $f(x)$  неперервна на відрізку  $[a;b]$ ;
- 2) існує скінченна похідна  $f'(x)$  для всіх  $x \in (a;b)$ ;
- 3)  $f(a) = f(b)$ , тобто на кінцях проміжку функція приймає рівні значення.

*Тоді знайдеться хоча б одна точка  $c \in (a;b)$ , в якій  $f'(c) = 0$ .*

### Геометричний зміст теореми Ролля:

якщо виконуються всі умови теореми Ролля, то на кривій  $y = f(x)$  знайдеться хоча б одна точка, в якій дотична до кривої паралельна до осі  $Ox$ .

### **Теорема Коші.**

*Нехай виконуються умови:*

- 1) функції  $f(x)$  і  $g(x)$  неперервні на відрізку  $[a;b]$ ;

2) існують скінченні похідні  $f'(x)$  і  $g'(x)$  при  $x \in (a;b)$ ;

3)  $g'(x) \neq 0$  при  $x \in (a;b)$ .

Тоді знайдеться хоча б одна точка  $c \in (a;b)$  така, що виконується рівність

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad (23)$$

Формула (23) називається **формулою Коші**.

### Теорема Лагранжа.

Нехай виконуються умови:

1) функції  $f(x)$  неперервна на відрізку  $[a;b]$ ;

2) існує скінченна похідна  $f'(x)$  при  $x \in (a;b)$ .

Тоді знайдеться хоча б одна точка  $c \in (a;b)$  така, що

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \quad (24)$$

Із формули (24) маємо рівність

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a),$$

яка називається **формулою Лагранжа** або **формулою скінченних приростів**.

### Геометричний зміст теореми Лагранжа:

якщо виконуються всі умови теореми Лагранжа, то на дузі  $AB$  кривої  $y = f(x)$ , де  $A(a; f(a))$ ,  $B(b; f(b))$ , знайдеться хоча б одна внутрішня точка, в якій дотична паралельна січній  $AB$  (див. рис. 5.1).

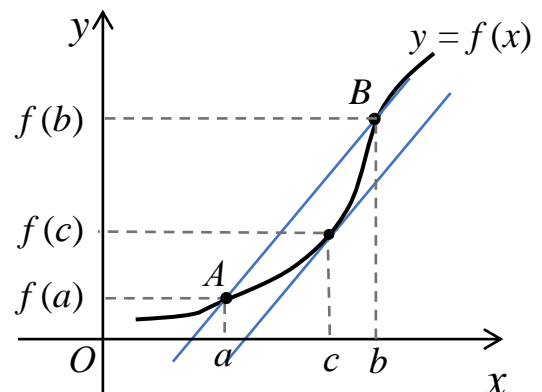


Рис. 5.1

### Зауваження. Розглянемо

відрізок  $[x; x + \Delta x]$ . Тоді маємо

$$a = x, \quad b = x + \Delta x \Rightarrow b - a = \Delta x, \quad f(b) - f(a) = f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta y.$$

За теоремою Лагранжа отримаємо

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(c), \text{ де } x < c < x + \Delta x.$$

Точку  $c$  можна записати у вигляді  $c = x + \theta \cdot \Delta x$ , де  $0 < \theta < 1$ . Тоді отримаємо

$$\Delta y = f'(x + \theta \cdot \Delta x) \cdot \Delta x, \text{ де } 0 < \theta < 1,$$

— **формула скінченних приростів.**

**Приклад 32.** Чи виконується теорема Ролля для функції  $f(x) = x^3 + 5x^2 + 2x - 6$  на відрізку  $[-4; 1]$ . При якому значенні  $c$ ?

□ Розв'язання. Перевіряємо умови теореми Ролля:

- 1) задана функція неперервна на відрізку  $[-4; 1]$ ;
- 2) існує скінченна похідна  $f'(x) = 3x^2 + 10x + 2$  на інтервалі  $(-4; 1)$ ;
- 3)  $f(-4) = -64 + 80 - 8 - 6 = 2$ ,  $f(1) = 1 + 5 + 2 - 6 = 2 \Rightarrow f(-4) = f(1)$ .

Отже, всі умови теореми Ролля на цьому відрізку виконуються. Знайдемо значення  $c$  із рівняння  $f'(c) = 0 \Rightarrow 3c^2 + 10c + 2 = 0$ , звідки

$$c_1 = -\frac{5 + \sqrt{19}}{3}, c_2 = \frac{\sqrt{19} - 5}{3}, \text{ де } c_1, c_2 \in (-4; 1). \quad \blacksquare$$

**Приклад 33.** На дузі  $AB$  кривої  $f(x) = 5 + 7x - 2x^2$  знайти точку  $M$ , в якій дотична паралельна січній  $AB$ , якщо  $A(1; 10)$ ,  $B(4; 1)$ .

□ Розв'язання. Задана функція неперервна і диференційовна при всіх значеннях  $x \in [1; 4]$ , де  $f'(x) = 7 - 4x$ . Отже, всі умови теореми Лагранжа на цьому відрізку виконуються, тому існує хоча б одна точка  $c \in (1; 4)$  така, що

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = f'(c).$$

Підставляючи відповідні значення, отримаємо

$$\frac{1 - 10}{4 - 1} = 7 - 4c \Rightarrow 7 - 4c = -3 \Rightarrow c = 2.5, \text{ де } c \in (1; 4) \Rightarrow f(c) = 35.$$

Таким чином, шукана точка  $M$  має координати  $(2.5; 35)$ . ■

## 6. РОЗКРИТТЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ПРАВИЛА ЛОПІТАЛЯ

Розглянемо спосіб розкриття невизначеностей вигляду  $\left[\frac{0}{0}\right]$  та  $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ .

**Теорема 1** (правило Лопіталя для невизначеності вигляду  $\left[\frac{0}{0}\right]$ ).

Нехай виконуються умови:

- 1) функції  $f(x)$  і  $g(x)$  неперервні і диференційовні в деякому околі точки  $x_0$ , окрім, можливо, самої точки  $x_0$ ;
- 2)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ ;
- 3)  $g'(x) \neq 0$  у заданому околі точки  $x_0$ ;
- 4) існує скінченна або нескінченна границя  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

Тоді існує границя  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ , для якої має місце рівність

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Теорема 2** (правило Лопіталя для невизначеності вигляду  $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ ).

Нехай виконуються умови 1, 3, 4 теорему 1 та виконується умова:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty.$$

Тоді існує границя  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ , для якої має місце рівність

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Зауваження.**

- 1) Теорема 1 та теорема 2 справедливі і у випадку, коли  $x \rightarrow \infty$ .

- 2) Якщо похідні  $f'(x)$  і  $g'(x)$  задовольняють ті ж самі умови, що і функції  $f(x)$  і  $g(x)$ , то теорему 1 (або теорему 2) можна застосувати ще раз і т.д. Наприклад,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

В деяких випадках правило потрібно застосовувати декілька разів.

**Висновок.** Правило Лопітала використовують для розкриття невизначеностей вигляду  $\left[ \frac{0}{0} \right]$  та  $\left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$ , які називають *основними невизначеностями*. Невизначеності вигляду  $[0 \cdot \infty]$ ,  $[\infty - \infty]$ ,  $[1^\infty]$ ,  $[\infty^0]$ ,  $[0^0]$  зводять до основних шляхом тотожних перетворень.

Розглянемо такі випадки:

1. Нехай  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ , тоді невизначеність вигляду  $[0 \cdot \infty]$

зводимо до основних, використовуючи наступні перетворення:

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\left( \frac{1}{g(x)} \right)} \rightarrow \left[ \frac{0}{0} \right] \text{ при } x \rightarrow x_0$$

або

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{\left( \frac{1}{f(x)} \right)} \rightarrow \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \text{ при } x \rightarrow x_0.$$

2. Якщо  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ , то невизначеність вигляду  $[\infty - \infty]$

зводимо до основної шляхом таких перетворень:

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{g(x)}} \rightarrow \left[ \frac{0}{0} \right] \text{ при } x \rightarrow x_0.$$

3. Для розкриття невизначеностей вигляду  $[1^\infty]$ ,  $[\infty^0]$ ,  $[0^0]$ , які отримуємо

з границь  $A = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{g(x)}$ , необхідно спочатку шукану границю

прологарифмувати  $\ln A = \ln \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \ln (f(x))^{g(x)}$  і звести

невизначеність до однієї з основних, використовуючи наступні кроки:

$$\ln (f(x))^{g(x)} = g(x) \cdot \ln f(x) = \frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \rightarrow \left[ \frac{0}{0} \right] \text{ або } \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \text{ при } x \rightarrow x_0.$$

Після обчислень знаходимо шукану границю:

$$\ln A = B \Rightarrow A = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{g(x)} = e^B.$$

**Приклад 34.** Використовуючи правило Лопіталя, обчислити наступні границі:

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 6x^2 + 1}{3x^2 + x^5};$

2.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{10x^3 + 28x^2 - 6x - 45}{x^5 - 11x^4 + 43x^3 - 69x^2 + 36x};$

3.  $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\ln \cos 3x}{e^{\operatorname{tg} 2x} - e^{\sin 2x}};$

4.  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{x^2 - 4} - \frac{1}{e^{x^2 - 4} - 1} \right);$

5.  $\lim_{x \rightarrow 5} \ln \frac{x}{5} \cdot \ln \left( \frac{x}{5} - 1 \right);$

6.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - 5x^3) \cdot 2^{1-3x};$

7.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left( \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{2x+3}{2x+5} \right);$

8.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{3x};$

9.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5^x + 3x^2)^{\frac{1}{2x}};$

10.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{\sin(4x-2\pi)}}.$

□ Розв'язання.

1. 
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 6x^2 - 1}{3x^2 + x^5} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^3 + 6x^2 - 1)'}{(3x^2 + x^5)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 12x}{6x + 5x^4} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(6x^2 + 12x)'}{(6x + 5x^4)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x + 12}{6 + 20x^3} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(6x + 6)'}{(6 + 20x^3)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{30x^2} = 0.$$

2. 
$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 10x^3 + 28x^2 - 6x - 45}{x^5 - 11x^4 + 43x^3 - 69x^2 + 36x} = \left[ \frac{0}{0} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^4 - 10x^3 + 28x^2 - 6x - 45)'}{(x^5 - 11x^4 + 43x^3 - 69x^2 + 36x)'} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^3 - 30x^2 + 56x - 6}{5x^4 - 44x^3 + 129x^2 - 138x + 36} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \\
&= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(4x^3 - 30x^2 + 56x - 6)'}{(5x^4 - 44x^3 + 129x^2 - 138x + 36)'} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{12x^2 - 60x + 56}{20x^3 - 132x^2 + 258x - 138} = \\
&= \frac{12 \cdot 9 - 60 \cdot 3 + 56}{20 \cdot 27 - 132 \cdot 9 + 258 \cdot 3 - 138} = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3. \quad & \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\ln \cos 3x}{e^{\operatorname{tg} 2x} - e^{\sin 2x}} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{(\ln \cos 3x)'}{(e^{\operatorname{tg} 2x} - e^{\sin 2x})'} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\frac{1}{\cos 3x} \cdot (-3 \sin 3x)}{e^{\operatorname{tg} 2x} \cdot \frac{1}{\cos^2 2x} \cdot 2 - e^{\sin 2x} \cdot 2 \cos 2x} = \frac{-3}{2} \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\operatorname{tg} 3x \cdot \cos^2 2x}{e^{\operatorname{tg} 2x} - e^{\sin 2x} \cos^3 2x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \\
&= \frac{-3}{2} \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{(\operatorname{tg} 3x \cdot \cos^2 2x)'}{(e^{\operatorname{tg} 2x} - e^{\sin 2x} \cos^3 2x)'} = \\
&= \frac{-3}{2} \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\frac{1}{\cos^2 3x} \cdot 3 \cdot \cos^2 2x + \operatorname{tg} 3x \cdot 2 \cos 2x \cdot (-2 \sin 2x)}{\frac{2e^{\operatorname{tg} 2x}}{\cos^2 2x} - (e^{\sin 2x} \cdot 2 \cos 2x \cdot \cos^3 2x + e^{\sin 2x} \cdot 3 \cos^2 2x \cdot (-2 \sin 2x))} = \\
&= \frac{-3}{2} \cdot \frac{3+0}{2-(2+0)} = \infty.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. \quad & \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{x^2 - 4} - \frac{1}{e^{x^2-4} - 1} \right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x^2-4} - x^2 + 3}{(x^2 - 4) \cdot (e^{x^2-4} - 1)} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(e^{x^2-4} - x^2 + 3)'}{((x^2 - 4) \cdot (e^{x^2-4} - 1))'} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x^2-4} \cdot 2x - 2x}{2x \cdot (e^{x^2-4} - 1) + (x^2 - 4) \cdot e^{x^2-4} \cdot 2x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x^2-4} - 1}{e^{x^2-4} - 1 + (x^2 - 4) \cdot e^{x^2-4}} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(e^{x^2-4} - 1)'}{(e^{x^2-4} - 1 + (x^2 - 4) \cdot e^{x^2-4})'} =
\end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x^2-4} \cdot 2x}{e^{x^2-4} \cdot 2x + 2x \cdot e^{x^2-4} + (x^2-4) \cdot e^{x^2-4} \cdot 2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x^2-4}}{2e^{x^2-4} + (x^2-4) \cdot e^{x^2-4}} = \frac{1}{2}.$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow 5} \ln \frac{x}{5} \cdot \ln \left( \frac{x}{5} - 1 \right) = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\ln \left( \frac{x}{5} - 1 \right)}{\frac{1}{\ln \frac{x}{5}}} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\left( \ln \left( \frac{x}{5} - 1 \right) \right)'}{\left( \frac{1}{\ln \frac{x}{5}} \right)' } =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\frac{1}{\frac{x}{5} - 1} \cdot \frac{1}{5}}{-\frac{1}{\ln^2 \frac{x}{5}} \cdot \frac{1}{5}} = - \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\ln^2 \frac{x}{5}}{\frac{x}{5} - 1} = \left[ \frac{0}{0} \right] = - \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\left( \ln^2 \frac{x}{5} \right)'}{\left( \frac{x}{5} - 1 \right)'} = - \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 \ln \frac{x}{5} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{1}{5}} = 0$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - 5x^3) \cdot 2^{1-3x} = \left| \begin{array}{l} \text{при } x \rightarrow +\infty \Rightarrow \\ 1 - 3x \rightarrow -\infty \Rightarrow \\ 2^{1-3x} \rightarrow 0; \\ 2^{-(1-3x)} = 2^{3x-1} \rightarrow +\infty \end{array} \right| = [\infty \cdot 0] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 5x^3}{2^{3x-1}} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 - 5x^3)'}{(2^{3x-1})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-15x^2}{2^{3x-1} \ln 2 \cdot 3} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-5x^2)'}{(\ln 2 \cdot 2^{3x-1})'}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-10x}{\ln 2 \cdot 2^{3x-1} \ln 2 \cdot 3} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-10x)'}{(3 \ln^2 2 \cdot 2^{3x-1})'}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-10}{3 \ln^2 2 \cdot 2^{3x-1} \ln 2 \cdot 3} = 0.$$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \left( \frac{\pi}{4} - \operatorname{arccotg} \frac{2x+3}{2x+5} \right) = \left| \begin{array}{l} \text{при } x \rightarrow \infty \text{ маємо} \\ \operatorname{arccotg} \frac{2x+3}{2x+5} = \operatorname{arccotg} \frac{2 + \frac{3}{x}}{2 + \frac{5}{x}} \rightarrow \operatorname{arccotg} \frac{2+0}{2+0} = \frac{\pi}{4} \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= [\infty \cdot 0] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{2x+3}{2x+5}}{\frac{1}{x}} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left( \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{2x+3}{2x+5} \right)'}{\left( \frac{1}{x} \right)'} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1 + \left( \frac{2x+3}{2x+5} \right)^2} \cdot \frac{2(2x+5) - (2x+3) \cdot 2}{(2x+5)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x^2}{4x^2 + 16x + 17} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(-6x^2)'}{(4x^2 + 16x + 17)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-12x}{8x + 16} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(-12x)'}{(8x + 16)'} = \frac{-12}{8} = -\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

8. В границі  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{3x}$  маємо невизначеність виду  $[0^0]$ . Позначимо

$A = \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{3x}$ , тоді

$$\ln A = \ln \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln (\sin x)^{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3x \ln (\sin x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \ln (\sin x)}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \left[ \begin{array}{l} \text{при } x \rightarrow 0 \Rightarrow \\ \ln(\sin x) \rightarrow -\infty; \\ \frac{1}{x} \rightarrow \infty \end{array} \right] = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3 \ln \sin x)'}{\left( \frac{1}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x^2 \cos x}{\sin x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-3x^2 \cos x)'}{(\sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3(2x \cos x + x^2(-\sin x))}{\cos x} = 0$$

$$\Rightarrow \ln A = 0 \Rightarrow A = e^0 = 1 \Rightarrow A = \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{3x} = 1.$$

9. В границі  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5^x + 3x^2)^{\frac{1}{2x}}$  маємо невизначеність виду  $[\infty^0]$ . Позначимо

$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (5^x + 3x^2)^{\frac{1}{2x}}$ , тоді

$$\begin{aligned}
\ln A &= \ln \lim_{x \rightarrow +\infty} (5^x + 3x^2)^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln (5^x + 3x^2)^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(5^x + 3x^2)}{2x} = \\
&= \left| \begin{array}{l} \text{при } x \rightarrow +\infty \Rightarrow \\ 5^x + 3x^2 \rightarrow +\infty \Rightarrow \\ \ln(5^x + 3x^2) \rightarrow +\infty \end{array} \right| = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(5^x + 3x^2))'}{(2x)'} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{5^x + 3x^2} \cdot (5^x \ln 5 + 6x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x \ln 5 + 6x}{2(5^x + 3x^2)} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(5^x \ln 5 + 6x)'}{2(5^x + 3x^2)'} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x \ln^2 5 + 6}{2(5^x \ln 5 + 6x)} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(5^x \ln^2 5 + 6)'}{2(5^x \ln 5 + 6x)'} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x \ln^3 5}{5^x \ln^2 5 + 6} = \\
&= \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(5^x \ln^3 5)'}{(5^x \ln^2 5 + 6)'} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x \ln^4 5}{5^x \ln^3 5} = \frac{1}{2} \ln 5 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \ln A = \frac{1}{2} \ln 5 \Rightarrow A = e^{\frac{1}{2} \ln 5} = \sqrt{e^{\ln 5}} = \sqrt{5} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (5^x + 3x^2)^{\frac{1}{2x}} = \sqrt{5}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

10. В границі  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{\sin(4x-2\pi)}}$  маємо невизначеність виду  $[1^\infty]$ .

Позначимо  $A = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{\sin(4x-2\pi)}}$ , тоді

$$\begin{aligned}
\ln A &= \ln \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{\sin(4x-2\pi)}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln \left( \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{\sin(4x-2\pi)}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(4x-2\pi)} \cdot \ln \left( \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right) = \left| \begin{array}{l} \text{при } x \rightarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow \\ \ln \left( \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right) \rightarrow \ln \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = \ln 1 = 0, \\ \sin(4x-2\pi) \rightarrow 0 \end{array} \right| = \left[ \frac{0}{0} \right] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\left( \ln \left( \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right) \right)'}{(\sin(4x - 2\pi))'} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} \frac{x}{2}} \cdot \left( -\frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} \right)}{4 \cos(4x - 2\pi)} = \\
&= -\frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos(4x - 2\pi) \cdot \sin x} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 \cdot 1} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \ln A = -\frac{1}{4} \Rightarrow A = e^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{e}} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{\sin(4x - 2\pi)}} = \frac{1}{\sqrt[4]{e}}. \quad \blacksquare$$

### Контрольні приклади для самоперевірки

Використовуючи правило Лопіталя, обчислити наступні границі:

$$6.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 2x^2)}{e^{-3x} - \cos 4x}.$$

$$6.2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 7x^4 + 14x^3 - 10x^2 + x + 1}{2x^5 - 5x^4 + 8x^3 - 14x^2 + 14x - 5}.$$

$$6.3. \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{1 - \cos 3x}{\operatorname{tg}^2 2x}.$$

$$6.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin 5x)}{\ln(\sin 3x)}.$$

$$6.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{\sin x} - 2^x}{\sin^3 2x}.$$

$$6.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x^2 / 2 - x - 1}{\cos x - \cos 3x - 3x^3 - 4x^2}.$$

$$6.7. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \operatorname{tg} x} \right).$$

$$6.8. \lim_{x \rightarrow 4} \left( \frac{x}{x-4} - \frac{1}{\ln \frac{x}{4}} \right).$$

$$6.9. \lim_{x \rightarrow \infty} x^5 \cdot \sin \frac{5}{x^4}.$$

$$6.10. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 4x) \cdot 5^{-2x}.$$

$$6.11. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\pi - 4x)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 2x.$$

$$6.12. \lim_{x \rightarrow 3} (x-3) \ln^2(x-3).$$

$$6.13. \lim_{x \rightarrow 2} (x-2)^{3x-6}.$$

$$6.14. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-5} \right)^{4x}.$$

$$6.15. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{2x^2 - 1}.$$

$$6.16. \lim_{x \rightarrow 2} (2-x)^{\ln(x/2)}.$$

$$6.17. \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} 2x)^{\sin 2x}.$$

$$6.18. \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} + x^2 + 2x)^{-\frac{3}{x}}.$$

### Відповіді

$$6.1. 0. \quad 6.2. -\frac{1}{2}. \quad 6.3. \frac{9}{8}. \quad 6.4. 1. \quad 6.5. -\frac{\ln 2}{48}. \quad 6.6. -\frac{1}{18}. \quad 6.7. \frac{1}{3}.$$

$$6.8. \frac{1}{2}. \quad 6.9. \infty. \quad 6.10. 0. \quad 6.11. 4. \quad 6.12. 0. \quad 6.13. 1. \quad 6.14. e^{24}. \quad 6.15. 1.$$

$$6.16. 1. \quad 6.17. 1. \quad 6.18. \frac{1}{e^6}.$$

## 7. ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

### 7.1. Монотонність функції

Нехай функція  $f(x)$  визначена на множині  $D$ .

**Означення 1.** Якщо для будь яких значень  $x_1 \in D$ ,  $x_2 \in D$  з нерівності  $x_1 < x_2$  слідує, що виконується нерівність

- 1)  $f(x_1) < f(x_2)$ , то функція  $f(x)$  називається *зростаючою* на множині  $D$ ;
- 2)  $f(x_1) \leq f(x_2)$ , то функція  $f(x)$  називається *неспадною* на множині  $D$ ;
- 3)  $f(x_1) > f(x_2)$ , то функція  $f(x)$  називається *спадною* на множині  $D$ ;
- 4)  $f(x_1) \geq f(x_2)$ , то функція  $f(x)$  називається *незростаючою* на множині  $D$ .

Зростаючі, спадні, незростаючі і неспадні функції на множині  $D$  називаються *монотонними* на цій множині, а зростаючі і спадні функції — *строго монотонними*.

Проміжки, в яких функція монотонна, називаються *проміжками монотонності функції*.

**Теорема 1 (достатні умови монотонності функції).**

Якщо функція  $f(x)$  диференційовна на інтервалі  $(a; b)$  і

- 1)  $f'(x) > 0$  при всіх  $x \in (a; b)$ , то ця функція зростає на інтервалі  $(a; b)$ ;
- 2)  $f'(x) < 0$  при всіх  $x \in (a; b)$ , то ця функція спадає на інтервалі  $(a; b)$ .

**Теорема 2 (необхідні умови монотонності функції).**

Якщо функція  $f(x)$  диференційовна на інтервалі  $(a; b)$  і

- 1) зростає на цьому інтервалі, то  $f'(x) \geq 0$  при всіх  $x \in (a; b)$ ;
- 2) спадає на цьому інтервалі, то  $f'(x) \leq 0$  при всіх  $x \in (a; b)$ .

**Приклад 35.** Дослідити функцію  $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 6x^2 + 72x + 5$  на зростання і спадання.

□ Розв'язання. Функція визначена при  $x \in \mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$ . Знаходимо похідну функції:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3x^4 - 16x^3 + 6x^2 + 72x + 5)' = \\ &= 12x^3 - 48x^2 + 12x + 72 = 12(x^3 - 4x^2 + x + 6) = \\ &= 12(x + 1)(x - 2)(x - 3). \end{aligned}$$

Використовуючи метод інтервалів, маємо

$$f'(x) > 0 \text{ при } x \in (-1; 2) \cup (3; +\infty);$$

$$f'(x) < 0 \text{ при } x \in (-\infty; -1) \cup (2; 3).$$

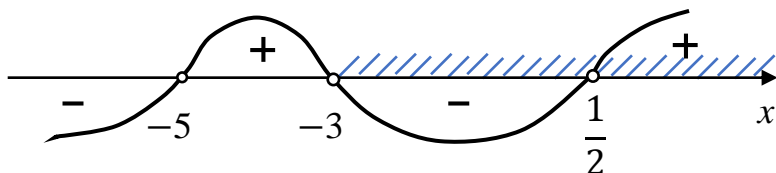
Отже, за теоремою 1 отримаємо, що задана функція зростає на інтервалах  $(-1; 2)$  та  $(3; +\infty)$ ; спадає на інтервалах  $(-\infty; -1)$  та  $(2; 3)$ . ■

**Приклад 36.** Дослідити функцію  $f(x) = x^2 + 3x - 14 \ln(x + 3)$  на зростання і спадання.

□ Розв'язання. Функція визначена при  $x + 3 > 0$ , тобто при  $x \in (-3; +\infty)$ . Знаходимо похідну функції:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 + 3x - 14 \ln(x + 3))' = 2x + 3 - \frac{14}{x + 3} = \\ &= \frac{(2x + 3)(x + 3) - 14}{x + 3} = \frac{2x^2 + 9x - 5}{x + 3} = \frac{2(x + 5)(x - \frac{1}{2})}{x + 3}. \end{aligned}$$

Використовуючи метод інтервалів, знайдемо знаки похідної



Але враховуючи область визначення  $x \in (-3; +\infty)$  функції  $f(x)$ , маємо

$$f'(x) > 0 \text{ при } x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right);$$

$$f'(x) < 0 \text{ при } x \in \left(-3; \frac{1}{2}\right).$$

Отже, за теоремою 1 остаточно отримаємо, що задана функція спадає на інтервалі  $(-3; \frac{1}{2})$  і зростає на інтервалі  $(\frac{1}{2}; +\infty)$ . ■

## 7.2. Максимум і мінімум функції

Нехай функція  $f(x)$  визначена на відрізку  $[a; b]$ ,  $x_0 \in (a; b)$ .

**Означення 2.** Точка  $x_0$  називається **точкою максимуму** функції  $f(x)$ , якщо існує такий виколотий  $\delta$ -оکیل точки  $x_0$ , що для всіх значень  $x$  з цього околу, тобто  $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta)$ , де число  $\delta > 0$ , виконується нерівність  $f(x) < f(x_0)$ . Аналогічно, точка  $x_0$  називається **точкою мінімуму**

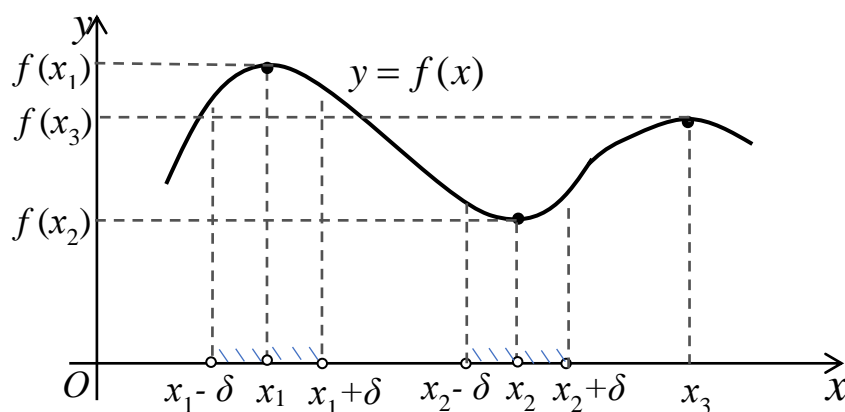


Рис. 7.1

функції  $f(x)$ , якщо виконується нерівність  $f(x) > f(x_0)$ , для всіх значень  $x$  з віколотого  $\delta$ -околу точки  $x_0$ , тобто  $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta)$ , де  $\delta > 0$ .

На рисунку 7.1 точки  $x_1, x_3$  — точки максимуму функції  $y = f(x)$ , а  $x_2$  — її точка мінімуму.

Точки максимуму і точки мінімуму функції називаються **екстремальними точками** або **точками екстремуму функції**.

Значення функції в точках максимуму (в точках мінімуму) функції називається **максимумом (мінімумом) функції** або **екстремумом функції** або **локальним екстремумом функції**.

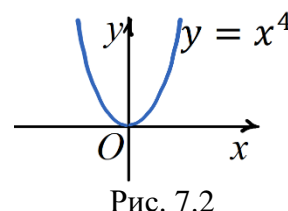
### Теорема 3 (необхідні умови існування екстремуму функції).

Якщо функція  $f(x)$  неперервна і диференційовна в деякому околі точки  $x_0$  і має екстремум в цій точці, то виконується рівність  $f'(x_0) = 0$ .

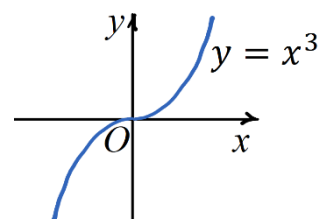
**Зауваження.** Обернене твердження неправильне, а саме: якщо  $f'(x_0) = 0$ , то точка  $x_0$  може і не бути екстремальною точкою функції  $y = f(x)$ .

Наприклад:

1) Для функції  $y = x^4$  з графіку функції (рис. 7.2) бачимо, що  $x = 0$  точка мінімуму, при цьому маємо  $y' = 4x^3 \Rightarrow y'(0) = 0$ .

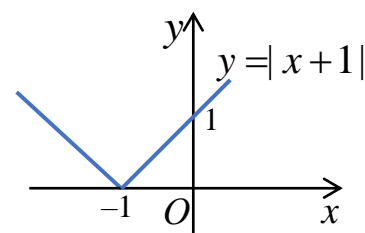


2) Для функції  $y = x^3$  точка  $x = 0$  не є екстремальною точкою (рис. 7.3), але при цьому маємо



$$y' = 3x^2 \Rightarrow y'(0) = 0.$$

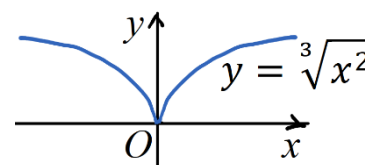
3) Функція  $y = |x + 1|$  в точці  $x = -1$  має мінімум функції (рис. 7.4), але значення похідної  $y'(-1)$  в цій точці не існує.



4) Для функції  $y = \sqrt[3]{x^2}$  точка  $x = 0$  є точкою мінімуму (рис. 7.5), але при цьому маємо

$$y' = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \Rightarrow$$

$y'(0)$  не існує.



**Означення 3.** Внутрішні точки області визначення функції  $f(x)$ , в яких  $f'(x) = 0$  або  $f'(x)$  не існує (зокрема,  $f'(x) = \infty$ ) називаються **критичними точками (першого роду)** цієї функції.

**Висновки:** Неперервна функція може мати екстремум лише в критичних точках (першого роду) цієї функції. Але, якщо точка  $x_0$  є

критичною точкою для функції  $y = f(x)$ , то ця точка є лише підозрілою на екстремум і необхідно дослідити поведінку функції в околі цієї точки. Для цього перевіряємо достатні умови існування екстремуму.

**Теорема 4 (достатні умови існування екстремуму функції).**

*Нехай функція  $f(x)$  неперервна в деякому околі критичної точки  $x_0$  і диференційовна в цьому околі, окрім, можливо самої точки  $x_0$ . Тоді, якщо при переході зліва направо через точку  $x_0$ :*

- 1) *похідна  $f'(x)$  змінює знак з «+» на «-», то  $x_0$  є точкою максимуму функції  $f(x)$ ;*
- 2) *похідна  $f'(x)$  змінює знак з «-» на «+», то  $x_0$  є точкою мінімуму функції  $f(x)$ ;*
- 3) *знак  $f'(x)$  не змінюється, то точка  $x_0$  не є екстремальною точкою функції  $f(x)$ .*

Схема дослідження функції на екстремум і знаходження проміжків монотонності функції:

1. Знайти область визначення функції.
2. Знайти критичні точки функції.
3. Розбити область визначення критичними точками і дослідити знак похідної  $f'(x)$  зліва і справа від кожної критичної точки.
4. За теоремою 4 визначити екстремальні точки (якщо вони є) і обчислити значення функції в них. За теоремою 1 визначити проміжки монотонності функції.

**Зауваження.** Якщо функція критичних точок не має, то вона не має і екстремуму.

**Теорема 5 (друга достатня умова існування екстремуму).**

*Нехай в точці  $x_0$  перша похідна функції  $f(x)$  дорівнює нулю, тобто  $f'(x) = 0$ , і існує неперервна друга похідна  $f''(x)$  в деякому околі точки*

$x_0$ , причому,  $f''(x_0) \neq 0$  і диференційовна в цьому околі, окрім, можливо самої точки  $x_0$ . Тоді:

1) якщо  $f''(x_0) < 0$ , то точка  $x_0$  – точка максимуму функції  $f(x)$ ;

2) якщо  $f''(x_0) > 0$ , то точка  $x_0$  – точка мінімуму функції  $f(x)$ .

**Приклад 37.** Знайти екстремуми і проміжки монотонності функції

$$y = 10\sqrt[5]{(x-1)^3} - 6x + 1.$$

□ Розв'язання.

1. Знаходимо область визначення функції.

$$D(y): x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in (-\infty; +\infty).$$

2. Знаходимо першу похідну функції:

$$y' = 10 \cdot \frac{3}{5} (x-1)^{-\frac{2}{5}} \cdot 1 - 6 + 0 = \frac{6}{\sqrt[5]{(x-1)^2}} - 6 = \frac{6 - 6\sqrt[5]{(x-1)^2}}{\sqrt[5]{(x-1)^2}}.$$

Знаходимо критичні точки заданої функції:

$$y' = 0 \Rightarrow 6 - 6\sqrt[5]{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow \sqrt[5]{(x-1)^2} = 1 \Rightarrow$$

$$x-1 = 1 \text{ або } x-1 = -1 \Rightarrow x = 2 \text{ або } x = 0;$$

$$y' \text{ не існує при } \sqrt[5]{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x-1 = 0 \Rightarrow x = 1;$$

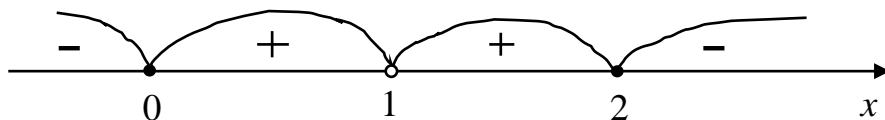
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 1, \\ x = 2 \end{cases} \text{ – критичні точки функції.}$$

3. Критичні точки  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$  розбивають область визначення функції на чотири інтервали  $(-\infty; 0)$ ,  $(0; 1)$ ,  $(1; 2)$ ,  $(2; +\infty)$ . Досліджуємо знак похідної  $y'$  на кожному з цих інтервалів. Враховуючи, що в кожному з цих інтервалів перша похідна зберігає знак, можемо в кожному з них розглянути будь яку точку. Наприклад, візьмемо в першому інтервалі точку  $x = -1$ , тоді

$$y'(-1) = \frac{6 - 6\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{4}} < 0. \text{ В другому інтервалі беремо точку } x = \frac{1}{2}, \text{ тоді}$$

$$y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{6 - 6\sqrt[5]{\frac{1}{4}}}{\sqrt[5]{\frac{1}{4}}} = 6\sqrt[5]{4} - 6 > 0. \text{ В третьому інтервалі візьмемо } x = \frac{3}{2}, \text{ тоді}$$

$y' \left( \frac{3}{2} \right) = 6\sqrt[5]{4} - 6 > 0$ . В четвертому інтервалі беремо  $x = 4$ , тоді  $y'(4) = \frac{6-6\sqrt[5]{9}}{\sqrt[5]{9}} < 0$  (замість цих точок можна в кожному з інтервалів взяти інші значення). Послідовність знаків першої похідної буде такою:



4. Визначаємо проміжки монотонності функції та екстремальні точки і обчислюємо значення функції в них.

$x$	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$y'(x)$	-	0	+	не існує	+	0	-
$y(x)$		min		—		max	

Оскільки похідна  $y'(x) > 0$  на інтервалах  $(0; 1)$  та  $(1; 2)$ , то функція  $y(x)$  зростає на цих інтервалах, тобто функція  $y(x)$  зростає при  $x \in (0; 2)$ . Так як похідна  $y'(x) < 0$  на інтервалах  $(-\infty; 0)$  та  $(2; +\infty)$ , то функція  $y(x)$  спадає при  $x \in (-\infty; 0)$  та  $x \in (2; +\infty)$ .

При переході зліва направо через критичну точку  $x = 0$  похідна  $y'(x)$  змінює знак з «-» на «+», тому  $x = 0$  – точка мінімуму функції  $y(x)$ . При переході зліва направо через критичну точку  $x = 2$  похідна  $y'(x)$  змінює знак з «+» на «-», тому  $x = 2$  – точка максимуму функції. При переході зліва направо через критичну точку  $x = 1$  похідна  $y'(x)$  знак не змінює, тому  $x = 1$  не є екстремальною точкою. Отримали дві екстремальні точки функції:  $x = 0$  та  $x = 2$ .

Знаходимо екстремуми функції:

$$y_{\min} = y(0) = 10\sqrt[5]{(0-1)^3} - 6 \cdot 0 + 1 = -9;$$

$$y_{\max} = y(2) = 10\sqrt[5]{(2-1)^3} - 6 \cdot 2 + 1 = -1. \quad \blacksquare$$

**Приклад 38.** Знайти екстремуми функції  $y = e^{-2x}(2 - x^2)$ , використовуючи другу достатню умову існування екстремуму.

□ Розв'язання. Область визначення функції

$$D(y): x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in (-\infty; +\infty).$$

Знаходимо першу похідну:

$$\begin{aligned} y' &= (e^{-2x})'(2 - x^2) + e^{-2x}(2 - x^2)' = \\ &= e^{-2x} \cdot (-2) \cdot (2 - x^2) + e^{-2x}(-2x) = -2e^{-2x} \cdot (2 - x^2 + x). \end{aligned}$$

Знаходимо точки, в яких перша похідна дорівнює нулю:

$$\begin{aligned} y' = 0 &\Rightarrow -2e^{-2x} \cdot (2 - x^2 + x) = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \\ &x_1 = -1 \text{ або } x_2 = 2. \end{aligned}$$

Обчислюємо другу похідну:

$$\begin{aligned} y'' &= -2((e^{-2x})' \cdot (2 - x^2 + x) + e^{-2x} \cdot (2 - x^2 + x)') = \\ &= -2(-2e^{-2x} \cdot (2 - x^2 + x) + e^{-2x} \cdot (-2x + 1)) = \\ &= -2e^{-2x}(2x^2 - 2x - 4 - 2x + 1) = -2e^{-2x}(2x^2 - 4x - 3), \end{aligned}$$

тоді

$$\begin{aligned} y''(x_1) &= y''(-1) = -2e^{-2(-1)}(2(-1)^2 - 4(-1) - 3) = -6e^2 < 0; \\ y''(x_2) &= y''(2) = -2e^{-4}(2 \cdot 2^2 - 8 - 3) = 6e^2 > 0. \end{aligned}$$

Оскільки  $y''(-1) < 0$ , то точка  $x = -1$  – точка максимуму функції;  
 $y''(2) > 0$ , то  $x = 2$  – точка мінімуму функції.

Отримали дві екстремальні точки функції:  $x = -1$  та  $x = 2$ .

Обчислимо екстремуми функції:

$$y_{\min} = y(2) = e^{-2x}(2 - x^2) = -\frac{2}{e^4};$$

$$y_{\max} = y(-1) = e^{-2x}(2 - x^2) = e^2.$$

■

### 7.3. Найбільше і найменше значення функції на відрізку

Нехай задана функція  $f(x)$ , яка неперервна на відрізку  $[a; b]$ .

Внаслідок теореми Вейерштрасса можемо сказати, що функція  $f(x)$  на цьому відрізку досягає свого найбільшого значення  $M = \max_{x \in [a; b]} f(x)$  і найменшого значення  $m = \min_{x \in [a; b]} f(x)$ .

**ПРАВИЛО.** Для того, щоб знайти найбільше і найменше значення функції на відрізку  $[a; b]$  необхідно:

1. Знайти всі критичні точки функції, що належать інтервалу  $(a; b)$ ;
2. Обчислити значення функції в вибраних критичних точках і на кінцях відрізку  $[a; b]$ , тобто в точках  $x = a$  та  $x = b$ ;
3. Вибрати серед цих значень найменше та найбільше. Це і будуть  $m$  та  $M$ .

**Приклад 39.** Знайти найбільше і найменше значення функції

$$y = 10\sqrt[5]{(x-1)^3} - 6x + 1 \quad \text{на відрізку } [0.5; 33].$$

□ Розв'язання.

1. Область визначення функції  $x \in \mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$ . Знаходимо критичні точки функції, що належать інтервалу  $(0.5; 33)$ .

Обчислюємо першу похідну

$$y' = 10 \cdot \frac{3}{5} (x-1)^{-\frac{2}{5}} \cdot 1 - 6 + 0 = \frac{6 - 6\sqrt[5]{(x-1)^2}}{\sqrt[5]{(x-1)^2}}$$

і знаходимо критичні точки: 
$$\begin{cases} x = 0, \\ x = 1, \\ x = 2. \end{cases}$$

При цьому  $x = 0 \notin [0.5; 33]$ ,  $x = 1 \in [0.5; 33]$ ,  $x = 2 \in [0.5; 33]$ . Тому надалі розглядаємо критичні точки  $x = 1$  та  $x = 2$ .

2. Обчислюємо значення функції в вибраних критичних точках  $x = 1$ ,  $x = 2$  і на кінцях заданого відрізка  $[0.5; 33]$ , тобто в точках  $x = 0.5$  та  $x = 33$ :

$$y(1) = 10^5 \sqrt{(1-1)^3} - 6 + 1 = -5;$$

$$y(2) = 10^5 \sqrt{(2-1)^3} - 12 + 1 = -1;$$

$$y(0.5) = 10^5 \sqrt{(0.5-1)^3} - 3 + 1 = -2 - 10^5 \sqrt{0.125} \approx -8.598;$$

$$y(33) = 10^5 \sqrt{(33-1)^3} - 198 + 1 = -117.$$

3. Вибираємо серед цих значень найменше і найбільше:

$$y(33) = -117 \text{ — найменше значення функції на відрізку } [0.5; 33],$$

$$y(2) = -1 \text{ — найбільше значення на відрізку } [0.5; 33],$$

тобто

$$m = \min_{x \in [0.5; 33]} y(x) = y(33) = -117;$$

$$M = \max_{x \in [0.5; 33]} y(x) = y(2) = -1. \quad \blacksquare$$

Тепер розглянемо задачі, в яких необхідно визначити найбільше або найменше значення функції, але на відміну від попередньої задачі, ця функція не задана в готовому вигляді, а визначається з умови задачі.

**Приклад 40.** Необхідно виготовити циліндричну цистерну, поверхня якої дорівнює  $S$ . Визначити її розміри так, щоб її об'єм був найбільшим.

□ Розв'язання. У задачі потрібно визначити, в якому відношенні повинні знаходитись радіус і висота циліндра, щоб при заданій поверхні  $S$  його об'єм був найбільшим. Відомо, що об'єм циліндра дорівнює

$$V = \pi R^2 h,$$

де  $R$  – радіус заданого циліндра,  $h$  – висота циліндра (рис. 7.6). Ця функція є функцією двох змінних  $R$  та  $h$ , тому виключимо одну зі

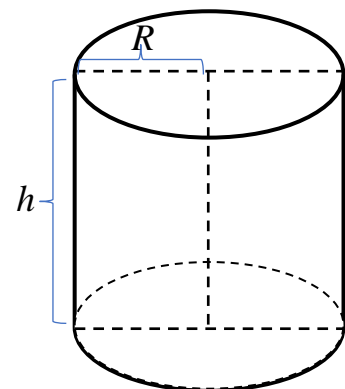


Рис. 7.6

змінних, використовуючи, що відома площа повної поверхні  $S$  даного циліндра. Оскільки

$$S = \pi R^2 + \pi R^2 + 2\pi R h = 2\pi R^2 + 2\pi R h,$$

то звідси маємо

$$h = \frac{S - 2\pi R^2}{2\pi R}.$$

Отже, об'єм циліндра  $V = \pi R^2 \cdot \frac{S - 2\pi R^2}{2\pi R}$ , тобто

$$V = \frac{SR - 2\pi R^3}{2}, \quad (R > 0).$$

Отримали функцію  $V(R)$  однієї незалежної змінної  $R$ . Таким чином із умови задачі визначили функцію, найбільше значення якої потрібно знайти.

Знаходимо її першу похідну:

$$V'(R) = \frac{S - 6\pi R^2}{2}.$$

З рівняння  $V'(R) = 0$  слідує, що  $S - 6\pi R^2 = 0$ , де за умовою  $R > 0$ , звідки

отримаємо критичну точку  $R = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ .

Знаходимо другу похідну:

$$V''(R) = -6\pi R.$$

Оскільки  $V''\left(\sqrt{\frac{S}{6\pi}}\right) = -6\pi \sqrt{\frac{S}{6\pi}} < 0$ , то  $R = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$  – точка максимуму функції

$V(R)$ .

Отже, при значенні  $R = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$  функція  $V(R)$  досягає найбільшого значення. Знайдемо висоту такого циліндра

$$h = \frac{S - 2\pi \left(\sqrt{\frac{S}{6\pi}}\right)^2}{2\pi \sqrt{\frac{S}{6\pi}}} = 2 \sqrt{\frac{S}{6\pi}},$$

тобто  $h = 2R$ . Остаточний висновок: висота циліндричної цистерни повинна дорівнювати діаметру її основи. ■

**Приклад 41.** На якій висоті необхідно розмістити джерело світла над освітленою поверхнею, щоб освітлення на відстані  $d$  від основи перпендикуляра, який опущений із джерела світла на освітлену поверхню, було найбільшим? Відомо, що освітленість обернено пропорційна квадрату відстані від джерела світла і прямо пропорційна синусу кута між променем світла і освітленою поверхнею.

□ Розв'язання. Нехай джерело світла розташоване в точці А (рис. 7.7).

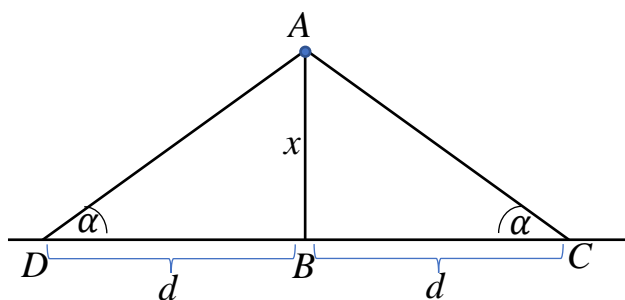


Рис. 7.7

Позначимо висоту  $AB$  джерела світла над освітленою поверхнею через  $x$ , а кут між променем і освітленою поверхнею:  $\angle BCA = \angle BDA = \alpha$ . Задано  $BC = BD = d$ . Тоді з прямокутного трикутника

$ABC$  отримаємо

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = x^2 + d^2 \Rightarrow AC = \sqrt{x^2 + d^2}$$

це відстань від джерела світла (точки А) до точки С на освітленій поверхні.

Оскільки з умови задачі відомо, що освітленість обернено пропорційна квадрату відстані від джерела світла і прямо пропорційна синусу кута між променем світла і освітленою поверхнею, то освітленість дорівнює

$$E = \frac{k \sin \alpha}{AC^2} = \frac{k \sin \alpha}{x^2 + d^2},$$

де  $k > 0$  – коефіцієнт пропорційності. З прямокутного трикутника  $ABC$  маємо

$$\sin \alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2}}, \text{ тоді}$$

$$E = \frac{kx}{(x^2 + d^2)\sqrt{x^2 + d^2}}; \quad (x > 0).$$

Таким чином із умови задачі визначена функція, найбільше значення якої потрібно знайти. Обчислюємо першу похідну функції:

$$E'(x) = \left( \frac{kx}{(x^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \right)' = \frac{k \cdot (x^2 + d^2)^{\frac{3}{2}} - kx \cdot \frac{3}{2} (x^2 + d^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x}{(x^2 + d^2)^3} =$$

$$= k \cdot \frac{d^2 - 2x^2}{(x^2 + d^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

З рівняння  $E'(x) = 0$  слідує що

$$d^2 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{d\sqrt{2}}{2}, \quad (\text{тут } x > 0).$$

Оскільки похідна  $E'(x) < 0$  при  $0 < x < \frac{d\sqrt{2}}{2}$ , а  $E'(x) > 0$  при  $x > \frac{d\sqrt{2}}{2}$ , то в точка  $x = \frac{d\sqrt{2}}{2}$  є точкою максимуму функції. Таким чином, при  $x = \frac{d\sqrt{2}}{2}$  функція  $E(x)$  приймає найбільше значення, тобто освітлення в точці С буде найбільшим.

Отже, максимальна освітленість дорівнює

$$E_{max} = E\left(\frac{d\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{k \frac{d\sqrt{2}}{2}}{\left(\left(\frac{d\sqrt{2}}{2}\right)^2 + d^2\right) \sqrt{\left(\frac{d\sqrt{2}}{2}\right)^2 + d^2}} = \frac{2\sqrt{3}k}{3d^2}.$$

■

#### 7.4. Опуклість і угнутість кривої. Точки перегину

Нехай функція  $f(x)$  диференційовна на відрізку  $[a; b]$ .

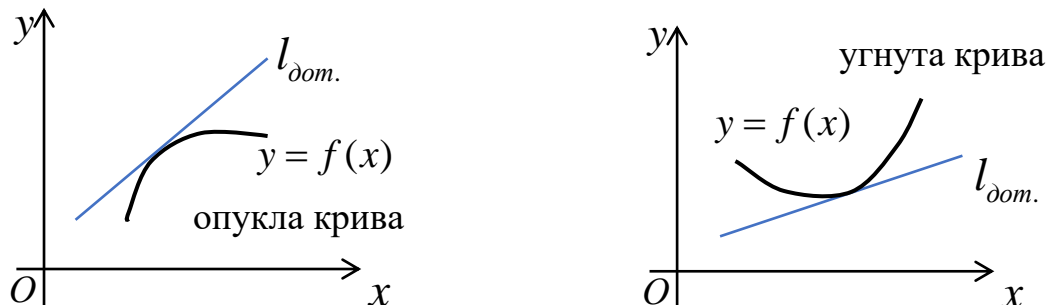


Рис. 7.8

**Означення 4.** Крива  $y = f(x)$  називається **опуклою** (**угнутою**) на

інтервалі  $(a;b)$ , якщо всі її точки лежать нижче (для угнутої - вище) довільної її дотичної, що проведена в точках цього інтервалу (рис. 7.8).

**Означення 5.** Точкою перегину називається така точка кривої  $y = f(x)$ , яка відділяє її опуклу частину від угнутої.

На рис. 7.9 точка  $M$  — точка перегину кривої.

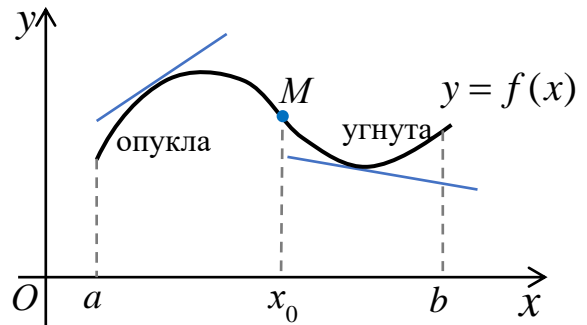


Рис. 7.9

### Теорема 6.

Нехай функція  $y = f(x)$  двічі диференційовна на інтервалі  $(a;b)$ . Тоді:

- 1) якщо  $f''(x) < 0, \forall x \in (a;b)$ , то крива  $y = f(x)$  опукла на  $(a;b)$ ;
- 2) якщо  $f''(x) > 0, \forall x \in (a;b)$ , то крива  $y = f(x)$  угнута на  $(a;b)$ .

З теореми 6 слідує таке твердження.

#### Необхідна умова існування точок перегину:

Якщо  $x_0$  — точка перегину кривої  $y = f(x)$ , то в цій точці друга похідна дорівнює нулю або не існує, тобто  $f''(x_0) = 0$  або  $f''(x_0)$  не існує.

**Зауваження.** Ця умова є необхідною, але не достатньою. Тобто обернене твердження не є правильним.

Внутрішні точки області визначення функції  $f(x)$ , в яких  $f''(x) = 0$  або  $f''(x)$  не існує (зокрема,  $f''(x) = \infty$ ) називаються **критичними точками (другого роду)** цієї функції.

Критична точка другого роду не обов'язково буде точкою перегину кривої.

#### Наприклад:

1)  $y = x^4, x \in \mathbb{R}$ .

Ця крива угнута при всіх  $x \in \mathbb{R}$  (див. рис. 7.10). При цьому маємо

$$y' = 4x^3, y'' = 12x^2 \Rightarrow y''(0) = 0,$$

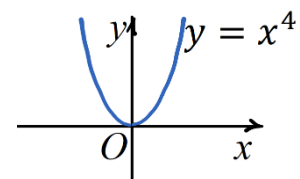


Рис. 7.10

але  $x = 0$  не є точкою перегину кривої.

$$2) y = x^3, x \in \mathbb{R}.$$

Для цієї функції точка  $x = 0$  є точкою перегину кривої (рис. 7.11), при цьому маємо

$$y' = 3x^2, y'' = 6x \Rightarrow y''(0) = 0.$$

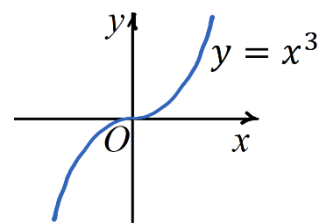


Рис. 7.11

**Теорема 7** (достатні умови існування точок перегину).

Нехай  $x_0$  — критична точка другого роду функції  $f(x)$ . Якщо при переході через точку  $x_0$  друга похідна  $f''(x)$  змінює знак, то точка  $(x_0; f(x_0))$  є точкою перегину кривої  $y = f(x)$ . Якщо ж знак не змінюється, то точка  $(x_0; f(x_0))$  не буде точкою перегину цієї кривої.

Схема дослідження функції на опуклість та угнутість, знаходження точок перегину кривої:

1. Знайти область визначення функції.
2. Знайти другу похідну.
3. Знайти критичні точки другого роду функції.
4. Розбити область визначення критичними точками і дослідити знак похідної  $f''(x)$  зліва і справа від кожної критичної точки.
5. За теоремою 6 визначити інтервали опуклості і угнутості, а за теоремою 7 — точки перегину кривої.

**Зауваження.** Якщо функція не має критичних точок другого роду, то вона не має точок перегину.

**Приклад 42.** Знайти інтервали опуклості і угнутості та точки перегину кривої

$$y = x^3 + 3x^2 - 9x - 2.$$

□ Розв'язання.

- 1) Область визначення функції:  $x \in \mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$ .

2) Знаходимо другу похідну функції

$$y' = 8x^7 + 6x - 9,$$

$$y'' = 56x^6 + 6.$$

Оскільки  $56x^6 + 6 > 0$  при будь-якому значенні  $x \in \mathbb{R}$ , то виконується нерівність  $y'' > 0$  при будь-якому значенні  $x$  із області визначення функції, тому крива угнута на всьому інтервалі  $(-\infty; +\infty)$ . Точок перегину немає. ■

**Приклад 43.** Знайти точки перегину та інтервали опуклості і угнутості кривої

$$y = \frac{1}{x} + x^2 - 4x + 5.$$

□ Розв'язання.

1) Знаходимо область визначення функції

$$D(y): x \neq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$

2) Знаходимо другу похідну функції

$$y' = -\frac{1}{x^2} + 2x - 4,$$

$$y'' = -(-2) \cdot x^{-3} + 2 = \frac{2}{x^3} + 2 = \frac{2 + 2x^3}{x^3}.$$

3) Знаходимо критичні точки другого роду:

$$y'' = 0 \Rightarrow 2 + 2x^3 = 0 \Rightarrow x^3 = -1 \Rightarrow x = -1;$$

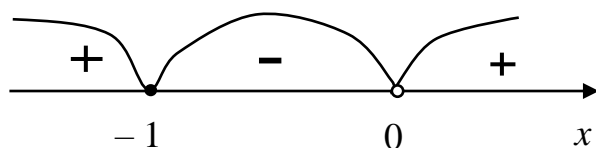
$$y'' \text{ не існує при } x^3 = 0 \Rightarrow x = 0, \text{ але } x = 0 \notin D(y);$$

$\Rightarrow x = -1$  — критична точка другого роду заданої функції.

4) Критична точка  $x = -1$  розбиває область визначення функції на інтервали  $(-\infty; -1)$ ,  $(-1; 0)$ ,  $(0; +\infty)$ .

Досліджуємо знак другої похідної  $y''$  на кожному з цих інтервалів. В кожному з цих інтервалів друга похідна зберігає знак, тому можемо в кожному з них розглянути будь-яку точку. Наприклад, візьмемо в першому інтервалі точку  $x = -2$ , тоді  $y''(-2) = \frac{2+2 \cdot (-8)}{-8} = \frac{7}{4} > 0$ . В другому інтервалі беремо точку  $x = -\frac{1}{2}$ , тоді  $y''\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2+2 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)}{-\frac{1}{8}} = -14 < 0$ . В третьому інтервалі

візьмемо  $x = 1$ , тоді  $y''(1) = \frac{2+2 \cdot 1}{1} = 4 > 0$ . Послідовність знаків другої похідної буде такою:



5) За теоремою 6 визначаємо інтервали опуклості і угнутості кривої, а за теоремою 7 — її точки перегину.

$x$	$(-\infty; -1)$	$-1$	$(-1; 0)$	$0$	$(0; +\infty)$
$y''(x)$	$+$	$0$	$-$	не існує	$+$
$y(x)$	угнута	точка перегину	опукла	не існує	угнута

Оскільки  $y'' < 0$  на інтервалі  $(-1; 0)$ , то крива  $y(x)$  опукла при  $x \in (-1; 0)$ .

Оскільки  $y'' > 0$  на інтервалах  $(-\infty; -1)$  і  $(0; +\infty)$ , то крива  $y(x)$  угнута при  $x \in (-\infty; -1)$  і  $x \in (0; +\infty)$ .

При переході через критичну точку (другого роду)  $x = -1$  похідна  $y''(x)$  змінює знак, тому при  $x = -1$  крива має точку перегину. Обчислимо значення функції в цій точці

$$y(-1) = \frac{1}{-1} + (-1)^2 - 4(-1) + 5 = 9.$$

Отже,  $M(-1; 9)$  — точка перегину кривої. ■

## 7.5. Асимптоти кривої

**Означення 6.** Пряма  $l$  називається *асимптотою* кривої, якщо відстань  $d$  від довільної точки  $M$  кривої до цієї прямої  $l$  прямує до нуля, коли точка  $M$ , рухаючись по кривій, віддаляється на нескінченність.

Асимптоти бувають вертикальні і похилі (зокрема, горизонтальні).

**I.** Кажуть, що пряма  $x = x_0$  є **вертикальною асимптотою** кривої  $y = f(x)$ , якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \quad \text{або} \quad \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \infty, \quad \text{або}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \infty.$$

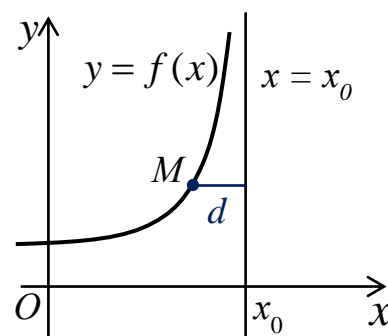


Рис. 7.12

Дійсно, з рисунку 7.12 видно, що відстань  $d = |x - x_0|$  і  $d \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow x_0$ .

Отже, шукаємо вертикальні асимптоти кривої  $y = f(x)$  в точках розриву другого роду.

Також вертикальні асимптоти можуть існувати в граничних точках області визначення кривої.

**Приклад 44.**  $y = \frac{1}{x-2}$ .

Область визначення функції  $D(y)$ :  $x \neq 2$ ;

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{0} = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{1}{x-2} = +\infty \Rightarrow$$

$x = 2$  — вертикальна асимптота кривої (рис. 7.13).

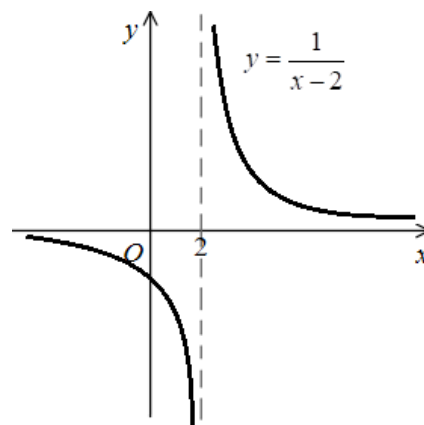


Рис. 7.13

**Приклад 45.**  $y = \ln(x+3)$ .

Область визначення функції

$$D(y): x+3 > 0 \Rightarrow x \in (-3; +\infty).$$

Гранична точка області визначення функції:  $x = -3$ , функція в цій точці не визначена. Оскільки

$$\lim_{x \rightarrow -3+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3+0} \ln(x+3) = -\infty,$$

то  $x = -3$  — вертикальна асимптота кривої (рис. 7.14).

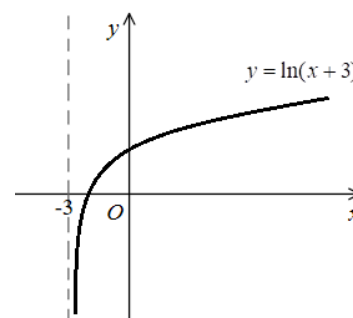


Рис. 7.14

**II.** Рівняння *похилої асимптоти* шукаємо у вигляді

$$y = kx + b, \quad (25)$$

де

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad (26)$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx). \quad (27)$$

**Зауваження 1.** Спочатку знаходимо  $k$ , потім  $b$ . Якщо хоча б одна з границь (26) або (27) не існує або дорівнює нескінченності, то крива не має похилої асимптоти.

**Зауваження 2.** Якщо  $k = 0$  і  $b = \text{const}$ , то отримаємо горизонтальну асимптоту  $y = b$ .

**Зауваження 3.** При знаходженні асимптот кривої, границі (26) і (27) потрібно обчислювати окремо при  $x \rightarrow +\infty$  і при  $x \rightarrow -\infty$ , оскільки асимптоти можуть бути різні при  $x \rightarrow +\infty$  і при  $x \rightarrow -\infty$ .

Наприклад, крива  $y = \frac{1}{x-2}$  окрім вертикальної асимптоти також має горизонтальну асимптоту  $y = 0$ . Дійсно,

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x(x-2)} = 0;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{1}{x-2} - 0 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x-2} = 0,$$

Оскільки  $k$  та  $b$  мають скінченні значення і рівні між собою при  $x \rightarrow +\infty$  і при  $x \rightarrow -\infty$ , то існує єдина похила асимптота при  $x \rightarrow \pm\infty$ . Далі, підставляючи ці значення в рівняння похилої асимптоти, отримаємо

$$y = 0 \cdot x + 0 \Rightarrow y = 0 \text{ — горизонтальна асимптота кривої.}$$

**Приклад 46.** Знайти асимптоти кривої  $y = xe^{2x-3}$ .

□ Розв'язання. Область визначення функції:  $x \in \mathbb{R}$ . Тому вертикальних асимптот немає.

Знайдемо похилі асимптоти  $y = kx + b$ .

1) при  $x \rightarrow +\infty$ :

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^{2x-3}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x-3} = +\infty \Rightarrow$$

при  $x \rightarrow +\infty$  похилої асимптоти задана крива не має.

2) при  $x \rightarrow -\infty$ :

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^{2x-3}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x-3} = e^{-\infty} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{2x-3} - 0 \cdot x) = [\infty \cdot 0] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{3-2x}} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x)'}{(e^{3-2x})'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-2e^{3-2x}} = -\frac{1}{2e^{+\infty}} = 0.$$

Запишемо рівняння асимптоти:  $y = 0 \cdot x + 0 \Rightarrow$

$y = 0$  — горизонтальна асимптота кривої при  $x \rightarrow -\infty$ .

■

**Приклад 47.** Знайти асимптоти кривої  $y = \sqrt[3]{x^3 - 5x^2 + 1}$ .

□ Розв'язання. Область визначення функції:  $x \in \mathbb{R}$ . Тому вертикальних асимптот немає. Знайдемо похилі асимптоти  $y = kx + b$ .

При  $x \rightarrow +\infty$ :

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 5x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \sqrt[3]{\frac{x^3}{x^3} - \frac{5x^2}{x^3} + \frac{1}{x^3}}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{1 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^3}} = \sqrt[3]{1 - 0 + 0} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 - 5x^2 + 1} - x) = [\infty - \infty] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt[3]{x^3 - 5x^2 + 1} - x) \cdot \left( (\sqrt[3]{x^3 - 5x^2 + 1} + x \sqrt[3]{x^3 - 5x^2 + 1} + x^2) \right)}{\left( (\sqrt[3]{x^3 - 5x^2 + 1} + x \sqrt[3]{x^3 - 5x^2 + 1} + x^2) \right)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{x^3 - 5x^2 + 1}\right)^3 - x^3}{\left(\sqrt[3]{x^3 - 5x^2 + 1}\right)^2 + x\sqrt[3]{x^3 - 5x^2 + 1} + x^2} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x^2 + 1}{\left(\sqrt[3]{x^3 - 5x^2 + 1}\right)^2 + x\sqrt[3]{x^3 - 5x^2 + 1} + x^2} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(-5 + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(\sqrt[3]{1 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^3}}\right)^2 + x \cdot x \sqrt[3]{1 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^3}} + x^2} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2} \left(-5 + \frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2} \left(\left(\sqrt[3]{1 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^3}}\right)^2 + \sqrt[3]{1 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^3}} + 1\right)} = \\
&= \frac{-5 + 0}{\left(\sqrt[3]{1 - 0 + 0}\right)^2 + \sqrt[3]{1 - 0 + 0} + 1} = -\frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

При  $x \rightarrow -\infty$  аналогічно отримаємо  $k = 1$ ,  $b = -\frac{5}{3}$ .

Оскільки  $k$  та  $b$  мають скінченні значення і рівні між собою при  $x \rightarrow +\infty$  і при  $x \rightarrow -\infty$ , то існує єдина похила асимптота при  $x \rightarrow \pm\infty$ . Запишемо її рівняння:  $y = 1 \cdot x - \frac{5}{3}$ .

Отже,  $3x - 3y - 5 = 0$  — похила асимптота кривої. ■

**Приклад 48.** Знайти асимптоти кривої  $y = \frac{\operatorname{arctg} 3x}{x}$ .

□ Розв'язання. Область визначення функції:  $x \neq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ .

Перевіримо, чи має крива вертикальну асимптоту в точці  $x = 0$ . Оскільки

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \left| \begin{array}{l} \text{при } x \rightarrow 0 \Rightarrow 3x \rightarrow 0 \\ \Rightarrow \operatorname{arctg} 3x \sim 3x \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x} = 3,$$

то крива вертикальних асимптот не має.

Далі знайдемо похилі асимптоти  $y = kx + b$  заданої кривої.

При  $x \rightarrow +\infty$ :

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctg 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctg 3x}{x^2} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\infty} = 0;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\arctg 3x}{x} - 0 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg 3x \cdot \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \cdot 0 = 0.$$

При  $x \rightarrow -\infty$  аналогічно отримаємо

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\arctg 3x}{x^2} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{\infty} = 0; \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\arctg 3x}{x} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{\infty} = 0.$$

Оскільки  $k = 0$  та  $b = 0$  мають скінченні значення і рівні між собою при  $x \rightarrow +\infty$  і при  $x \rightarrow -\infty$ , то існує єдина похила асимптота при  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Записуємо її рівняння:

$$y = 0 \cdot x - 0 \Rightarrow$$

$y = 0$  — горизонтальна асимптота кривої. ■

## 7.6. Схема дослідження функції і побудови графіка

Дослідження функції  $y = f(x)$  проводять за наступною схемою:

1. знайти область визначення функції;
2. знайти, якщо це можливо, точки перетину графіка функції з осями координат;
3. з'ясувати чи задана функція періодична та чи є вона парною, або непарною, або загального вигляду;
4. знайти точки розриву функції і класифікувати їх;
5. знайти асимптоти кривої;
6. знайти інтервали монотонності функції, екстремальні точки та екстремуми функції;
7. знайти інтервали опуклості, угнутості і точки перегину графіка функції;
8. побудувати графік функції.

**Приклад 49.** Провести повне дослідження і побудувати графік функції

$$y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}.$$

□ Розв'язання.

1) Знаходимо область визначення функції:

$$D(y): x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \Rightarrow x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty).$$

2) Знаходимо точки перетину графіка функції з осями координат:

$$\text{якщо } x = 0, \text{ то } y = \frac{2 \cdot 0 - 1}{(0 - 1)^2} = -1 \Rightarrow M_1(0; -1);$$

$$\text{якщо } y = 0, \text{ то } 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow M_2\left(\frac{1}{2}; 0\right).$$

3) Функція не періодична, бо не існує такого числа  $T > 0$  (період функції), щоб виконувалась рівність  $y(x + T) = y(x)$ .

$$\text{Оскільки } y(-x) = \frac{2(-x) - 1}{(-x - 1)^2} = \frac{-2x - 1}{(x + 1)^2} \Rightarrow$$

$$y(-x) \neq y(x) \text{ та } y(-x) \neq -y(x).$$

Тому функція  $y(x)$  ні парна, ні непарна, тобто функція загального вигляду.

4) Знайдемо точки розриву функції і класифікуємо їх.

Оскільки  $x = 1 \notin D(y)$ , то  $x = 1$  — точка розриву функції.

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} y(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{2x - 1}{(x - 1)^2} = \left. \begin{array}{l} \text{при } x \rightarrow 1 + 0 \\ x - 1 \rightarrow +0, \quad (x - 1)^2 \rightarrow +0, \\ 2x - 1 \rightarrow 2 \cdot (1 + 0) - 1 = 1 \\ \Rightarrow \frac{2x - 1}{(x - 1)^2} \rightarrow \frac{1}{+0} = +\infty \end{array} \right| = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} y(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{2x - 1}{(x - 1)^2} = \left. \begin{array}{l} \text{при } x \rightarrow 1 - 0 \\ x - 1 \rightarrow -0, \quad (x - 1)^2 \rightarrow +0, \\ 2x - 1 \rightarrow 2 \cdot (1 - 0) - 1 = 1 \\ \Rightarrow \frac{2x - 1}{(x - 1)^2} \rightarrow \frac{1}{+0} = +\infty \end{array} \right| = +\infty$$

$\Rightarrow x = 1$  точка розриву другого роду.

5) Знайдемо асимптоти кривої.

Оскільки  $\lim_{x \rightarrow 1+0} y(x) = \infty$ , то  $x = 1$  — вертикальна асимптота кривої.

Похи́лі асимптоти  $y = kx + b$ , де

$$\begin{aligned}k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x - 1}{x(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x \left(2 - \frac{1}{x}\right)}{x^3 \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2} = \\&= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2} = \frac{2 - 0}{\infty(1 - 0)^2} = \frac{2}{\infty} = 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow k = 0 \text{ при } x \rightarrow \pm\infty;$$

$$\begin{aligned}b &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{2x - 1}{(x - 1)^2} - 0 \cdot x \right) = \\&= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x \left(2 - \frac{1}{x}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{x \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2} = \frac{2}{\infty} = 0 \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\Rightarrow b = 0 \text{ при } x \rightarrow \pm\infty.$$

Отже,  $y = 0$  — горизонтальна асимптота кривої.

б) Знайдемо інтервали монотонності функції, екстремальні точки та екстремуми функції.

Обчислимо похідну

$$\begin{aligned}y' &= \left( \frac{2x - 1}{(x - 1)^2} \right)' = \frac{2 \cdot (x - 1)^2 - (2x - 1) \cdot 2(x - 1) \cdot 1}{((x - 1)^2)^2} = \\&= \frac{2(x - 1) \cdot [(x - 1) - (2x - 1)]}{(x - 1)^4} = \frac{2 \cdot (x - 1 - 2x + 1)}{(x - 1)^3} = \frac{-2x}{(x - 1)^3},\end{aligned}$$

потім шукаємо критичні точки функції:

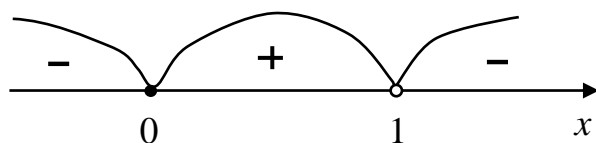
$$y' = 0 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0;$$

$$y' \text{ не існує, якщо } (x - 1)^3 = 0 \Rightarrow x = 1, \text{ але } x = 1 \notin D(y).$$

Таким чином,  $x = 0$  — критична точка функції.

Критична точка  $x = 0$  розбиває область визначення функції на інтервали  $(-\infty; 0)$ ,  $(0; 1)$ ,  $(1; +\infty)$ . Досліджуємо знак похідної  $y'$  на кожному з цих

інтервалів, використовуючи метод інтервалів. Послідовність знаків першої похідної буде такою:



$x$	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$y'(x)$	-	0	+	не існує	-
$y(x)$		min		не існує	

Отже,

- функція  $y(x)$  зростає при  $x \in (0; 1)$ ;
- функція  $y(x)$  спадає при  $x \in (-\infty; 0)$  та при  $x \in (1; +\infty)$ ;
- точка  $x = 0$  – точка мінімуму функції, тому  
 $y_{\min} = y(0) = -1$  — екстремум функції.

7) Знайдемо інтервали опуклості, угнутості і точки перегину графіка функції.

Обчислимо другу похідну

$$y'' = \left( -\frac{2x}{(x-1)^3} \right)' = -\frac{2(x-1)^3 - 2x \cdot 3(x-1)^2 \cdot 1}{(x-1)^6} =$$

$$= -\frac{2(x-1)^2 \cdot [x-1-3x]}{(x-1)^6} = -\frac{2(-2x-1)}{(x-1)^4} = \frac{4x+2}{(x-1)^4}$$

і далі шукаємо критичні точки другого роду:

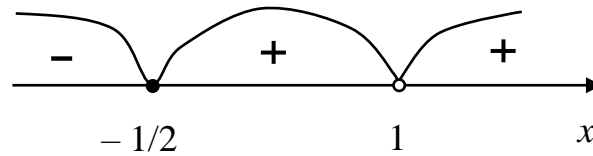
$$y'' = 0 \Rightarrow 4x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2};$$

$$y'' \text{ не існує, якщо } (x-1)^4 = 0 \Rightarrow x = 1, \text{ але } x = 1 \notin D(y).$$

Таким чином,  $x = -\frac{1}{2}$  критична точка другого роду функції  $y(x)$ . Вона розбиває область визначення функції на інтервали  $(-\infty; -\frac{1}{2})$ ,  $(-\frac{1}{2}; 1)$ ,  $(1; +\infty)$ .

Досліджуємо знак другої похідної  $y''$  на кожному з цих інтервалів. Оскільки в кожному з цих інтервалів друга похідна зберігає знак, тому можемо

в кожному з них розглянути будь яку точку і обчислити значення другої похідної у вибраній точці для з'ясування знаку  $y''$ . Послідовність знаків другої похідної буде такою:



$x$	$(-\infty; -\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2}; 1)$	$1$	$(1; +\infty)$
$y''(x)$	$-$	$0$	$+$	не існує	$+$
$y(x)$	опукла	точка перегину	угнута	не існує	угнута

Тому

- функція  $y(x)$  опукла при  $x \in (-\infty; -\frac{1}{2})$ ;
- функція  $y(x)$  угнута при  $x \in (-\frac{1}{2}; 1)$  та при  $x \in (1; +\infty)$ .

При  $x = -\frac{1}{2}$  крива має точку перегину, обчислимо значення функції в

цій точці

$$y\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 1}{\left(-\frac{1}{2} - 1\right)^2} = \frac{-1 - 1}{\left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{-2}{9/4} = -2 \cdot \frac{4}{9} = -\frac{8}{9}.$$

Таким чином,  $M_0\left(-\frac{1}{2}; -\frac{8}{9}\right)$  — точка перегину кривої.

8) Будуємо графік функції (рис. 7.15):

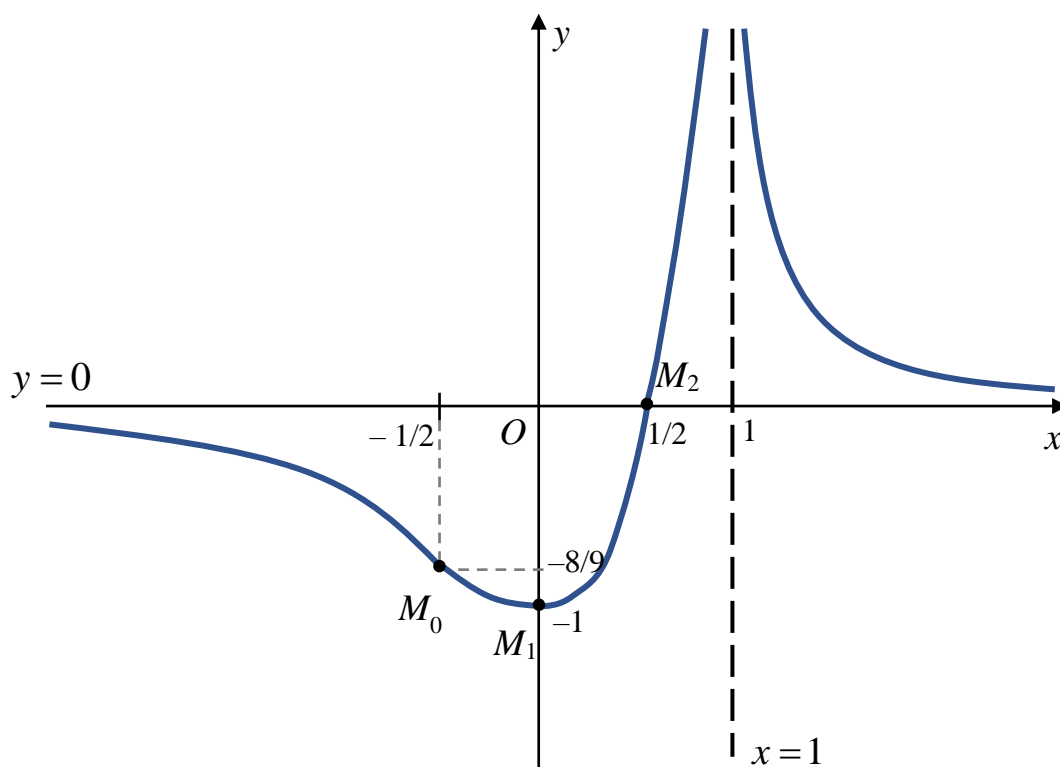


Рис. 7.15

### Контрольні приклади для самоперевірки

**7.1.** Дослідити функцію  $f(x) = 6x^5 + 15x^4 - 80x^3 + 5$  на зростання і спадання.

**7.2.** Знайти екстремуми і проміжки монотонності функції

$$y = x - \frac{3}{x} - 4 \ln x.$$

**7.3.** Знайти екстремуми і проміжки монотонності функції  $y = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}$ .

**7.4.** Знайти екстремуми і проміжки монотонності функції

$$y = (x^2 + 2x - 2)e^{1-x}.$$

**7.5.** Знайти екстремуми функції, використовуючи другу достатню умову існування екстремуму: а)  $y = x \ln x$ ; б)  $y = \frac{x-2}{x^3}$ ;

в)  $y = x - \frac{5}{2} \ln(4 + x^2)$ .

**7.6.** Знайти найбільше та найменше значення функції  $y = x - \frac{5}{2} \ln(4 + x^2)$  на відрізку  $[-1; 5]$ .

**7.7.** Знайти найбільше та найменше значення функції  $y = \sqrt[3]{x^2 - 6x}$  на відрізку  $[0; 7]$ .

**7.8.** Знайти найбільше та найменше значення функції  $y = x^2 e^{-x^2+1}$  на відрізку  $[-0.5; 2]$ .

**7.9.** Поперечний перетин каналу має форму прямокутника, який з однієї сторони закінчується півколом. Периметр поперечного перетину дорівнює  $a$  (м). Знайти радіус, при якому перетин буде мати найбільшу площу.

**7.10.** Знайти інтервали опуклості і угнутості та точки перегину кривої  $y = -\frac{5x^7}{14} + 2x^6 - 3x^5 + 15x - 3$ .

**7.11.** Знайти інтервали опуклості і угнутості та точки перегину кривої  $y = x^6 - \frac{5x^4}{2} + 120x + 2$ .

**7.12.** Знайти точки перегину та інтервали опуклості і угнутості кривої  $y = x(8 + x) - 2(16 + 5x) \ln(2 + x)$ .

**7.13.** Знайти асимптоти кривої  $y = x^2 3^{1-4x}$ .

**7.14.** Знайти асимптоти кривої  $y = x(e^{1/x} - 1)$ .

**7.15.** Знайти асимптоти кривої  $y = \frac{2x^2 - 3x - 1}{x - 1}$ .

**7.16.** Знайти асимптоти кривої  $y = x \operatorname{arctg} x$ .

**7.17.** Провести повне дослідження і побудувати графік функції  $y = \frac{x^3}{9-x^2}$ .

### Відповіді

**7.1.** Зростає на інтервалах  $(-\infty; -4)$  та  $(2; +\infty)$ , спадає на  $(-4; 2)$ .

**7.2.** Функція зростає на інтервалах  $(0; 1)$  і  $(3; +\infty)$ , спадає на інтервалі  $(1; 3)$ ; екстремуми функції:  $y_{\max} = y(3) = 2 - 4 \ln 3$ ,  $y_{\min} = y(1) = -2$ .

**7.3.** Функція зростає на інтервалах  $(-\infty; 0)$  і  $(4; +\infty)$ , спадає на інтервалі  $(0; 4)$ ; екстремуми функції:  $y_{max} = y(0) = 0$ ,  $y_{min} = y(4) = -2\sqrt[3]{4}$ .

**7.4.** Функція зростає на інтервалі  $(-2; 2)$ , спадає на інтервалах  $(-\infty; -2)$  і  $(2; +\infty)$ ; екстремуми функції:  $y_{max} = y(2) = \frac{6}{e}$ ,  $y_{min} = y(-2) = -2e^3$ .

**7.5.** а)  $y_{min} = y\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$ ; б)  $y_{max} = y(3) = \frac{1}{27}$ ; в)  $y_{max} = y(1) = 1 -$

$\frac{5}{2}\ln 5$ ,  $y_{min} = y(4) = 4 - \frac{5}{2}\ln 20$ . **7.6.**  $\min_{x \in [-1; 5]} y(x) = y(-1) = -1 - \frac{5}{2}\ln 5$ ,

$\max_{x \in [-1; 5]} y(x) = y(1) = 1 - \frac{5}{2}\ln 5$ . **7.7.**  $\min_{x \in [0; 7]} y(x) = y(3) = -\sqrt[3]{9}$ ,

$\max_{x \in [0; 7]} y(x) = y(7) = \sqrt[3]{7}$ . **7.8.**  $\min_{x \in [-0.5; 2]} y(x) = y(0) = 0$ ,

$\max_{x \in [-0.5; 2]} y(x) = y(1) = 1$ . **7.9.**  $\frac{a}{4+\pi}$  (м). **7.10.** Крива опукла при  $x \in$

$(0; +\infty)$ , угнута при  $x \in (-\infty; 0)$ ;  $M(0; -3)$  – точка перегину кривої.

**7.11.** Крива опукла на інтервалі  $(-1; 1)$ , угнута на проміжках  $(-\infty; -1)$  та  $(1; +\infty)$ . Точки перегину:  $(-1; -115.5)$ ,  $(1; 120.5)$ . **7.12.** Точки перегину:

$(0; -32 \ln 2)$ ,  $(1; 9 - 42 \ln 3)$ . Крива опукла на інтервалі  $(0; 1)$ , угнута на інтервалах  $(-2; 0)$  та  $(1; +\infty)$ . **7.13.**  $y = 0$  — горизонтальна асимптота

кривої при  $x \rightarrow +\infty$ . **7.14.**  $x = 0$  – вертикальна асимптота кривої,  $y = 1$  —

горизонтальна асимптота. **7.15.**  $x = 1$  – вертикальна асимптота кривої,

$y = 2x - 1$  – похила асимптота. **7.16.** Крива не має асимптот.

**7.17.** Функція непарна. Вертикальні асимптоти кривої:  $x = 3$ ,  $x = -3$ ;

похилих асимптот немає. Функція зростає на інтервалах  $(-3\sqrt{3}; -3)$ ,  $(-3; 3)$

та  $(3; 3\sqrt{3})$ ; спадає на інтервалах  $(-\infty; -3\sqrt{3})$  і  $(3\sqrt{3}; +\infty)$ ; екстремуми

функції:  $y_{max} = y(3\sqrt{3}) = -\frac{9\sqrt{3}}{2}$ ,  $y_{min} = y(-3\sqrt{3}) = \frac{9\sqrt{3}}{2}$ . Крива опукла на

проміжках  $(-3; 0)$  і  $(3; +\infty)$ , угнута на  $(-\infty; -3)$  та  $(0; 3)$ ;  $(0; 0)$  — точка перегину.

## ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

**Завдання 1.** Знайти похідні і диференціали  $dy$  наступних функцій.

1.1. а)  $y = \frac{1}{2(2-3x)^2} - \sqrt[4]{3x^5 - 5x^4 - 1}$ ;      б)  $y = \frac{4}{\sqrt[3]{\arctg \ln^5(2x^4 - e^{2x})}}$ ;

в)  $y = x \operatorname{tg} \sqrt{x} + \frac{x^3 - \sin 3x}{e^{3x-1}}$ ;      г)  $y = 3^{5x^2-1} \cos^2 x^5$ ;

д)  $y = \frac{\sqrt{x^3 - 2x - 1}}{\operatorname{ctg} 2x^2}$ .

1.2. а)  $y = \frac{1}{\sqrt[4]{(x^4 - 1)^3}} + (2 - x^5)^7$ ;      б)  $y = \ln^3 \cos(e^{x^3 - \sin 5x})$ ;

в)  $y = x^2 \sin(2x^2) + \frac{x^3 - 1}{\cos 3x}$ ;      г)  $y = \sqrt{1 - x^4} \cdot \operatorname{tg}^5 4x$ ;

д)  $y = \frac{\cos^2(5x+1)}{\arcsin e^{3x}}$ .

1.3. а)  $y = \frac{3}{\sqrt[5]{(x^3 + x^2 - 1)^2}} + (2 - e^x)^{10}$ ;      б)  $y = \frac{3}{\ln^5 \operatorname{tg}(1 - x^7 - 4 \sin 3x)}$ ;

в)  $y = \sqrt{x} \operatorname{ctg} 5x + \frac{x^2 - x^3}{\ln(2x-1)}$ ;      г)  $y = (1 - e^{2x^4}) \cdot \operatorname{arctg}^4 2x$ ;

д)  $y = \frac{\ln^4 2x}{\cos \sqrt{x^3}}$ .

1.4. а)  $y = \frac{1}{3(x^2 + 4)} + \sqrt[8]{(1 + x - x^6)^3}$ ;      б)  $y = \sqrt{\cos^3 \ln(2x^2 - e^{3x})}$ ;

в)  $y = e^{-x} \operatorname{tg} 2x + \frac{\sin x^3}{3x-1}$ ;      г)  $y = \operatorname{ctg}(x^2 \cdot \cos^2 x)$ ;

д)  $y = \frac{\arcsin^4 2x}{\sqrt{1-4x^2}}$ .

1.5. а)  $y = \frac{1}{2(1+3x^2+x^3)^4} + \sqrt[3]{2-x^4}$ ;      б)  $y = \arcsin^2 \sqrt{\ln^4 2x - x^5}$ ;

$$\text{в)} y = \frac{3e^{4x} - 1}{2x + 3} + \sqrt{x}(2x - \sin 3x); \quad \text{г)} y = \sqrt{x - x^2} \cdot \text{ctg}^3(x^2);$$

$$\text{д)} y = \frac{\sqrt{1 - 9x^2}}{\arccos^5 3x}.$$

$$1.6. \quad \text{а)} y = \frac{1}{\sqrt[5]{(x^3 + x - 1)^4}} + (2 \sin x + 1)^4; \quad \text{б)} y = \ln^2 \cos \sqrt{\text{tg}(1 - 3x) - x^5};$$

$$\text{в)} y = \ln x \cdot \sin e^{2x} + \frac{x^3 - 3x}{1 - x^2}; \quad \text{г)} y = 2^{\cos^3 x \cdot \sin x^3};$$

$$\text{д)} y = \frac{\arcsin^4 2x}{e^{x^4}}.$$

$$1.7. \quad \text{а)} y = \frac{3}{(3x^7 + 1)^5} + \sqrt[3]{x^2 - 5x + 1}; \quad \text{б)} y = \frac{2}{\text{tg}^4(e^{\cos x^3 - 5x^2} + x)};$$

$$\text{в)} y = e^{-2x^2} \cdot \text{ctg} 3x + \frac{1 - 3 \cos 2x}{x - x^2}; \quad \text{г)} y = \ln \sqrt{1 - x} \cdot \text{tg}^3 x^2;$$

$$\text{д)} y = \frac{3^{\arcsin x^3}}{\sqrt{1 - x^6}}.$$

$$1.8. \quad \text{а)} y = \frac{1}{\sqrt[8]{(x^3 + x^2 + 5)^3}} + (2x - x^3)^{10}; \quad \text{б)} y = \text{arcctg} \sqrt{x - \cos^5(x^3 + \ln 2x)};$$

$$\text{в)} y = \sqrt{1 - 3x} \arctg x + \frac{\sin^2 3x}{e^{2x}}; \quad \text{г)} y = \sqrt{1 - e^{2x}} \cdot \arccos^2 e^x;$$

$$\text{д)} y = \frac{2^{\sin 5x^4}}{\sin^4 x}.$$

$$1.9. \quad \text{а)} y = \frac{1}{\sqrt[9]{(2 - x^3 - x^5)^7}} + (x - \text{tg} x)^3; \quad \text{б)} y = \sqrt{\arcsin(x - \ln^3 \sin 3x)};$$

$$\text{в)} y = (x^2 + 2) \ln 5x + \frac{e^{-x} + \cos 2x}{1 + \text{tg} 4x}; \quad \text{г)} y = \arcsin x^3 \cdot \cos^3 e^x;$$

$$\text{д)} y = \frac{\cos 2x^3}{\ln^4 x}.$$

1.10. а)  $y = \frac{1}{3(4+x-x^5)^3} + \sqrt[3]{x^4+x^2}$ ; б)  $y = \operatorname{arctg}(x - \cos(3x + 2^{1-x}))^3$ ;

в)  $y = \cos^2 x \cdot \operatorname{tg} x^3 + \frac{3x-x^5}{\ln 3x}$ ; г)  $y = \sqrt{x} \cdot e^{2\sqrt{x}} \cdot \ln^5 x$ ;

д)  $y = \frac{\operatorname{ctg}^2 x^3}{x^4+1}$ .

1.11. а)  $y = \frac{1}{2(4x^3+x^2-1)} + \sqrt[3]{x^3-2x}$ ; б)  $y = \frac{3}{\operatorname{ctg}^2 \ln(2x^4 - \sin 2x^5)}$ ;

в)  $y = \operatorname{ctg} 5x \cdot \arcsin x^2 + \frac{x - \ln 3x}{x^4}$ ; г)  $y = (1+x^8) \cdot 3^{\operatorname{arccctg} x^4}$ ;

д)  $y = \frac{\sqrt{1-e^{2x}}}{\cos^3 e^x}$ .

1.12. а)  $y = \frac{1}{2(3x^3-2x)^7} + \sqrt[3]{(x^3+x+1)^2}$ ; б)  $y = 3^{1-\cos \ln^4(2x-1)^2}$ ;

в)  $y = e^{1-7x} \cdot \operatorname{arctg} x^3 + \frac{\cos 2x}{x^2-3}$ ; г)  $y = \sin^3(x^2) \cdot \ln 5x$ ;

д)  $y = \frac{\operatorname{arctg}^2 e^x}{1+e^{2x}}$ .

1.13. а)  $y = \frac{3}{(2x^3+3x^2-1)^6} + \sqrt[5]{(e^x+x^2)^4}$ ; б)  $y = \arccos \sqrt{(x^4 - \operatorname{tg} 3x^4)^3}$ ;

в)  $y = \frac{x^3}{x^2-2} + \ln x \cdot \sin(3x^2)$ ; г)  $y = \sqrt{x} \cdot \operatorname{arctg}^2 \sqrt{x}$ ;

д)  $y = \frac{\ln \sin x^4}{x^4+1}$ .

1.14. а)  $y = \frac{3}{\sqrt[4]{(x^2+x-1)^5}} + (2x-x^3)^5$ ; б)  $y = \cos(\ln^3 \sin \sqrt{x^2+1})$ ;

в)  $y = \frac{x^2-2}{x^4} + 2^x \cdot \arccos \sqrt{1-3x}$ ; г)  $y = (1+x^4)e^{2x} \cdot \operatorname{arctg} x^2$ ;

д)  $y = \frac{\sqrt{\cos x^4}}{\ln \sin x}$ .

1.15. а)  $y = \frac{1}{\sqrt[3]{(x^3 - x + 2)^5}} + (2 \ln x - x)^2$ ; б)  $y = \ln^7 \arccos \sqrt{x - x^2}$ ;  
в)  $y = \frac{x^2 - 2}{2x + 1} + e^{-x^5} \cdot \arccos 3x$ ; г)  $y = \operatorname{tg} \sqrt{x} \cdot \arcsin^2(2x)$ ;  
д)  $y = \sqrt{\frac{\sin x^3}{\ln^3 2x}}$ .

1.16. а)  $y = \frac{1}{\sqrt[6]{(x^4 - 3)^5}} + \frac{(x^2 - 3e^x)^7}{2}$ ; б)  $y = \arcsin^4 \ln(3 - \operatorname{tg} x^6)$ ;  
в)  $y = x \cdot \cos e^x + \frac{4x^2 - x}{\operatorname{tg} 2x}$ ; г)  $y = \ln \operatorname{ctg} 2x \cdot \arcsin^2 x$ ;  
д)  $y = \frac{x\sqrt{x}}{\arccos \sqrt{x}}$ .

1.17. а)  $y = \frac{1}{\sqrt[5]{(x^4 + 5x - 1)^6}} + \frac{(1 + x^2)^4}{4}$ ; б)  $y = \arcsin \sqrt{2 - \sin^4(2x^2 + e^{2x-1})}$ ;  
в)  $y = \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} + \frac{\operatorname{ctg} 3x}{x + e^{2x}}$ ; г)  $y = 3^{x^4} \cdot \sin^4 2x$ ;  
д)  $y = \frac{\arccos^2 \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$ .

1.18. а)  $y = x - \frac{4}{2-x^2} + \sqrt[5]{(x^7 + 3x^3 - 1)^7}$ ; б)  $y = \operatorname{tg}(\ln x - \cos(3x^5 + 7^{1+2x}))^4$ ;  
в)  $y = x^3 \ln^4 x + \frac{e^{3x-x^3}}{\sin 3x}$ ; г)  $y = e^{-x}(1 + 4x^2) \cdot \operatorname{arctg}^4 2x$ ;  
д)  $y = \frac{\arcsin \sqrt{1-x^2}}{x^3}$ .

1.19. а)  $y = \frac{2}{(2x^5 - 1)^8} + \sqrt[7]{(x^5 - 3x^2 + 2)^8}$ ; б)  $y = \sin \frac{1}{\ln^5(x^3 - 2)}$ ;  
в)  $y = e^{-x} \ln(2x + 1) + \frac{\operatorname{ctg}(3x + 2)}{x^4}$ ; г)  $y = \left(\frac{1}{x} + 1\right) \cdot \arccos^3 5x$ ;

$$\text{д) } y = \frac{\arcsin x^4}{\cos^4 x}.$$

$$1.20. \text{ а) } y = -\frac{1}{(1+3x^5)^2} + \sqrt[3]{(x^4 + 5x^3 + 2)^5}; \quad \text{б) } y = \ln \frac{1}{\cos^5(x^2 - e^{2x})};$$

$$\text{в) } y = \frac{2x\sqrt{x}}{3x+1} + e^{3x-1}(\sin 2x - x); \quad \text{г) } y = \sin^4 x \cdot 2^{\sin x^4};$$

$$\text{д) } y = \frac{\arcsin^2 e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$$

$$1.21. \text{ а) } y = \frac{1}{(2+x-x^5)^3} + \frac{\sqrt[5]{(4x^2+2)^8}}{8}; \quad \text{б) } y = \ln^7 \arccos \sqrt{4x^2+1};$$

$$\text{в) } y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} + \operatorname{tg} 2x \cdot 4^{3x-2}; \quad \text{г) } y = x \cdot 2^{x^2} \cdot \arccos^2 x;$$

$$\text{д) } y = \frac{\sin \ln x}{\cos^2 3x}.$$

$$1.22. \text{ а) } y = \frac{1}{\sqrt[4]{2x^2+3}} + \frac{2}{x} - \frac{(1-x^2)^7}{14}; \quad \text{б) } y = e^{x - \ln^3 \sin \frac{1}{x}};$$

$$\text{в) } y = x \cdot \cos x^5 + \frac{\sqrt{x} - \ln 2x}{\sin x}; \quad \text{г) } y = \sin e^{2x} \cdot \operatorname{arctg}^2 2x;$$

$$\text{д) } y = \frac{\operatorname{arcctg}^3 e^x}{1+e^{2x}}.$$

$$1.23. \text{ а) } y = \frac{6}{\sqrt[3]{x^4+4x+3}} + (2x-x^3)^5; \quad \text{б) } y = 5^{\operatorname{arctg}^3 \sqrt{2x^3-1}};$$

$$\text{в) } y = e^{3x^2} \cos 2x + \frac{x^3}{\ln 3x}; \quad \text{г) } y = e^{\sin^2 x} \operatorname{arctg} x^3;$$

$$\text{д) } y = \sqrt{\frac{\ln^3(2x)}{\cos x^3}}.$$

$$1.24. \text{ а) } y = \frac{1}{\sqrt[5]{(x^2+3)^7}} + (x^5 - 2x + 4)^6; \quad \text{б) } y = \ln \cos^4 \sqrt{x^2 + e^{x^5}};$$

$$\text{в)} y = 3^{-x} \operatorname{tg} x^2 + \frac{\sin 2x + x^5}{\sqrt{x}};$$

$$\text{г)} y = \sqrt{1-x^8} \cdot \arccos^2(x^4);$$

$$\text{д)} y = \frac{e^{x-\cos x^3}}{\operatorname{tg}^2 x}.$$

$$1.25. \text{ а)} y = \frac{12}{\sqrt[6]{(x^6+2)^7}} + \frac{(x^4-3x^3+x)^7}{7}; \quad \text{б)} y = \operatorname{arctg}^5 \sqrt{\cos^3(3x + \ln 2x^5)};$$

$$\text{в)} y = \cos x^2 \cdot e^{3x} + \frac{\operatorname{ctg} 3x + 1}{2\sqrt{x^3}};$$

$$\text{г)} y = \sin^5 2x \cdot \operatorname{arctg}(x^4 - 1);$$

$$\text{д)} y = \frac{1 + \sin^3 x}{e^{\cos 3x}}.$$

$$1.26. \text{ а)} y = \frac{7}{\sqrt[7]{(2x^2-x+1)^5}} + \frac{(2x+5)^4}{4};$$

$$\text{б)} y = \sin^9 \ln(1 + \operatorname{arctg} 3x^2);$$

$$\text{в)} y = \sqrt{x} \operatorname{arctg}(2x+5) + \frac{\cos 2x}{2x - e^{-x}};$$

$$\text{г)} y = \ln^2(1 - e^{4x}) \cdot \arcsin e^{2x};$$

$$\text{д)} y = \frac{\sin^4(x^2+x)}{2x+1}.$$

$$1.27. \text{ а)} y = \frac{2}{(2x^3+x+4)^4} + \frac{\sqrt[3]{(x^4+2)^4}}{8};$$

$$\text{б)} y = \frac{1}{\operatorname{arctg}^6 \ln(3 - \sin \sqrt{x^3})};$$

$$\text{в)} y = x \cos^2 x + \frac{2x^6 - e^{-7x}}{\ln x};$$

$$\text{г)} y = e^{\operatorname{arctg} 2x} \cdot \cos^5 \sqrt{x};$$

$$\text{д)} y = \frac{3^{x^2-x}}{\sqrt{\sin 3x}}.$$

$$1.28. \text{ а)} y = \frac{1}{3(2-x+x^3)} + \frac{\sqrt[6]{(x^3+x^2+1)^7}}{7}; \quad \text{б)} y = \frac{1}{8} \ln^8 \operatorname{arctg} 2\sqrt{1-e^{3x}};$$

$$\text{в)} y = x e^{2x} \cos 3x + \frac{x^2-x}{\ln 2x};$$

$$\text{г)} y = \ln^2 \sin x \cdot \operatorname{arctg} x^3;$$

$$\text{д)} y = \frac{\arccos \sqrt{2x-1}}{\sin^5 2x}.$$

$$\begin{aligned}
1.29. \text{ а) } y &= \frac{2}{3(2+5x)^3} + \frac{\sqrt[5]{x^6 - 3x^2 + 2}}{2}; & \text{ б) } y &= 1 - \ln \sin^4(x^2 + e^{\sqrt{x}}); \\
\text{ в) } y &= \operatorname{tg} x \cdot \arcsin x^2 + \frac{x^3 - 4e^{-2x}}{\sin 3x}; & \text{ г) } y &= e^{\sin 2\sqrt{x}} \cdot \operatorname{arctg} x^5; \\
\text{ д) } y &= \frac{\operatorname{ctg}(e^{x-x^4})}{\ln^4 x}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1.30. \text{ а) } y &= \frac{3}{2(2+x^5)} + \frac{\sqrt[3]{(3x^2+x+2)^2}}{2}; & \text{ б) } y &= 1 - \cos^5(\operatorname{arccotg} \sqrt{x} + \ln 5x); \\
\text{ в) } y &= 5^{x^2} (1 - \sin 2x) + \frac{\ln x}{x^2 + 3x}; & \text{ г) } y &= \ln^3 5x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{1-x^2}; \\
\text{ д) } y &= \frac{\sin^3 \sqrt{x}}{\operatorname{ctg} x^3}.
\end{aligned}$$

**Завдання 2.** Знайти похідну функції.

$$\begin{aligned}
2.1. \quad y &= \frac{\sin 3x \cdot \sqrt[5]{(1-x)^7}}{(x^2 - x - 1)\sqrt{5x+1}}; & 2.7. \quad y &= \frac{(4x-1)^6 \cdot e^{7x}}{\sqrt{2x^2-1} \cdot \sqrt[5]{(x+2)^2}}; \\
2.2. \quad y &= \frac{\operatorname{arctg} 3x \cdot \sqrt{1-x^4}}{(5x+x^7) \cdot \sqrt[10]{(5x+1)^9}}; & 2.8. \quad y &= \frac{\sqrt{1-3x^6} \cdot e^{x-5}}{(x-2)^5 \cdot \sqrt[3]{(x+2)^2}}; \\
2.3. \quad y &= \frac{\sqrt[5]{(3x-2)^2} \cdot \operatorname{tg} x}{\sqrt{2x^3+4} \cdot (3-x)^6}; & 2.9. \quad y &= \frac{\sqrt[7]{(3x-2)^6} \cdot e^{1+2x}}{\sqrt{2x^3+4} \cdot (x+2)^9}; \\
2.4. \quad y &= \frac{\cos 4x \cdot \sqrt{(x^6-x-1)^5}}{(5x+1)^9}; & 2.10. \quad y &= \frac{x \cdot \sqrt[3]{4x-1} \cdot e^x}{\sqrt{(2x^7-1)^5} \cdot (2-x)^4}; \\
2.5. \quad y &= \frac{(3x+2) \cdot \operatorname{tg} 7x}{(x^8-1)^3 \cdot \sqrt[7]{(5x-2)^2}}; & 2.11. \quad y &= \frac{\operatorname{ctg} x \cdot (4x^2-x)^3}{\sqrt{1-3x^9} \cdot \sqrt[7]{(2x+1)^3}}; \\
2.6. \quad y &= \frac{\sqrt[7]{3x-2} \cdot \sin^2 x}{\sqrt[4]{(x^3+4)^3} \cdot e^{x^4}}; & 2.12. \quad y &= \frac{\sqrt[3]{x^4+2x+1}}{(5-x^4)^6 \operatorname{tg} 2x};
\end{aligned}$$

2.13.	$y = \frac{\sqrt[8]{(3+x)^3 \cdot (x+2)^9}}{\sqrt{4-x^5} \cdot e^{x-3}};$	2.22.	$y = \frac{\sqrt{9x+1} \cdot \cos x}{\sqrt[8]{(x^2+1)^3} \cdot e^{x^2+1}};$
2.14.	$y = \frac{\sqrt[10]{(x+4)^7} \cdot e^{x^2}}{\sqrt{\sin 2x} \cdot (x^4+2)^9};$	2.23.	$y = \frac{\sqrt[5]{x-7} \cdot x^8}{\sqrt[11]{(x^2+2)^2} \cdot e^{x-2}};$
2.15.	$y = \frac{(7x-5)^{10} \cdot \arcsin x}{\sqrt[9]{(x^3+5x)^5}};$	2.24.	$y = \frac{x^{11} \cdot \sqrt[6]{5x-2}}{\sqrt[9]{(x^2+x)^4} \cdot e^{\cos x}};$
2.16.	$y = \frac{\sqrt[7]{x-5} \cdot \cos^3 x}{\sqrt[5]{(x^2+4)^4} \cdot e^{1+7x}};$	2.25.	$y = \frac{x^5 \cdot \sqrt{5x-2}}{\sqrt[7]{(1-x^2)^5} \cdot e^{2\sin x}};$
2.17.	$y = \frac{\sqrt[5]{x-5} \cdot \operatorname{tg}^3 x}{\sqrt[4]{(1-x^3)^3} \cdot e^{x^2}};$	2.26.	$y = \frac{(x-1)^7 \cdot \sqrt[5]{6x-1}}{\sqrt[5]{(x^2-2)^4} \cdot e^{\sin 2x}};$
2.18.	$y = \frac{(3x^4-2)^6 \cdot \operatorname{ctg}^4 x}{\sqrt[7]{(x+4)^3} \cdot e^{1-x^2}};$	2.27.	$y = \frac{x^3 \cdot \sqrt[6]{\cos 2x}}{\sqrt[8]{(x+1)^5} \cdot e^{5x-2}};$
2.19.	$y = \frac{\sqrt[5]{(3+x)^4} \cdot (x-1)}{\sqrt[4]{x^3+4} \cdot e^{3-x}};$	2.28.	$y = \frac{(x-1)^4 \cdot \sqrt[3]{5x+1}}{\sqrt[5]{(x^2-1)^2} \cdot e^{\operatorname{tg} x}};$
2.20.	$y = \frac{(3x-2)^3 \cdot \ln^2 x}{\sqrt[5]{(x^2+4x)^3} \cdot e^{2x}};$	2.29.	$y = \frac{x^4 \cdot \sqrt[3]{2x-4}}{\sqrt[4]{(x^3+1)^3} \cdot e^{\operatorname{ctg} x}};$
2.21.	$y = \frac{\sqrt{5x-1} \cdot \sin^3 x}{\sqrt[7]{(x^2-2)^3} \cdot e^{x^5}};$	2.30.	$y = \frac{e^{2x-5} \cdot (x^2+1)^3}{x^6 \cdot \sqrt[7]{(x^5+2)^3}}.$

**Завдання 3.** Знайти похідну функції.

3.1.	$y = (x^2 + e^{2x})^{\sin 3x};$	3.6.	$y = (\sin 2x + e^{2x})^{x^3-1};$
3.2.	$y = (\sin 5x)^{\cos x^2};$	3.7.	$y = \left( \frac{x^7+1}{\cos x} \right)^{x-1};$
3.3.	$y = (x^3 + \operatorname{tg} 2x)^{\cos x};$	3.8.	$y = (\sin 5x)^{x^2+e^{2x}};$
3.4.	$y = \left( \frac{x^5+1}{x-1} \right)^{x^2-2x+2};$	3.9.	$y = (\arcsin 3x - 5)^{3x+2};$
3.5.	$y = (x^2 + x)^{\ln 2x};$	3.10.	$y = (x^5 + e^{x^2})^{\arccos 2x};$

- 3.11.  $y = \left( \frac{x^4 + 2}{x^2 - 1} \right)^{x+2}$  ;
- 3.12.  $y = (3x + 2)^{5x + \arcsin 3x}$  ;
- 3.13.  $y = \left( \frac{\cos(x-1)}{x^5 + 1} \right)^{x^2}$  ;
- 3.14.  $y = (\operatorname{arcctg} x^2)^{x^3 + 2}$  ;
- 3.15.  $y = (x^2 - 2x + 2)^{2^x}$  ;
- 3.16.  $y = \left( \frac{x-4}{2x^4 - 1} \right)^{2 \sin x}$  ;
- 3.17.  $y = (\arccos 2x)^{x^5 + e^{x^2}}$  ;
- 3.18.  $y = (x^4 - \operatorname{ctg} 2x)^{x-1}$  ;
- 3.19.  $y = \left( \frac{\sin x}{x^4 - 1} \right)^{x^3}$  ;
- 3.20.  $y = (x^3 + 2)^{\operatorname{arcctg} x^2}$  ;
- 3.21.  $y = (\arcsin 3x)^{\sin x^3}$  ;
- 3.22.  $y = \left( \frac{\ln x}{1 - 3x^2} \right)^{x^3 - 4}$  ;
- 3.23.  $y = (\sin x)^{\operatorname{arcctg} 5x}$  ;
- 3.24.  $y = (\operatorname{arcctg} 4x)^{e^{2x} + x}$  ;
- 3.25.  $y = \left( \frac{\operatorname{tg} 2x}{x^4 - x} \right)^{x^5}$  ;
- 3.26.  $y = (x^3 + 2)^{x^2 - 3x - 1}$  ;
- 3.27.  $y = (\cos 2x + 2)^{\ln 5x}$  ;
- 3.28.  $y = \left( \frac{x^3 - x}{x^2 + 4} \right)^{\cos 2x}$  ;
- 3.29.  $y = (x^4 + 2x)^{\sin x^2}$  ;
- 3.30.  $y = (3^{2x-1} - x)^{\cos x^2}$  .

**Завдання 4.** Знайти похідну  $y'_x$  функції, що задана неявно.

- 4.1.  $x^2 y^4 + \cos(2xy) = y$  .
- 4.2.  $e^{3y-x} - 2x^4 y^5 + \ln 2y = 1$  .
- 4.3.  $\frac{\cos 3y}{x^4} + x^3 - 3y^4 = 3x^2 y^6 - 2$  .
- 4.4.  $\operatorname{ctg}(xy) - xy^4 = 2x + x^5$  .
- 4.5.  $x \sin^3 4y = 2 + \frac{y^3}{e^{5x}}$  .
- 4.6.  $y^3 \cos 4x - 2 = \frac{x^4}{y^5}$  .
- 4.7.  $e^{4y} - \sin 4x = 5x^3 y^4 - 5$  .
- 4.8.  $\sin(x^3 + y) + \frac{2x^6}{y^2} = 2x - y$  .
- 4.9.  $\ln(xy) + \frac{y^3}{x^2} = \cos 2x$  .
- 4.10.  $3x^2 y^7 - \cos^4 3y = 3 + x^5$  .
- 4.11.  $4y^3 - x \cos^3 2y = 2y + x^2$  .
- 4.12.  $\sin^2 2x + \ln(x^4 y^3) = 1 + 5y$  .
- 4.13.  $\frac{e^{5y-1}}{x^2} + \ln 2y = 2x^4 y^5$  .

- 4.14.  $\frac{e^{5x}}{y^2} + \ln 3y = x^4 y^3 + 5.$
- 4.15.  $2x^5 y^4 - 3x + y = \frac{\operatorname{tg} 3y}{x}.$
- 4.16.  $2x^3 y^5 + \sin^3 2x = 4y + 3x - 1.$
- 4.17.  $\frac{2x^2}{y} - 3y^3 = \cos 2y + x - 1.$
- 4.18.  $y^6 \cos 2x + 3x^3 = \frac{y}{x} + 3.$
- 4.19.  $\operatorname{arctg} \frac{y^2}{x^2} = 2x^3 y^5 + 3x + 1.$
- 4.20.  $\frac{2y^3}{x} - \ln 2y = 3x^6 y^4 - 2x - 3.$
- 4.21.  $x \sin 3y = e^{x^2 - y} - xy + 3.$
- 4.22.  $e^{y-2x} + x^6 y^2 = \ln 3y - 1.$
- 4.23.  $\frac{\sin 3y}{x} + ye^{x^2} - 2x = 4y + 3.$
- 4.24.  $3x^4 y^5 - 3y + x = x \cdot \operatorname{tg} 2y.$
- 4.25.  $\frac{3x^4}{y^3} - xy + 2x = x - y.$
- 4.26.  $\frac{e^{3y}}{x} + y \cos 2x - x = 2y + 3.$
- 4.27.  $\sin(3y - x^2) = x^2 - ye^{2x} + y + 3.$
- 4.28.  $\ln \frac{y^2}{x^2} - x^3 y^5 = \cos y + 1.$
- 4.29.  $\ln \frac{x^2}{y} - x^5 \sin 2y = 3y + x.$
- 4.30.  $4y^3 - \cos 2xy = 2 \operatorname{ctg} y + x + 2.$

**Завдання 5.** Знайти похідні  $y'_x$ ,  $y''_{xx}$  наступної параметрично заданої функції.

- 5.1.  $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} 2t; \\ y = 2t^3 - t^2. \end{cases}$
- 5.2.  $\begin{cases} x = \ln 3t; \\ y = 3t^2 - \sin 5t. \end{cases}$
- 5.3.  $\begin{cases} x = \operatorname{arctg}(t^2); \\ y = t^5 - 2t^3 + 7. \end{cases}$
- 5.4.  $\begin{cases} x = \arcsin \sqrt{t}; \\ y = \sqrt{t^3}. \end{cases}$
- 5.5.  $\begin{cases} x = 2 \ln \sqrt{t-5}; \\ y = \sin 4t. \end{cases}$
- 5.6.  $\begin{cases} x = 3 \ln(t-2); \\ y = \operatorname{arctg}(t^3). \end{cases}$
- 5.7.  $\begin{cases} x = t^2 - 2t; \\ y = 2t^3 - t^2 + 2. \end{cases}$
- 5.8.  $\begin{cases} x = \cos t / (1 + 2 \cos t), \\ y = \sin t / (1 + 2 \cos t). \end{cases}$
- 5.9.  $\begin{cases} x = \operatorname{ctg} 5t; \\ y = \ln \sin 5t. \end{cases}$
- 5.10.  $\begin{cases} x = \sin 4t; \\ y = \ln(\sin 4t). \end{cases}$

$$5.11. \begin{cases} x = \ln \sqrt{t}; \\ y = t^2 + \sin 3t. \end{cases}$$

$$5.12. \begin{cases} x = \operatorname{arctg} 2t; \\ y = e^{4t}. \end{cases}$$

$$5.13. \begin{cases} x = \arccos \sqrt{t}; \\ y = \sqrt{(1-t)^3}. \end{cases}$$

$$5.14. \begin{cases} x = t^2 - 2t; \\ y = 2t^3 - t^2 + 2. \end{cases}$$

$$5.15. \begin{cases} x = \ln t^2; \\ y = \operatorname{arctg} 2t. \end{cases}$$

$$5.16. \begin{cases} x = \cos^2 2t; \\ y = 2\sin^3 2t. \end{cases}$$

$$5.17. \begin{cases} x = \ln 2t; \\ y = \cos(t^2). \end{cases}$$

$$5.18. \begin{cases} x = \operatorname{arctg} t^2; \\ y = e^{2t^2} - 1. \end{cases}$$

$$5.19. \begin{cases} x = \ln 3t; \\ y = 2t^5 - 4t^3 + 3t^2 + 5. \end{cases}$$

$$5.20. \begin{cases} x = \operatorname{arctg} \sqrt{t}; \\ y = e^{5\sqrt{t}}. \end{cases}$$

$$5.21. \begin{cases} x = \operatorname{arctg} 3t; \\ y = 5t - t^2. \end{cases}$$

$$5.22. \begin{cases} x = 6\cos^3 2t; \\ y = 3\sin^2 2t. \end{cases}$$

$$5.23. \begin{cases} x = 2(\sin t - t \cos t); \\ y = 2(\cos t + t \sin t). \end{cases}$$

$$5.24. \begin{cases} x = \ln \sqrt{t}; \\ y = 2t + \sin 3t. \end{cases}$$

$$5.25. \begin{cases} x = \sin^3 4t; \\ y = \cos^2 4t. \end{cases}$$

$$5.26. \begin{cases} x = \ln \sqrt{t}; \\ y = t^3 + \cos 3t. \end{cases}$$

$$5.27. \begin{cases} x = \operatorname{tg} 3t; \\ y = 3t^3 - t^2 + 2t. \end{cases}$$

$$5.28. \begin{cases} x = t^2 - 2; \\ y = t^3 - t^2 + t. \end{cases}$$

$$5.29. \begin{cases} x = \ln 3t; \\ y = t^2 + \sin 5t. \end{cases}$$

$$5.30. \begin{cases} x = 2\ln(t-1); \\ y = \operatorname{arctg}(t^2). \end{cases}$$

**Завдання 6.** Скласти рівняння дотичної і нормалі до заданої кривої в точці  $M_0$  з абсцисою  $x_0$ .

$$6.1. \quad y = \frac{x^2 + 3x}{x+1}, \quad x_0 = 1.$$

$$6.2. \quad y = 2\sqrt[4]{x} - 3\sqrt{x}, \quad x_0 = 1.$$

$$6.3. \quad y = 2 + x^3 \cdot \ln x, \quad x_0 = 1.$$

$$6.4. \quad y = \frac{3}{2x+1}, \quad x_0 = -1.$$

- 6.5.  $y = 3x - e^{-7x} \cos 3x + 1$ ,  
 $x_0 = 0$ .
- 6.6.  $y = \frac{\sqrt{x^2 - 3} + 1}{2}$ ,  $x_0 = -2$ .
- 6.7.  $y = -\frac{3x}{x^2 + 2}$ ,  $x_0 = 1$ .
- 6.8.  $y = -\frac{x^3 + 3x^2}{x + 1}$ ,  $x_0 = -2$ .
- 6.9.  $y = (2 + x^5) \cdot \ln x - 3$ ,  $x_0 = 1$ .
- 6.10.  $y = -\frac{8}{x^3} + x - 1$ ,  $x_0 = 2$ .
- 6.11.  $y = \frac{3x^4 + 1}{4x^3 - 1}$ ,  $x_0 = 1$ .
- 6.12.  $y = 3e^{-4x} \cos 2x + 5$ ,  $x_0 = 0$ .
- 6.13.  $y = -\frac{3x^2 - x}{x + 3}$ ,  $x_0 = 2$ .
- 6.14.  $y = 6\sqrt[3]{x} - 5\sqrt[5]{x^2}$ ,  $x_0 = -1$ .
- 6.15.  $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 5}$ ,  $x_0 = 1$ .
- 6.16.  $y = -\frac{3x^3 - 1}{x^3 + 1}$ ,  $x_0 = 0$ .
- 6.17.  $y = \sqrt[3]{9x - x^3}$ ,  $x_0 = 1$ .
- 6.18.  $y = 2x + \frac{\ln x}{x^3}$ ,  $x_0 = 1$ .
- 6.19.  $y = \frac{3x^2 - 2x + 1}{x}$ ,  $x_0 = -1$ .
- 6.20.  $y = \sqrt[4]{x} - 6\sqrt[3]{x^2}$ ,  $x_0 = 1$ .
- 6.21.  $y = 3e^{-5x} \cos 6x + 5x$ ,  $x_0 = 0$ .
- 6.22.  $y = \frac{3x^3 - 2x^2 + 1}{2}$ ,  $x_0 = -1$ .
- 6.23.  $y = x + \sqrt{x^3}$ ,  $x_0 = 1$ .
- 6.24.  $y = 5x - \frac{\ln x}{2 - x^3}$ ,  $x_0 = 1$ .
- 6.25.  $y = \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$ ,  $x_0 = 2$ .
- 6.26.  $y = \sin 3x + \sqrt{x + 1}$ ,  $x_0 = 0$ .
- 6.27.  $y = 2x^2 + \sqrt{2x^3}$ ,  $x_0 = 2$ .
- 6.28.  $y = \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$ ,  $x_0 = 2$ .
- 6.29.  $y = 7x - e^{-2x} \sin 4x + 1$ ,  
 $x_0 = 0$ .
- 6.30.  $y = \frac{6x}{x^2 + 2}$ ,  $x_0 = -1$ .

**Завдання 7.** Скласти рівняння дотичної і нормалі до заданої кривої.

- 7.1.  $x^2 - 2x^2y^3 - x^4y = 2y + 6$  в  
точці  $M_0(1; -1)$ .
- 7.2.  $3x^4y^5 - 3y + x = \cos 2x + 2$   
в точці  $M_0(0; -1)$ .
- 7.3.  $\frac{3x^4}{y^2} - 3xy + 2x = x - 1$  в  
точці  $M_0(-1; 1)$ .

- 7.4.  $\frac{x^4}{y} - 3y + x = \sin 2x + 3$  в точці  $M_0(0; -1)$ .
- 7.5.  $\ln(xy) + 2y^3 - x^2 = 2x$  в точці  $M_0(1; 1)$ .
- 7.6.  $y \cos 4x + 1 = x^4 y^2$  в точці  $M_0(0; -1)$ .
- 7.7.  $e^{2x} + x^6 y^2 = \ln 3y + 1$  в точці  $M_0(0; 1)$ .
- 7.8.  $y - 2x + x^3 y^2 = \ln 2y - 2$  в точці  $M_0(1; 1)$ .
- 7.9.  $x^2 y^4 + \cos 2y + 3x = y + 4$  в точці  $M_0(1; 0)$ .
- 7.10.  $x^4 y^3 + \sin 5y + 3x^2 = y + 3$  в точці  $M_0(-1; 0)$ .
- 7.11.  $e^{4y} - 4x = 5x^2 y^4 - 7$  в точці  $M_0(2; 0)$ .
- 7.12.  $x \sin^2 4y = x^2 y + 2y + x - 1$  в точці  $M_0(1; 0)$ .
- 7.13.  $\sin(x^2 + y) + 2x^6 y^2 = 3x + y$  в точці  $M_0(1; -1)$ .
- 7.14.  $2x^5 y^4 - 3x + y = \operatorname{tg} 3y + 1$  в точці  $M_0(-1; 0)$ .
- 7.15.  $\cos(x - y^2) + 2x^2 y^3 - 2x = -3$  в точці  $M_0(1; -1)$ .
- 7.16.  $2x^2 + y^3 - x + 2y = x \operatorname{tg} 4y + 1$  в точці  $M_0(1; 0)$ .
- 7.17.  $e^{2x} \sin 3y = 3y^2 + x$  в точці  $M_0(0; 0)$ .
- 7.18.  $e^{2y-x} + x^3 y^2 = \ln y + x + 7$  в точці  $M_0(2; 1)$ .
- 7.19.  $e^{3x} \cos 4y = 3y^2 - y + x$  в точці  $M_0(0; 0)$ .
- 7.20.  $3x^2 y^4 - \cos^2 3y = 3 + y + x^3$  в точці  $M_0(2; 0)$ .
- 7.21.  $\cos 4y + 3e^{3x} y^2 = 2x - y + 1$  в точці  $M_0(0; 0)$ .
- 7.22.  $e^{2x} y^2 + \sin 2y = 2x - y$  в точці  $M_0(0; 0)$ .
- 7.23.  $\frac{e^{3y}}{x} + y^2 + xy - 2x = -1$  в точці  $M_0(1; 0)$ .
- 7.24.  $e^{y-x} + x^3 - y^2 = 2x - y$  в точці  $M_0(1; 1)$ .
- 7.25.  $\operatorname{tg}(xy) - xy^4 + y = 2x - 1$  в точці  $M_0(0; -1)$ .
- 7.26.  $xy^6 + 3x^3 = \frac{y}{x} + 3x$  в точці  $M_0(-1; 1)$ .
- 7.27.  $\sin(3x + y) + 2x^3 y^2 = 2x - y$  в точці  $M_0(0; 0)$ .
- 7.28.  $x^2 - ye^{2y} + y^2 + 3x = 4$  в точці  $M_0(1; 0)$ .

7.29.  $\operatorname{arctg}(x + 2y) + 2x = y^2$  в  
точці  $M_0(0; 0)$ .

7.30.  $x^5 e^{2y} + y^3 + 3x = -4$  в точці  
 $M_0(-1; 0)$ .

**Завдання 8.** Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої в точці, яка відповідає значенню заданого параметра  $t$ .

8.1.  $x = \operatorname{arctg} t, y = t^3 - 4t + 2$   
при  $t = 0$ .

8.11.  $x = 2t^3 - t^2, y = 2t^4 - t^2 + 7t$   
при  $t = 1$ .

8.2.  $x = t^4 - 5t^2, y = t^5 - 2t + 7$   
при  $t = 1$ .

8.12.  $x = \ln \sqrt{t}, y = 2t^5 - t^3 + 8t$   
при  $t = 1$ .

8.3.  $x = \arcsin 3t, y = t^5 - 3t + 4$   
при  $t = 0$ .

8.13.  $x = \operatorname{arctg} \sqrt{t}, y = t^2 - 7t + 2$   
при  $t = 0$ .

8.4.  $x = e^{2t} - 5t^3, y = 2t + \sin 3t$   
при  $t = 0$ .

8.14.  $x = \frac{t-3}{t+2}, y = \frac{2t^3+3t}{t+2}$  при  
 $t = -1$ .

8.5.  $x = \frac{2t}{t+1}, y = \frac{2t^2+t}{t+1}$  при  
 $t = 1$ .

8.15.  $x = \ln \sqrt{t}, y = 2t^3 + 8t + 1$   
при  $t = 1$ .

8.6.  $x = 2 \ln(t-1), y = t^3 - 2t + 1$   
при  $t = 2$ .

8.16.  $x = e^{4t-4}, y = 2te^{4t-4} + t^2$   
при  $t = 1$ .

8.7.  $x = \operatorname{arctg} t, y = \sin 2t - 4t + 1$   
при  $t = 0$ .

8.17.  $x = \sqrt{\frac{5-t^3}{t}}, y = \sqrt{\frac{t^2+3t}{t}}$   
при  $t = 1$ .

8.8.  $x = 2 \ln \sqrt{t+2}, y = \frac{5t^3-t+2}{t+2}$   
при  $t = -1$ .

8.18.  $x = \ln(t-2), y = t^2 + t + 1$   
при  $t = 3$ .

8.9.  $x = \sin 3t - 4t^3, y = t - t^3$   
при  $t = 0$ .

8.19.  $x = \arcsin 2t, y = 3t^4 + t + 2$   
при  $t = 0$ .

8.10.  $x = \arcsin 2t^2, y = t^3 - 4t^2 + 2$   
при  $t = 0$ .

8.20.  $x = \frac{2t^4-5}{t-3}, y = \frac{t^2+2t}{t-3}$  при  
 $t = 1$ .

$$8.21. \quad x = 2 \ln \sqrt{t+1}, \quad y = \frac{2t^3 - 6t + 1}{t^2 - 1}$$

при  $t = 0$ .

$$8.22. \quad x = 2\sqrt{t^2 + 5}, \quad y = \frac{2t^2 + 2}{t + 1}$$

при  $t = 2$ .

$$8.23. \quad x = \ln(t+1)^2, \quad y = t^3 - 5e^{4t} + 2t$$

при  $t = 0$ .

$$8.24. \quad x = \frac{1}{(t^2 + 2)^2}, \quad y = \frac{t^3 - 3t}{t^2 + 2}$$

при  $t = 0$ .

$$8.25. \quad x = \arcsin 3t^2, \quad y = t^4 - 2t^2 + 3$$

при  $t = 0$ .

$$8.26. \quad x = 2\sqrt{t^2 - 5}, \quad y = \frac{\sqrt{t^2 - 5} - t^2}{2}$$

при  $t = 3$ .

$$8.27. \quad x = \operatorname{arctg} t^2, \quad y = 2t^3 - 4t^2 + 1$$

при  $t = 0$ .

$$8.28. \quad x = 5 \sin(t-1), \quad y = 4t^7 - t^3 + 2t$$

при  $t = 1$ .

$$8.29. \quad x = \frac{t^3 - 5}{t^2 - 3}, \quad y = \frac{t^2 + 3t}{t^2 - 3} \quad \text{при}$$

$t = 2$ .

$$8.30. \quad x = \sqrt{\frac{5-t^3}{t}}, \quad y = \sqrt{\frac{t^2+3t}{t}}$$

при  $t = 0$ .

**Завдання 9.** За допомогою диференціала обчислити наближене значення:

$$9.1. \quad \text{а) функції } y = (x^3 - 2x - 3)^5 \text{ при } x = 2,001; \quad \text{б) } e^{2.03}.$$

$$9.2. \quad \text{а) функції } y = 2x^3 + \sqrt[3]{9-x^2} \text{ при } x = 0,97; \quad \text{б) } \operatorname{arctg} 1.03.$$

$$9.3. \quad \text{а) функції } y = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 1} \text{ при } x = 1,02; \quad \text{б) } \sqrt[3]{8.006}.$$

$$9.4. \quad \text{а) функції } y = e^{x^3 - 3x^2 + 2} \text{ при } x = 0,98; \quad \text{б) } \sqrt{17}.$$

$$9.5. \quad y = 4\sqrt{x} - 6\sqrt[3]{x^2} \text{ при } x = 1,002; \quad \text{б) } \sin 88^\circ.$$

$$9.6. \quad \text{а) функції } y = \sqrt{\frac{5-x}{x+3}} \text{ при } x = 0,998; \quad \text{б) } \cos 91^\circ.$$

$$9.7. \quad \text{а) функції } y = \sqrt[3]{3x + \cos 2x} \text{ при } x = 0,03; \quad \text{б) } \ln(0.99).$$

$$9.8. \quad \text{а) функції } y = \frac{x}{3x-2} \text{ при } x = 0,997; \quad \text{б) } (2.04)^3 - (2.04)^2.$$

$$9.9. \quad \text{а) функції } y = \ln(3x^2 - x - 1) \text{ при } x = 1,003; \quad \text{б) } \operatorname{arctg} \sqrt{1.02}.$$

- 9.10. а) функції  $y = e^{\sqrt{2x^2-4x}}$  при  $x = 2,04$ ; б)  $\sqrt{(3.98)^3}$ .
- 9.11. а) функції  $y = \frac{2x + \sqrt[3]{4+x^2}}{2}$  при  $x = 2,03$ ; б)  $\ln \operatorname{tg} 43^\circ$ .
- 9.12. а) функції  $y = \frac{1}{(x^3 - 3x - 1)^2}$  при  $x = 1,98$ ; б)  $\ln 0.996$ .
- 9.13. а) функції  $y = \sqrt{2\sin 5x + 9}$  при  $x = 0,03$ ; б)  $\sqrt[3]{63}$ .
- 9.14. а) функції  $y = \sqrt[3]{x^2} - 2x + 10$  при  $x = 7,97$ ; б)  $\sqrt{\frac{1.07 + 3}{5 - 1.07}}$ .
- 9.15. а) функції  $y = \sqrt{\frac{5 - x^2}{x^2 + 3}}$  при  $x = 1,02$ ; б)  $\sqrt[4]{63,96}$ .
- 9.16. а) функції  $y = (x^3 - 3x^2 + 3)^4$  при  $x = 1,998$ ; б)  $\operatorname{arctg} \sqrt{1.01}$ .
- 9.17. а) функції  $y = \ln(5x - 4x^3)$  при  $x = 0,96$ ; б)  $\sqrt{(4.01)^3}$ .
- 9.18. а) функції  $y = \frac{1}{x^4 - 7x - 1}$  при  $x = 2,02$ ; б)  $\cos 32^\circ$ .
- 9.19. а) функції  $y = e^{\sqrt{x^4-x}}$  при  $x = 1,002$ ; б)  $\frac{(0.998)^3 - 3}{(0.998)^3 + 1}$ .
- 9.20. а) функції  $y = \sqrt[5]{(2x^2 - 3)^3}$  при  $x = 1,015$ ; б)  $e^{(0.97)^2 - (0.97)^3}$ .
- 9.21. а) функції  $y = \frac{x}{x^2 - 8}$  при  $x = 3,02$ ; б)  $\operatorname{arcctg} \sqrt{0.98}$ .
- 9.22. а) функції  $y = \sqrt[4]{4x^3 + 3x + 9}$  при  $x = 0,988$ ; б)  $\ln \operatorname{ctg} 46^\circ$ .
- 9.23. а) функції  $y = \frac{x^3 - 3x^2}{x - 1}$  при  $x = 2,004$ ; б)  $\sqrt[3]{(7.97)^2}$ .
- 9.24. а) функції  $y = \ln(6 + x - x^3)$  при  $x = 1,97$ ; б)  $\arccos 0.002$ .
- 9.25. а) функції  $y = \frac{1}{(2 - x^3)^4}$  при  $x = 0,997$ ; б)  $\operatorname{arctg} \sqrt{1.004}$ .
- 9.26. а) функції  $y = \sqrt{4\cos 3x + 3x}$  при  $x = 0,02$ ; б)  $e^{(1.02)^5 - (1.02)^3}$ .

- 9.27. а) функції  $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$  при  $x = 3,98$ ; б)  $\sqrt[3]{27.54}$ .
- 9.28. а) функції  $y = \frac{x^2}{5x-4}$  при  $x = 0,95$ ; б)  $\sqrt[3]{(8.06)^2}$ .
- 9.29. а) функції  $y = \sqrt{x^2 + x + 3}$  при  $x = 2,03$ ; б)  $\cos 87^\circ$ .
- 9.30. а) функції  $y = \sqrt{\frac{x^3}{2-x^3}}$  при  $x = 1,04$ ; б)  $\operatorname{ctg} 42^\circ$ .

**Завдання 10.** Знайти похідну вказаного порядку.

- 10.1.  $y = \operatorname{arctg} 3x^2 - x^3 \ln x$ ,  $y'' = ?$
- 10.2.  $y = \sin(1-5x) - x^2 e^{x^2}$ ,  $y''' = ?$
- 10.3.  $y = \arcsin 2x - x^3 - x e^{3x}$ ,  $y'' = ?$
- 10.4.  $y = \ln \sqrt{2x^3 - 1} - 3^{2x+1}$ ,  $y'' = ?$
- 10.5.  $y = \sqrt[3]{x^7} + \frac{2}{x^4} + \sin^3 x$ ,  $y'' = ?$
- 10.6.  $y = x \ln \sqrt{1-3x} - 2x^2 + 1$ ,  $y^{(4)} = ?$
- 10.7.  $y = \operatorname{arctg} \sqrt{2x^2 - 1} - \cos 4x$ ,  $y'' = ?$
- 10.8.  $y = 2\sqrt{x^4 - 1} - 3x \ln 2x - 2$ ,  $y'' = ?$
- 10.9.  $y = 2 + \frac{1}{x^5} + x \operatorname{arctg} 2x$ ,  $y'' = ?$
- 10.10.  $y = \ln \sqrt{5x-1} + \sin x^2$ ,  $y''' = ?$
- 10.11.  $y = 2x \operatorname{ctg} 5x + \sqrt{3x-1} - 4$ ,  $y'' = ?$
- 10.12.  $y = 1 - 2x + \frac{1}{3x^6} + e^{2x} \sin 5x$ ,  $y'' = ?$
- 10.13.  $y = 3x^2 \ln \sqrt[3]{5-2x} + 2x^2 - 5$ ,  $y''' = ?$
- 10.14.  $y = (3x+5) \operatorname{tg} 2x + \ln(2x+1) - 4$ ,  $y'' = ?$

- 10.15.  $y = \arccos \sqrt{1-9x^2} - e^{x^3}$ ,  $y'' = ?$
- 10.16.  $y = \ln(5x-4x^3) + (2x-1)\operatorname{ch}2x$ ,  $y'' = ?$
- 10.17.  $y = 3x \operatorname{tg} 2x + \ln(2x+1) - 4$ ,  $y'' = ?$
- 10.18.  $y = \operatorname{tg} 4x + 2x^3 \ln x - 4$ ,  $y''' = ?$
- 10.19.  $y = \operatorname{ctg} 2x + 2x^2 e^{2x} - 4x$ ,  $y''' = ?$
- 10.20.  $y = \arcsin \sqrt{1-4x^2} + x e^{x^2}$ ,  $y'' = ?$
- 10.21.  $y = \sqrt{5-x^2} - (x^2+3)\sin 2x$ ,  $y'' = ?$
- 10.22.  $y = 1-3x^2 + \sqrt{x-x^2} \sin 2x^3$ ,  $y''' = ?$
- 10.23.  $y = \sqrt{x^3} + 2x^5 + 1 + \cos^3 2x$ ,  $y'' = ?$
- 10.24.  $y = \frac{3}{x^2} + \sqrt{x^3} + 2e^{-x} \sin 3x - 4$ ,  $y''' = ?$
- 10.25.  $y = \sqrt{x^3-2} - (x^5+1)\cos 2x$ ,  $y'' = ?$
- 10.26.  $y = (5+x^2)^4 + \sqrt{x-x^2} \sin 2x$ ,  $y''' = ?$
- 10.27.  $y = x^3 + \frac{2}{\sqrt{x^5}} + \sin^3 2x$ ,  $y'' = ?$
- 10.28.  $y = \frac{2}{x^3} + \sqrt[4]{x^3} + e^{-x} \cos 2x - 1$ ,  $y''' = ?$
- 10.29.  $y = (x^2-4)^5 + \sqrt{x^3} + 2x \sin 3x$ ,  $y'' = ?$
- 10.30.  $y = \sqrt{x^7} + \frac{1}{(3x-1)^5} + \cos^4 x$ ,  $y'' = ?$

**Завдання 11.** Використовуючи правило Лопіталя, обчислити границю функції.

11.1.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(e^x - e^3)}{\ln(x-3)}$ .

11.3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \operatorname{tg} 2x}{\sin 2x - 2x}$ .

11.2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2x - 1) \cdot e^{-3x}$ .

$$11.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{e^{2x} - 2x - \cos x}.$$

$$11.5. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \ln 3x \cdot \ln(3x-1).$$

$$11.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x^2 - \cos 2x^2}{\ln \cos x^2}.$$

$$11.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{\sin x} - 2^x}{3x^3}.$$

$$11.8. \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 + x^3) \cdot e^{-\frac{x}{2}}.$$

$$11.9. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{5}} \left( \frac{5x}{5x-1} - \frac{1}{\ln 5x} \right).$$

$$11.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\operatorname{tg} 3x)}{\ln(\operatorname{tg} 4x)}.$$

$$11.11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{e^{x^3} - 1}.$$

$$11.12. \lim_{x \rightarrow 0} \sin 2x \cdot \ln 4x^2.$$

$$11.13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^4} - 1}{\cos 4x^2 - \cos 3x^2}.$$

$$11.14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{2x^3 - x}.$$

$$11.15. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \ln 2\sqrt{x} \cdot \ln(2\sqrt{x}-1).$$

$$11.16. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\pi - 4x)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 2x.$$

$$11.17. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-x^2) \cdot 3^{-2x}.$$

$$11.18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin^2 x} - 1}{\cos x - \cos 5x}.$$

$$11.19. \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\ln \cos 5x}{\cos 2x - \cos 6x}.$$

$$11.20. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \ln 9x^2 \cdot \ln(9x^2 - 1).$$

$$11.21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + \sin^3 x}{x \cos x - \sin x}.$$

$$11.22. \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{2x}{x-2} - \frac{1}{\ln(x/2)} \right).$$

$$11.23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos \sqrt{x}}{\cos \sqrt{x} - \cos 2\sqrt{x}}.$$

$$11.24. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 4x) \cdot 4^{-\frac{x}{2}}.$$

$$11.25. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2x} - \frac{1}{e^{2x} - 1} \right).$$

$$11.26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^4} + 2x^4 - 1}{1 - \cos x^2}.$$

$$11.27. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{3}{\ln(3x+1)} - \frac{1}{x} \right).$$

$$11.28. \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \cdot \sin \frac{2}{3x^2}.$$

$$11.29. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{x^3}.$$

$$11.30. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{\sqrt{x}} - 1)^2}{\cos 5\sqrt{x} - \cos 2\sqrt{x}}.$$

**Завдання 12.** Використовуючи правило Лопіталя, обчислити границю функції.

$$12.1. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (2x-1)^{\ln 2x}.$$

$$12.2. \lim_{x \rightarrow 3} (x-3)^{\sin(x-3)}.$$

$$12.3. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\operatorname{ctg} x}.$$

$$12.4. \lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin 3x}.$$

$$12.5. \lim_{x \rightarrow \infty} (2x + e^x)^{\frac{1}{3x}}.$$

$$12.6. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{9}} (3\sqrt{x} - 1)^{\ln 3\sqrt{x}}.$$

$$12.7. \lim_{x \rightarrow 0} x^{\operatorname{tg} 2x}.$$

$$12.8. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin 3x)^{\operatorname{ctg} x}.$$

$$12.9. \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{2}{x^3}}.$$

$$12.10. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\operatorname{ctg}^3 2x}.$$

$$12.11. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{\sin^2 x}}.$$

$$12.12. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x+5} \right)^{2x}.$$

$$12.13. \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}.$$

$$12.14. \lim_{x \rightarrow 2} \left( 2 - \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{\sin(\pi x/2)}}.$$

$$12.15. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 4x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$12.16. \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{2}{(x-1)^2}}.$$

$$12.17. \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{\ln \sin x}}.$$

$$12.18. \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x + x^2)^{1/\ln x}.$$

$$12.19. \lim_{x \rightarrow 2} (2-x)^{\sin(x-2)}.$$

$$12.20. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x \right)^{2x^2}.$$

$$12.21. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-5}{x+2} \right)^{3x-1}.$$

$$12.22. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 5x)^{\frac{1}{5\sin^2 x}}.$$

$$12.23. \lim_{x \rightarrow \infty} (x + 3^x)^{\frac{1}{x}}.$$

$$12.24. \lim_{x \rightarrow 0} (4x)^{\frac{1}{\ln \operatorname{tg} x}}.$$

$$12.25. \lim_{x \rightarrow 2} (2-x)^{\cos \frac{\pi x}{4}}.$$

$$12.26. \lim_{x \rightarrow 0} (2x)^{\frac{1}{\ln(e^{3x}-1)}}.$$

$$12.27. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{2\sqrt{x^3}}}.$$

$$12.28. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} 2x \right)^{x^3}.$$

$$12.29. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-2}{x+3} \right)^{5x}.$$

12.30.  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1-5x^2}$ .

### Завдання 13.

13.1. Знайти проміжки монотонності та екстремуми кривої  $y = \sqrt[3]{x^2 + 4x}$ .

13.2. Знайти точки перегину та інтервали опуклості і угнутості кривої  $y = e^{2x}(2x^2 - 6x + 5)$ .

13.3. Знайти проміжки монотонності та екстремуми кривої  $y = \frac{x^2}{2} - \frac{8}{x}$ .

13.4. Знайти точки перегину та інтервали опуклості і угнутості кривої  $y = 5x - 6\sqrt[3]{x-2}$ .

13.5. Знайти проміжки монотонності та екстремуми кривої  $y = (x-2) \cdot e^{-x}$ .

13.6. Знайти точки перегину та інтервали опуклості і угнутості кривої  $y = -x + (x-3)\ln x$ .

13.7. Знайти проміжки монотонності та екстремуми кривої  $y = \frac{3x}{x^2 + 4}$ .

13.8. Знайти точки перегину та інтервали опуклості і угнутості кривої  $y = x^2 + 8\ln x$ .

13.9. Знайти проміжки монотонності та екстремуми кривої  $y = x^2 - \frac{54}{x}$ .

13.10. Знайти точки перегину та інтервали опуклості і угнутості кривої  $y = 2\operatorname{arctg} x + x \ln(1+x^2) - 2x$ .

13.11. Знайти проміжки монотонності та екстремуми кривої  $y = \frac{2x^2}{x+2}$ .

13.12. Знайти точки перегину та інтервали опуклості і угнутості кривої  $y = x^2 - \frac{3}{x^2}$ .

- 13.13. Знайти проміжки монотонності та екстремуми кривої  
$$y = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 + 1.$$
- 13.14. Знайти точки перегину та інтервали опуклості і угнутості кривої  
$$y = x^2 - \frac{1}{x}.$$
- 13.15. Знайти проміжки монотонності та екстремуми кривої  $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}.$
- 13.16. Знайти точки перегину та інтервали опуклості і угнутості кривої  
$$y = -x^5 + 5x^4 - 4x + 1.$$
- 13.17. Знайти проміжки монотонності та екстремуми кривої  $y = \sqrt[3]{x^3 + 4x^2}.$
- 13.18. Знайти точки перегину та інтервали опуклості і угнутості кривої  
$$y = e^{1-3x}(3x - 4).$$
- 13.19. Знайти проміжки монотонності та екстремуми кривої  $y = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x}.$
- 13.20. Знайти точки перегину та інтервали опуклості і угнутості кривої  
$$y = -2x + 3\sqrt[3]{x + 4}.$$
- 13.21. Знайти проміжки монотонності та екстремуми кривої  
$$y = (x^2 + 2x - 2) \cdot e^{-x}.$$
- 13.22. Знайти точки перегину та інтервали опуклості і угнутості кривої  
$$y = x^5 - 10x^4 + 30x^3 + 3x - 1.$$
- 13.23. Знайти проміжки монотонності та екстремуми кривої  $y = \frac{2x}{x^2 + 9}.$
- 13.24. Знайти точки перегину та інтервали опуклості і угнутості кривої  
$$y = x^3 + 6 \ln x.$$
- 13.25. Знайти проміжки монотонності та екстремуми кривої  $y = \frac{5x^2}{x - 3}.$
- 13.26. Знайти точки перегину та інтервали опуклості і угнутості кривої  
$$y = -2x + 5\sqrt[5]{(x - 1)^3}.$$

13.27. Знайти проміжки монотонності та екстремуми кривої  $y = x^2 + \frac{54}{x}$ .

13.28. Знайти точки перегину та інтервали опуклості і угнутості кривої  $y = (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$ .

13.29. Знайти проміжки монотонності та екстремуми кривої  $y = 3x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 4$ .

13.30. Знайти точки перегину та інтервали опуклості і угнутості кривої  $y = x^2 + \frac{8}{x}$ .

**Завдання 14.** Знайти найбільше та найменше значення функції на вказаному відрізку.

14.1.  $y = \frac{3x}{3+x^2}$ ,  $[-1; 2]$ .

14.11.  $y = \frac{x^3 + 54}{2x}$ ,  $[1; 4]$ .

14.2.  $y = \sqrt[3]{x^2 - 4x}$ ,  $[1; 5]$ .

14.12.  $y = \frac{3x}{x^2 + 4}$ ,  $[0; 3]$ .

14.3.  $y = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2 + 1$ ,  
 $[-1; 3]$ .

14.13.  $y = (x^3 + 2x^2 + 4x + 4)e^{1-x}$ ,  
 $[0; 2]$ .

14.4.  $y = x - 2\sqrt{x-2} + 1$ ,  $[2.5; 6]$ .

14.14.  $y = \frac{x-2}{x^2}$ ,  $[1; 5]$ .

14.5.  $y = \frac{16}{x^2} - 4x + 1$ ,  $[-3; -1]$ .

14.15.  $y = -\frac{5x}{x^2 + 9}$ ,  $[0; 5]$ .

14.6.  $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 1$ ,  
 $[-1; 1]$ .

14.16.  $y = \sqrt[3]{x^2 - 7x}$ ,  $[1; 8]$ .

14.7.  $y = 4\sqrt{x-3} - x + 1$ ,  $[4; 8]$ .

14.17.  $y = (1-2x)e^{3-2x}$ ,  $[0; 2]$ .

14.8.  $y = (x+2)e^{1-x}$ ,  $[-2; 1]$ .

14.18.  $y = \frac{2}{x} + \ln x$ ,  $[1; e]$ .

14.9.  $y = \sqrt[3]{x^2 - 5x}$ ,  $[0; 3]$ .

14.19.  $y = x^2 - 6x + 12\ln(x+2)$ ,  
 $[-1; 1]$ .

14.10.  $y = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 + 3$ ,  
 $[-1; 1]$ .

$$14.20. y = x^2 - \frac{54}{x}, [-6; -1].$$

$$14.21. y = 2x^5 + 5x^4 - 10x^3 - x - 1, \\ [-1; 2].$$

$$14.22. y = x^2 e^{3-x}, [-1; 3].$$

$$14.23. y = \sqrt[3]{9x - x^2}, [1; 10].$$

$$14.24. y = \frac{x^3 + 16}{2x}, [1; 3].$$

$$14.25. y = \ln(x^2 + 2x + 2), [-2; 1].$$

$$14.26. y = 3x^5 + 20x^4 - 2x - 5, \\ [-1; 3].$$

$$14.27. y = (x^2 + 3x + 3)e^{1-x}, \\ [-2; 1].$$

$$14.28. y = \sqrt[3]{16x - 2x^2}, [0; 5].$$

$$14.29. y = \ln(x^2 + 6x + 10), [-4; 0].$$

$$14.30. y = 4x^5 + 5x^4 - 30x^3 - 3x - 1, \\ [-1; 3].$$

**Завдання 15.** Провести повне дослідження і побудувати графік функції.

$$15.1. y = \ln(x^2 + 6x + 10).$$

$$15.2. y = \frac{x^2}{x - 4}.$$

$$15.3. y = \frac{x^2}{4 - x^2}.$$

$$15.4. y = \sqrt[3]{x^2 - x}.$$

$$15.5. y = x^2 - 6x + 12\ln(x + 2).$$

$$15.6. y = (x + 4)e^{1-x}.$$

$$15.7. y = x^2 + \frac{54}{x}.$$

$$15.8. y = \sqrt[3]{x^3 - 12x^2}.$$

$$15.9. y = 5\sqrt[5]{x - 1} - x.$$

$$15.10. y = \ln(x^2 + 4x + 13).$$

$$15.11. y = \sqrt[3]{x^2 + 1}.$$

$$15.12. y = (1 + 4x + x^2)e^{-x}.$$

$$15.13. y = 4\sqrt{x - 3} - x + 1.$$

$$15.14. y = x^3 - 6x^2 + 36x - \\ - 108\ln(x + 3).$$

$$15.15. y = \frac{\ln x}{x}.$$

$$15.16. y = (x - 2)e^{1-2x}.$$

$$15.17. y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2}.$$

$$15.18. y = \sqrt[3]{x^3 + 12x^2}.$$

$$15.19. y = \sqrt[3]{x^2 - 4}.$$

$$15.20. y = -x + (x - 3)\ln x.$$

$$15.21. y = \ln(x^2 - 2x + 17).$$

$$15.22. y = x^2 - \frac{54}{x}.$$

$$15.23. y = \frac{e^{2x}}{x^2}.$$

$$15.24. y = 3\sqrt[3]{x + 4} - x.$$

$$15.25. y = (2x^2 - 2x - 7)e^{2x}.$$

$$15.26. y = \sqrt[3]{x^3 - 9x^2}.$$

$$15.27. y = \frac{3}{x} + x + 2\ln x.$$

$$15.28. y = \frac{x-2}{x^2}.$$

$$15.29. y = \sqrt[3]{x^2 + 9}.$$

$$15.30. y = \ln(x^2 - 8x + 17).$$

## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Вища математика: Збірник задач: Навч. посібн. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П. Вовкодав та ін.; За ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. — Київ: А.С.К., 2005. — 480 с.: ил. — (Унів. б-ка).
2. *Владіміров В. М.* Збірник завдань з вищої математики (типові розрахунки). Частина I / Укладачі: В. М. Владіміров, О. А. Пучков, М. В. Шмигевський. — Київ: ІВЦ «Політехніка», 2003. — 188 с.
3. *Данко П. Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. I: Учеб. пособие для вузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. — 5-е изд., испр. — М.: Высш. шк., 1999. — 304 с.: ил.
4. *Дубовик В. П.* Вища математика: Навчальний посібник / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. — Київ: А.С.К., 2006. — 648 с.: ил. — Бібліогр.: с. 632-633. — (Університет. б-ка).
5. *Каплан И. А.* Практические занятия по высшей математике. Часть II. Дифференциальное исчисление функций одной и многих переменных / И. А. Каплан. — 5-е изд. — Харьков, Издательское объединение «Вища школа», 1973. — 368 с.: ил.
6. *Письменный Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. — 4-е изд. — М.: Айрис-пресс, 2006. — 608 с.: ил. — (Высшее образование).