

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина 1

Лінійна алгебра. Векторна алгебра. Аналітична геометрія.
Елементи математичного аналізу.
(Довідковий теоретичний матеріал.
Розв'язування типових задач.
Тренувальні завдання з відповідями).

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра/магістра/доктора філософії за освітніми програмами «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології кібер-енергетичних систем», «Інжиніринг пакувань та пакувального обладнання», «Інжиніринг обладнання виробництва полімерних та будівельних матеріалів і виробів», «Електрохімічні технології неорганічних і органічних матеріалів», «Екологічна безпека спеціальностей 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології», 131 «Прикладна механіка», 133 «Галузеве машинобудування» 161 «Хімічні технології та інженерія», 101 "Екологія"

Укладачі: Т.В.Авдєєва, О. В. Борисенко, В. М. Горбачук

Електронне мережне навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2022

Рецензент

Капустян О.В., д-р фіз.-мат. наук, проф.
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Відповідальний
редактор

Герасимчук В.С., д-р фіз.-мат. наук, проф.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 5 від 26.05.2022р.)
за поданням Вченої ради Фізико-математичного факультету
(протокол № 2 від 24.02.2022р.)*

Вища математика. Частина 1: Лінійна алгебра. Векторна алгебра. Аналітична геометрія. Елементи математичного аналізу. В посібнику викладено довідковий теоретичний матеріал, наведено розв'язування типових задач з відповідних розділів і тренувальні завдання з відповідями. Посібник призначений для самоконтролю збереження знань та вмінь з курсу вищої математики для студентів спеціальностей 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології», 131 «Прикладна механіка», 133 «Галузеве машинобудування», 161 «Хімічні технології та інженерія», 161 «Хімічні технології та інженерія», 101 "Екологія" та інших інженерних спеціальностей. /КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: Т.В. Авдеєва, О.В. Борисенко, В.М.Горбачук. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 72 с.

Реєстр. № Обсяг4,5 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022

ВСТУП

Загальний курс вищої математики є фундаментом математичної освіти інженера і має важливе значення для успішного вивчення спеціальних та технічних дисциплін, обумовлених навчальним планом відповідної технічної спеціальності. Математична освіта є важливою складовою в системі фундаментальної підготовки фахівця в будь-якій сфері сучасної діяльності. Значну роль при вивченні математики відіграє навчально-методична література, яку використовують в своїй роботі як викладачі, так і студенти та випускники.

Самостійна робота студентів є однією з основних складових частин сучасної математичної освіти для студентів як заочної, так і денної форм навчання. Активізація самостійної роботи студентів є обов'язковою умовою успішного засвоєння курсу вищої математики та подальшого застосування математичного апарату до вивчення інших природничих та технічних дисциплін, а також для роботи інженерів після закінчення університету.

Самостійна робота студентів під час вивчення курсу вищої математики - це перш за все вміння самостійно працювати з літературою. Проте необхідно не тільки знайти в навчальних посібниках або довідниках потрібні теоретичні відомості і формули, але ще й правильно їх застосувати при розв'язанні задач.

Якщо самостійна робота студентів першого та другого курсів проводиться під керівництвом та контролем викладачів, то для студентів старших курсів, які вже закінчили вивчення курсу вищої математики, дуже важливою є наявність математичною літератури з рекомендаціями по розв'язуванню задач.

Запропонований навчальний посібник містить довідковий теоретичний матеріал з розділів вищої математики, які відповідають діючим програмам інженерних спеціальностей, зразки розв'язаних типових завдань за темами та задач з відповідями для самоконтролю, він складений згідно діючих програм курсу вищої математики для таких факультетів НТУУ-"КПІ": інженерно - фізичний, хіміко - технологічний, інженерно - хімічний, механіко - машинобудівний та ін., та призначена для студентів цих факультетів всіх форм навчання.

Ця робота є першою частиною циклу подібних робіт, що мають на меті охопити всі основні розділи вказаних програм. Дана робота містить інформацію з елементів теорії матриць, теорії визначників, загальної теорії лінійних рівнянь, векторної алгебри, аналітичної геометрії, теорії границь, диференціювання функції однієї змінної та його застосування.

Основна увага в роботі приділялась розв'язанню типових задач по вказаним розділам. Є також необхідний теоретичний матеріал, задачі для самоконтролю та рекомендована література.

Дана робота буде корисною при необхідності повторення основних математичних понять і алгоритмів при вступі, наприклад, в магістратуру за інженерними спеціальностями, при виконанні студентами розрахунково - графічних робіт, домашніх контрольних робіт та самостійної роботи для застосування математики при вивченні інших навчальних дисциплін.

3. Спільний множник усіх елементів рядка (стовпця) можна винести за знак

$$\text{визначника } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

4. Визначник дорівнює нулю, якщо:

- а) всі елементи рядка (стовпця) дорівнюють нулю;
- б) два рядки (стовпці) однакові;
- в) два рядки (стовпці) пропорційні.

5. Визначник не змінюється, якщо до елементів будь-якого рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й те саме число.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} + a_{21} & ka_{22} + a_{22} \end{vmatrix}_{(i,j=\overline{1,n})}$$

6. Визначник дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення.

Визначники n -го порядку обчислюють, використовуючи властивості 6 та 5.

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1. Обчислити визначники:

$$1. \text{ а) } \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix}; \quad 2. \begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix}; \quad 3. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}.$$

$$\blacktriangleright 1. \text{ а) } \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot (-1) = 11. \quad \text{б) } \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

$$2. \begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 8 \cdot 8 + 5 \cdot 4 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 8 - 0 \cdot 5 \cdot 8 - (-1) \cdot 4 \cdot 3 = -44.$$



На практиці зручно, коли частина елементів рядка (стовпця) дорівнює нулю (і чим більше нульових елементів, тим менше обчислень). Тому доцільно спочатку визначник перетворити так, щоб усі елементи деякого рядка (стовпця), крім одного, дорівнювали нулю (використовуючи для цього властивість 5). Тоді розклад визначника за елементами цього рядка (стовпця) містить лише один доданок.

$$\blacktriangleright \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 8 & 15 \\ 0 & 7 & 26 & 63 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \times (-3) \times (-7) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 12 & 42 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} \times (-2) = 12 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 12 \cdot \left(1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= 12 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 12. \blacktriangleleft$$

Приклад 2. Розв'язати рівняння: $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$\blacktriangleright 2x^2 + 12 + 9x - 18 - 4x - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \end{cases} \blacktriangleleft$$

Вправи для самостійної роботи

Обчислити визначники:

$$1. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad 2. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad 3. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}, \quad 4. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Відповіді: 1. -27. 2. 12. 3. 1. 4. 180.

Розв'язати рівняння:

$$5. \begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad 6. \begin{vmatrix} \sin x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = 0.$$

Відповіді: 5. {0; -2}. 6. $\{k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

§2. МАТРИЦІ

Основні теоретичні відомості

Означення 1. Прямокутну таблицю $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$,

яка складається з $m \cdot n$ елементів a_{ij} , називають матрицею $m \times n$ – розмірності (m рядків і n стовпчиків). Коротко матрицю позначають так: $A_{m \times n} = (a_{ij})$, де $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Будь-якій квадратній матриці ($m = n$) можна поставити у відповідність визначник

$$\det(A) (\Delta A, |A| - \text{інші позначення}) : \quad \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Означення 2. Квадратну матрицю A , визначник якої не дорівнює нулю, називають невинродженою. Якщо $\Delta A = 0$, то матрицю A називають винродженою.

Дії над матрицями

Нехай A і B - матриці однакової розмірності.

1. Сумою матриць $A_{m \times n}$ і $B_{m \times n}$ є матриця $C_{m \times n} = A_{m \times n} + B_{m \times n} = (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$.
2. Добутком довільного дійсного числа λ на матрицю $A_{m \times n}$ є матриця $C_{m \times n} = \lambda A_{m \times n} = (\lambda a_{ij})$.
3. Різницю матриць $A - B$ визначають, як суму матриці A і матриці B помноженої на -1 : $A - B = A + (-1)B$.
4. Добуток матриць.

Операція множення матриць існує лише для узгоджених матриць. Матриці A і B (A - перша матриця, B - друга матриця) називають узгодженими, якщо кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B . В цьому випадку

$$C_{m \times p} = A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = (c_{ij})$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{l=1}^n a_{il}b_{lj}, \quad \text{де } i = \overline{1, m}, j = \overline{1, p}.$$

У загальному випадку $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Обернена матриця

Для кожної невинродженої матриці A ($\det(A) \neq 0$) існує обернена матриця A^{-1} . A^{-1} - обернена до A , якщо виконуються рівності: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, де

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} - \text{одинична матриця.}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} - алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} .

Матричні рівняння

Нехай потрібно знайти матрицю X , що задовольняє матричне рівняння $X \cdot A = B$, де A - невироджена матриця.

Помноживши справа обидві частини рівняння на обернену матрицю A^{-1} , дістанемо:

$$X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad X \cdot E = B \cdot A^{-1} \quad \text{і} \quad X = B \cdot A^{-1}.$$

Аналогічно

$$\begin{aligned} A \cdot X = B & \quad \Leftrightarrow \quad X = A^{-1} \cdot B. \\ A \cdot X \cdot B = C & \quad \Leftrightarrow \quad X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}, \end{aligned}$$

де B - невироджена матриця.

Ранг матриці

Нехай задано матрицю A розмірності $m \times n$. Виділимо в матриці A будь-які k рядків і стільки ж стовпців, де k не більше чисел m і n .

Визначник порядку k , складений з елементів, що стоять на перетині виділених рядків і стовпців, називають мінором k -го порядку матриці A .

Рангом матриці A називають найвищий порядок відмінного від нуля мінора цієї матриці і позначають $r(A)$ або $\text{rang } A$.

$$0 \leq r(A) \leq \min(m, n).$$

На практиці відшукування рангу ґрунтується на такому твердженні. Ранг матриці не зміниться, якщо над нею виконати елементарні перетворення:

- 1) переставити місцями два рядки (стовпці);
- 2) помножити кожен елемент рядка (стовпця) на ненульовий множник;
- 3) додати до елементів рядка (стовпця) відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й те саме число.

Скориставшись елементарними перетвореннями, матрицю можна звести до вигляду, коли всі її елементи, крім $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr}$, де $r \leq \min(m, n)$, дорівнюють нулю. Тоді

ранг матриці дорівнює r . Якщо матрицю звести до верхньої трикутної або трапецевидної, то ранг матриці A дорівнює кількості ненульових рядків (див. приклад 8).

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 4. Знайти добуток матриць $A \cdot B$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 4 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

► A і B - узгоджені.

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 4 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 4 \cdot 7 + (-1) \cdot 0 & 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \\ 4 \cdot 1 + (-3) \cdot 7 + 5 \cdot 0 & 4 \cdot 3 + (-3) \cdot 2 + 5 \cdot 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 30 & 13 \\ -17 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Приклад 5. Знайти $f(A)$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 - x + 2$.

$$\blacktriangleright f(A) = A^2 - A + 2 \cdot E. \quad A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 9 \\ -12 & -11 \end{pmatrix};$$

$$f(A) = \begin{pmatrix} -8 & 9 \\ -12 & -11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ -8 & -10 \end{pmatrix}. \blacktriangleleft$$

Приклад 6. Знайти обернену матрицю A^{-1} , якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\blacktriangleright \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 10 \neq 0. \quad A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{21} =$$

$$(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$-5, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \\ -5 & 5 & 5 \end{pmatrix}. \blacktriangleleft$$

Приклад 7. Розв'язати матричне рівняння $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\blacktriangleright A \cdot X = B \Leftrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow E \cdot X = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B,$$

$$\text{де } A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо A^{-1} : $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$, $A_{11} = 2$, $A_{21} = -4$, $A_{12} = -1$, $A_{22} = 3$, $\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$. $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, тому маємо $X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$.

Отже, $X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$. ◀

Приклад 8 Знайти ранг матриці: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$.

► Виконавши елементарні перетворення, дістанемо:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times (-2) \times (-11) \times (-2) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 12 & 16 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix} : (4) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times (-1) \times (1) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Видно, що визначник другого порядку не дорівнює нулю, а мінори третього та четвертого порядку рівні нулю (всі елементи рядка дорівнюють нулю). Або ранг A дорівнює кількості ненульових рядків.

Отже, $r(A) = 2$. ◀

Вправи для самостійної роботи

1. Знайти добуток матриць: а) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Знайти $f(A)$, якщо а) $f(x) = x^2 + 2x + 3$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$;

б) $f(x) = x^2 - x - 1$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

$$в) f(x) = x^2 - 4x + 4, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Знайти обернену матрицю A^{-1} , якщо

$$а) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}; \quad б) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad в) A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -6 \\ 3 & 5 & -7 \end{pmatrix}.$$

4. Розв'язати матричне рівняння: а) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$;

$$б) X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad в) \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти ранг матриці:

$$а) \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 6 & 3 & -4 & -1 \end{pmatrix}; \quad б) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad в) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відповіді:

$$1.а) \begin{pmatrix} -2 & -4 & -5 \\ 33 & 1 & -10 \\ 23 & 6 & 3 \end{pmatrix}; \quad б) \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 16 & 16 & 16 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad в) \begin{pmatrix} 1 & 6 & 12 & 21 \\ 2 & 7 & 14 & 25 \\ 3 & 8 & 17 & 27 \\ 4 & 9 & 17 & 27 \end{pmatrix}.$$

$$2. \quad а) \begin{pmatrix} 14 & -7 \\ -21 & 21 \end{pmatrix} \quad б) \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 8 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad в) \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$3. \quad а) \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad б) \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad в) \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -23 & -34 & 16 \\ 4 & 5 & -2 \\ -7 & -11 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$4. \quad а) X = \begin{pmatrix} -8 & -14 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}; \quad б) X = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad в) X = \begin{pmatrix} -4 & 10 \\ 5 & -12 \end{pmatrix}.$$

$$5. \quad а) \text{rang}(A) = 3; \quad б) \text{rang}(A) = 3; \quad в) \text{rang}(A) = 2.$$

§3. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАІЧНИХ РІВНЯНЬ

Методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)

1. Метод Крамера

Розглянемо систему вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

де $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$, $b_j \in \mathbb{R}$, x_j – невідомі змінні.

Головна матриця системи $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ є квадратною.

Визначник цієї матриці $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ (2)

Якщо $\Delta \neq 0$, то система (1) має єдиний розв'язок, який можна знайти за формулами

Крамера $\begin{cases} x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \\ \dots \\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \end{cases}$

де $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ одержуємо відповідно заміною стовпчика коефіцієнтів при невідомому x_k в (2) на стовпчик вільних членів.

Якщо $\Delta = 0$, а принаймні один із визначників $\Delta_i \neq 0$, то система (1) несумісна.

Якщо $\Delta = 0$ і всі $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ дорівнюють нулю, то система (1) має безліч розв'язків.

Приклад 9. Розв'язати систему за формулами Крамера: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$

► $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 27 + 5 + 6 - 15 + 6 = -29$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 -$

$63 + 5 + 14 + 3 - 15 = -58$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & -3 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 10 - 9 + 35 - 15 - 5 + 42 =$

58 , $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -28 + 45 + 5 + 6 - 105 - 10 = -87$,

$x_1 = \frac{-58}{-29} = 2$; $x_2 = \frac{58}{-29} = -2$; $x_3 = \frac{-87}{-29} = 3$.

Відповідь: {2; -2; 3}. ◀

Зауважимо, що методом Крамера можна розв'язати систему, у якої кількість невідомих дорівнює кількості рівнянь і головний визначник $\Delta \neq 0$.

2. Матричний метод

СЛАР можна записати у вигляді: $A \cdot X = B$,

$$\text{де } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Якщо $m = n$ і $\Delta A \neq 0$, то єдиний розв'язок системи можна знайти за формулою

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Приклад 10. Розв'язати систему матричним методом:
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$$

$$\blacktriangleright A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}. \quad \Delta A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 27 + 4 + 2 - 6 -$$

$$12 - 3 = 12 \neq 0, \quad A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$X = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 8 \cdot 5 - 5 \cdot 1 - 1 \cdot 11 \\ -4 \cdot 5 + 7 \cdot 1 - 1 \cdot 11 \\ -4 \cdot 5 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 24 \\ -24 \\ 3 \end{pmatrix}. \quad \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = -2, \\ x_3 = 3. \end{cases} \blacktriangleleft$$

3. Метод Гаусса

Метод Гаусса використовують для розв'язання СЛАР з будь-якою кількістю рівнянь та невідомих. Процес розв'язання за методом Гаусса складається з двох етапів. Перший етап (прямий хід) ґрунтується на елементарних перетвореннях рядків системи, а саме, система залишається рівносильною початковій системі, якщо:

- 1) переставити місцями два рівняння;
- 2) помножити обидві частини рівняння на ненульовий множник;
- 3) додати почленно до рівняння елементи іншого рівняння, помножені на одне й те саме число.

За допомогою таких перетворень СЛАР зводять до трапецевидного (або трикутного)

$$\text{вигляду: } \left\{ \begin{array}{l} \bar{a}_{11}x_1 + \bar{a}_{12}x_2 + \bar{a}_{13}x_3 + \dots + \bar{a}_{1n}x_n = \bar{b}_1 \\ \bar{a}_{22}x_2 + \bar{a}_{23}x_3 + \dots + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2 \\ \bar{a}_{33}x_3 + \dots + \bar{a}_{3n}x_n = \bar{b}_3 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \bar{a}_{rs}x_s + \dots + \bar{a}_{rn}x_n = \bar{b}_r \\ 0 = \bar{b}_{r+1} \\ \dots \\ 0 = \bar{b}_m \end{array} \right. \quad (\text{A})$$

На другому етапі (зворотний хід) послідовно визначають невідомі системи, рухаючись від останнього рівняння до першого.

Проаналізуємо систему (A), в якій r - ранг основної матриці A . Якщо $r = n$, $m \geq n$, то система (A) набирає трикутного вигляду

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{a}_{11}x_1 + \bar{a}_{12}x_2 + \dots + \bar{a}_{1n}x_n = \bar{b}_1 \\ \bar{a}_{22}x_2 + \dots + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ \bar{a}_{3n}x_n = \bar{b}_n \end{array} \right.$$

Одержана система, отже, і початкова система, має єдиний розв'язок, який визначаємо так. Спочатку з останнього рівняння знайдемо x_n , після цього з передостаннього рівняння знайдемо x_{n-1} ; піднімаючись по системі від останнього рівняння до першого, знайдемо всі інші невідомі.

Якщо $r < n$, то може бути два випадки:

- 1) хоча б одне з чисел $\bar{b}_{r+1}, \dots, \bar{b}_m$ не дорівнює нулю. Тоді система не має розв'язків, тобто несумісна;
- 2) усі числа $\bar{b}_{r+1}, \dots, \bar{b}_m$ рівні нулю. Тоді система має безліч розв'язків, тобто невизначена.

Оскільки СЛАР взаємно однозначно відповідає розширена матриця, то елементарні перетворення рівнянь системи рівносильні перетворенню рядків розширеної матриці. Тому при розв'язуванні СЛАР за методом Гаусса будемо працювати тільки з розширеною матрицею.

Критерій сумісності СЛАР

Нехай задано систему вигляду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

Складемо головну і розширену матриці цієї системи

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array} \right)$$

Теорема Кронекера - Капеллі

Для того, щоб СЛАР була **сумісна**, необхідно і достатньо, щоб ранг $r(A)$ головної матриці A дорівнював рангу $r(B)$ розширеної матриці B .

Якщо ранг головної матриці дорівнює рангу розширеної матриці і дорівнює кількості невідомих, то система має **єдиний розв'язок**.

Якщо ранг головної матриці дорівнює рангу розширеної матриці, але менший від кількості невідомих, то система має **безліч розв'язків**.

Якщо $r(B) > r(A)$, то система **несумісна**.

Приклад 11. Розв'язати систему за методом Гауса.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6 \end{cases}$$

► Записуємо розширену матрицю системи і, виконуючи елементарні перетворення над рядками, зводимо її до ступінчатого вигляду: $B =$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & 5 & -6 \end{array} \right) \begin{matrix} \times (-1) \times (-\frac{3}{2}) \times (-1) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 6 & -7 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{9}{2} \end{array} \right) \begin{matrix} \\ \\ \times (-2) \\ \sim \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & | & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 6 & | & -7 \\ 0 & -3 & 5 & -5 & | & 9 \end{pmatrix} \times (1) \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 6 & | & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & | & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \times (-2) \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 6 & | & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & | & 4 \end{pmatrix}.$$

$r(A) = r(B) = 4 = n$ (n – кількість невідомих) \Rightarrow система сумісна.

Останній рядок відповідає рівнянню $-3x_4 = 4$; звідки $x_4 = -\frac{4}{3}$.

Далі записуємо рівняння: $x_3 = -1 - 2x_4$; $x_3 = \frac{5}{3}$;
 $3x_2 = -7 - 6x_4 + 3x_3$; $x_2 = 2$;
 $2x_1 = 1 + x_4 - x_3 + x_2$; $x_1 = 0$.

Отже, розв'язок системи: $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = \frac{5}{3}$; $x_4 = -\frac{4}{3}$. ◀

Приклад 12.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$

► Розв'язання аналогічне завданню (1).

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & | & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & | & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & | & -3 \end{pmatrix} \times (-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & | & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & | & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & | & -3 \end{pmatrix} \times (-5) \times (7) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & | & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & | & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & | & -24 \end{pmatrix} \times (2) \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & | & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & | & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & | & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & | & 12 \end{pmatrix}.$$

$r(A) = r(B) = 3 < n = 4$. Задана система має безліч розв'язків. Рухаючись від останнього рівняння до першого, послідовно знаходимо:

$$\begin{aligned}
2x_3 - 4x_4 &= 12; & x_3 &= 6 + 2x_4; \\
x_2 &= -3 - x_4 + x_3; & x_2 &= 3 + x_4; \\
x_1 &= 4 + 4x_4 - 3x_3 + 2x_2; & x_1 &= -8.
\end{aligned}$$

Відповідь: $(-8; 3 + x_4; 6 + 2x_4; x_4) \quad \forall x_4 \in R. \blacktriangleleft$

Вправи для самостійної роботи

Розв'язати системи рівнянь:

$$1. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -2, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$$

Розв'язати системи рівнянь, використавши метод Гаусса:

$$3. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases}, \quad 4. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -1 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 4 \end{cases}$$

Відповіді: 1. $x_1 = -1; x_2 = 1; x_3 = 0$. 2. $x_1 = 3; x_2 = 4; x_3 = 5$. 3. \emptyset .

4. $x_1 = 8t + 2; x_2 = t + 1; x_3 = -1 - 5t; x_4 = t$, де $t \in R$. 5. $x_1 = 3; x_2 = 2; x_3 = 1$.

§4. ВЛАСНІ ЧИСЛА ТА ВЛАСНІ ВЕКТОРИ МАТРИЦІ

Всякий ненульовий вектор-стовпець X , що задовольняє умову $A \cdot X = \lambda X$, де λ - дійсне число, називають власним вектором матриці A , а число λ - власним числом матриці A , що відповідає вектору X . Вектор X визначається неоднозначно (з точністю до ненульового скалярного множника).

Власні числа матриці A є коренями її характеристичного рівняння $\Delta(A - \lambda E) = 0$, яке (на прикладі матриці третього порядку) в розгорнутому вигляді є таким:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Власний вектор $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, що відповідає власному числу λ , визначають із системи рівнянь

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \lambda)x_3 = 0. \end{cases}$$

Приклад 13. Знайти власні числа і власні вектори матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

► Розв'яжемо характеристичне рівняння: $\Delta(A - \lambda E) = 0$:

$$\Delta(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 4 \\ 5 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)(2 - \lambda) - 20 = 0, \quad \lambda^2 - 5\lambda - 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 7 \end{cases}.$$

$\lambda_1 = -2$, власний вектор $X_1 = (x_1, x_2)$, координати якого задовольняють систему

$$\begin{cases} (3 + 2)x_1 + 4x_2 = 0 \\ 5x_1 + (2 + 2)x_2 = 0 \end{cases} \quad 5x_1 + 4x_2 = 0, \text{ нехай } x_1 = 4, \text{ тоді } x_2 = -5. \quad X_1 = (4; -5).$$

$\lambda_2 = 7$, власний вектор $X_2 = (x_1, x_2)$, координати якого задовольняють систему

$$\begin{cases} (3 - 7)x_1 + 4x_2 = 0 \\ 5x_1 + (2 - 7)x_2 = 0 \end{cases} \quad x_1 - x_2 = 0, \text{ нехай } x_1 = 1, \text{ тоді } x_2 = 1. \quad X_2 = (1; 1). \quad \blacktriangleleft$$

Приклад 14. Знайти власні числа і власні вектори матриці $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

► Розв'яжемо характеристичне рівняння: $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 4 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$.

$$\lambda^2(1 - \lambda) - 4(1 - \lambda) = 0, \quad (1 - \lambda)(\lambda^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = -2 \end{cases}$$

Отже, матриця A має три власні числа. Знайдемо власні вектори, підставивши по черзі

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \text{ в систему } \begin{cases} -\lambda x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ (1 - \lambda)x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 - \lambda x_3 = 0 \end{cases}$$

Власному числу $\lambda_1 = 1$ відповідає власний вектор X_1 , координати якого задовольняють систему

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 \\ 2x_2 = -3x_3 \end{cases}.$$

Нехай $x_3 = 2$, тоді $x_2 = -3$ і $x_1 = 5$, тобто $X_1 = c_1 \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Аналогічно знаходимо власні вектори

$$X_2 = c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{для} \quad \lambda_2 = 2; \quad X_3 = c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{для} \quad \lambda_3 = -2,$$

де c_1, c_2, c_3 - відмінні від нуля дійсні числа. ◀

Вправи для самостійної роботи

Знайти власні числа та власні вектори матриць:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$; 2. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; 3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; 5. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Відповіді:

1. $\lambda_1 = 3, X_1 = c_1(1; 1); \lambda_2 = -3, X_2 = c_2(-2; 1)$.

2. $\lambda_1 = 1, X_1 = c_1(-3; 1); \lambda_2 = 5, X_2 = c_2(1; 1)$.

3. $\lambda_1 = 1, X_1 = c_1\left(1; -\frac{3}{2}; 1\right); \lambda_2 = -1, X_2 = c_2\left(-\frac{5}{2}; 1; 1\right); \lambda_3 = 6, X_3 = c_3(1; 1; 1)$.

4. $\lambda = -1, X_1 = c\left(1; -\frac{3}{2}; 1\right)$

5. $\lambda_1 = 2, X_1 = c_1(1; 0; -1); \lambda_2 = 3, X_2 = c_2(1; 1; 1); \lambda_3 = 6, X_3 = c_3(1; -2; 1)$, де c_1, c_2, c_3 - відмінні від нуля дійсні числа.

РОЗДІЛ 2. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

§1. ВЕКТОРИ

Основні теоретичні відомості

1. **Розклад вектора** за ортами координатних осей: $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, де x, y, z - це координати вектора (проекції вектора на координатні осі), а $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - це одиничні вектори координатних осей відповідно Ox, Oy, Oz .

2. Якщо задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$, то має місце розклад вектора

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}.$$

3. Довжина вектора $\vec{a} = (x; y; z)$ задається формулою $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

4. Якщо $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, то

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2),$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2),$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1), \lambda \in \mathbf{R}.$$

5. Якщо $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ **колінеарні** (лежать на одній або на паралельних прямих), то $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = \lambda$.

6. **Скалярний добуток** двох ненульових векторів:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b});$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2.$$

7. Якщо $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$.

8. **Кут** між векторами $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$

$$\cos \phi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}; \quad \cos \phi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

9. Умова **перпендикулярності** ненульових векторів $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0; \quad x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0.$$

10. **Проекція** вектора $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ на вектора $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$:

$$\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}; \quad \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

11. **Напрямні косинуси** вектора $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$:

$$\cos \alpha = \frac{x_1}{|\vec{a}|}; \quad \cos \beta = \frac{y_1}{|\vec{a}|}; \quad \cos \gamma = \frac{z_1}{|\vec{a}|},$$

де α, β, γ - кути, які утворює вектор $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ з додатними напрямками осей координат Ox, Oy, Oz відповідно.

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Орт вектора \vec{a} : $\vec{a}_o = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$.

12. Правило паралелограма ($ABCD$) додавання та віднімання векторів:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC};$$

$$\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD}.$$

13. **Векторний добуток** векторів $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$, (якщо звести вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ до спільного початку, то із кінця вектора \vec{c} найкоротший оберտ від вектора \vec{a} до вектора \vec{b} виглядає проти годинникової стрілки); $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b}), \quad \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0},$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

14. **Площа паралелограма**, побудованого на векторах $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$:

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b}); \quad S = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

15. **Мішаний добуток** векторів $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ і $\vec{c} = (x_3; y_3; z_3)$:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}); \quad \vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

16. **Об'єм паралелепіпеда**, побудованого на векторах $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ і

$$\vec{c} = (x_3; y_3; z_3): \quad V = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|; \quad V = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad (\text{вектори зведені до спільного}$$

початку).

17. **Об'єм тетраедра**, побудованого на векторах $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ і $\vec{c} = (x_3; y_3; z_3)$:

$$V = \frac{1}{6} |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|; \quad V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

18. **Умова компланарності** ненульових векторів (вектори називаються компланарними, якщо вони лежать на одній або на паралельних площинах)

$$\vec{a} = (x_1; y_1; z_1), \vec{b} = (x_2; y_2; z_2) \text{ і}$$

$$\vec{c} = (x_3; y_3; z_3): \quad \vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0; \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Приклад 1. Знайти: а) координати вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; б) довжину вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; в) орт вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, якщо $M_1(-2; 0; 3)$, $M_2 = (0; -1; 2)$.

► а) $\overrightarrow{M_1M_2} = (0 - (-2); -1 - 0; 2 - 3)$; $\overrightarrow{M_1M_2} = (2; -1; -1)$.

б) $|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$. в) $(\overrightarrow{M_1M_2})_o = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{-1}{\sqrt{6}}; \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$. ◀

Приклад 2. Задано трикутник ABC координатами вершин $A(-2; 1; 3)$, $B(0; -1; 1)$; $C(3; 0; 5)$. Знайти: а) скалярний добуток $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; б) векторний добуток $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$; в) проекцію вектора \overrightarrow{AB} на напрямок вектора \overrightarrow{AC} ; г) площу трикутника ABC .

► а) Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB} = (2; -2; -2)$; $\overrightarrow{AC} = (5; -1; 2)$. Отже

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \cdot 5 + (-2) \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 = 8;$$

б) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -2 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}(-4 - 2) - \vec{j}(4 + 10) + \vec{k}(-2 + 10) = -6\vec{i} - 14\vec{j} + 8\vec{k}$;

в) $\text{пр}_{\overrightarrow{AC}} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}_o = \frac{2 \cdot 5 + (-2) \cdot (-1) + (-2) \cdot 2}{\sqrt{5^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{8}{\sqrt{30}} = \frac{4\sqrt{30}}{15}$.

г) $S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} |-6\vec{i} - 14\vec{j} + 8\vec{k}| = \frac{1}{2} \sqrt{(-6)^2 + (-14)^2 + 8^2} = \sqrt{74}$ (кв. од.). При обчисленні скористались результатом пункту б). ◀

Приклад 3. Задано вершини тетраедра $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; -2)$, $C(6; 3; 7)$, $D(-5; -4; 8)$. Знайти довжину його висоти, проведеної із вершини D .

► Висоту $H = DK$ знайдемо із формули для об'єму тетраедра $V = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot H$. Звідки

$H = \frac{3V}{S_{\Delta ABC}}$. Знайдемо координати векторів \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} і \overrightarrow{AD} : $\overrightarrow{AB} = (2; -2; -3)$, $\overrightarrow{AC} = (4; 0; 6)$,

$\overrightarrow{AD} = (-7; -7; 7)$. Об'єм тетраедра дорівнює

$$V = \frac{1}{6} |\overrightarrow{ABACAD}| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = \frac{154}{3} \text{ (куб. од.)}.$$

Знайдемо площу трикутника ABC :

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |-12\vec{i} - 24\vec{j} + 8\vec{k}| =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{144 + 576 + 64} = 14 \text{ (кв. од.)}.$$

Тоді $H = 3 \cdot \frac{154}{3} : 14 = 11$. ◀

Приклад 4. Знайти кут між векторами $\vec{a} = (-1; 2; 3)$ і $\vec{b} = (0; 1; -2)$.

► $\cos \phi = \frac{-1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2)}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{0^2 + 1^2 + (-2)^2}} = -\frac{2\sqrt{70}}{35}$. Звідки $\phi = \arccos\left(-\frac{2\sqrt{70}}{35}\right) =$

$\pi - \arccos\left(\frac{2\sqrt{70}}{35}\right)$. ◀

Приклад 5. Визначити, при яких значеннях α і β вектори $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ і

$\vec{b} = \alpha\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ колінеарні.

► Якщо вектори колінеарні, то їх відповідні координати прямо пропорційні: $\frac{-2}{\alpha} = \frac{3}{-6} = \frac{\beta}{2}$.

Звідки $\alpha = 4$, $\beta = -1$. ◀

Приклад 6. Визначити, при якому значенні α вектори $\vec{a} + \alpha\vec{b}$ і $\vec{a} - \alpha\vec{b}$ будуть взаємно перпендикулярні, якщо $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$.

► Якщо вектори взаємно перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю:

$(\vec{a} + \alpha\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \alpha\vec{b}) = |\vec{a}|^2 - \alpha^2 |\vec{b}|^2 = 9 - 25\alpha^2 = 0$. Отже $\alpha = \pm \frac{3}{5}$. ◀

Приклад 7. Перевірити, чи є вектори $\vec{a} = (2; -1; 2)$, $\vec{b} = (1; 2; -3)$, $\vec{c} = (3; -4; 7)$

компланарними. ► Знайдемо мішаний добуток векторів: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 7 \end{vmatrix} =$

$= 28 + 9 - 8 - (12 + 24 - 7) = 0$.

Отже, вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ є компланарними. ◀

Вправи для самостійної роботи

1. Дано $A(-1; 2; 0)$, $B(1; -1; 1)$, $C(0; 3; 5)$. Знайти а) скалярний добуток \overrightarrow{AB} на \overrightarrow{AC} ; б) векторний добуток \overrightarrow{AB} на \overrightarrow{AC} ; в) проекцію вектора \overrightarrow{AB} на напрямок вектора \overrightarrow{AC} ; г) площу трикутника ABC; д) кут між \overrightarrow{AB} та \overrightarrow{AC} ;

2. Задано вершини тетраедра $A(2; -1; 0)$, $B(0; 2; -1)$, $C(-3; 5; 2)$, $D(4; 0; 2)$. Знайти а) об'єм тетраедра; б) площу основи ABC ; в) довжину висоти, опущену з вершини D .

3. Перевірити на компланарність вектори $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = (-1; 0; 2)$, $\vec{c} = \vec{j} - 3\vec{k}$.

Відповіді: 1. а) 4; б) $-16\vec{i} - 9\vec{j} + 5\vec{k}$; в) $\frac{4}{\sqrt{27}}$; г) $\frac{1}{2}\sqrt{362}$; д) $\arccos\frac{4}{3\sqrt{42}}$.

2. а) $\frac{39}{6}$ (куб. од.); б) $\frac{1}{2}\sqrt{234}$ (кв. од.); в) $\sqrt{234}$.

3. не компланарні.

§2. ДІЛЕННЯ ВІДРІЗКА У ЗАДАНОМУ ВІДНОШЕННІ

Основні теоретичні відомості

1. Координати точки $M(x; y; z)$, яка поділяє відрізок M_1M_2 ($M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$) у заданому відношенні $\lambda = M_1M:MM_2$ обчислюються за формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

2. Координати середини відрізка M_1M_2 ($M_1M = MM_2$, $\lambda = 1$):

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Приклад 8. Задано три вершини паралелограма $A(3; -5)$, $B(5; -3)$, $C(-1; 3)$. Визначити четверту вершину D , протилежну B .

► Оскільки діагоналі паралелограма в точці перетину $K(x_K; y_K)$ діляться навпіл, то знайдемо ці координати як середину відрізка AC :

$$x_K = \frac{3-1}{2} = 1; \quad y_K = \frac{-5+3}{2} = -1; \quad K(1; -1).$$

Розглянемо діагональ BD . Координати точок B і K відомі, отже, координати точки D шукаємо з формул: $x_K = \frac{x_B + x_D}{2}$; $y_K = \frac{y_B + y_D}{2}$:

$$1 = \frac{5+x_D}{2}, \quad -1 = \frac{-3+y_D}{2};$$

Звідки $x_D = -3$, $y_D = 1$, $D(-3; 1)$. ◀

Вправи для самостійної роботи

1. Знайти координати точки $M(x; y; z)$, яка ділить відрізок AB у відношенні 1:2, починаючи від точки A , якщо $A(-2; 5; 1)$, $B(2; 3; 0)$.
2. Відрізок AB розділено точками C і D так, що $AC:CB=1:3$, а $CD:DB=1:1$. Знайти координати точок поділу, якщо $A(-2; 1)$, $B(4; 3)$.

Відповіді: 1. $M(-\frac{2}{3}; \frac{13}{3}; \frac{2}{3})$. 2. $C(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$, $D(\frac{7}{4}; \frac{9}{4})$

§3. ЛІНІЇ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Основні теоретичні відомості

1. Загальне рівняння прямої на площині: $Ax + By + C = 0$, $A, B, C \in \mathbf{R}$
2. Рівняння прямої, яка проходить через точку $M(x_0, y_0)$ із заданим кутовим коефіцієнтом $k = tg\alpha$, де α - це кут нахилу прямої до додатного напрямку осі Ox :

$$y - y_0 = k(x - x_0) \text{ або } y = kx + b,$$

де b - це ордината точки перетину прямої з віссю Oy .

3. Рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

4. Кут між двома прямими, які задані рівняннями $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$:

$$tg\phi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}.$$

5. Умова паралельності двох прямих $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$: $k_1 = k_2$. Умова перпендикулярності двох прямих $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$: $k_1 \cdot k_2 = -1$.

6. Дві прямі $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ паралельні, якщо $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$; прямі співпадають, якщо $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$; прямі мають єдину спільну точку, якщо $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$; прямі перпендикулярні, якщо $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

7. Рівняння прямої «у відрізках»: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, де $a = -\frac{C}{A}$; $b = -\frac{C}{B}$; $(a; 0)$, $(0; b)$ - це точки перетину прямої з осями Ox і Oy відповідно. Пряма паралельна осі Ox має рівняння $y = b$; пряма паралельна осі Oy має рівняння $x = a$.

8. Нормальне рівняння прямої: $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$, де α - це полярний кут нормалі, проведеної із початку координат до прямої $Ax + By + C = 0$; p - це відстань від початку координат до прямої.

9. Відхилення δ точки $M(x_0, y_0)$ від прямої, заданої нормальним рівнянням

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0: \quad \delta = x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p.$$

Якщо пряма задана загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$, то $\delta = \pm \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$,

де знак вибираємо протилежним до знаку вільного члена C .

10. Відстань $d = |\delta|$ від точки $M(x_0, y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

11. Рівняння пучка прямих із центром S :

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0,$$

де $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ - це прямі, що перетинаються у точці S , а α, β - це будь-які числа, які одночасно не дорівнюють нулю;

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0,$$

$$\text{де } \lambda = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \alpha \neq 0.$$

Приклад 9. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-1; 2)$ під кутом 30° до осі Ox .

► Використаємо рівняння прямої $y - y_0 = k(x - x_0)$. Звідки $y - 2 = tg30^\circ \cdot (x + 1)$ і остаточно: $x - \sqrt{3}y + 1 + 2\sqrt{3} = 0$. ◀

Приклад 10. Скласти рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $M_1(2; -5)$ і $M_2(-1; 3)$.

► Скористаємось рівнянням $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Маємо $\frac{x-2}{-1-2} = \frac{y+5}{3+5} \Rightarrow 8x + 3y - 1 = 0$. ◀

Приклад 11. Знайти кут ϕ , утворений двома прямими $3x - y + 5 = 0$, $2x + y - 7 = 0$.

► Знайдемо кутові коефіцієнти заданих прямих: $y = 3x + 5 \Rightarrow k_1 = 3$; $y = -2x + 7 \Rightarrow k_2 = -2$. Тоді $tg\phi = \frac{-2-3}{1+(-2) \cdot 3} = 1 \Rightarrow \phi = arctg1 = \frac{\pi}{4}$. ◀

Приклад 12. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(2; 1)$ паралельно прямій $2x + 3y + 4 = 0$.

► Знайдемо кутовий коефіцієнт заданої прямої: $y = \frac{1}{3}(-2x - 4) \Rightarrow k_1 = -\frac{2}{3}$. Оскільки шукана пряма паралельна заданій, то їх кутові коефіцієнти співпадають: $k_2 = k_1 = -\frac{2}{3}$. Шукаємо рівняння у вигляді: $y - y_0 = k(x - x_0)$: $y - 1 = -\frac{2}{3}(x - 2) \Rightarrow 2x + 3y - 7 = 0$. ►

Приклад 13. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-1; 3)$ перпендикулярно до прямої $2x - 4y + 1 = 0$.

► Будемо шукати рівняння у вигляді: $y - y_0 = k(x - x_0)$. Знайдемо кутовий коефіцієнт заданої прямої: $y = \frac{1}{4}(2x + 1) \Rightarrow k_1 = \frac{1}{2}$. Використаємо умову перпендикулярності двох прямих:

$$k \cdot k_1 = -1. \text{ Звідки } k = -2 \text{ і шукане рівняння має вигляд: } y - 3 = -2(x + 1) \Rightarrow$$

$$y + 2x - 1 = 0. \blacktriangleleft$$

Приклад 14. Визначити, при яких значеннях m і n дві прямі $mx + 8y + n = 0$, $2x + my - 1 = 0$

1) паралельні; 2) співпадають; 3) перпендикулярні.

► 1) Прямі паралельні, якщо виконується умова: $\frac{m}{2} = \frac{8}{m} \neq \frac{n}{-1}$, звідки $m^2 = 16 \Rightarrow m = \pm 4$. Отже, прямі паралельні, якщо $m = 4$, $n \neq -2$, або $m = -4$, $n \neq 2$.

2) Прямі співпадають, якщо $\frac{m}{2} = \frac{8}{m} = \frac{n}{-1}$. Звідки $m = 4$, $n = -2$, або $m = -4$, $n = 2$.

3) Прямі перпендикулярні, якщо виконується умова: $2m + 8m = 0$, звідки $m = 0$, а n - довільне дійсне число. ◀

Приклад 15. Обчислити площу трикутника, утвореного координатними осями і прямою $3x - 4y - 12 = 0$.

► Знайдемо рівняння прямої «у відрізках»: $3x - 4y = 12 \Rightarrow \frac{x}{4} - \frac{y}{3} = 1$. Тоді площа утвореного прямокутного трикутника дорівнює $S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$ (кв. од.) ◀

Приклад 16. Знайти відстань від точки $A(2; -1)$ до прямої $4x + 3y + 10 = 0$.

$$\blacktriangleright d = \frac{|4 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 10|}{\sqrt{16+9}} = 3. \blacktriangleleft$$

Приклад 17. Звести рівняння прямої $12x - 5y + 13 = 0$ до нормального вигляду.

\blacktriangleright Знайдемо нормуючий множник: $\mu = -\frac{1}{\sqrt{12^2+5^2}} = -\frac{1}{13}$. Знак μ вибираємо протилежним до знаку вільного члена рівняння. Помножимо задане рівняння на μ і одержимо:

$$-\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y - 1 = 0; \quad (\cos \alpha = -\frac{12}{13}, \quad \sin \alpha = \frac{5}{13}, \quad p = 1). \blacktriangleleft$$

Приклад 18. Знайти відхилення точки $A(0; 2)$ від прямої $2x - y + 5 = 0$.

\blacktriangleright Зведемо рівняння до нормального вигляду: $\mu = -\frac{1}{\sqrt{4+1}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow -\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y - \frac{5}{\sqrt{5}} = 0$.

Тому відхилення дорівнює $\delta = -\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 2 - \frac{5}{\sqrt{5}} = -\frac{3}{\sqrt{5}}. \blacktriangleleft$

Приклад 19. Знайти рівняння прямої, яка належить пучку прямих

$\alpha(x + 2y - 5) + \beta(3x - 2y + 1) = 0$ і 1) проходить через точку $A(3; -1)$; 2) перпендикулярна прямій $2x + 3y + 7 = 0$.

\blacktriangleright 1) Нехай $\alpha \neq 0$, тоді рівняння пучка можна подати у вигляді

$x + 2y - 5 + \lambda(3x - 2y + 1) = 0$, де $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$. Знайдемо λ з умови, що шукана пряма проходить через точку $A(3; -1)$: $3 - 2 - 5 + \lambda(9 + 2 + 1) = 0$, звідки $\lambda = \frac{1}{3}$. Підставимо це значення λ у рівняння пучка і одержимо шукане рівняння прямої $3x + 2y - 7 = 0$.

2) З рівняння пучка $\lambda_1(x + 2y - 5) + 3x - 2y + 1 = 0$; $\beta \neq 0$; $\lambda_1 = \frac{\alpha}{\beta}$ знайдемо кутовий коефіцієнт прямої, виражений через λ_1 : $x(\lambda_1 + 3) + y(2\lambda_1 - 2) - 5\lambda_1 + 1 = 0 \Rightarrow k_1 = \frac{\lambda_1 + 3}{2(1 - \lambda_1)}$. Кутовий коефіцієнт заданої прямої дорівнює $k = -\frac{2}{3}$. З умови перпендикулярності

$k \cdot k_1 = -1$ маємо $-\frac{2}{3} \cdot \frac{\lambda_1 + 3}{2(1 - \lambda_1)} = -1 \Rightarrow \lambda_1 = 0$. Тому рівняння шуканої прямої має вигляд $3x - 2y + 1 = 0. \blacktriangleleft$

Вправи для самостійної роботи

1. Дано точки $A(-2; 3), B(4; 1), C(0; -3)$. Знайти а) рівняння прямої AB ; б) кут між прямими AB і AC ; в) скласти рівняння прямої, яка проходить через точку B перпендикулярно прямій AC ; г) знайти відстань від точки $D(7; -1)$ до прямої AB ; д) скласти рівняння прямої, яка проходить через точку B паралельно прямій AC .

2. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $(2; -1)$ і складає кут 45° з прямою $5x - 2y + 3 = 0$.
3. Знайти точку перетину прямих $2x - 3y - 1 = 0$ і $3x - y - 2 = 0$.
4. Знайти відстань між паралельними прямими $2x + y - 5 = 0$ і $4x + 2y - 7 = 0$.
5. В прямокутному рівнобедреному трикутнику дано рівняння катета $y = 2x$ та середина гіпотенузи $M(4; 2)$. Знайти рівняння двох інших його сторін.

Відповіді:

1. а) $x + 3y - 7 = 0$; б) $\arctg \frac{4}{3}$; в) $x - 3y - 1 = 0$; г) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$; д) $3x + y - 13 = 0$;
2. $3x - 7y - 13 = 0$; 3. $(\frac{5}{7}; \frac{1}{7})$; 4. $0,3 \cdot \sqrt{5}$; 5. $3x + y - 14 = 0$ і $x + 2y - 2 = 0$;
 $x - 3y + 2 = 0$ і $x + 2y - 14 = 0$.

§4. КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Основні теоретичні відомості

1. Рівняння кола із центром $O(a, b)$, радіуса R : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.
2. Канонічне рівняння еліпса: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,
 $|A_1A_2| = 2a$, $(A_1(a; 0), A_2(-a; 0))$, $|B_1B_2| = 2b$, $(B_1(0; b), B_2(0; -b))$, A_1A_2 , B_1B_2 - осі еліпса, a, b - півосі еліпса.
 $F_1(c; 0)$, $F_2(-c; 0)$, $(c^2 = a^2 - b^2)$ - фокуси еліпса; $\varepsilon = \frac{c}{a}$ - ексцентриситет еліпса;
 $r_1 = a + \varepsilon x$, $r_2 = a - \varepsilon x$ - фокальні радіуси еліпса, $(|F_1M|, |F_2M|)$ - фокальні радіуси, де $M(x, y)$ - будь-яка точка еліпса); $x = -\frac{a}{\varepsilon}$, $x = \frac{a}{\varepsilon}$ ($a > b$) - директриси еліпса.
3. Канонічне рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$,
 $A_1A_2 = 2a$; $A_1(a; 0), A_2(-a; 0)$ - вершини гіперболи; $F_1(c; 0)$, $F_2(-c; 0)$ - фокуси гіперболи ($b^2 = c^2 - a^2$); $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$ - асимптоти гіперболи;
 $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - канонічне рівняння спряженої гіперболи, $(F_1(0; c), F_2(0; -c))$ - фокуси, $B_1(0; b), B_2(0; -b)$ - вершини гіперболи);

Ексцентриситет гіперболи: $\varepsilon = \frac{c}{a}, (\varepsilon > 1)$;

Фокальні радіуси точок правої гілки та відповідно лівої гілки гіперболи:

$$r_1 = \varepsilon x + a, r_2 = \varepsilon x - a \quad \text{і} \quad r_1 = -\varepsilon x - a, r_2 = -\varepsilon x + a;$$

$$\text{Директриси гіперболи } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1: x = -\frac{a}{\varepsilon}, x = \frac{a}{\varepsilon}; \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1: y = -\frac{b}{\varepsilon}, y = \frac{b}{\varepsilon}.$$

4. Канонічне рівняння параболи: $y^2 = 2px$,

$$(F(\frac{p}{2}; 0) - \text{фокус параболи, } x = -\frac{p}{2} - \text{рівняння директриси параболи, } r = x + \frac{p}{2} -$$

фокальний радіус довільної точки $M(x; y)$ параболи.

Для парабол, рівняння яких мають вигляд $a)x^2 = 2py$, $b)x^2 = -2py$, $c)y^2 = -2px$ координати фокуса та рівняння директриси відповідно є:

$$a)F(0; \frac{p}{2}), y = -\frac{p}{2}, \quad b)F(0; -\frac{p}{2}), y = \frac{p}{2}, \quad c)F(-\frac{p}{2}; 0), x = \frac{p}{2}.$$

Приклад 20. Знайти рівняння лінії центрів двох кіл: $x^2 + y^2 - x + 2y = 0$ і $x^2 + y^2 + 5x + 2y - 1 = 0$.

► Знайдемо координати центрів кіл:

$$x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + y^2 + 2y + 1 - 1 = 0, \quad (x - \frac{1}{2})^2 + (y + 1)^2 = \frac{5}{4}; \text{ звідки } O_1(\frac{1}{2}; -1).$$

$$x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2}x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} + y^2 + 2y + 1 - 2 = 0, \quad (x + \frac{5}{2})^2 + (y + 1)^2 = \frac{33}{4}; \text{ звідки}$$

$$O_2(-\frac{5}{2}; -1); \text{ Знайдемо рівняння лінії центрів } O_1O_2: \frac{x - \frac{1}{2}}{-\frac{5}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{y + 1}{-1 + 1}, \text{ звідки: } y + 1 = 0. \blacktriangleleft$$

Приклад 21. Знайти рівняння кола, центр якого співпадає із початком координат і пряма $3x - 4y + 20 = 0$ є дотичною до кола.

► Радіусом кола буде відстань від центра $O(0; 0)$ до дотичної: $R = \frac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 20|}{\sqrt{9 + 16}} = 4$ і рівняння кола буде: $x^2 + y^2 = 16$. ◀

Приклад 22. Дано еліпс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Знайти 1) півосі, 2) фокуси, 3) ексцентриситет, 4) рівняння директрис.

► 1) Запишемо рівняння еліпса в канонічному вигляді: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, (поділили рівняння на 225) звідки півосі $a = 5$, $b = 3$. 2) Із умови $b^2 = a^2 - c^2$ маємо $c = 4$. тоді $F_1(4; 0), F_2(-4; 0)$ є фокусами еліпса.

3) $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$. 4) Рівняння директрис еліпса: $x = -5: \frac{4}{5} = -\frac{25}{4}$ та $x = \frac{25}{4}$. ◀

Приклад 23. Дано гіперболу $16x^2 - 9y^2 = 144$. Знайти: 1) півосі a і b ; 2) фокуси, 3) ексцентриситет, 4) рівняння асимптот, 5) рівняння директрис.

► 1) Запишемо рівняння гіперболи в канонічному вигляді: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, звідки $a = 3$, $b = 4$.

2) Використавши рівність $b^2 = c^2 - a^2$, знайдемо c : $c = \sqrt{9 + 16} = 5$, отже, маємо: $F_1(-5; 0)$, $F_2(5; 0)$ – фокуси гіперболи. 3) $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$. 4) Асимптоти мають вигляд: $y = \pm \frac{4}{3}x$. 5) Рівняння директрис: $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$, тому $x = \pm \frac{9}{5}$. ◀

Приклад 24. Визначити величину параметра p , фокус і рівняння директриси наступних парабол: 1) $y^2 = 6x$; 2) $x^2 = 5y$; 3) $y^2 = -4x$; 4) $x^2 = -y$;

► 1) $y^2 = 6x$, звідки $p = 3$, фокус $F\left(\frac{3}{2}; 0\right)$, рівняння директриси: $x = -\frac{3}{2}$;

2) $x^2 = 5y$, звідки $p = \frac{5}{2}$, фокус $F\left(0; \frac{5}{4}\right)$, рівняння директриси: $y = -\frac{5}{4}$;

3) $y^2 = -4x$, звідки $p = 2$, фокус $F(-1; 0)$, рівняння директриси: $x = 1$;

4) $x^2 = -y$, звідки $p = \frac{1}{2}$, фокус $F\left(0; -\frac{1}{4}\right)$, рівняння директриси: $y = \frac{1}{4}$. ◀

Приклад 25. Визначити тип кривої $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$.

► Зведемо рівняння другого порядку до канонічного вигляду, виділивши повний квадрат відносно x і y : $9(x^2 + 10x + 25 - 25) - 16(y^2 - 2y + 1 - 1) - 367 = 0$,

$$9(x + 5)^2 - 225 - 16(y - 1)^2 + 16 - 367 = 0,$$

$$9(x + 5)^2 - 16(y - 1)^2 = 576, \quad \frac{(x + 5)^2}{64} - \frac{(y - 1)^2}{36} = 1.$$

Отже, отримали рівняння гіперболи, зміщеної вліво вздовж осі OX на 5 одиниць і вгору вздовж осі OY на 1, і півосі якої дорівнюють $a = 8$, $b = 6$. ◀

Вправи для самостійної роботи

1. Знайти центр та радіус кола $x^2 + y^2 - 2x + 5y = 0$.
2. Звести рівняння кола $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$ до канонічного вигляду.
3. Який геометричний зміст має рівняння $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 20 = 0$?
4. Скласти рівняння кола, якщо а) центр його лежить в точці $(4; -2)$ і радіус дорівнює 5; б) кінці одного із діаметрів мають координати $(1; 0)$ і $(5; 3)$; в) центр лежить в

- точці $(-7; 1)$ і коло проходить через точку $(3; -2)$; г) коло дотикається до осі ox в початку координат і перетинає вісь oy в точці $(0; -8)$.
5. Знайти дотичні до еліпса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1$, які проходять через точку $(-3; 1)$.
 6. Скласти канонічне рівняння еліпса, знаючи, що мала піввісь $b = 3$, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
 7. Знайти півосі еліпса $4x^2 + 9y^2 = 36$ та його ексцентриситет.
 8. Відстань між фокусами еліпса дорівнює 8, а між його директрисами - 12,5. Знайти рівняння еліпса.
 9. Скласти рівняння асимптот гіперболи $25x^2 - 9y^2 = 225$.
 10. Дано еліпс $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1$. Знайти рівняння гіперболи, вершини якої знаходяться у фокусах еліпса, фокуси гіперболи – у вершинах еліпса.
 11. Скласти рівняння гіперболи, якщо а) парабола симетрична відносно осі OX , проходить через точку $(-2; 4)$ і вершина її лежить в початку координат; б) парабола симетрична осі OY , проходить через точку $(4; 2)$ і вершина її лежить в початку координат; в) фокус має координати $(3; 0)$, директрисою є вісь ординат, а віссю симетрії є OX .

Відповіді: 1. $O(1; -\frac{5}{2}), R = \frac{\sqrt{29}}{2}$. 2. $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$. 3. Точка $(-2; 4)$.

4. а) $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 25$; б) $(x - 3)^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{25}{4}$;

в) $(x + 7)^2 + (y - 7)^2 = 109$;

г) $x^2 + (y + 4)^2 = 16$. 5. $x + 3 = 0$ і $x - 6y + 9 = 0$. 6. $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$.

7. $a = 3, b = 2, \varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$. 8. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. 9. $y = \pm \frac{5}{3}x$. 10. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$.

11. а) $y^2 = -8x$; б) $x^2 = 8y$; в) $y^2 = 6x - 9$.

§5. ПЛОЩИНА

Основні теоретичні відомості

1. Рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно до вектора нормалі $\vec{n} = \{A; B; C\}$: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

2. Загальне рівняння площини: $Ax + By + Cz + D = 0$.

3. Рівняння площини «у відрізках»: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ (площина, яка проходить через точки перетину з осями координат $M_1(a; 0; 0)$, $M_2(0; b; 0)$, $M_3(0; 0; c)$).

4. Нормальне рівняння площини:

$x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \beta + z \cdot \cos \gamma - p = 0$, $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ - напрямні косинуси нормалі; p - відстань від початку координат до площини.

5. Відхилення δ від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$:

$\delta = x_0 \cdot \cos \alpha + y_0 \cdot \cos \beta + z_0 \cdot \cos \gamma - p$; $\delta = \pm \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ (знак вибирається протилежним до знаку вільного члена загального рівняння площини).

6. Відстань d від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$d = |\delta|; \quad d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

7. Рівняння площини, яка проходить через три задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ і

$$M_3(x_3, y_3, z_3): \quad \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

8. Умова паралельності двох площин

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{і} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0: \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2};$$

умова перпендикулярності двох площин: $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0$;

двогранний кут ϕ між двома площинами визначається співвідношенням:

$$\cos \phi = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Приклад 26. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(-1; 2; 3)$ і має вектор нормалі $\vec{n} = (1; -2; 4)$.

► Шукаємо рівняння площини у вигляді $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$:

$$1 \cdot (x + 1) - 2 \cdot (y - 2) + 4 \cdot (z - 3) = 0 \Rightarrow x - 2y + 4z - 7 = 0. \quad \blacktriangleleft$$

Приклад 27. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(3; 4; -5)$ паралельно векторам $\vec{a}_1 = (3; 1; -1)$ і $\vec{a}_2 = (1; -2; 1)$.

► Рівняння площини шукаємо у вигляді $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Знайдемо

$$\text{координати нормалі до площини } \vec{n} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 4\vec{j} - 7\vec{k}. \text{ Звідки } \vec{n} =$$

$(-1; -4; -7)$, а рівняння площини має вигляд: $-1 \cdot (x - 3) - 4 \cdot (y - 4) - 7 \cdot (z + 5) = 0$ або $x + 4y + 7z + 16 = 0$. ◀

Приклад 28. Скласти рівняння площини, яка проходить через три точки $M_1(3; -1; 2)$, $M_2(4; -1; -1)$, $M_3(2; 0; 2)$.

► Шукаємо рівняння площини у вигляді:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 4-3 & -1+1 & -1-2 \\ 2-3 & 0+1 & 2-2 \end{vmatrix} = 0, \text{ звідки } \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ або } (x-3)(0+3) -$$

$(y+1)(0-3) + (z-2)(1-0) = 0$ і остаточно: $3x + 3y + z - 8 = 0$. ◀

Приклад 29. Визначити двогранний кут ϕ , утворений перетином двох площин:

$$6x + 3y - 2z = 0, \quad x + 2y + 6z - 12 = 0.$$

► Кут між площинами, які перетинаються, дорівнює куту між їх нормальними векторами,

$$\text{тому } \cos \phi = \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{6 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 6}{\sqrt{36 + 9 + 4} \cdot \sqrt{1 + 4 + 36}} = 0, \text{ звідки } \phi = \frac{\pi}{2}. \text{ ◀}$$

Приклад 30. Обчислити об'єм піраміди, утвореної площиною $2x - 3y + 6z - 12 = 0$ і координатними площинами.

► Запишемо рівняння площини «у відрізках» (поділимо праву і ліву частини рівняння на вільний член): $\frac{x}{6} - \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 1$; Об'єм піраміди $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h$, де S - це площа трикутника (основи піраміди), який відтинає задана площина від координатного кута XOY , а h - висота піраміди, відрізок, який відтинає площина від осі OZ , тому об'єм буде дорівнювати:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 8 \text{ (куб. од.)}. \text{ ◀}$$

Приклад 31. Знайти відстань від точки $M(1; 2; -3)$ до площини $5x - 3y + z + 4 = 0$.

$$\text{► } d = \frac{|5 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) + 4|}{\sqrt{25 + 9 + 1}} = 0, \text{ отже точка } M \text{ належить даній площині. ◀}$$

Приклад 32. Визначити, при яких значеннях l і m рівняння

$$3x - y + lz - 9 = 0, \quad 2x + my + 2z - 3 = 0$$

будуть визначати паралельні площини.

► Площини будуть паралельними, якщо буде виконана умова: $\frac{3}{2} = \frac{-1}{m} = \frac{l}{2} \neq \frac{9}{3}$, звідки $m = \frac{-2}{3}$, $l = 3$ - із перших двох рівностей, а із двох останніх рівностей маємо: $m \neq \frac{-1}{3}$ і $l \neq 6$, отже площини паралельні при $m = -\frac{2}{3}$ і $l = 3$. ◀

Приклад 33. Знайти відстань між паралельними площинами

$$\alpha: 2x - 3y + 6z - 14 = 0 \quad \text{і} \quad \beta: 4x - 6y + 12z + 21 = 0.$$

► Знайдемо будь-яку точку на площині α : нехай $x = 0, y = 0$, тоді $z = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$. Точка $M(0; 0; \frac{7}{3})$ належить α . Відстань від точки M до площини β обчислюємо за формулою $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|4 \cdot 0 - 6 \cdot 0 + 12 \cdot \frac{7}{3} + 21|}{\sqrt{4^2 + (-6)^2 + 12^2}} = \frac{49}{14} = 3,5$. ◀

Приклад 34. Знайти відхилення δ від точки $M(1; 2; -3)$ до площини $5x - 3y + z + 4 = 0$.

► Використаємо формулу $\delta = \pm \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ (знак δ вибирається протилежним до знаку вільного члена в рівнянні площини). $\delta = -\frac{5 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) + 4}{\sqrt{5^2 + (-3)^2 + 1^2}} = -\frac{5 - 6 - 3 + 4}{\sqrt{35}} = 0$, отже точка M лежить на заданій площині. ◀

Вправи для самостійної роботи

1. Знайти довжину перпендикуляра, проведеного із початку координат до площини $2x + 3y + 6z - 35 = 0$.
2. Дано дві точки $A(-7; 2; -1)$ і $B(3; 4; 10)$. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку B перпендикулярно до відрізка AB .
3. Знайти відстань між площинами $3x - 4y + 12z + 26 = 0$ і $2x - 4y + 12z - 39 = 0$.
4. Знайти кут між площинами $2x - 3y + 6z - 12 = 0$ і $x + 2y + 2z - 7 = 0$.
5. Знайти рівняння площини, яка проходить через три точки $A(2; 4; 8), B(-3; 1; 5), C(6; -2; 7)$.
6. Знайти точку перетину площин $x - y + z - 1 = 0$, $x + y - z - 2 = 0$, $5x + y - z - 7 = 0$, якщо вона існує.
7. Знайти рівняння площин, які ділять навпіл двогранні кути між площинами $x - 2y + 2z + 21 = 0$, $7x + 24z - 50 = 0$.

Відповіді:

1. $p = 5$. 2. $10x + 2y + 11z - 148 = 0$. 3. 5. 4. $\cos \varphi = \frac{8}{21}$. 5. $15x + 17y - 42z + 238 = 0$. 6. Не існує. 7. $4x - 50y - 22z + 675 = 0$ і $46x + 50y + 122z + 375 = 0$.

§6. РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ У ПРОСТОРИ

Основні теоретичні відомості

1. Пряма як перетин двох площин:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \quad \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

2. Канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ паралельно

вектору $\vec{a} = (l; m; n)$:
$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n},$$

\vec{a} - напрямний вектор прямої.

3. Канонічні рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і

$M_2(x_2; y_2; z_2)$:
$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

4. Параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ із напрямним

вектором $\vec{a} = (l; m; n)$:
$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt.$$

Приклад 35. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(-2; 1; 5), M_2(3; -2; 1)$.

► $\frac{x+2}{3+2} = \frac{y-1}{-2-1} = \frac{z-5}{1-5}$ або $\frac{x+2}{5} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-5}{-4}$. ◀

Приклад 36. Скласти канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку $M(2; 0; -3)$

паралельно прямій $\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-1}$.

► Направний вектор заданої прямої $\vec{a} = (5; 2; -1)$ є напрямним і для шуканої прямої.

Складемо її рівняння: $\frac{x-2}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{-1}$. ◀

Приклад 37. Скласти параметричні рівняння прямої, яка проходить через точки

$M_1(1; -2; 1), M_2(3; 1; -1)$.

► Запишемо рівняння прямої через дві задані точки: $\frac{x-1}{3-1} = \frac{y+2}{1+2} = \frac{z-1}{-1-1} = t$, виразимо змінні

x, y, z через t : $x = 2t + 1, y = 3t - 2, z = -2t + 1$, отримані рівності і задають параметричні рівняння прямої. ◀

Приклад 38. Скласти канонічні рівняння прямої $\begin{cases} x - 2y + 3z + 1 = 0, \\ 2x + y - 4z - 8 = 0. \end{cases}$

► Знайдемо точку M , яка лежить на заданій прямій: нехай $x = 0$, тоді y і z шукаємо із системи: $\begin{cases} -2y + 3z + 1 = 0, \\ y - 4z - 8 = 0. \end{cases}$, звідки $y = -4$, $z = -3$ і точка $M(0; -4; -3)$. Знайдемо напрямний вектор \vec{a} прямої: $\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$, де $\vec{n}_1 = (1; -2; 3)$, $\vec{n}_2 = (2; 1; -4)$ - нормальні вектори площин, які в перетині задають пряму:

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \vec{i}(8 - 3) - \vec{j}(-4 - 6) + \vec{k}(1 + 4) = 5\vec{i} + 10\vec{j} + 5\vec{k}, \quad \text{тоді рівняння}$$

прямої має вигляд: $\frac{x-0}{5} = \frac{y+4}{10} = \frac{z+3}{5}$ або $\frac{x}{1} = \frac{y+4}{2} = \frac{z+3}{1}$. ◀

Приклад 39. Довести перпендикулярність прямих $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}$ і $\begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0, \\ 2x + 3y - 8z + 3 = 0. \end{cases}$

► Знайдемо напрямні вектори заданих прямих: $\vec{a}_1 = (1; -2; 3)$ і $\vec{a}_2 = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 =$
 $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & -8 \end{vmatrix} = \vec{i}(-8 + 15) - \vec{j}(-24 + 10) + \vec{k}(9 - 2) = 7\vec{i} + 14\vec{j} + 7\vec{k};$ Якщо прямі

перпендикулярні, то їх напрямні вектори також перпендикулярні, тому знайдемо скалярний добуток $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 1 \cdot 7 + (-2) \cdot 14 + 3 \cdot 7 = 0$, що і доводить перпендикулярність прямих. ◀

Приклад 40. Знайти гострий кут між прямими: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}}$, $\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{\sqrt{2}}$.

► Направні вектори прямих будуть: $\vec{a}_1 = (1; -1; \sqrt{2})$, $\vec{a}_2 = (1; 1; \sqrt{2})$, знайдемо $\cos(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = \frac{1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{1+1+2} \cdot \sqrt{1+1+2}} = \frac{1}{2}$, тому кут між векторами, а, отже, і між прямими дорівнює $\frac{\pi}{3}$. ◀

Приклад 41. Знайти точку M перетину прямої $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$ з

площиною $2x + 3y + z - 1 = 0$.

► Перейдемо від канонічних рівнянь прямої до параметричних: $x = t + 1$, $y = -2t - 1$, $z = 6t$. Підставимо x, y, z в рівняння площини і виразимо із нього t :

$2(t + 1) + 3(-2t - 1) + 6t - 1 = 0$, звідки $t = 1$. Підставимо знайдене значення t в параметричне рівняння прямої і отримаємо точку перетину прямої і площини - $M(2; -3; 6)$.



Приклад 42. Обчислити відстань d від точки $P(1; -1; 2)$ до прямої $\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-8}{-2}$.

► Знайдемо рівняння площини, яка проходить через точку P перпендикулярно заданій прямій. Напрямний вектор прямої $\vec{a} = (3; 2; -2)$ є нормальним для площини, тому рівняння площини буде мати вигляд: $3(x - 1) + 2(y + 1) - 2(z + 2) = 0$ або $3x + 2y - 2z - 5 = 0$. Тепер знайдемо точку M перетину цієї площини із прямою. Для цього перейдемо до параметричного вигляду рівняння прямої: $x = 3t - 3, y = 2t - 2,$

$z = -2t + 8$, підставимо x, y, z в рівняння площини і знайдемо t :

$3(3t - 3) + 2(2t - 2) - 2(-2t + 8) - 5 = 0$, звідки $t = 2$. Підставимо знайдене t в параметричне рівняння прямої і отримаємо координати точки $M(3; 2; 4)$. Знайдемо відстань між точками M і P : $|MP| = \sqrt{(3 - 1)^2 + (2 + 1)^2 + (4 + 2)^2} = 7$, яка і задає відстань від точки P до прямої. ◀

Приклад 43. Знайти рівняння прямої, що проходить через задану точку $M(0; -1; 2)$ перпендикулярно до площини $\alpha: 2x - 3y + 5z - 1 = 0$.

► Нормаль площини $\vec{n}_\alpha = (2; -3; 5)$ є напрямним вектором шуканої прямої. Будемо шукати рівняння прямої в канонічному вигляді $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$, де $l = 2, m = -3,$

$n = 5$, а $x_0; y_0; z_0$ - відповідні координати точки M , тому рівняння прямої має вигляд :

$$\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{5}. \quad \blacktriangleleft$$

Приклад 43. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(1; -2; 1)$ перпендикулярно до прямої $x = 3 + 2t, y = 5 - 3t, z = -2 - 2t$.

► Оскільки площина перпендикулярна прямій, то напрямний вектор прямої $\vec{L} = (2; -3; -2)$ є нормальним вектором площини, рівняння якої шукаємо у вигляді : $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, де $\vec{n} = (2; -3; -2)$ тобто $A = 2, B = -3, C = -2$. Маємо $2(x - 1) - 3(y + 2) - 2(z - 1) = 0$ або $2x - 3y - 2z - 6 = 0$. ◀

Приклад 44. Знайти проекцію точки $M(0; -1; 2)$ на площину $x - 3y + 6z + 8 = 0$.

► Проекцією точки M на площину є точка перетину прямої (L), яка проходить через M перпендикулярно до площини. Нормальний вектор площини $\vec{n} = (1; -3; 6)$ буде напрямним прямої L , тому рівняння прямої має вигляд: $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{6}$ або в параметричному вигляді: $x = t, y = -3t - 1, z = 6t$. Знайдемо точку перетину прямої і площини. $t - 3(-3t - 1) + 6(6t + 2) + 2 = 0, t = -\frac{1}{2}$, тоді $x = -\frac{1}{2}; y = \frac{1}{2}; z = -1$ і тому проекцією точки M на площину буде точка $M' \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -1\right)$.

Вправи для самостійної роботи

1. Привести рівняння прямої $\begin{cases} x - 3z + 5 = 0 \\ y - 2z + 8 = 0 \end{cases}$ до канонічного вигляду.
2. Знайти кут між прямими $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z+3}{1}$ і $\frac{x}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{-1}$.
3. Знайти напрямні косинуси прямої $\begin{cases} x + 2y - z - 2 = 0 \\ x + y - 3z - 7 = 0 \end{cases}$.
4. Знайти координати точки перетину прямої $\frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$ і площини $2x + 3y + 3z - 8 = 0$.
5. Знайти рівняння перпендикуляра, проведеного із точки $(1; 2; 3)$ до площини $4x - 5y - 8z + 21 = 0$.
6. Знайти найкоротшу відстань від точки $A(1; 2; 3)$ до прямої $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + z = 3 \end{cases}$.
7. Знайти рівняння площини, яка проходить через паралельні прямі $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{3}$, $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+2}{3}$.
8. Яким має бути коефіцієнт p , щоб пряма $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-8} = \frac{z-2}{p}$ була паралельна площині $3x - 4y + 7z - 33 = 0$?

Відповіді:

1. $\frac{x+5}{3} = \frac{y+8}{2} = \frac{z}{1}$.
2. $\varphi = \frac{\pi}{4}$ (або $\frac{3\pi}{4}$).
3. $\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{30}}; \cos \beta = -\frac{2}{\sqrt{30}}; \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{30}}$;
4. $(1; 1; 1)$.
5. $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z-3}{-8}$.
6. $\frac{1}{2}\sqrt{6}$.
7. $2x + y - 1 = 0$.
8. $p = -5$.

РОЗДІЛ 3. ТЕОРІЯ ГРАНИЦЬ

§1. ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТІ ТА ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЙ В ТОЧЦІ

Основні теоретичні відомості

1. Перша видатна границя: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

2. Наслідки першої видатної границі :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1;$$

3. Друга видатна границя.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

4. Типи невизначеностей : $\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], [\infty - \infty], [0 \cdot \infty], [0^0], [1^\infty], [\infty^0]$.

5. Типи визначеностей : $\left[\frac{\operatorname{const}}{0}\right] = \infty, \left[\frac{\operatorname{const}}{\infty}\right] = 0, [0 \cdot 0] = 0, [\infty \cdot \infty] = \infty,$

$[\infty + \infty] = \infty, a^\infty = \infty$, якщо $a > 1$, $a^{-\infty} = 0$, якщо $a > 1$.

6. При обчисленні границь корисні наступні формули еквівалентності:

1) $\sqrt[s]{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \dots + a_1 n + a_0} \sim \sqrt[s]{a_m n^m}, \quad a_0, \dots, a_m = \operatorname{const}, \quad a_m \neq 0$, при $n \rightarrow \infty$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad e^x - 1 \sim x;$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad a^x - 1 \sim x \ln a;$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \ln(1+x) \sim x;$

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \quad (1+x)^\alpha - 1 \sim x \cdot \alpha;$

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \sin x \sim x;$

7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \quad \operatorname{tg} x \sim x;$

8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \quad \arcsin x \sim x;$

9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1, \quad \operatorname{arctg} x \sim x.$

7. При обчисленні границь інколи необхідно скористатись формулами:

Арифметична прогресія

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots, a_1 + (n-1)d + \dots; \quad a_n = a_1 + (n-1)d; \quad S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n;$$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

Геометрична прогресія

$$b_1, b_1 \cdot q, b_1 \cdot q^2, \dots, b_1 \cdot q^{n-1}, \dots; \quad S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}.$$

8. При обчисленні границь, пов'язаних з тригонометричними функціями, корисно пригадати тригонометричні формули:

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}; \quad 1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}; \quad \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right);$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right); \quad \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right); \quad \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2};$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x; \quad \operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}; \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x};$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; \quad \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

9. Правило Лопіталя (розкриття невизначеностей $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$). Нехай функції $f(x)$ і $\phi(x)$ є неперервні і диференційовані в околі точки x_0 , причому $\phi'(x_0) \neq 0$, і нехай $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) =$

$\lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x) = 0$, або $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x) = \infty$, тоді, якщо існує границя $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\phi'(x)}$, то існує

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\phi(x)}, \text{ причому } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\phi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\phi'(x)}.$$

Приклад 1.

$$\blacktriangleright \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 + (n-1)^2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3 + 3n^2 - 3n + 1}{n^2 + 2n + 1 + n^2 - 2n + 1} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + 2}{2n^2 + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 1}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{3+0}{1+0} = 3 \quad \blacktriangleleft$$

Звернемо увагу на три випадки, коди чисельник і знаменник є многочленами відносно n і $n \rightarrow \infty$:

- 1) якщо найвищий степінь чисельника більший за найвищий степінь знаменника, тоді границя відношення дорівнює нескінченності (∞).
- 2) якщо найвищий степінь чисельника менший ніж найвищий степінь знаменника, тоді границя відношення дорівнює 0.

3) якщо найвищий степінь чисельника і знаменника однакові, тоді границя дорівнює відношенню коефіцієнтів при цих степенях.

При обчислення границь можна замінити вирази на їм еквівалентні крім випадків, коли після такої заміни неможливо усунути невизначеність.

Приклад 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} = 1. \blacktriangleleft$

Приклад 3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)! \cdot (n-1)} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-1)!+(3n-1)! \cdot 3n \cdot (3n+1)}{(3n-1)! \cdot 3n \cdot (n-1)} =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-1)! \cdot (1+3n(3n+1))}{(3n-1)! \cdot 3n \cdot (n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^2+3n+1}{3n^2-3n} = \frac{9}{3} = 3. \blacktriangleleft$

Приклад 4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{3^n}} = \left| \begin{array}{l} S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 \cdot (1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}} \\ 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n} = \frac{1 \cdot (1-\frac{1}{3^n})}{1-\frac{1}{3}} \end{array} \right| =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-\frac{1}{2^n})(1-\frac{1}{3})}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3^n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{3}(1-\frac{1}{2^n})}{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^n})} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 1} = \frac{4}{3}. \blacktriangleleft$

Приклад 5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+\dots+(x+100)^{10}}{x^{10}+10^{10}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] =$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+\frac{1}{x})^{10}+(1+\frac{2}{x})^{10}+\dots+(1+\frac{100}{x})^{10}}{1+(\frac{10}{x})^{10}} = \frac{100}{1} = 100. \blacktriangleleft$

Приклад 6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{x^7+3}+\sqrt[4]{2x^3-1}}{\sqrt[6]{x^8+x^7+1-x}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt[5]{x^7+3} \sim x^{\frac{7}{5}} \text{ при } x \rightarrow \infty \\ \sqrt[4]{2x^3-1} \sim \sqrt[4]{2}x^{\frac{3}{4}} \\ \sqrt[6]{x^8+x^7+1} \sim x^{\frac{8}{6}} = x^{\frac{4}{3}} \end{array} \right| =$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{7}{5}}+\sqrt[4]{2}x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{4}{3}}} = \infty. \blacktriangleleft$

Приклад 7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+10}-4} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)(\sqrt{x^2+16}+4)}{(\sqrt{x^2+1}+1)(\sqrt{x^2+16}-4)(\sqrt{x^2+16}+4)} =$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2+1-1)(\sqrt{x^2+16}+4)}{(\sqrt{x^2+1}+1)(x^2+16-16)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sqrt{x^2+16}+4)}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+16+4}}{\sqrt{x^2+1+1}} = \frac{\sqrt{16+4}}{\sqrt{1+1}} = \frac{4+4}{1+1} = 4. \blacktriangleleft$$

Приклад 8. $\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{1+x^2}-1) + (1-\sqrt[4]{1-2x})}{x(x+1)} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x(x+1)} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[4]{1-2x}}{x(x+1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\sqrt[4]{1-2x})^2}{x(x+1)(1 + \sqrt[4]{1-2x})} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{1+x^2})^3 - 1}{x(x+1)(\sqrt[3]{(1+x^2)^2} + \sqrt[3]{1+x^2} + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-2x}}{2x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x^2-1}{3x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\sqrt{1-2x})^2}{2x(1 + \sqrt{1-2x})} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-1+2x}{4x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}. \blacktriangleleft$$

Приклад 9.

$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+1})^2 - (\sqrt{x^2-1})^2}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} =$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1-x^2+1}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} = 0. \blacktriangleleft$$

Приклад 10. $\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{4x^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

\blacktriangleleft

Приклад 11. $\blacktriangleright \lim_{z \rightarrow 1} (1-z) \operatorname{tg} \frac{\pi z}{2} = [0 \cdot \infty] = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi z}{2} \right) =$

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1-z}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}(1-z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\frac{\pi}{2}(1-z)^2}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}(1-z)} = \frac{2}{\pi}. \blacktriangleleft$$

Приклад 12. \blacktriangleright

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^{2x-1} &= [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x+1}{x-2} - 1 \right)^{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{(x+1) - (x-2)}{x-2} \right)^{2x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x+1-x+2}{x-2} \right)^{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{3}{x-2} \right)^{\frac{x-2}{3} \cdot (2x-1)} \right] = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x-3}{x-2}} = e^6. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Приклад 13. ▶ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+kx)}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \ln(1+kx) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+kx)^{\frac{1}{x}} =$
 $\ln \lim_{x \rightarrow 0} \left((1+kx)^{\frac{1}{kx}} \right)^k = \ln e^k = k \ln e = k.$ ◀

Приклад 14. ▶

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{\sin x} = \left| \lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} = e^0 = 1 \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{2x}-1}{2x} \cdot \frac{2x}{\sin x} \right) =$$

$$1 \cdot 2 = 2. \quad \blacktriangleleft$$

Приклад 15. ▶

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x^2-1}{3x^2(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x^2(1+x^2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3(1+x^2)} = \frac{1}{3}. \quad \blacktriangleleft$$

Приклад 16. ▶ $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1) \ln x} = \left[\frac{0}{0} \right] =$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1}{\ln x + (x-1) \cdot \frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{(x+1)x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}. \quad \blacktriangleleft$$

Приклад 17. ▶ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \sin \frac{a}{x} \right) = [\infty \cdot 0] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{a}{x}}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{a}{x} \cdot \left(-\frac{a}{x^2} \right)}{-\frac{1}{x^2}} =$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(a \cdot \cos \frac{a}{x} \right) = a \cdot \cos 0 = a. \quad \blacktriangleleft$$

Приклад 18. ▶ $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot e^{\frac{1}{x^2}} = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{2}{x^3} \right)}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2}} =$

$$(e^\infty) = \infty. \quad \blacktriangleleft$$

Приклад 19. ▶ $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x} = [0^0]$, прологарифмуємо обидві частини, $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x} = a$,

тоді

$$\ln a = \lim_{x \rightarrow 0} \ln x^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x \cdot \ln x) = [0 \cdot \infty] = \left| \frac{x \rightarrow 0}{\sin x \sim x} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \ln x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0, \text{ тому } a = 1 \text{ і } \lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x} = 1. \blacktriangleleft$$

Приклад 20.

► $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = [\infty^0]$; позначимо $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = a$, прологарифмуємо,

$$\ln a = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \ln n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = 0, \text{ тому } a = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1. \blacktriangleleft$$

Вправи для самостійної роботи

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}. \quad 2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x^4 + 1}}. \quad 3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}. \quad 4. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x}. \quad 6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2}{2x^2 + 1} \right)^{x^2}. \quad 7. \lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(2x + 1) - \ln(x + 2)].$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x - 6}}{x^2 - 4x + 3}.$$

$$\text{Відповіді: } 1. 1. \quad 2. 2. \quad 3. \frac{1}{2}. \quad 4. -\frac{1}{56}. \quad 5. -\frac{1}{4}. \quad 6. 0. \quad 7. \ln 2. \quad 8. -\frac{1}{3}.$$

§2. ДОСЛІДЖЕННЯ НА НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

Основні теоретичні відомості

Функція $f(x)$ називається неперервною в точці x_0 , якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Якщо якась із цих умов не виконується, то функція не є неперервною у точці $x = x_0$.

$$\text{Якщо } \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = b,$$

a і b є скінченні числа, а $f(x_0)$ не існує або не співпадає з a чи b , то у точці $x = x_0$ функція має розрив першого роду, якщо $a = b$, то функція має розрив першого роду, який можна усунути (усувний розрив).

Якщо хоча б одна із границь дорівнює ∞ або $-\infty$, то функція має розрив другого роду.

Приклад 1. Функцію $f(x) = \arctg \frac{1}{x-2}$ дослідити на неперервність в точці $x = 2$.

► Функція не визначена в точці $x = 2$, тому дослідимо її на неперервність у цій точці.

$\lim_{x \rightarrow 2-0} \arctg \frac{1}{x-2} = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 2+0} \arctg \frac{1}{x-2} = \frac{\pi}{2}$, тому в точці $x = 2$ функція має розрив першого роду. ◀

Приклад 2. Функцію $f(x) = 1 - x \cdot \sin \frac{1}{x}$ дослідити на неперервність в точці $x = 0$.

► $\lim_{x \rightarrow 0-0} \left(1 - x \cdot \sin \frac{1}{x}\right) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0+0} \left(1 - x \cdot \sin \frac{1}{x}\right) = 0$, в точці $x = 0$ функція має усувний розрив, який можна усунути, якщо визначити $f(0) = 0$. ◀

Приклад 3. Функцію $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$ дослідити на неперервність в точці $x = 2$.

► $\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^2}{x-2} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^2}{x-2} = +\infty$. Отже в точці $x = 2$ функція має розрив другого роду.

Приклад 4. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \leq 3, \\ 2x + 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$

► Дослідимо функцію на неперервність в точці стику $x = 3$. Маємо: $\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-0} x^2 = 9$, $\lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+0} (2x + 1) = 7$, значення $f(3) = 9$. В точці $x = 3$ функція має розрив першого роду. ◀

Вправи для самостійної роботи

Дослідити функції на неперервність:

1. $f(x) = 2^{\frac{5}{3-x}}$. 2. $\begin{cases} 2x - x^2, & x \leq 0; \\ x^2, & 0 < x \leq 2; \\ 8 - 2x, & x > 2. \end{cases}$ 3. $f(x) = 3^{\frac{1}{(2+x)^2}}$. 4. $f(x) = 1 - 2^{\frac{1}{x}}$.

5. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < -2; \\ \ln(x + 3), & -2 < x < 0; \\ x^2 + 2, & x \geq 0. \end{cases}$

Відповіді:

1. Функція має розрив другого роду в точці $x = 3$ ($\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = 0$).

2. Функція неперервна в точках $x = 0, x = 2$. 3. Функція має розрив другого роду в точці $x = -2$ ($\lim_{x \rightarrow -2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2+0} f(x) = \infty$). 4. Функція має розрив другого роду в точці $x = 0$

($\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = 1$). 5. Функція має розрив першого роду в точці $x = 0$ і усуваний розрив першого роду в точці $x = -2$.

РОЗДІЛ 4. ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ

§1. Правила диференціювання

Основні теоретичні відомості

Нехай функції $u = u(x), v = v(x), g = g(x)$ мають в точці x похідні u', v', g' .

$$C' = 0, (C = const), (C \cdot u)' = C \cdot u',$$

$$(u + v)' = u' + v', (u - v)' = u' - v', (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v',$$

$$(u \cdot v \cdot g)' = u' \cdot v \cdot g + u \cdot v' \cdot g + u \cdot v \cdot g',$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ при } v \neq 0,$$

Нехай $y = f(u), u = \phi(x)$, тоді $(f(\phi(x)))' = f_\phi' \cdot \phi_x'$.

Таблиця похідних:

$C' = 0$	$5' = 0, \pi' = 0, (\sqrt{3})' = 0$
$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$	$x' = 1, (3x)' = 3, (x^2)' = 2x,$
$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(\sqrt{5x+3})' = \frac{1}{2\sqrt{5x+3}} \cdot 5$
$\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-1}{u^2} \cdot u' = \frac{-u'}{u^2}$	$\left(\frac{1}{5x+3}\right)' = \frac{-5}{(5x+3)^2}$
$(a^u)' = a^u \cdot (\ln a) \cdot u'$	$(3^{5x+2})' = 3^{x+2} \cdot (\ln 3) \cdot 5$
$(e^u)' = e^u \cdot u'$	$(e^{2x-1})' = e^{2x-1} \cdot 2$
$(\sin u)' = (\cos u) \cdot u'$	$(\sin 3x)' = 3 \cos 3x$
$(\cos u)' = -(\sin u) \cdot u'$	$(\cos 5x)' = -5 \sin 5x$
$(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$	$(\operatorname{tg} 7x)' = \frac{1}{\cos^2 7x} \cdot 7$

$(ctg u)' = \frac{-1}{\sin^2 u} \cdot u'$	$(ctg 4x)' = \frac{-1}{\sin^2 4x} \cdot 4$
$(arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$	$(arcsin 2x)' = \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot 2 = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$
$(arccos u)' = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$	$(arccos 3x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-(3x)^2}} \cdot 3 = \frac{-3}{\sqrt{1-9x^2}}$
$(arctg u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$	$(arctg 5x)' = \frac{1}{1+(5x)^2} \cdot 5 = \frac{5}{1+25x^2}$
$(arcctg u)' = \frac{-1}{1+u^2} \cdot u'$	$(arcctg 7x)' = \frac{-1}{1+(7x)^2} \cdot 7 = \frac{-7}{1+49x^2}$
$(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$	$(\log_3(2x-7))' = \frac{1}{(2x-7) \cdot \ln 3} \cdot 2 = \frac{2}{(2x-7) \cdot \ln 3}$
$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$	$(\ln(x+3))' = \frac{1}{x+3} \cdot 1$
$(\lg u)' = \frac{1}{u \cdot \ln 10} \cdot u'$	$(\lg(2x+3))' = \frac{1}{(2x+3) \cdot \ln 10} \cdot 2$
$(sh u)' = (ch u) \cdot u'$	$(sh 3x)' = 3 ch 3x$
$(ch u)' = (sh u) \cdot u'$	$(ch 4x)' = 4 sh 4x$
$(th u)' = \frac{1}{ch^2 u} \cdot u'$	$(th 5x)' = \frac{1}{ch^2 5x} \cdot 5$
$(cth u)' = \frac{-1}{sh^2 u} \cdot u'$	$(cth 7x)' = \frac{-1}{sh^2 7x} \cdot 7$

Приклад 1. Знайти похідну від явно заданої функції $y = \ln \sin^3 x$.

► Диференціюємо складну функцію:

$$\begin{aligned}
 y' &= (\ln \sin^3 x)' = \frac{1}{\sin^3 x} \cdot (\sin^3 x)' = \frac{1}{\sin^3 x} \cdot (3 \sin^2 x) \cdot (\sin x)' = \\
 &= \frac{3 \sin^2 x}{\sin^3 x} \cdot \cos x = \frac{3 \sin^2 x \cdot \cos x}{\sin^2 x \cdot \sin x} = 3 \frac{\cos x}{\sin x} = 3 ctg x. \blacktriangleleft
 \end{aligned}$$

Приклад 2. Знайти похідну від явно заданої функції $y = \frac{e^{2x} + \sin 3x}{x^2 + 1}$.

► Диференціюємо частку: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{uv' - uv''}{v^2}$.

$$y' = \frac{(e^{2x} + \sin 3x)' \cdot (x^2 + 1) - (e^{2x} + \sin 3x) \cdot (x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{(2e^{2x} + 3 \cos 3x) \cdot (x^2 + 1) - (e^{2x} + \sin 3x) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2}. \blacktriangleleft$$

Приклад 3. Знайти похідну від явно заданої функції $y = (x^2 + 1)^{\sin x}$.

► Функція y є степенєво-показниковою. Для знаходження похідної використаємо метод логарифмічного диференціювання. Прологарифмуємо обидві частини виразу за основою e : $\ln y = \ln(x^2 + 1)^{\sin x}$.

За властивістю логарифмічної функції маємо $\ln y = \sin x \cdot \ln(x^2 + 1)$. Тепер

диференціюємо обидві частини рівняння: $\frac{1}{y} \cdot y' = (\sin x)' \cdot \ln(x^2 + 1) + \sin x (\ln(x^2 + 1))'$.

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \cos x \cdot \ln(x^2 + 1) + \sin x \cdot \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x.$$

$$y' = y \cdot \left(\cos x \cdot \ln(x^2 + 1) + \sin x \cdot \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x \right).$$

Підставимо значення y : $y' = (x^2 + 1)^{\sin x} \cdot \left(\cos x \cdot \ln(x^2 + 1) + \sin x \cdot \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x \right). \blacktriangleleft$

Приклад 4. Знайти похідну y' від неявно заданої функції $\arctg(x + y) = x \cdot y$.

► Вважаємо, що функція y залежить від змінної x , тобто $y = y(x)$.

$$(\arctg(x + y))' = (x \cdot y)',$$

$$\frac{1}{1+(x+y)^2} \cdot (x + y)' = x' \cdot y + x \cdot y',$$

$$\frac{1+y'}{1+(x+y)^2} = 1 \cdot y + x \cdot y',$$

$$1 + y' = (y + y' \cdot x)(1 + (x + y)^2),$$

$$1 + y' = y \cdot (1 + (x + y)^2) + y' \cdot x \cdot (1 + (x + y)^2),$$

$$y' - y' \cdot x \cdot (1 + (x + y)^2) = y + y \cdot (x + y)^2 - 1,$$

$$y' \cdot (1 - x \cdot (1 + (x + y)^2)) = y + y \cdot (x + y)^2 - 1,$$

$$y' = \frac{y + y \cdot (x + y)^2 - 1}{1 - x \cdot (1 + (x + y)^2)}. \blacktriangleleft$$

Приклад 5. Знайти похідну від функції заданої неявно $y^x = x^y$.

► Прологарифмуємо обидві частини за основою e : $\ln(y^x) = \ln(x^y)$. Скориставшись властивостями логарифмічної функції, отримаємо: $x \cdot \ln y = y \cdot \ln x$. Диференціюємо обидві частини, пам'ятаючи, що y є функцією залежною від змінної x :

$$x' \cdot \ln y + x \cdot (\ln y)' = y' \cdot \ln x + y(\ln x)'$$

$$1 \cdot \ln y + x \cdot \frac{1}{y} \cdot y' = y' \cdot \ln x + y \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{x}{y} \cdot y' - y' \cdot \ln x = \frac{y}{x} - \ln y$$

$$y' \left(\frac{x}{y} - \ln x \right) = \frac{y}{x} - \ln y$$

$$y' = \frac{\frac{y}{x} - \ln y}{\frac{x}{y} - \ln x} = \frac{(y - x \ln y)y}{(x - y \ln x)x} \blacktriangleleft$$

Приклад 6. Знайти першу похідну від функції заданої параметрично:

А) $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$;

Б) $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2) \\ y = t - \operatorname{arctg} t \end{cases}$;

► Оскільки функція задана параметрично, тобто $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, то $y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}$.

А) Знайдемо відповідні похідні: $\begin{cases} x'_t = (a \cos t)'_t = -a \sin t \\ y'_t = (b \sin t)'_t = b \cos t \end{cases}$.

Тоді $\frac{dy}{dx} = \frac{b \cos t}{-a \sin t} = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} t$.

Б) Знайдемо відповідні похідні:

$$\begin{cases} x'_t = (\ln(1 + t^2))'_t = \frac{1}{1+t^2} \cdot (1 + t^2)' = \frac{1}{1+t^2} \cdot 2t \\ y'_t = (t - \operatorname{arctg} t)'_t = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2} \end{cases}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t^2 \cdot (1+t^2)}{(1+t^2) \cdot 2t} = \frac{t^2}{2t} = \frac{t}{2} \blacktriangleleft$$

Приклад 7. Знайти другу похідну від функції $y = (x^2 + 3x + 1) \cos 8x$.

► Спочатку знайдемо першу похідну:

$$\begin{aligned} y' &= (x^2 + 3x + 1)' \cdot \cos 8x + (x^2 + 3x + 1) \cdot (\cos 8x)' = \\ &= (2x + 3) \cdot \cos 8x + (x^2 + 3x + 1) \cdot (-8 \sin 8x). \end{aligned}$$

Друга похідна від функції – це похідна від першої похідної. Знайдемо її.

$$\begin{aligned}
y'' &= (y')' = (2x + 3)' \cdot \cos 8x + (2x + 3) \cdot (\cos 8x)' + \\
&+ (x^2 + 3x + 1)' \cdot (-8 \sin 8x) + (x^2 + 3x + 1) \cdot (-8 \sin 8x)' = \\
&= 2 \cos 8x + (2x + 3) \cdot (-8 \sin 8x) + \\
&+ (2x + 3) \cdot (-8 \sin 8x) - (x^2 + 3x + 1) \cdot 64 \cos 8x = \\
&= -2 \cos 8x \cdot (32x^2 + 96x + 31) - 16 \sin 8x \cdot (2x + 3). \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

Приклад 8. Знайти другу похідну від функції $y = \ln(3 - 5x + x^2)$.

► Знайдемо першу похідну:

$$y' = \frac{1}{3-5x+x^2} \cdot (3 - 5x + x^2)' = \frac{-5+2x}{3-5x+x^2}.$$

Диференціюючи останній дріб, знаходимо другу похідну:

$$\begin{aligned}
y'' &= \left(\frac{-5 + 2x}{3 - 5x + x^2} \right)' = \frac{(-5 + 2x)' \cdot (3 - 5x + x^2) - (-5 + 2x) \cdot (3 - 5x + x^2)'}{(3 - 5x + x^2)^2} = \\
&= \frac{2 \cdot (3 - 5x + x^2) - (-5 + 2x) \cdot (-5 + 2x)}{(3 - 5x + x^2)^2} = \frac{-2x^2 + 10x - 19}{(3 - 5x + x^2)^2}. \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

Приклад 9. Знайти другу похідну від функції заданої неявно $x - y = e^{2y}$.

► Диференціюємо обидві частини, пам'ятаючи, що функція y залежить від змінної x :

$$x' - y' = e^{2y} \cdot (2y)', \quad 1 - y' = e^{2y} \cdot 2y', \quad 1 = y' + e^{2y} \cdot 2y', \quad y' = \frac{1}{1+e^{2y}}.$$

Тепер знайдемо другу похідну, диференціюючи дріб

$$y'' = \frac{-1}{(1+e^{2y})^2} \cdot (2e^{2y}y').$$

Підставимо значення першої похідної в отриманий результат, маємо:

$$y'' = \frac{-1}{(1+e^{2y})^2} \cdot \frac{1}{(1+e^{2y})} \cdot 2e^{2y} = \frac{-2e^{2y}}{(1+e^{2y})^3}, \quad \text{отже } y'' = \frac{-2e^{2y}}{(1+e^{2y})^3}. \blacktriangleleft$$

Приклад 10. Знайти другу похідну від функції заданої параметрично

$$\begin{cases} x = 5 \cos^3 2t, \\ y = 5 \sin^3 2t. \end{cases}$$

► Для знаходження другої похідної від параметрично заданої функції використовують дві формули:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} \quad \text{або} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{tt}}{(x'_t)^3}.$$

Вибір формули залежить від складності першої похідної. Тому спочатку знайдемо першу похідну від функції. Оскільки

$$x'_t = 5 \cdot 3 \cos^2 2t \cdot (-2 \sin 2t), \quad y'_t = 5 \cdot 3 \sin^2 2t \cdot (2 \cos 2t),$$

$$\text{то} \quad y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{15 \sin^2 2t \cdot 2 \cos 2t}{-15 \cos^2 2t \cdot 2 \sin 2t} = -\frac{\sin 2t}{\cos 2t} = -\operatorname{tg} 2t.$$

Похідна від тангенса береться не складно, тому використаємо першу формулу.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(-\operatorname{tg} 2t)'_t}{x'_t} = \frac{\frac{-1}{\cos^2 2t} \cdot 2}{-30 \cos^2 2t \cdot \sin 2t} = \frac{2}{30 \cos^4 2t \cdot \sin 2t} = \frac{1}{15 \cos^4 2t \cdot \sin 2t} \blacktriangleleft$$

Приклад 11. Знайти значення $\frac{dy}{dx}$ при $t = \frac{\pi}{6}$ та $\frac{d^2y}{dx^2}$ при $t = \frac{\pi}{4}$, якщо $\begin{cases} x = 2 - \cos 2t, \\ y = 2t - \sin 2t. \end{cases}$

► Для знаходження другої похідної скористаємось формулою $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{tt}}{(x'_t)^3}$.

Знайдемо відповідні похідні: $\begin{cases} x'_t = +2 \sin 2t, & x''_{tt} = 4 \cos 2t, \\ y'_t = 2 - 2 \cos 2t, & y''_{tt} = 4 \sin 2t. \end{cases}$ Підставимо похідні у

формули: $\frac{dy}{dx} = \frac{2 - 2 \cos 2t}{2 \sin 2t} = \frac{1 - \cos 2t}{\sin 2t}$, тому при $t = \frac{\pi}{6}$ маємо $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{4 \sin 2t \cdot 2 \sin 2t - 4 \cos 2t \cdot (2 - 2 \cos 2t)}{(2 \sin 2t)^3} = \frac{8 \sin^2 2t + 8 \cos^2 2t - 8 \cos 2t}{(2 \sin 2t)^3} = \\ &= \frac{8 - 8 \cos 2t}{8 \sin^3 2t} = \frac{1 - \cos 2t}{\sin^3 2t}. \end{aligned}$$

$$\text{При } t = \frac{\pi}{4} \text{ отримаємо } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1 - 1 \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right)}{\sin^3\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{2}}{\sin^3 \frac{\pi}{2}} = \frac{1 - 0}{1} = 1. \blacktriangleleft$$

Вправи для самостійної роботи

1. Знайти похідну від явно заданої функції $y = \cos^3(\sin 5x)$.
2. Знайти похідну від явно заданої функції $y = \frac{x^2 + 2x^2 - 3}{x^2 + 4}$.
3. Знайти похідну від явно заданої функції $y = \sqrt{x} \cdot \arcsin(\sqrt{x^2 - 1})$.
4. Знайти похідну від явно заданої функції $y = (x^2 + 3x - 1)\sqrt{x^2 + 1}$.
5. Знайти похідну від явно заданої функції $y = (\cos 3x)^{\sin 2x}$.
6. Знайти похідну y' від неявно заданої функції $x^3 + y^3 + 3xy - x - 2y = 3$.

7. Знайти похідну від функції заданої неявно $2^x + 2^y = 2^{x+y}$.
8. Знайти першу похідну від функції заданої параметрично $\begin{cases} x = \sin^2 3t \\ y = \cos^2 3t \end{cases}$.
9. Знайти першу похідну від функції заданої параметрично $\begin{cases} x = t^2 + 3t - 1 \\ y = 2t^2 + 2t - 1 \end{cases}$.
10. Знайти другу похідну від функції $y = \sin^3 2x$.
11. Знайти другу похідну від функції $y = x \cdot e^{x^2+3x}$.
12. Знайти другу похідну від функції $y = \sin(2x^2 + 3x - 1)$.
13. Знайти другу похідну від функції $y = \ln(4x - x^2 + 3)$.
14. Знайти другу похідну від функції заданої неявно $x + y = \sin 2y$.
15. Знайти другу похідну від функції заданої неявно $e^{x+y} = x + y$.
16. Знайти другу похідну від функції заданої параметрично $\begin{cases} x = t \operatorname{tg} t, \\ y = 1 - ct \operatorname{tg} t. \end{cases}$
17. Знайти другу похідну від функції заданої параметрично $\begin{cases} x = \sqrt{1-4t^2} \\ y = \arcsin 2t. \end{cases}$
18. Знайти першу та другу похідну від функції заданої $\begin{cases} x = e^t, \\ y = e^{2t}(t-1). \end{cases}$ при $t = 0$.
19. Знайти першу та другу похідну від функції заданої $\begin{cases} x = t^3 + 1 \\ y = t^2 + 2t. \end{cases}$ при $t = 1$.

Відповіді: 1. $y' = -15 \cos^2(\sin 5x) \cdot \sin(\sin 5x) \cdot \cos 5x$.

$$2. y' = \frac{x^4 + 12x^2 + 22x}{(x^2 + 4)^2} \quad 3. y' = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{1-(x^2-1)} \cdot \sqrt{x^2-1}} + \frac{\arcsin \sqrt{x^2-1}}{2\sqrt{x}}$$

$$4. y' = \frac{4x^3 + 9x^2 + 3}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$5. y' = (\cos 3x)^{\sin 2x} \cdot \left(2 \cos 2x \cdot \ln \cos 3x - \frac{3 \sin 3x}{\cos 3x} \sin 2x \right)$$

$$6. y' = \frac{1-3x^2-3y}{3y^2+3x-2} \quad 7. y' = \frac{2^{x+y}-2^x}{2^y-2^{x+y}} \quad 8. \frac{dy}{dx} = -1 \quad 9. \frac{dy}{dx} = \frac{4t+2}{2t+3}$$

$$10. y'' = 12 \cos 4x \cdot \sin 2x + 6 \sin 4x \cdot \cos 2x$$

$$11. y'' = e^{x^2+3x} \cdot (4x^3 + 12x^2 + 15x + 6)$$

$$12. y'' = -\sin(2x^2 + 3x - 1) \cdot (4x + 3)^2 + 4 \cos(2x^2 + 3x - 1)$$

$$13. y'' = \frac{8x-2x^2-22}{(4x-x^2+3)^2} \quad 14. y'' = \frac{2 \sin 2y}{(\cos 2y - 1)^3} \quad 15. y'' = 0$$

$$16. \frac{d^2y}{dx^2} = -2 \operatorname{ctg}^3 t \quad 17. \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sqrt{1-4t^2}}{-8^3} \quad 18. \frac{dy}{dx} = -1, \frac{d^2y}{dx^2} = 1$$

$$19. \frac{dy}{dx} = \frac{4}{3}, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-8}{9}$$

§2. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ

Основні теоретичні відомості

Рівняння дотичної до кривої $y = y(x)$ у точці дотику x_0 має вигляд:

$$y = y(x_0) + y'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Відповідно рівняння нормалі до кривої $y = y(x)$ у точці дотику x_0 має вигляд:

$$y = y(x_0) + \frac{-1}{y'(x_0)} \cdot (x - x_0).$$

Критичною точкою функції $y = f(x)$ називається точка неперервності функції у якій похідна функції дорівнює нулю або не існує. **Стационарною точкою** називають точку області визначення функції, у якій похідна дорівнює нулю.

Правило знаходження інтервалів монотонності функції:

- 1) знайти область визначення функції $y = f(x)$;
- 2) знайти похідну y' заданої функції;
- 3) знайти критичні точки заданої функції;
- 4) на числовій осі відмітити область визначення функції та критичні точки, які розділили вісь на інтервали;
- 5) перевірити знак похідної в кожному інтервалі;
- 6) якщо на інтервалі $(a; b)$ похідна $y' > 0$, то на цьому інтервалі функція зростає, якщо на інтервалі $(a; b)$ похідна $y' < 0$, то на цьому інтервалі функція спадає.

Правило знаходження точок екстремуму функції:

- 1) Знайти область визначення функції $y = f(x)$;
- 2) Знайти похідну y' заданої функції;
- 3) Знайти критичні точки заданої функції та відмітити їх на числовій осі;
- 4) Визначити інтервали монотонності функції;
- 5) Якщо при проходженні точки x_0 із області визначення функції похідна змінює свій знак, тобто $f'(x_0 - 0) \cdot f'(x_0 + 0) < 0$, то точка x_0 є точкою локального екстремуму, при цьому вона є **точкою максимуму**, якщо похідна $f'(x)$ змінює знак з “+” на “-” (рис.1); точка x_0 з області визначення функції є **точкою мінімуму**, якщо похідна $f'(x)$ змінює знак з “-” на “+” (рис. 2).

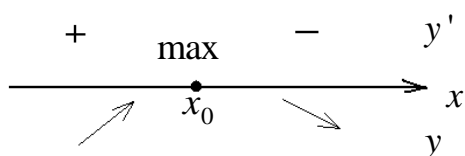


рис. 1

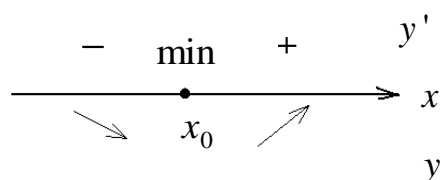


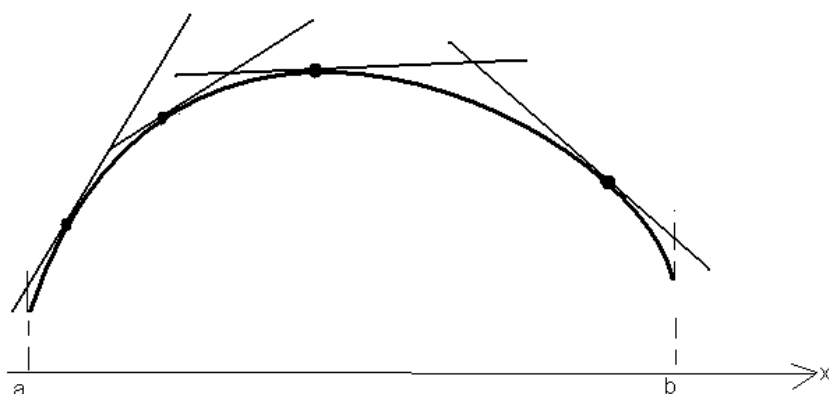
рис. 2

Другу похідну можна використати для дослідження функції на опуклість та для знаходження точок перегину графіка функції.

Функція $y = f(x)$, яка визначена і неперервна на інтервалі $(a; b)$, називається **опуклою вгору**, якщо для будь-яких $x_1, x_2 \in (a; b)$ виконується нерівність:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

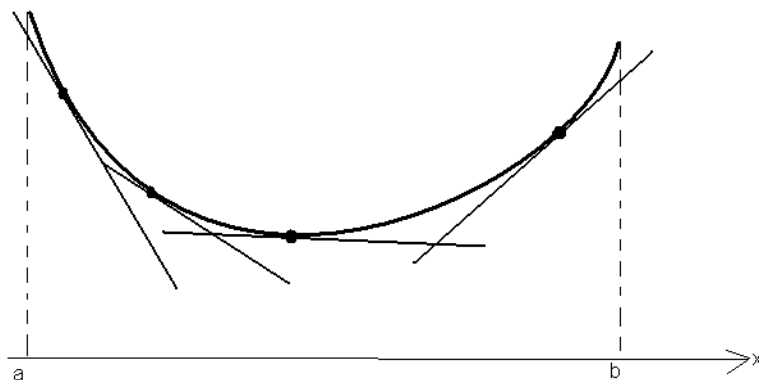
тобто така функція характеризується тим, що всі точки дуги її графіка лежать над хордою, що стягує цю дугу (або графік функції лежить нижче довільної дотичної, проведеної до графіка на цьому інтервалі, тобто $y_{\text{дотичної}} \geq y_{\text{кривої}}$).



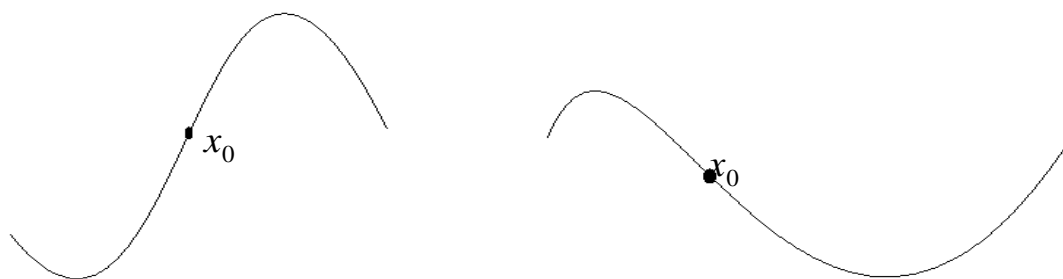
Функція $y = f(x)$, яка визначена і неперервна на інтервалі $(a; b)$, називається **опуклою вниз**, якщо для будь-яких $x_1, x_2 \in (a; b)$ виконується нерівність:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

тобто така функція характеризується тим, що всі точки дуги її графіка лежать під хордою, що стягує цю дугу (або графік функції лежить вище довільної дотичної, проведеної до графіка на цьому інтервалі, тобто $y_{\text{дотичної}} \leq y_{\text{кривої}}$).



Точка x_0 , яка відокремлює опуклу вгору від опуклої вниз (або навпаки) частини графіка неперервної функції $y = y(x)$, називається **точкою перегину**. Це означає, що при переході через точку x_0 друга похідна змінює свій знак на протилежний.



Правило дослідження графіка функції на опуклість та точки перегину:

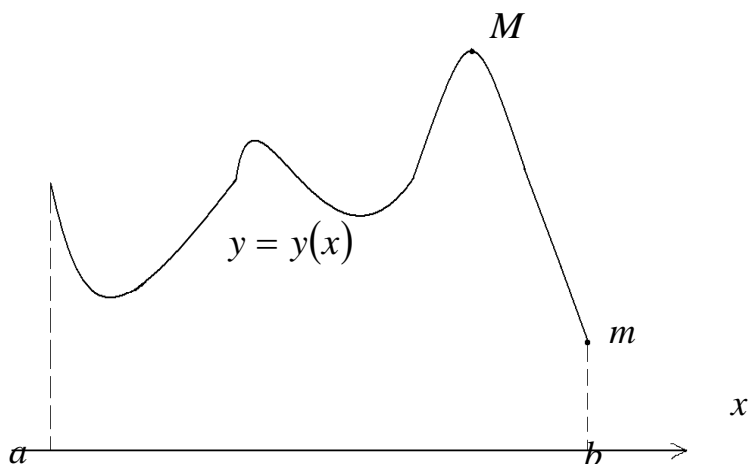
- 1) Знайти область визначення функції $y = y(x)$;
- 2) Знайти першу похідну y' функції $y = y(x)$;
- 3) Знайти другу похідну y'' функції $y = y(x)$ (це похідна від першої похідної);
- 4) Знайти значення x , при яких друга похідна дорівнює нулю $y''(x) = 0$;
- 5) Знайти значення x , при яких друга похідна не існує;
- 6) Відмітити всі знайдені значення x на числовій осі;
- 7) Дослідити знак другої похідної на кожному з отриманих інтервалів (на малюнку розставити знак “-“ або “+” відповідно);
- 8) Зробити висновки:
якщо $y''(x) > 0$ на інтервалі $(a; b)$, то графік функції опуклий вниз на цьому інтервалі,
якщо $y''(x) < 0$ на інтервалі $(a; b)$, то графік функції опуклий вгору на інтервалі $(a; b)$,

якщо при переході через точку $x_0 \in \text{ОДЗ}(y)$ друга похідна змінює свій знак на протилежний, то точка x_0 є точкою перегину.

Найбільше та найменше значення функції на відрізку

Глобальним екстремумом функції $y = y(x)$ на відрізку $[a; b]$ називається найбільше та найменше значення функції на цьому відрізку, при цьому записують $m = \min_{[a;b]} y$,

$$M = \max_{[a;b]} y.$$



Нехай функція $y = y(x)$ є неперервною на відрізку $[a; b]$. Теорема Вейєрштрасса стверджує, що така функція досягає на $[a; b]$ своїх найменшого m та найбільшого M значень. Ці значення функція може набувати на кінцях відрізка (у точках $x = a$, $x = b$) або у стаціонарних точках інтервалу $(a; b)$. Звідки маємо правило знаходження найбільшого та найменшого значення неперервної функції на відрізку:

- 1) Знайти стаціонарні точки функції (перша похідна в них дорівнює нулю);
- 2) Обчислити значення функції $y = y(x)$ в стаціонарних точках, які належать відрізку $[a; b]$;
- 3) Обчислити значення функції $y = y(x)$ на кінцях відрізка $[a; b]$, тобто знайти $y(a)$ та $y(b)$;
- 4) Серед одержаних значень вибрати найбільше M значення та найменше m значення функції;
- 5) Записати відповідь.

Зауважимо, що при знаходженні глобальних екстремумів немає потреби досліджувати знак похідної в околі стаціонарної точки.

Якщо функція $y = y(x)$ неперервна та має на проміжку $(a; b)$ єдину точку x_0 локального екстремуму, то ця точка також є точкою глобального екстремуму, а саме $M = \max_{[a;b]} y$, коли x_0 – точка локального максимуму, $m = \min_{[a;b]} y$, коли x_0 – точка локального мінімуму функції $y = y(x)$.

Приклад 12. Знайти рівняння дотичної та рівняння нормалі до кривої

$$y = x^3 + 3x^2 - 5x + 4 \quad \text{у точці дотику } x_0 = -1.$$

► Знайдемо значення функції та похідної від цієї функції в точці $x_0 = -1$: $y(x_0) = y(-1) = -1 + 3 + 5 + 4 = 11$, $(y' = 3x^2 + 6x - 5) \quad y'(x_0) = y'(-1) = 3 - 6 - 5 = -8$. Тоді рівняння дотичної та нормалі мають вигляд:

$$y = 11 - 8(x - (-1)) \Rightarrow y = 11 - 8(x + 1) \Rightarrow y = -8x + 3 \text{ – рівняння дотичної,}$$

$$y = 11 + \frac{1}{8} \cdot (x + 1) \Rightarrow y = \frac{1}{8}x + \frac{89}{8} \text{ – рівняння нормалі. ◀}$$

Приклад 13. Знайти рівняння дотичної та рівняння нормалі до кривої $y = \frac{4x - x^2}{4}$ у точці $x_0 = 2$.

► Знайдемо значення функції у точці $x_0 = 2$: $y(x_0) = y(2) = \frac{4 \cdot 2 - 2^2}{4} = 1$.

Похідна функції $y' = \frac{4 - 2x}{4}$ в точці дотику $x_0 = 2$ набуває значення $y'(x_0) = y'(2) = 0$. Підставляючи отримані значення у рівняння дотичної $y = y(x_0) + y'(x_0) \cdot (x - x_0)$, отримаємо $y = 1 - 0(x - 2)$, $y = 1$. Оскільки похідна у точці дотику дорівнює нулю, то рівняння нормалі знаходимо із геометричних міркувань (формулою нормалі користуватися не можна, оскільки доведеться ділити на нуль), а саме: дотична та нормаль проведені до однієї кривої у одній точці завжди перпендикулярні. Дотична має рівняння $y = 1$ (пряма паралельна осі OX), точка дотику $M(2; 1)$, тому рівнянні нормалі $x = 2$ (пряма паралельна осі OY). ◀

Приклад 14. Знайти рівняння дотичної та рівняння нормалі до кривої $y = x + \sqrt{x^3}$ у точці $x_0 = 1$. ► Використаємо рівняння дотичної до кривої $y = y(x)$ у точці дотику x_0 :

$$y = y(x_0) + y'(x_0) \cdot (x - x_0), \text{ та рівняння нормалі: } y = y(x_0) + \frac{-1}{y'(x_0)} \cdot (x - x_0).$$

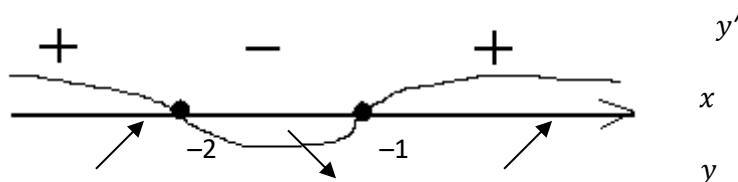
Знайдемо значення функції у точці $x_0 = 1$: $y(x_0) = y(1) = 1 + 1 = 2$. Похідна функції $y' = (x + \sqrt{x^3})' = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{x}$ в точці дотику $x_0 = 1$ набуває значення $y'(x_0) = y'(1) = \frac{5}{2}$.

Підставляючи отримані значення у рівняння дотичної та нормалі, маємо $y = 2 + \frac{5}{2}(x - 1)$
 $\Rightarrow y = \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$ – рівняння дотичної, $y = 2 - \frac{2}{5} \cdot (x - 1) \Rightarrow y = -\frac{2}{5}x + \frac{12}{5}$ – рівняння нормалі. ◀

Приклад 15. Знайти інтервали монотонності функції $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x - 11$.

► Знайдемо похідну функції: $y' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + \frac{3}{2} \cdot 2x + 2 = x^2 + 3x + 2$.

Оскільки y' неперервна при $x \in \mathbb{R}$, то “підозрілими” на екстремум є лише точки, в яких $y' = 0$. Знаходимо стаціонарні точки $x^2 + 3x + 2 = 0$, маємо $x_1 = -1$, $x_2 = -2$. Ці точки поділяють область визначення на три інтервали $(-\infty; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; +\infty)$. На кожному з цих інтервалів похідна неперервна, тому зберігає свій знак. Для з’ясування знаку похідної достатньо обчислити значення похідної в будь-якій точці інтервалу. Знаки похідної зображуємо на малюнку на рівні символу похідної, поведінку функції відображаємо на рівні символу функції:



Отже, функція зростає при $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; +\infty)$, функція спадає при $x \in (-2; -1)$. ◀

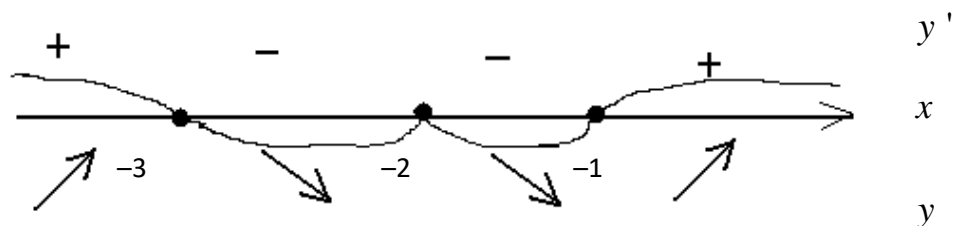
Приклад 16. Знайти інтервали монотонності функції $y = \frac{x^2+5x+7}{x+2}$.

► Обчислимо похідну функції:

$$y' = \frac{(x^2+5x+7)' \cdot (x+2) - (x^2+5x+7) \cdot (x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{(2x+5) \cdot (x+2) - (x^2+5x+7) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2} = \frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$$

Знайдемо точки, у яких похідна не існує (знаменник дорівнює нулю) або дорівнює нулю (чисельник дорівнює нулю). Прирівнюючи похідну до нуля, маємо $x_1 = -1$, $x_2 = -3$. Похідна не існує у точці $x = -2$. Ці точки поділяють числову вісь на чотири інтервали $(-\infty; -3)$, $(-3; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; +\infty)$. На кожному з цих інтервалів похідна неперервна, тому зберігає свій знак. З’ясуємо знак похідної в кожному інтервалі. Знаки похідної

зображуємо на малюнку на рівні символу похідної, поведінку функції відображаємо на рівні символу функції:



Отже, функція зростає при $x \in (-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$, спадає при $x \in (-3; -2) \cup (-2; -1)$. ◀

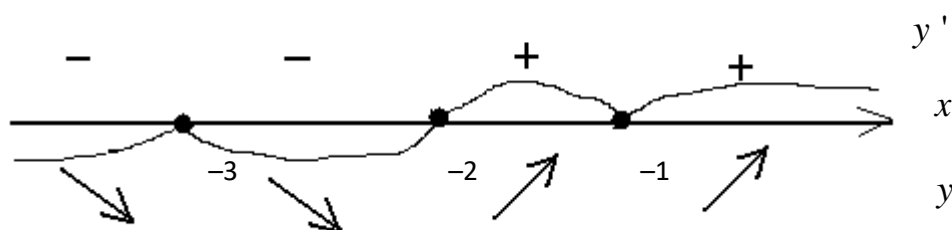
Приклад 17. Знайти інтервали монотонності функції $y = \sqrt[3]{x^2 + 4x + 3}$.

► Спочатку обчислимо похідну функції:

$$y' = \left((x^2 + 4x + 3)^{\frac{1}{3}} \right)' = \frac{1}{3} (x^2 + 4x + 3)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2x + 4) = \frac{2x+4}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2+4x+3)^2}}$$

Знайдемо точки, у яких похідна не існує : $x^2 + 4x + 3 = 0$,

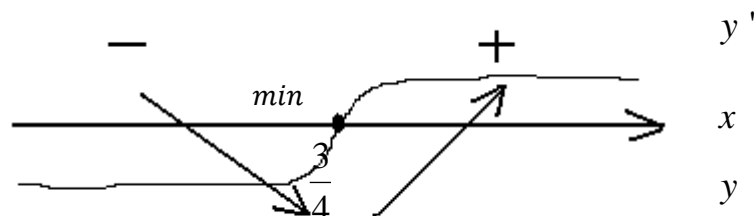
$x_1 = -3$, $x_2 = -1$. Похідна дорівнює нулю ($y' = 0$) при $x = -2$. Знайдені точки поділяють числову вісь на чотири інтервали $(-\infty; -3)$, $(-3; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; +\infty)$. На кожному з цих інтервалів похідна неперервна, тому зберігає свій знак. З'ясуємо знак похідної в кожному інтервалі (обчислюємо значення похідної у фіксованій точці кожного інтервалу). В околі точок $x = -1$ та $x = -3$ похідна не змінює свої знаки (ці точки входять у похідну в другому степені). Знаки похідної зображуємо на малюнку на рівні символу похідної, поведінку функції відображаємо на рівні символу функції:



Функція зростає при $x \in (-2; -1) \cup (-1; +\infty)$, функція спадає при $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; -2)$. ◀

Приклад 18. Знайти екстремуми функції $y = 2x^2 - 3x + 1$.

► Задана функція визначена скрізь. Знайдемо похідну функції: $y' = (2x^2 - 3x + 1)' = 4x - 3$. Похідна дорівнює нулю ($y' = 0$) при $x = \frac{3}{4}$. Ця точка поділяє числову вісь на два інтервали $(-\infty; \frac{3}{4})$, $(\frac{3}{4}; +\infty)$. На кожному із цих інтервалів похідна неперервна, тому зберігає свій знак. Знаки похідної зображуємо на малюнку на рівні символу похідної, поведінку функції відображаємо на рівні символу функції:



Як бачимо, функція має тільки одну екстремальну точку $x = \frac{3}{4}$, яка є точкою мінімуму. ◀

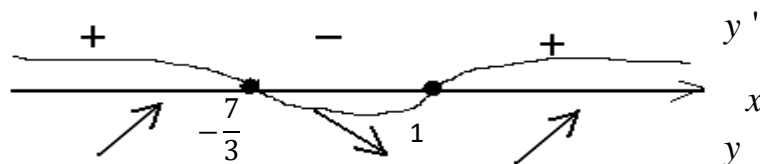
Приклад 19. Знайти екстремуми функції $y = (x - 1)^2(x + 3)$.

► Задана функція визначена скрізь. Знайдемо похідну функції:

$$y' = ((x - 1)^2(x + 3))' = 2(x - 1)(x + 3) + (x - 1)^2 \cdot 1 = (x - 1)(2x + 6 + x + 1)$$

$$y' = (x - 1)(3x + 7).$$

Похідна дорівнює нулю ($y' = 0$) при $x = 1$ та $x = -\frac{7}{3}$. Ці точки поділяють числову вісь на три інтервали $(-\infty; -\frac{7}{3})$, $(-\frac{7}{3}; 1)$, $(1; +\infty)$. На кожному із цих інтервалів похідна неперервна, тому зберігає свій знак. З'ясуємо знак похідної в кожному інтервалі:



Як бачимо, функція має дві екстремальні точки, а саме, похідна змінює свій знак при проходженні точки $x = 1$ (точка мінімуму), та $x = -\frac{7}{3}$ (точка

максимуму). Знайдемо максимальне та мінімальне значення функції:

$$y_{\max} \left(-\frac{7}{3} \right) = \left(-\frac{7}{3} - 1 \right)^2 \left(-\frac{7}{3} + 3 \right) \frac{100}{9} \frac{2}{3} = \frac{200}{27}, \quad y_{\min}(1) = (1 - 1)^2(1 + 3) = 0$$

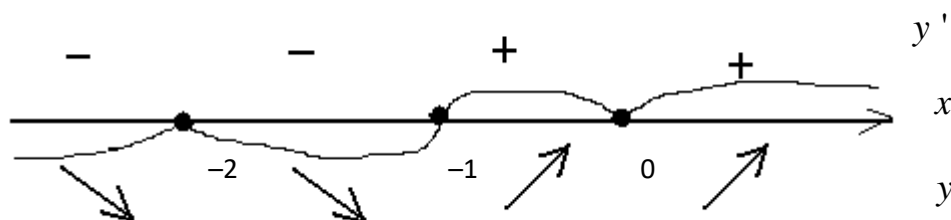
Приклад 20. Знайти екстремуми функції $y = 2 + \sqrt[3]{8x(x+2)}$.

► Функція $y = 2 + \sqrt[3]{8x(x+2)}$ визначена скрізь. Спочатку знайдемо похідну функції:

$$y' = (2 + (8x^2 + 16x)^{\frac{1}{3}})' = 0 + \frac{1}{3}(8x^2 + 16x)^{\frac{-2}{3}} \cdot (16x + 16) = \frac{16x+16}{3 \cdot \sqrt[3]{(8x^2+16x)^2}}$$

Знайдемо точки, у яких похідна не існує (знаменник дорівнює нулю):

$8x^2 + 16x = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = -2$. Похідна дорівнює нулю при $x = -1$. Ці точки поділяють числову вісь на чотири інтервали $(-\infty; -3)$, $(-3; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; +\infty)$. На кожному із цих інтервалів похідна неперервна, тому зберігає свій знак. З'ясуємо знак похідної в кожному інтервалі. Знаки похідної зображуємо на малюнку на рівні символу похідної, поведінку функції відображаємо на рівні символу функції:



Як бачимо, функція має тільки одну екстремальну точку: похідна змінює свій знак тільки при проходженні точки $x = -1$, ця точка і є точкою мінімуму. При проходженні двох інших точок знак похідної не змінюється – вони не є екстремальними точками. $y_{\min}(-1) = 0$. ◀

Приклад 21. Знайти інтервали опуклості та точки перегину графіка функції

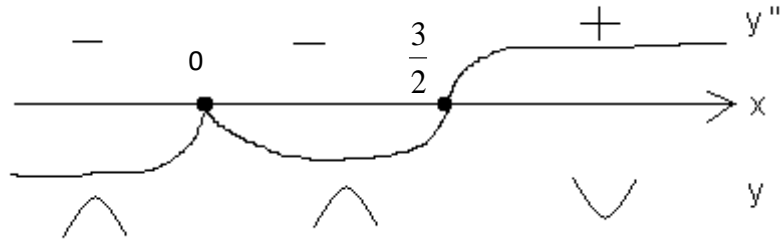
$$y = 2x^5 - 5x^4 + 2x - 1.$$

► Функція визначена скрізь. Знайдемо похідну функції: $y' = 10x^4 - 20x^3 + 2$.

Тепер знаходимо другу похідну: $y'' = (10x^4 - 20x^3 + 2)' = 40x^3 + 60x^2 = 20x^2(2x - 3)$.

Знайдемо точки, в яких друга похідна дорівнює нулю: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{2}$. Ці точки поділяють числову вісь на три інтервали: $(-\infty; 0)$, $(0; \frac{3}{2})$, $(\frac{3}{2}; +\infty)$. На кожному із цих інтервалів друга похідна неперервна, тому зберігає свій знак. З'ясуємо її знак в кожному інтервалі (наприклад, у точці $x = -1$ друга похідна $y'' < 0$, при $x = 1$

$y'' < 0$ та у точці $x = 2$ друга похідна $y'' > 0$). Знаки другої похідної зображуємо на малюнку на рівні символу похідної, поведінку функції відображаємо на рівні символу функції:



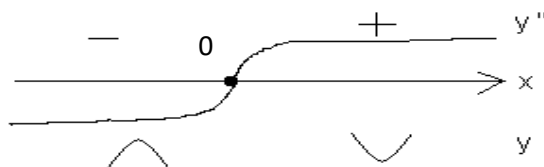
На інтервалі $(\frac{3}{2}; +\infty)$ друга похідна додатна, отже, графік функції опуклий вниз. На інтервалах $(-\infty; 0) \cup (0; \frac{3}{2})$ друга похідна від'ємна, отже, графік функції опуклий вгору. В околі точки $x = \frac{3}{2}$ друга похідна змінює свій знак, тому ця точка є точкою перегину графіка функції. Зауважимо, що точка $x = 0$ не є точкою перегину графіка функції (немає зміни знаку y''). ◀

Приклад 22. Знайти інтервали опуклості та точки перегину графіка функції $y = \frac{3x^4+1}{x^3}$.

► Перепишемо нашу функцію у вигляді: $y = \frac{3x^4+1}{x^3} = 3x + \frac{1}{x^3}$. Функція визначена скрізь, за винятком точки $x = 0$. Знайдемо першу похідну функції: $y' = (3x + \frac{1}{x^3})' = 3 + \frac{-3}{x^4}$.

Тепер знаходимо другу похідну функції: $y'' = (3 + -3 \cdot \frac{1}{x^4})' = -3 \cdot \frac{-4}{x^5} = \frac{12}{x^5}$.

Точок, у яких друга похідна дорівнює нулю, не існує. Знайдемо точки, в яких друга похідна не існує (знаменник дорівнює нулю): $x = 0$. Ця точка не належить ОДЗ функції та поділяє числову вісь на два інтервали: $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$. На кожному із цих інтервалів друга похідна неперервна, тому зберігає свій знак. Обчислюємо значення похідної у фіксованій точці кожного інтервалу. Знаки другої похідної зображуємо на малюнку на рівні символу похідної, поведінку функції відображаємо на рівні символу функції:



На інтервалі $(0; +\infty)$ друга похідна має знак “+” (додатна), отже графік функції опуклий вниз. На інтервалах $(-\infty; 0)$ друга похідна від'ємна, отже графік функції опуклий вгору. В околі точки $x = 0$ друга похідна змінює свій знак, але ця точка не належить області визначення функції, тому вона не може бути точкою перегину графіка функції.

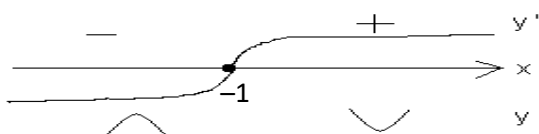
Отже, графік функції $y = \frac{3x^4+1}{x^3}$ опуклий вгору при $x \in (-\infty; 0)$, опуклий вниз при $x \in (0; +\infty)$, точок перегину графіка функції немає. ◀

Приклад 23. Знайти інтервали опуклості та точки перегину графіка функції $y = \sqrt[3]{(x+5)^5}$.

► Перепишемо функцію у вигляді $y = (x+1)^{\frac{5}{3}}$. Знаходимо спочатку першу похідну функції: $y' = \left((x+1)^{\frac{5}{3}}\right)' = \frac{5}{3} \cdot (x+1)^{\frac{5}{3}-1} = \frac{5}{3}(x+1)^{\frac{2}{3}}$ потім другу похідну:

$$y'' = \left(\frac{5}{3}(x+1)^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{2}{3}-1} = \frac{10}{9}(x+1)^{-\frac{1}{3}} = \frac{10}{9 \cdot \sqrt[3]{x+1}}$$

Точок, у яких друга похідна дорівнює нулю, не існує. Друга похідна невизначена при $x = -1$. Ця точка поділяє числову вісь на два інтервали: $(-\infty; -1)$, $(-1; +\infty)$. На кожному із цих інтервалів друга похідна неперервна, тому зберігає свій знак. З'ясуємо її знак в кожному інтервалі. Знаки другої похідної зображуємо на малюнку на рівні символу похідної, поведінку функції відображаємо на рівні символу функції:

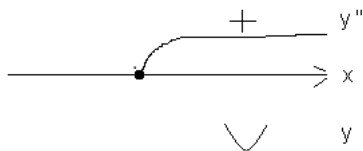


На інтервалі $(-1; +\infty)$ друга похідна має знак “+” (додатна), отже графік функції опуклий вниз. На інтервалах $(-\infty; -1)$ друга похідна від’ємна, отже графік функції опуклий вгору. В околі точки $x = -1$ друга похідна змінює свій знак, точка належить області визначення функції, тому ця точка є точкою перегину графіка функції.

Отже графік функції $y = \sqrt[3]{(x+5)^5}$ опуклий вгору при $x \in (-\infty; -1)$, опуклий вниз при $x \in (-1; +\infty)$, точка перегину графіка функції $x = -1$. ◀

Приклад 24. Знайти інтервали опуклості та точки перегину графіка функції $y = x \cdot \ln x$.

► Областю визначення функції є множина точок $x > 0$. Знайдемо першу та другу похідні функції: $y' = (x \ln x)' = 1 \cdot \ln x - x \cdot \frac{1}{x} = \ln x - 1$, $y'' = (\ln x - 1)' = \frac{1}{x}$. Точок, в яких друга похідна дорівнює нулю, не існує. Друга похідна невизначена у точці $x = 0$, яка не належить ОДЗ. На інтервалі $x \in (0; +\infty)$ друга похідна додатна та неперервна (це гарантує збереження знаку на інтервалі).



Отже графік функції $y = x \cdot \ln x$ опуклий вниз при $x \in (0; +\infty)$, точок перегину немає. ◀

Приклад 25. Знайти інтервали опуклості та точки перегину графіка функції $y = -xe^x$.

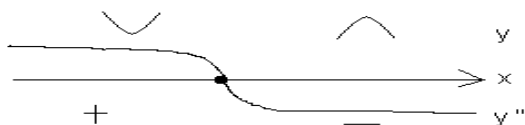
► Функція визначена скрізь. Знаходимо спочатку першу похідну функції:

$$y' = (-xe^x)' = -e^x - xe^x = -e^x(x + 1).$$

Тепер знаходимо другу похідну функції:

$$y'' = -(x + 1)e^x' = -e^x - (x + 1)e^x = -e^x(x + 2).$$

Точка, в якій друга похідна дорівнює нулю є $x = -2$, оскільки $e^x > 0$ завжди. Ця точка поділяє числову вісь на два інтервали: $(-\infty; -2)$, $(-2; +\infty)$. На кожному із цих інтервалів друга похідна неперервна, тому зберігає свій знак. З'ясуємо її знак в кожному інтервалі



На інтервалі $(-2; +\infty)$ друга похідна має знак “-” (від’ємна), отже графік функції опуклий вгору. На інтервалах $(-\infty; -2)$ друга похідна має знак “+”, отже графік функції опуклий вниз. В околі точки $x = -2$ друга похідна змінює свій знак, точка належить області визначення функції, тому вона є точкою перегину графіка функції. ◀

Приклад 26. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = 3 - x - \frac{4}{(x+2)^2}$ на відрізьку $[-1; 2]$.

► Функція на відрізьку $[-1; 2]$ визначена скрізь (точка $x = -2 \notin [-1; 2]$). Знайдемо похідну функції:

$$y' = \left(3 - x - \frac{4}{(x+2)^2}\right)' = -1 - 4 \cdot \frac{-2}{(x+2)^3} = \frac{8 - (x+2)^3}{(x+2)^2}.$$

Похідна функції дорівнює нулю при $8 - (x + 2)^3 = 0$, $8 = (x + 2)^3$, $x + 2 = 2$, тобто у точці $x = 0$. Ця точка належить заданому відрізьку. Обчислюємо значення функції у цій точці: $y(0) = 3 - 0 - 1 = 2$. Похідна функції не існує при $x = -2$, але ця точка не лежить відрізьку. Знайдемо значення функції на кінцях відрізьку: $y(-1) = 3 + 1 - 4 = 0$,

$y(2) = 3 - 2 - \frac{4}{16} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Порівнюємо числа $2, 0, \frac{3}{4}$, виділяємо серед них найбільше $M = 2$ та найменше $m = 0$. Отже, найбільше значення функції $y = 2$ маємо у точці $x = 0$, найменше значення $m = 0$ функція набуває у точці $x = -1$. ◀

Приклад 27. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = x - 4\sqrt{x} + 5$ на відрізку $[1; 9]$.

► Функція на відрізку $[1; 9]$ визначена скрізь. Знайдемо похідну функції:

$$y' = (x - 4\sqrt{x} + 5)' = 1 - 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}.$$

Похідна функції дорівнює нулю при $\sqrt{x} - 2 = 0$, $x = 4 \in \text{ОДЗ}$. Ця точка належить відрізку. Обчислюємо значення функції у цій точці: $y(4) = 4 - 8 + 5 = 1$. Похідна функції не існує при $x \leq 0$, але ці точки не лежать відрізку. Знайдемо значення функції на кінцях відрізку: $y(1) = 1 - 4 + 5 = 2$, $y(9) = 9 - 4\sqrt{9} + 5 = 9 - 12 + 5 = 2$. Порівнюючи числа $2, 1$, виділяємо серед них найбільше $M = 2$ та найменше $m = 1$. Отже, найбільше значення функції $M = 2$ маємо у точках $x = 1$ та $x = 9$, найменше значення $m = 1$ функція набуває у точці $x = 4$. ◀

Приклад 28. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = 2x^4 - x + 1$ на відрізку $[-1; 3]$.

► Функція на відрізку $[-1; 3]$ визначена скрізь. Знайдемо похідну функції: $y' = (2x^4 - x + 1)' = 8x^3 - 1 = 0$. Похідна функції дорівнює нулю при $8x^3 = 1$, $x = \frac{1}{2}$. Ця точка належить відрізку. Обчислюємо значення функції у цій точці: $y(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{8}$. Знайдемо значення функції на кінцях відрізку: $y(-1) = 2 \cdot 1 + 1 + 1 = 4$, $y(3) = 2 \cdot 81 - 3 + 1 = 160$. Порівнюючи отримані значення функції, виділяємо серед них найбільше $M = 160$ та найменше $m = \frac{5}{8}$. ◀

Вправи для самостійної роботи

1. Знайти рівняння дотичної та рівняння нормалі до кривої $y = 2x^2 + 3x - 1$ у точці дотику $x_0 = -1$.
2. Знайти рівняння дотичної та рівняння нормалі до кривої $y = \frac{1+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$ у точці $x_0 = 1$.
3. Знайти інтервали монотонності функції $y = \frac{1}{8}(4 - 6x^2 - x^3)$.
4. Знайти інтервали монотонності функції $y = \frac{x^2+6x+9}{x+4}$.

5. Знайти інтервали монотонності функції $y = 1 - \sqrt[3]{x^2 - 2x}$.
6. Знайти екстремуми функції $y = 16x^3 - 36x^2 + 24x - 9$.
7. Знайти екстремуми функції $y = 2 + \sqrt[3]{x^2 - 4x + 3}$.
8. Знайти інтервали опуклості та точки перегину графіка функції $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x^2}$.
9. Знайти інтервали опуклості та точки перегину графіка функції $y = x - \ln(1 + x^2)$.
10. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = x^2 + \frac{16}{x} - 16$ на відрізку $[1; 4]$.
11. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 9$ на відрізку $[-1; 3]$.
12. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = \frac{3x}{x^2 + 1}$ на відрізку $[0; 5]$.

Відповіді: 1. $y = -x - 3$ – рівняння дотичної, $y = x - 1$ – рівняння нормалі. $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

2. $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ – рівняння дотичної, $y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$ – рівняння нормалі.

3. Функція спадає при $x \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$, y зростає при $x \in (-4; 0)$. 4. Функція зростає при $x \in (-\infty; -5) \cup (-3; +\infty)$, функція спадає при $x \in (-5; -4) \cup (-4; -3)$.

5. Функція зростає при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$ і спадає при $x \in (1; 2) \cup (2; +\infty)$.

6. $y_{\max}\left(\frac{1}{2}\right) = -4$, $y_{\min}(1) = -5$.

7. $y_{\min}(2) = 1$. 8. Графік функції опуклий вгору при $x \in (6; +\infty)$, опуклий вниз при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 6)$, точка перегину графіка функції $(6; 2/3)$. 9. Графік функції опуклий вгору при $x \in (-2; +2)$, опуклий вниз при $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$, точки перегину графіка функції $y(-2) = -2 - \ln 5$, $y(2) = 2 - \ln 5$. 10. Найбільше значення функції на відрізку $y(4) = 4$, найменше значення $y(2) = -4$. 11. Найменше значення функції $y(-1) = -13$, найбільше значення $y(3) = 18$. 12. Найменше значення функції $y(0) = 0$, найбільше значення $y(1) = 3/2$.

§3. ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ ДО НАБЛИЖЕНИХ ОБЧИСЛЕНЬ

Основні теоретичні відомості

Функцію $y = f(x)$ називають диференційованою у точці x_0 , якщо приріст функції у точці можна подати у вигляді:

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(x_0, \Delta x) \cdot \Delta x, \quad (1)$$

де $\alpha(x_0, \Delta x) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

Нехай функція $y = f(x)$ є диференційованою у точці x_0 . Диференціалом функції $f(x)$ у точці x_0 називається головна (лінійна відносно приросту аргументу) частина приросту функції $f(x)$, при цьому пишуть $df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx$.

Основні властивості диференціала функції (функції u, v залежать від змінної x та диференційовані):

1. $d(Cu) = Cdu$, де $C = const$,
2. $d(u \pm v) = du \pm dv$,
3. $d(u \cdot v) = u dv + v du$,
4. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$.

Із формули (1) при $\Delta x \rightarrow 0$ та при $\alpha(x_0, \Delta x) \rightarrow 0$ випливає, що $\Delta f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$.

Оскільки $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, $\Delta x = x - x_0$, то

$f(x_0 + \Delta x) = f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$ при умові, що Δx мале.

За допомогою цієї формули можна обчислювати наближені значення функції в точках близьких до точки x_0 .

Приклад 29. Знайти диференціал функції $y = \sin^3\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ у точці $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

► Знайдемо похідну від складної функції: $y' = 3 \cdot \sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

Враховуючи, що

$\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, отримаємо

$y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{8}$. Отже, маємо $dy = \frac{9}{8} dx$. ◀

Приклад 30. Знайти диференціал функції $y = \arctg(2^{\sin x})$.

► Знайдемо похідну від складної функції

$$y' = (\arctg(2^{\sin x}))' = \frac{1}{1+(2^{\sin x})^2} \cdot 2^{\sin x} \cdot \ln 2 \cdot \cos x.$$

Отже, маємо $dy = \frac{2^{\sin x} \cdot \ln 2 \cdot \cos x}{1+(2^{\sin x})^2} \cdot dx$. ◀

Диференціали вищих порядків: $d^2 y = d(dy) = y'' dx^2, \dots, d^n y = d(d^{n-1} y) = y^{(n)} dx^n$.

Приклад 31. Знайти диференціал другого порядку функції $y = \arctg 2x$.

► Знайдемо похідну від складної функції $y' = (\arctg 2x)' = \frac{2}{1+(2x)^2}$.

Знаходимо другу похідну функції

$$y'' = \left(\frac{2}{1+(2x)^2} \right)' = 2 \cdot \frac{-1}{(1+(2x)^2)^2} \cdot (4x^2)' = \frac{-16x}{(1+(2x)^2)^2}$$

Отже, маємо $d^2y = \frac{-16x}{(1+(2x)^2)^2} \cdot dx^2$. ◀

Приклад 32. Знайти наближене значення функції $f(x) = x^7$ при $x = 1,996$.

► Skorистaємось формулою $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$. Оскільки $x = 1,996$, то візьмемо $x_0 = 2$, тоді $\Delta x = x - x_0 = -0,004$. $f(2) = 2^7 = 128$. Знайдемо похідну $y' = 7x^6$, значення похідної у точці x_0 : $y'(x_0) = 7 \cdot 2^6 = 448$. Маємо $f(1,996) \approx f(2) + f'(2) \cdot \Delta x = 128 + 448 \cdot (-0,004) = 128 - 1,792 = 126,208$. Отже, $f(1,996) \approx 126,208$. ◀

Приклад 33. Знайти наближене значення функції $y = \arcsin x$ при $x = 0,08$.

► Skorистaємось формулою наближеного обчислення $y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0) \cdot \Delta x$.

Оскільки $x = 0,08$, то візьмемо за $x_0 = 0$, тоді $\Delta x = x - x_0 = 0,08$. $y(x_0) = y(0) = \arcsin 0 = 0$. Тепер знайдемо похідну $y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, значення похідної у точці x_0 : $y'(x_0) = y'(0) = \frac{1}{\sqrt{1-0^2}} = 1$, а $y(0,08) \approx y(0) + y'(0) \cdot \Delta x = 0 + 1 \cdot (0,08) = 0,08$. ◀

Приклад 34. Знайти наближене значення функції $f(x) = \sqrt{4x+1}$ при $x = 2,16$.

► Skorистaємось формулою $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$. Оскільки $x = 2,16$, то візьмемо за $x_0 = 2$, тоді $\Delta x = x - x_0 = 0,16$. $f(2) = \sqrt{4 \cdot 2 + 1} = 3$. Знайдемо похідну $f'(x) = \frac{1 \cdot 4}{2\sqrt{4x+1}} = \frac{2}{\sqrt{4x+1}}$. Тоді $f'(x_0) = f'(2) = \frac{2}{\sqrt{4 \cdot 2 + 1}} = \frac{2}{3}$.

Маємо $f(2,16) \approx f(2) + f'(2) \cdot \Delta x = 3 + \frac{2}{3} \cdot 0,16 = \frac{9+0,32}{3} = \frac{9,32}{3}$.

Тобто $f(2,16) \approx \frac{9,32}{3}$. ◀

Приклад 35. Знайти наближене значення функції $f(x) = \sin x$ при $x = 32^\circ$.

► Skorистaємось формулою $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$. Оскільки $x = 32^\circ$, то візьмемо за $x_0 = 30^\circ$, тоді $\Delta x = x - x_0 = 2^\circ$. $f(30^\circ) = \sin(30^\circ) = 1/2$. $f'(30^\circ) = \cos(30^\circ) = \sqrt{3}/2$.

Маємо $f(32^\circ) = \sin(32^\circ) \approx f(30^\circ) + f'(30^\circ) \cdot \Delta x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi}{180}$. ◀

Вправи для самостійної роботи

1. Знайти диференціал функції $y = \sqrt[4]{3x^2 - \cos(\sin 2x)}$.
2. Знайти диференціал функції $y = \ln t g \frac{x}{2} + x \sin 2x$ в точці $x_0 = \frac{\pi}{2}$.
3. Знайти диференціал першого та другого порядку функції $y = \frac{4x-x^2-4}{x}$ в точці $x_0 = 1$.
4. Знайти диференціал першого та другого порядку функції $y = \sin(e^{2x} - 1)$ в точці $x_0 = 0$.
5. Знайти наближене значення функції $f(x) = x^7$ при $x = 1,024$.
6. Знайти наближене значення функції $y = 1 + x + \sin x$ при $x = 0,01$.
7. Знайти наближене значення функції $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ при $x = 3,96$.
8. Знайти наближене значення функції $f(x) = \sqrt[3]{x}$ при $x = 26,46$.

Відповіді:

1. $dy = \frac{6x + \sin(\sin 2x) \cdot (\cos 2x) \cdot 2}{4(\sqrt[4]{3x^2 - \cos(\sin 2x)})^3} dx$. 2. $dy = (1 - \pi) dx$.

3. $dy = 3dx$, $d^2y = -8dx^2$. 4. $dy = 2dx$, $d^2y = 4dx^2$.

5. $f(1,024) \approx 1,168$. 6. $f(0,01) \approx 1,02$. 7. $f(3,96) \approx 0,5025$.

8. $f(26,46) \approx 2,98$.

Рекомендована література

1. Дубовик В.П. Вища математика: навч. посіб. / Дубовик В.П., Юрик І.І. – К.: А.С.К., 2005. – 648 с.
2. Дубовик В.П. Вища математика. Збірник задач: навч. посіб. / Дубовик В.П., Юрик І.І. – К.: А.С.К., 2005. – 480 с.
3. Герасимчук В. С. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах: навч. посіб. [Ч.1]. Лінійна й векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функцій однієї та багатьох змінних. Прикладні задачі / В. С. Герасимчук, Г. С. Васильченко, В. І. Кравцов. - К.: Книги України ЛТД, 2009. - 578 с.
4. Дюженкова Л.І. Вища математика: Приклади і задачі. Посібник./ Дюженкова Л.І. Дюженкова О.Ю., Михалін Г.О. - Київ: Видавничий центр «Академія». 2012. С. 624.
5. Алексеева І. В. Математика в технічному університеті: Підручник / І. В. Алексеева, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова; за ред. О. І. Клесова; КПІ ім. Ігоря Сікорського. — Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. — Т. 1. — 496 с.
6. Алексеева І. В. Математика в технічному університеті: Підручник / І. В. Алексеева, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова; за ред. О. І. Клесова; КПІ ім. Ігоря Сікорського. — Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. — Т. 2. — 504 с.

ЗМІСТ

Вступ	3
Розділ 1. Елементи лінійної алгебри	
§1. Визначники	4
§2. Матриці	6
§3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь	11
§4. Власні числа та власні вектори матриці	17
Розділ 2. Аналітична геометрія	
§1. Вектори	19
§2. Ділення відрізка у заданому відношенні	24
§3. Лінії першого порядку	25
§4. Криві другого порядку	29
§5. Площина	32
§6. Рівняння прямої у просторі	36
Розділ 3. Теорія границь	
§1. Границя послідовності та границя функції в точці	39
§2. Дослідження на неперервність функції	45
Розділ 4. Похідні та диференціали	
§1. Правила диференціювання	48
§2. Застосування похідної	53
§3. Диференціал функції та його застосування до наближеного обчислення значення функції	67
Рекомендована література	71

